مذكرة : رقم 01

ثانوية: أول نوفمبر 1954
المستوى: 3 ع ت – 3 تقني- 3 رياضي

المحور: المتتاليات العددية
الموضوع: توليد متتالية عددية

الأستاذة: يماني ليلى
المدة: ساعة واحدة.

الكفاءات المستهدفة :ـ توليد متتالية عددية.

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات

نشاط:

نعتبر الدالة v المعرفة كما يلي :

$$v:\mathbb{N} \to \mathfrak{R}$$
$$n \mapsto \frac{1}{n+1} - n$$

10 د

أحسب $v(0)$ ، $v(1)$ ، $v(2)$ ، $v(10)$.

1) مفهوم المتتالية :

تعريف :

متتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0 معطى العدد $u(n)$

10 د

ونكتب: $u:\mathbb{N} \to \mathfrak{R}$
$$n \mapsto u(n)$$

ترميز :

ـ نرمز لصورة n بالمتتالية u بالرمز u_n بدلا من الرمز $u(n)$ هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل، ويسمى كذلك u_n الحد العام .

ـ نرمز للمتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n)

ـ نرمز للمتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالرمز $(u_n)_{n\geq 1}$

ـ وفي الحالة العامة إذا كان $n \geq n_0$ فإن الرمز يكون بالشكل $(u_n)_{n\geq n_0}$

ـ الأعداد u_0 ، u_1 ، u_2 ،.....هي صور الأعداد 0، 1، 2....بالمتتالية u ، وتسمى حدود للمتتالية (u_n).

ملاحظة : **لابد من التمييز بين متتالية (u_n)** وبين حدها العام u_n الذي هو عدد حقيقي .

2) طرق توليد (تعريف) متتالية عددية :

أـ تعريف متتالية بالحد العام :

يمكن التعبير عن الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ باستعمال دالة f بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[n_0;+\infty[$

	مثال 1 : (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $u_n=7n^2-3$ 1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_{10} ، u_{2025}. 2) أحسب بدلالة n الحدين u_{n+1} و u_{n^2} **مثال 2 :** (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية معرفة بعبارات الحد العام لها على التوالي كما يلي : $u_n=-n^2+2n-1$ ، $v_n=\frac{3}{n-4}$ ، $w_n=\sqrt{2n-5}$ 1) أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتاليات الثلاثة السابقة. 2) أحسب u_{100} ، v_{100} ، w_{100} ، محددا رتبة كل حد منها. 3) هل العدد (81 -) حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ **ب - تعريف متتالية بعلاقة تراجعية :** يمكن التعبير عن الحد العام للمتتالية $(U_n)_{n\ge n_0}$ باستعمال دالة f بعلاقة من الشكل $U_n=f(n)$ وبإعطاء حدها الأول u_{n_0}. **مثال 1 :** (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بحدها الأول $u_0=5$ ، وبالعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=2u_n-3$ أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 . **مثال 2 :** (v_n) متتالية عددية معرفة على IN^* بحدها الأول $v_1=10$ ، وبالعلاقة التراجعية : $v_{n+1}=\frac{-v_n+2}{v_n^2+1}$. أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 .	20 د 10 د 10 د	
الوسائل المستعملة	الكتاب المدرسي		

الأستاذة: يماني ليلى

مذكرة : رقم 02

ثانوية: أول نوفمبر 1954 المستوى: 3 ع ت – 3 تقني- 3 ر	المحور: المتتاليات العددية الموضوع: التمثيل البياني لمتتالية عددية	الأستاذة: يماني ليلى المدة: ساعة واحدة.

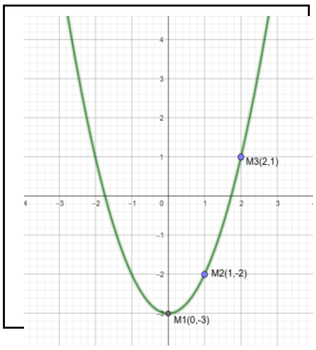
الكفاءات المستهدفة :- التمثيل البياني لمتتالية عددية .

