

المدة الممنوحة : 90 دقيقة

مستوى : ثالثة متوسط (3 م 3, 2, 1 - فوج 01)

الفرض المدروس لالفصل الثاني في مادة الرياضيات.

تاريخ اجتياز الفرض : 04 ماي 2021

السنة الدراسية : 2020-2021

- ملاحظتان مهمتان ! • يُسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية غير المبرمجة.
- يكتب بخط واضح ومفروء على ورقة التحرير اسم ونسبة المرشح (ة) بالحروف العربية.

التمرين الأول : (08 نقاط)

- عزيزي النجيب، تأمل قليلاً في المعادلة (\mathcal{E}_t) المعرفة على الصيغة التالية :

$$3t - 4 = -2t + 26 \quad (\mathcal{E}_t)$$

- حسب معلوماتك السابقة، حل المعادلة (\mathcal{E}_t), مع توضيح طريقة حلك بالتفصيل.

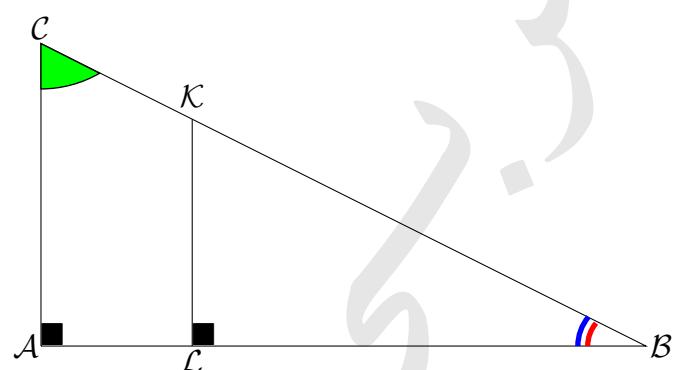
■ يرمز x إلى عدد صحيح.

• نعم إثبات أنّ :

$$(3x - 4)(2x + 3) = (3x - 2)(x + 6) + 3x(x - 5) \quad (\mathcal{E}_x)$$

1. أُنشر وبسّط العبارة $\mathcal{A} = (3x - 4)(2x + 3)$.2. أُنشر وبسّط العبارة $\mathcal{B} = (3x - 2)(x + 6) + 3x(x - 5)$.3. أحسب قيمة العبارة \mathcal{A} من أجل $x = -1$ ، مرّة باستعمال العبارة الأصلية ومرّة أخرى باستعمال العبارة المبسطة.

ما زلت تلاحظ؟.

4. تتحقق من أنّ ناتجي \mathcal{A} و \mathcal{B} متساويان.**التمرين الثاني : (08 نقاط)**■ تأمل الرسم المقابل (الرسم غير مرسوم بالأطوال الحقيقية) ، ثم $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية في A حيث :1. أحسب طول الضلع $[LK]$.2. أحسب قيمة مقرّبة إلى الجزء من المائة لطول الضلع $[BC]$.3. أحسب قيمة مقرّبة إلى الجزء من المائة لقياس الزاوية \widehat{B} .4. بطريقتين مختلفتين، أعط قيمة مقرّبة إلى 0,01 لقياس الزاوية \widehat{C} .**التمرين الثالث : (04 نقاط)**

■ عمر أب هو 64 سنة وعمر ابنه 18 سنة.

• بعد كم سنة يصبح عمر الأب ثلاثة أمثال عمر ابنه؟.

التمرين الرابع : (50 نقاط إضافية)

ـ تنبئه!!! على المترجع أن يعالج مشكلة واحدا فقط ـ

◀ المشكل الأول :

- ليكن ABC مثلثاً قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .
- 1. إذا علمت أن $BC = BH + HC$. أثبت العلاقة التالية، $(BH^2 + HC^2 + 2BH \times HC) = BC^2$.
- 2. برهن صحة المساويتين التاليتين : $CH^2 = AC^2 - AH^2$ و $BH^2 = AB^2 - AH^2$.
- 3. حسب ما سبق، استنتج المساواة الموجلة : $AH^2 = HB \times HC$.