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات

1) متتالية معرفة بالحد العام :

نشاط:

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ : $V_n = n^2 - 3$



20 د

ملاحظة :

التمثيل البياني لمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

مع : $u_n = f(n)$ هو مجموعة النقط $M_n(n;u_n)$

أي : $M_n(n;f(n))$ من المستوي، حيث f دالة معرفة على المجال $[n_0;+\infty[$

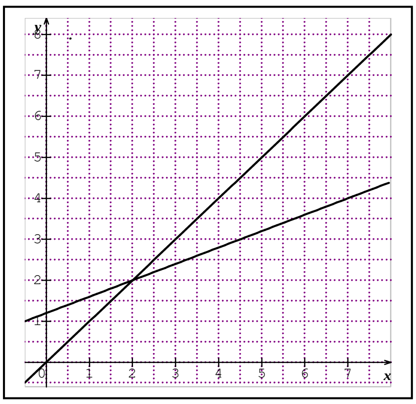
2) متتالية معرفةبعلاقة تراجعية و بحدها الأول الأول:

مثال 1 :

(u_n) متتالية عددية معرفة على IN كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 6}{5} \end{cases}$. f دالتها المرفقة والمعرفة على المجال: $[0;+\infty[$. (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ و $(\Delta): y = x$ المنصف الأول كما هو موضح في الشكل أدناه.

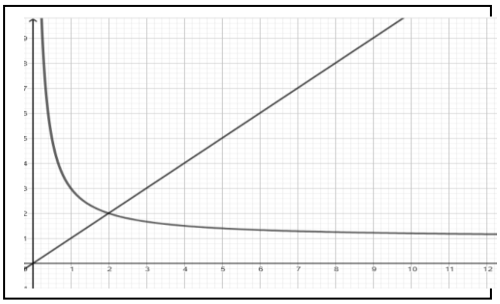
20 د

1. مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها.
2. أحسب الحدود السابقة، ثم قارنها مع تمثيلاتها السابقة.



مثال 2 :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول : $u_0 = 1$ ، وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \dfrac{2 + u_n}{u_n}$.

	f دالة معرفة على المجال: $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2+x}{x}$ ، (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ و (Δ) المستقيم الذي $y=x$ معادلة له. مثل الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 دون حسابها، مبينا أثر الرسم. 	20 د	
الوسائل المستعملة	الكتاب المدرسي، الوسائل الهندسية		

الأستاذة: يماني ليلى

مذكرة : رقم 03

ثانوية: أول نوفمبر 1954 المستوى: 3 ع ت- 3 تقني – 3 ر	المحور: المتتاليات العددية الموضوع: خواص المتتاليات	الأستاذة: يماني ليلى المدة: 3 ساعات

الكفاءات المستهدفة :- دراسة سلوك ونهاية متتالية .

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات
	1) اتجاه تغير متتالية : **نشاط :** (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN : بـ $u_n = n^2$ و $v_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. **1- أحسب كلا من u_0 ، u_1 ، u_3 ثم v_0 ، v_1 ، v_2** **2- أدرس إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ ، وذلك من أجل كل عدد طبيعي n** **ماذا تستنتج ؟**	10 د	تعطى فرصة للتلاميذ ويتم مناقشة الحل على السبورة
	اتجاه تغير متتالية : (u_n) متتالية عددية معرفة على IN . - لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فيكون : 1) $u_{n+1} - u_n > 0$ معناه (u_n) متزايدة تماما على IN. 2) $u_{n+1} - u_n < 0$ معناه (u_n) متناقصة تماما على IN. 3) $u_{n+1} - u_n = 0$ معناه (u_n) ثابتة على IN. - نقول أن (u_n) رتيبة تماما يعني أنها متزايدة تماما أو متناقصة تماما.	10 د	
	ملاحظة 1: **1) توجد متتاليات ليست متزايدة وليست متناقصة فهي ليست رتيبة.** فمثلا المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـ : $u_n = (-2)^n$ ليست رتيبة . **2) تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا وجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل عدد طبيعي n :** $u_n = k$ فمثلا المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـ : $u_n = 6$ هي متتالية رتيبة . **مثال 1 :**	10 د	

يقوم التلاميذ بحل الأمثلة ويتم مناقشة الحلول على السبورة

عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) فيما يلي :

(1 $u_n=(n-1)^2$ ، $n\in\mathbb{N}^*$.