◀ المشكل الثاني :

- لدينا قطعٌ مستقيم $[OE]$ و $[OF]$ طولهما على التوالي α و β حيث : $\alpha < \beta$ عديدين طبيعيين غير معدومين.
- ـ اقترح طريقة رياضية لرسم قطعة مستقيم طولها $\sqrt{\alpha\beta}$.

◀ المشكل الثالث :

- ABC مثلث قائم الزاوية في A ، سنشير بالرمز التالي S_{ABC} إلى مساحة المثلث.
- 1. أثبت صحة العلاقة التالية : $S_{ABC} < \frac{BC^2}{4}$.
- 2. متى تحدث المساواة؟ (أقصد صحة العلاقة : $S_{ABC} = \frac{BC^2}{4}$).

◀ المشكل الرابع :

- في متجر لبيع باقات الزهور، تم في الصباح بيع $\frac{2}{3}$ من مجموع الباقيات المتوفرة، ثم بيعت بعد الزوال $\frac{1}{2}$ من ما تبقى.
- إذا علمت أن 337 باقات لم تبع.
- ـ أوجد العدد الأصلي للباقيات.

◀ المشكل الخامس :

- خُصّص معمل أدوية 12 عبوة لتعبئة إنتاجها من أقراص معالجة مرض السكري.
- ـ قالت العاملة :

- ـ جرّبت تعبئة الأقراص في 10 عبوات، فزاد 15 قرصاً.
- ـ ملء جميع العبوات ينقص 35 قرصاً.
- 1. أصحّح أن سعة العبوة هي 20 قرصاً؟ 30 قرصاً؟.
- ـ يرمز x إلى سعة العبوة الواحدة.
- 2. غير بطريقتين مختلفتين عن عدد الأقراص التي أنتجها المعمل.
- 3. أكتب المعادلة التي تعبر عن مضمون نص المسألة ثم حلها.
- 4. ما سعة كل عبوة من العبوات الخمسة لتلك الأقراص؟.
- 5. ما عدد الأقراص التي أنتجها المعمل.

التصحيح التفصيلي للفرض المدروس للفصل الثاني هادة الرياضيات.

حل التمارين الأولى : (08 نقاط)

حل المعادلة (E_t) بالتفصيل :

قبل أن نطرق في حل هذا السؤال، نذكر بكيفية حل معادلة من الدرجة الأولى ومحبولي واحد. لهذا الغرض، نتبع المراحل التالية :

- نقل كل الحدود التي تشمل المجهول t في الطرف الأيسر للمعادلة.
- نقل كل الحدود التي لا تتضمن المجهول t في الطرف الأيمن للمعادلة.
- حساب قيمة المجهول t .

$$\text{لدينا : } \underbrace{3t + 2t}_{=5t} - 4 = \underbrace{-2t + 2t}_{=0} + 26 \text{ فنتحصل على ما يلي : } 3t - 4 = -2t + 26$$

$$\text{وهذا ما يكفي العلاقة : } 5t - 4 + \underbrace{4}_{=0} = +26 + \underbrace{4}_{=30} \text{ لطفي العلاقة الأخيرة، فنجد : } 5t = +26 + 4$$

وعليه : $5t = 30$ أي : $\frac{5t}{5} = \frac{30}{5}$ وأخيراً تحصل على أن : $t = 6$

1. نشر وتبسيط العبارة : $A = (3x - 4)(2x + 3)$

- ننشر ونبسط الجداءات ثم نبسط المجموع الجبري.
- نرتّب عبارة المجموع حسب قوى x تنازلياً.

$$A = (3x - 4)(2x + 3)$$

$$A = 3x(2x + 3) - 4(2x + 3)$$

$$A = 3x \times 2x + 3x \times 3 - 4 \times 2x - 4 \times 3$$

$$A = 6x^2 + \underbrace{9x - 8x}_{(9-8)x=x} - 12$$

$$A = 6x^2 + x - 12$$

2. نشر وتبسيط العبارة : $B = (3x - 2)(x + 6) + 3x(x - 5)$

طبق الخاصية التوزيعية ونبسط الجداءات ثم نبسط المجهول الجبري.

$$B = 3x(x + 6) - 2(x + 6) + 3x(x - 5)$$

$$B = 3x \times x + 3x \times 6 - 2x - 2 \times 6 + 3x \times x - 3x \times 5$$

$$B = 3x^2 + 18x - 2x - 12 + 3x^2 - 15x$$

$$B = (3 + 3)x^2 + (18 - 2 - 15)x - 12$$

$$B = 6x^2 + x - 12$$

3. حساب قيمة العبارة A وهذا من أجل :

باستعمال العبارة الأصلية :

نعرض x بالعدد -1 في العلاقة $(A = (3x - 4)(2x + 3))$ ، فنجد :

$$A = (3 \times (-1) - 4)(2 \times (-1) + 3) = -7 \times 1 = -7$$

بـ باستعمال العبارة المبسطة :

نفرض x بالعدد 1 في العلاقة $6 - 1^2 - 1 - 12 = 6 - 1 - 12 = -7$ فنجد : $6x^2 + x - 12 = -7$
نلاحظ أن من أجل $x = -1$ فإن للعبارتين نفس القيمة، ومنه أن يكونا متساوين.

4. التتحقق من أن ناتجي A و B متساويان :

حسب ما فات، لدينا : $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ من هذا يمكن الحكم على أن $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ حمل التعميرين الثانيي : (8 نقاط)

1. حساب طول الضلع $[LK]$

$\mathcal{L} \in (\mathcal{AB})$ مثلث فيه $\mathcal{K} \in (\mathcal{BC})$ و $\mathcal{L} \in (\mathcal{AC})$ إذن حسب نظرية طالس :

$$\frac{\mathcal{BL}}{\mathcal{BA}} = \frac{\mathcal{BK}}{\mathcal{BC}} = \frac{\mathcal{LK}}{\mathcal{AC}}$$

بالتعويض : $\mathcal{LK} = 2,5\text{cm}$: $\mathcal{LK} = \frac{10 \times 3}{12}$ ومنه نجد أن $\mathcal{LK} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}\text{cm}$

2. حساب الطول $: BC$

بما أن \mathcal{ABC} مثلث قائم في \mathcal{A} ، حسب خاصية فيثاغورس، نجد :

$$\mathcal{BC}^2 = \mathcal{AB}^2 + \mathcal{AC}^2$$

$$\mathcal{BC}^2 = 12^2 + 3^2$$

$$\mathcal{BC}^2 = 144 + 9$$

$$\mathcal{BC}^2 = 153$$

$$\sqrt{\mathcal{BC}^2} = \mathcal{BC} = \sqrt{153}$$

$$\mathcal{BC} \approx 12,37$$

إذن : $\mathcal{BC} = \sqrt{153} \approx 12,37\text{cm}$

3. حساب قيس الزاوية $: \widehat{B}$

بما أن المثلث \mathcal{ABC} قائم في \mathcal{A} . ونعلم أيضاً : جيب تمام زاوية حادة = طول الضلع المجاور لهذه الزاوية ÷ طول الوتر.

$$\cos \widehat{B} = \frac{\mathcal{AB}}{\mathcal{BC}}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{12}{\sqrt{153}}$$

$$\cos \widehat{B} = 0,9701425$$

معني آخر :

باستعمال الآلة الحاسبة (عزيزى الحاذق تأكيد بأن الآلة الحاسبة الخاصة بك على الوضع DEG).
الآن، نجد : $\mathcal{B} \approx 14,04^\circ$

4. بطرificتين مختلفتين، حساب قيس الزاوية \widehat{C} :**طريقة أولى :**

تذكير مهم : سبق لك أن لاحظت أن "مجموع أقياس الزوايا الداخلية لمثلث هو 180° ".
وعليه : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ وبالتالي : $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}$.