(2 $u_n=8-3n$ ، $n\in\mathbb{N}$.

(3 $u_n=5$ ، $n\in\mathbb{N}$.

(4 $u_n=(-1)^n$ ، $n\in\mathbb{N}$.

مثال 2 :

10 د

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_0=\beta \\ 4v_{n+1}=v_n+9 \end{cases}$$

عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) ثابتتين.

ملاحظة 2: طرائق تعيين اتجاه تغير متتالية :

ـ لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) نستعمل إحدى الطرق :

- ✓ دراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.
- ✓ نقارن بين $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ والعدد 1، في حالة المتتالية (u_n) من إشارة ثابتة. (10 د)
- ✓ ندرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ في حالة متتالية حدها العام $u_n=f(n)$ ندرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ في حالة متتالية حدها العام

مثال تطبيقي 1:

(u_n) متتالية عددية معرفة على IN بـ: $u_n=\dfrac{3^n}{n+2}$

10 د

1- أحسب كلا من : u_0 ، u_1 ، u_3 .

2- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3-أدرس على IN إشارة الفرق $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1$ ، مستنتجا اتجاه تغير المتتالية (u_n)

مثال تطبيقي 2:

(u_n) متتالية عددية معرفة على IN بـ: $u_n=f(n)$ ، مع f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بالشكل $f(x)=e^{2x+1}$

1- تعيين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

2- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) المتتالية المحدودة :

نشاط:

(v_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $v_n=\dfrac{1}{n+1}$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_n - 1 \leq 0$.

2) ماذا يمكن القول عن المتتالية (v_n)؟

تعريف :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية معرفة .

1) القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي α حيث من أجل كل عدد طبيعي n مع $n \geq n_0$: $u_n \geq \alpha$.

2) القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي β حيث من أجل كل عدد طبيعي n مع $n \geq n_0$: $u_n \leq \beta$.

3) (u_n) متتالية محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

ملاحظة: طرق إثبات محدودية متتالية

- لإثبات أن (u_n) متتالية محدودة (من الأعلى ومن الأسفل) بالعدد الحقيقي α يمكن :

- ✓ ندرس إشارة الفرق $u_n - \alpha$ من أجل كل n من IN
- ✓ يمكن الإستفادة من محدودية الدالة المرفقة f للمتتالية (u_n) شرط أن تكون معرفة بالشكل $u_n = f(n)$.
- ✓ يمكن استعمال البرهان بالتراجع . (سيدرس لاحقا)

مثال 1 :

(u_n) متتالية معرفة على IN^* بـ : $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$

لنبين أنه من أجل كل n من IN^* فإن : $1 \leq u_n \leq 2$ بطريقتين مختلفتين.

مثال 2 :

(v_n) متتالية معرفة على IN بـ : $v_n = f(n)$ ، حيث f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة $f(x) = e^{-x}$

لنبين أن : (v_n) متتالية محدودة من الأعلى بالعدد **1** ومن الأسفل بـ **0**.

3) تقارب متتالية :

تعريف :

(u_n) متتالية عددية معرفة و l عدد حقيقي.

(u_n) متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي l معناه $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = l$

ملاحظات :

- إذا كانت (u_n) تقبل نهاية فهي وحيدة .
- جميع المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات الخاصة بالدوال تبقى صحيحة بالنسبة للمتتاليات .
- إذا لم تكن المتتالية (u_n) متقاربة نقول عنها أنها متباعدة (أي

$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$ ، أو $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = -\infty$ أو $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n$ غير موجودة)

أمثلة:

دراسة تقارب المتتالية (u_n) المعرفة على IN ، في الحالات التالية:

(1 $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$

(2 $u_n = \ln(n) - n$ **حيث :** $n \in IN^*$

(3 $u_n = (-1)^n$

خاصية :

يمثل l **عددا حقيقيا أو** $-\infty$ أو $+\infty$ ، (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[\alpha; +\infty[$
مع α عدد حقيقي موجب.
إذا كانت $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = l$

ملاحظة :

عكس هذه الخاصية ليس صحيح.