حسب ما فات، نجد أنّ : $\hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 14,04^\circ = 75,96^\circ$. وأخيراً ... نجد : $\hat{C} = 75,96^\circ$.

طريقة ثانية :

بما أنّ المثلث ABC قائم الزاوية في A ، وعليه :

$$\begin{aligned}\cos \hat{C} &= \frac{AC}{BC} \\ \cos \hat{C} &= \frac{3}{\sqrt{153}} \\ \cos \hat{C} &\simeq 0,242535625\end{aligned}$$

باستعمال الآلة الحاسبة، نجد القيمة التقريرية للزاوية \hat{C} . إذن : $\hat{C} = 75,96^\circ$.

حل التمارين الثالثة : (04 نقاط)

نفرض أن عدد السنوات هو x يُصبح عمر الأب $x + 64$ وعمر ابنه 18 ، بعد ترجمة معطيات نص التمرين، فنتحصل على المعادلة الموالية :

$$x + 64 = 3(x + 18)$$

$$x + 64 = 3x + 54$$

$$64 - 54 = 3x - x$$

$$10 = 2x$$

$$\frac{10}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$5 = x$$

عدد السنوات هو : 5 .

حل التمارين الرابع : (05 نقاط إضافية)

حل المشكل الأول :

1. إثبات العلاقة $: BC^2 = (BH^2 + HC^2 + 2BH \times HC)$

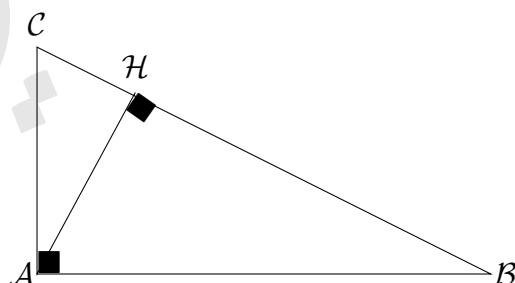
عملاً بمعطيات نص المشكل الأول، فنجد أنّ : $BC = BH + HC$. بالتربيع طرفي العلاقة السابقة، فنتحصل على $BC^2 = BH^2 + 2BH \times HC + HC^2$ وهذا ما يعني أنّ : $BC^2 = (BH + HC)^2$.

2. برهان صحة المساويتين $: CH^2 = AC^2 - AH^2$ و $BH^2 = AB^2 - AH^2$

يتضح من معطيات نص المشكل، أنّ AHB مثلث قائم الزاوية في H . من هذا يمكننا أن نطبق خاصية فيتاغورس المباشرة على المثلث AHB . إذن : $AB^2 = AH^2 + HB^2$ ومنه :

بما أنّ AHC مثلث قائم الزاوية في H . من هذا يمكننا أن نطبق خاصية فيتاغورس المباشرة على المثلث AHC .

إذن : $AC^2 = AH^2 + HC^2$ ومنه : $AC^2 = AH^2 - CH^2$.



3. استنتاج المساواة :

حسب ما سبق، لدينا العلاقات التالية

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 \quad HB^2 = AB^2 - AH^2 \quad BC^2 = BH^2 + 2BH \times HC + HC^2$$

$$BC^2 = BH^2 + 2BH \times HC + HC^2$$

$$BC^2 = (AB^2 - AH^2) + 2BH \times HC + (AC^2 - AH^2)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH^2 + 2HB \times HC$$

ولو تأملنا قليلاً - ولدي الحبيب - في المثلث ABC فنجده مثلثاً قائماً في A (من المعطيات) وبعد تطبيق خاصية فيتاغورس

$$BC^2 = BC^2 - 2AH^2 + 2HB \times HC \quad \text{وعليه: } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

وهذا ما يلزم أن يكون: $2AH^2 = 2HB \times HC$ وبعبارة أجمل وأروع: $AH^2 = HB \times HC$.

◀ حل المشكل الثاني :

1. اقتراح طريقة رياضية لإنشاء قطعة مستقيم طولها $\sqrt{\alpha\beta}$

نعتبر ثالث نقاط B ، C و H على استقامة واحدة، بحيث: $HC = \beta$ و $HB = \alpha$

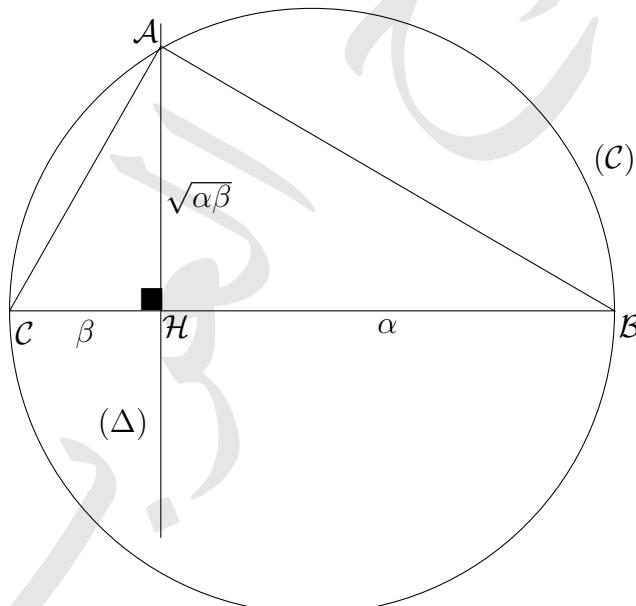
(C) الدائرة التي قطراها $[BC]$ و (Δ) المستقيم العمودي على (BC) في النقطة H .

لتكن A إحدى نقطي تقاطع (Δ) و (C).

النقطة A تنتمي إلى الدائرة (C) التي قطراها $[BC]$ وبالتالي فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

لدينا (Δ) عمودي على (BC) في النقطة H وهذا يوحي أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

وبحسب المشكل الأول نجد أن $AH^2 = HB \times HC$ وهذا ما يعني: $AH^2 = \alpha\beta$ وعليه:



◀ حل المشكل الثالث :

1. إثبات صحة العلاقة :

$$S_{ABC} < \frac{BC^2}{4}$$

تذكير مهم: مساحة المثلث = (القاعدة × الارتفاع) ÷ 2.

من خلال التذكير السابق، نجد أن $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$ (تذكّر - عزيزي الشطورو - أن ABC مثلث قائم في A). إذن:

$$2S_{ABC} = AB \times AC \quad (1)$$

هذا من ناحية أولى، ومن ناحية ثانية، لدينا : ABC مثلث قائم الزاوية في A إذن حسب خاصية فيتاغورس المباشرة، لدينا العلاقة الموجلة الموالية $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC$ وعليه : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC > 0$ وهذا يكفي العبارة (2) حيث :

$$BC^2 > 2AB \times AC \quad (2)$$

نستنتج من خلال العبارتين (1) و (2) ما يلي : $BC^2 > 2 \times 2S_{ABC}$ أي :

$$S_{ABC} < \frac{BC^2}{4}$$

وأخيراً نجد العبارة المرجوة :

$$S_{ABC} = \frac{BC^2}{4} \quad 2.$$

تحدد المساواة إذا تحقق الشرط التالي $AB = AC$ وهذا يعني أن ABC مثلث قائم ومتتساوي الساقين في A .