مثال:

f **دالة معرفة على** $[0; +\infty[$ **بـ :** $f(x) = \frac{x(1+\sin(2x\pi))}{x+1}$

نضع من أجل كل n **من** IN **:** $u_n = f(n)$ **إذن :** $u_n = \frac{n}{n+1}$

وبالتالي : $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 1$ **لكن** $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$ **غير موجودة.**

4) الرتابة و التقارب :

مبرهنة :

1) إذا كانت متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فإن هذه المتتالية متقاربة.
2) إذا كانت متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فإن هذه المتتالية

ملاحظة :

تسمح هذه المبرهنة بإثبات تقارب متتالية ولكن لا تعطي النهاية.

مثال تطبيقي :

(v_n) **متتالية معرفة على** IN **بـ:** $v_n = 4 - \frac{1}{n+3}$

-1 عين اتجاه تغير المتتالية (v_n).

-2 بين أن (v_n) **متتالية محدودة من الأعلى بالعدد 4**

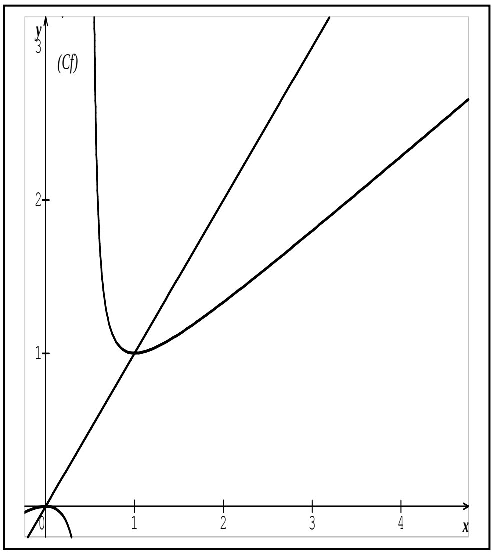
-3 برّر بطريقتين مختلفتين أن المتتالية (v_n) **متقاربة.**

تطبيق : استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية

f دالة عددية معرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$. (C_f) تمثيلها البياني الموضح في الشكل أدناه.

نعرف المتتالية (u_n) على IN كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$



1) بإستعمال (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = x$ مثل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) دون حسابها مع ترك أثر الرسم.

2) خمن سلوك المتتالية (u_n).

الوسائل المستعملة	وسائل الإنشاء الهندسية ، جو مناسب للدراسة		

مذكرة : رقم 04

ثانوية: 1954 أول نوفمبر المستوى: 3 ع ت – 3 تقني – 3 ر	المحور: المتتاليات العددية الموضوع: المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية.	الأستاذة: يماني ليلى المدة: ساعتان

الكفاءات المستهدفة :ـ التذكير بالمتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية من خلال أنشطة وتطبيقات عليها.

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات
	1) المتتالية الحسابية : **نشاط :** (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $u_n = 3n+1$ 1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 . 2) أحسب $u_1 - u_0$ ، $u_2 - u_1$ ، $u_3 - u_2$. ماذا تلاحظ ؟ 3) أحسب بدلالة n الحد u_{n+1} . 4) أحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n. **1) تعريف :** نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$ أي أنه : لإثبات أن (u_n) متتالية هي حسابية، يكفي أن نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n$ عدد حقيقي ثابت . **مثال1 :** (v_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $v_n = 2-n$ **مثال2 :** (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $u_n = 5n-3$ **ملاحظة :** في متتالية حسابية ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بإضافة عدد حقيقي ثابت هو أساس هذه المتتالية . **فمثلا:** الأعداد الطبيعية الزوجية هي حدود لمتتالية حسابية، أساسها 2، حدها الأول 0. **مثال3:** (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $u_n = n^2+1$	5 د 5 د	

- أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، ثم استنتج أن (u_n) ليست حسابية .

2) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية :

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p : $u_n = u_p + (n-p)r$ (العلاقة بين حدين)

10 د

حالة خاصة : $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n-1)r$

أمثلة :

1) (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 10$ ، وحدها الأول $u_0 = -3$

2) (v_n) متتالية حسابية معرفة على IN أساسها $r = -4$ بحيث :

$v_3 = 9$

3) (w_n) متتالية حسابية معرفة على IN مع $w_5 = 9$ و $w_{10} = 19$

✓ حساب الأساس

✓ حساب الحد الأول w_0

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

خاصية 1 :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية و كان :

$S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

فإن : $S = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

وبصفة عامة :

S = عدد الحدود/2 (الحد الأول + الحد الأخير)

10 د

خاصية 2 :

عدد الحدود = دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول +1

مثال :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على IN بعبارة الحد العام لها كما يلي :

$u_n = 6 - 3n$

✓ لنحسب بدلالة n المجموعين التاليين :

$S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$S_2 = u_1 + u_2 + ... + u_n$

✓ لنحسب المجموعين التاليين :

$$S_3 = u_0 + u_1 + ... + u_{2025}$$

$$S_4 = u_{1445} + u_{1446} + ... + u_{2025}$$

4) الوسط الحسابي :

خاصية 3 :

> **تكون الأعداد** a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط
> إذا كان $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a ، c

مثال:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على IN بالعلاقة : $u_3 + u_1 = 6$

✓ **حساب** u_2

وإذا علمت أن $u_{10} + u_8 = 16$

✓ **حساب** u_9

- جد الأساس r للمتتالية (u_n).

10د

5) اتجاه تغير متتالية حسابية :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على IN ، حدها الأول u_0 وأساسها r.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = r$ ومنه :

- **إذا كان r سالبا تماما $(r < 0)$ فإن المتتالية متناقصة .**
- **إذا كان r موجب تماما $(r > 0)$ فإن المتتالية متزايدة .**
- **إذا كان r موجب $(r = 0)$ فإن المتتالية ثابتة .**

مثال : (u_n) متتالية حسابية معرفة على IN ، حدها الأول $u_0 = 3$ وأساسها $r = -5$.

ملاحظة :

المتتاليات الحسابية الغير ثابتة، دائما متباعدة.

تطبيق :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول : $u_0 = 2$، وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n}$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 3 + \dfrac{1}{u_n - 1}$

10 د

أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 ثم أحسب حدها الأول v_0

ب) أكتب v_n بدلالة n، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + 1$$

- هل المتتالية (u_n) متقاربة، برر. ج) أحسب المجموع S بدلالة n مع : $S=v_0+v_1+....+v_n$ **2) المتتالية الهندسية :** **نشاط:** (v_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $v_n=2\times3^n$ 1) أحسب v_0 ، v_1 ، v_2 ، v_3 . 2) أحسب $\frac{v_1}{v_0}$ ، $\frac{v_2}{v_1}$ ، $\frac{v_3}{v_2}$. ماذا تلاحظ ؟ 3) أحسب بدلالة n الحد v_{n+1} . 4) أحسب حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n.	10 د	
1) تعريف : نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q (q عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n\times q$ أي أنه : لإثبات أن (u_n) متتالية هندسية ، يكفي أن نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد حقيقي ثابت . **مثال1 :** (v_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $v_n=4\times5^n$ **مثال2 :** (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $u_n=-3\times7^n$ **ملاحظة :** في متتالية هندسية ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بالضرب في عدد حقيقي ثابت هو أساس هذه المتتالية . **فمثلا:** مضاعفات العدد 3 الغير معدومة هي حدود لمتتالية هندسية أساسها 3، حدها الأول 3. **مثال3 :** (v_n) متتالية عددية معرفة على IN بالعبارة : $v_n=5^n+n-1$ حساب v_0 ، v_1 ، v_2 ،ثم نستنتج أن (v_n) ليست حسابية وليست هندسية.	5 د	
2) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية : **خاصية 1 :** إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p : $u_n=u_p\times q^{n-p}$ (العلاقة بين حدين)	5 د	