◀ حل المشكل الرابع :

لتريض مشكل يتطلب منا بالمرور على المراحل التالية :

- اختيار المجهول، ولتكن على سبيل الحظ ! α .
- ترجمة كل المعطيات الواردة في النص بدلاله α .
- إيجاد معادلة مناسبة تعبر عن المشكل المطروح علينا.
- حل المعادلة المستخرجة.
- التصریح بالحل.
- التتحقق من صحة النتيجة بالعودة إلى نص المشكل.

▪ إيجاد العدد الأصلي للباقيات :

ليكن α : هو العدد الأصلي للباقيات.

$\frac{2}{3}\alpha$: عدد الباقيات التي بيعت في الفترة الصباحية.

$\frac{1}{3}\alpha$: عدد الباقيات المتبقية من الفترة الصباحية.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{6}\alpha$: عدد الباقيات التي بيعت بعد الزوال.

337 : عدد الباقيات التي لم تبع.

□ صياغة المعادلة :

$$\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{6}\alpha + 337 = \alpha$$

□ حل المعادلة :

لدينا : $\frac{4}{6}\alpha + \frac{1}{6}\alpha + 337 = \alpha$ نقوم بتوحيد المقامات للكسرتين $\frac{2}{3}\alpha$ و $\frac{1}{6}\alpha$ إذن :

ومنع : $337 = \frac{6-5}{6}\alpha = \frac{1}{6}\alpha$ وبالتالي :

إذن : $2022 = \alpha$. العدد الأصلي للباقيات هو : 2022 باقة.

1. أَصْحَىجَ أَنْ سُعَةَ الْعَبْوَةِ هِيَ 20 قرضاً؟ 30 قرضاً؟ :

- لنفترض أن سعة العبوة 20 قرضاً.
- في الحالة الأولى عدد الأقراص هي : $215 = 10 + 15 \times 20$ قرضاً.
- في الحالة الثانية عدد الأقراص هي : $205 = 12 \times 35 - 20$ قرضاً.
- عدد الأقراص اختلف في الحالتين، وهذا ما يعني أن عدد الأقراص ليس 20 قرضاً.
- بأسلوب مماثل لنثبت أن عدد الأقراص ليس 30 قرضاً.
- لنفترض أن سعة العبوة 30 قرضاً.
- في الحالة الأولى عدد الأقراص هي : $315 = 10 + 15 \times 30$ قرضاً.
- في الحالة الثانية عدد الأقراص هي : $325 = 12 \times 30 - 35$ قرضاً.
- عدد الأقراص اختلف في الحالتين، وهذا ما يعني أن عدد الأقراص ليس 30 قرضاً.

2. التعبير بطرقين مختلفتين عن عدد الأقراص التي أنجبها المعلم :

• طريقة أولى : $10x + 15$. طريقة ثانية : $35 - 12x$. (حيث x : سعة العبوة الواحدة.)

3. كتابة المعادلة التي تعبّر عن مضمون نص المسألة، وحلها :

تظهر جلياً المعادلة التي تعبّر عن مضمون نص المسألة $10x + 15 = 35 - 12x$.
حل المعادلة السابقة :

$$10x + 15 = 35 - 12x$$

$$10x - 12x = -35 + 15$$

$$(10 - 12)x = -(35 + 15)$$

$$-2x = -50$$

$$x = 25$$

4. سعة كل عبوة من العبوات المخصصة لتلك الأقراص :

سعة كل عبوة من العبوات المخصصة لتلك الأقراص : 25 قرضاً.

5. عدد الأقراص التي أنجبها المعلم :

عدد الأقراص التي أنجبها المعلم : $265 = 10 + 15 \times 25$ قرضاً.

"انتهى حل هذا الفرض -بفضل الله تعالى-، ويليها التطبيقات الإضافية وهي جميلة جداً ستترکها للقارئ الحلو والحلول ستكون في صفحتنا عبر الفيس بوك -إن شاء الله-".

*** وفقنا الله وإياكم ***