حالة خاصة : $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

أمثلة :

2) (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 10$ ، وحدها الأول $u_0 = -3$

2) (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -4$ بحيث : $v_3 = 9$

1) (w_n) متتالية هندسية ، حدودها موجبة معرفة على IN مع

$w_4 = 70000$ و $w_6 = 7000000$

✓ حساب الأساس

✓ حساب الحد الأول w_0

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

خاصية 1 :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها $q \neq 1$ و كان :

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

فإن : $S = u_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ مع $q \neq 1$

وبصفة عامة :

S = الحد الأول ×(الأساس أس عدد الحدود - 1 /الأساس - 1)

10 د

مثال 1 :

(u_n) متتالية هندسية معرفة على IN بحدها الأول $u_0 = 9$ ، وبأساسها $q = 2$

✓ لنحسب بدلالة n المجموعين التاليين :

$$S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

$$S_2 = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

✓ لنحسب المجموعين التاليين :

$$S_3 = u_0 + u_1 + ... + u_{2025}$$

$$S_4 = u_{1445} + u_{1446} + ... + u_{2025}$$

حالة خاصة : إذا كان $q = 1$ وكان $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

فإن : $S = (n+1)u_0$ أي S = عدد الحدود × الحد الأول

مثال: $q = 1$ و $u_0 = 3$

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_{2025}$$

$$S' = u_1 + u_2 + ... + u_{100}$$

4) الوسط الهندسي :

خاصية 3 :

الأستاذة: يماني ليلى

10 د

تكون الأعداد الغير معدومة a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a ، c

مثال:

(u_n) **متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على IN بالعلاقة :** $u_3\times u_1=9$

✓ **حساب** u_2

✓ **إذا علمت أن** $u_2\times u_4=36$ ، **أحسب** u_3

✓ **استنتج أساس المتتالية** (u_n)

5) اتجاه تغير متتالية هندسية :

(v_n) **متتالية هندسية معرفة على IN أساسها** q **وحدها الأول** v_0.

لدينا : $v_n=v_0q^n$ **ومنه** $v_{n+1}=v_0q^{n+1}$ ، **ومنه من أجل كل عدد طبيعي** n

ومنه : $v_{n+1}-v_n=v_0q^n(q-1)$

1) إذا كان $v_0>0$ **و** $q>1$ **فإن** (v_n) **متزايدة تماما.**

2) إذا كان $v_0>0$ **و** $1>q>0$ **فإن** (v_n) **متناقصة تماما.**

3) إذا كان $v_0<0$ **و** $q>1$ **فإن** (v_n) **متناقصة تماما.**

4) إذا كان $v_0<0$ **و** $1>q>0$ **فإن** (v_n) **متزايدة تماما.**

5) إذا كان $q=1$ **فإن** (v_n) **ثابتة.**

6) إذا كان $q=0$ **تكون** (v_n) **معدومة إبتداء من الحد الثاني .**

7) إذا كان $q<0$ **فإن الفرق** $v_{n+1}-v_n$ **لا يحتفظ بإشارة ثابتة، ومنه** (v_n) **ليست رتيبة.**

مثال : (v_n) **متتالية هندسية معرفة على IN ، حدها الأول** $v_0=2$ **وأساسها** $q=\frac{1}{2}$.

6) نهاية متتالية هندسية :

(v_n) **متتالية هندسية أساسها** q **وحدها الأول** v_0 ، **إذن** $v_n=v_0\times q^n$

1) إذا كان $-1<q<1$ **: فإن** $\lim q^n=0$ **ومنه** $\lim v_n=0$

2) إذا كان $q=1$ **: فإن** $\lim q^n=1$ **ومنه** $\lim v_n=v_0$

3) إذا كان $q>1$ **: فإن** $\lim q^n=+\infty$ **وبالتالي:** $\lim v_n=\begin{cases}+\infty; v_0>0\\-\infty; v_0<0\end{cases}$

4) إذا كان $q\le -1$ **: فإن ليس للمتتالية** (v_n) **نهاية**

أمثلة: **دراسة تقارب المتتاليات** (u_n) **و** (v_n) **و** (w_n) **و** (t_n) **المعرفة على**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>(v_n) كما يلي :
$u_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، $v_n=(-3)\times(4)^n$ ، $w_n=2\times(-5)^n$ ، $t_n=\left(\frac{-1}{2}\right)\times\left(\frac{99}{100}\right)^n$
<u>تطبيق :</u>
(U_n) متتالية معرفة على IN كما يلي:
$\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=2U_n+1\end{cases}$.
1. أحسب قيمة الحدود التالية: $U_1\ ;U_2\ ;U_3$.
2. نضـــع:من أجل كل n من IN : $V_n=U_n+1$.
✓ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين
✓ أساسها وحدها الأول.
✓ أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج أستنتج U_n بدلالة n.
✓ أحسب نهايتين المتتاليتين (V_n) و (U_n).
✓ عين اتجاه تغير المتتاليتين (V_n) و (U_n).
✓ أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n=U_0+U_1+.......+U_n$.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>الوسائل المستعملة</td>
<td>جو مناسب</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

مذكرة : رقم 05

ثانوية: أول نوفمبر1954 المستوى: 3 ع ت- 3تقني- 3ر	المحور: الحساب الموضوع: اثبات خاصية بالتراجع	الأستاذة: يماني ليلى المدة: ثلاث ساعات

الكفاءات المستهدفة :- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع.

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات
	نشاط تمهيدي : التالي : نعتبر المجموع S_n عدد طبيعي. n مع $S_n = 0+1+2+.....+n$ 1) أحسب S_1 ، S_2 ، S_3 ، S_4. 2) عبر عن S_{n+1} بدلالة n. - لنثبت باستعمال البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $$0+1+2+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$ - نعتبر الخاصية $p(n)$ مع : $p(n):0+1+2+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$ - البرهان بالتراجع يعتمد على المرحلتين التاليتين : **1- مرحلة التأكد :** من أجل $n=0$ $$0=\frac{0(0+1)}{2}$$ ومنه $p(0)$ صحيحة، أي $p(n)$ صحيحة من أجل $n=0$. **2- مرحلة فرضية التراجع (الوراثة) :** نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي أن : $$0+1+2+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$ ونثبت أن $p(n+1)$ صحيحة، أي نثبت أن : $$0+1+2+.....+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ لدينا : من فرضية التراجع : $$0+1+2+.....+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$ بتوحيد المقامات نجد : $$0+1+2+.....+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$	30 د	

ومنه $p(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $p(n)$ صحيحة أي :

$$0+1+2+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

من أجل كل عدد طبيعي n

1- مبرهنة :

30 د

> **$p(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n ،** n_0 عدد طبيعي .
> للبرهان على صحة الخاصية $p(n)$ **من أجل كل عدد طبيعي** n أكبر أو يساوي n_0، يكفي أن :
> 1- نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $p(n_0)$
> 2- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0، أي نفرض صحة $p(n)$ (فرضية التراجع)،
> ونبرهن صحة الخاصية من أجل $(n+1)$

ملاحظات :

1- **لا يستعمل البرهان بالتراجع إلا في الخواص المتعلقة بالأعداد الطبيعية .**

2- **لايكون البرهان بالتراجع تاما إلا بالمرحلتين السابقتين، فرغم أن المرحلة الأولى تتمثل في عملية تحقق بسيطة إلا أنها تبقى ضرورية .**

2- أمثلة :

مثال 1 :

(u_n) **متتالية عددية معرفة على** $\mathbb{N}$ **بـ:** $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \end{cases}$.

30 د

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n **:** $u_n \geq \frac{1}{2}$

مثال 2 :

(v_n) **متتالية عددية معرفة بـ :** $v_0 = 4$ **ومن أجل كل عدد طبيعي n :**

$$v_{n+1} = 2v_n - 1$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n **:** $v_n = 3\times 2^n + 1$

تطبيق :

30 د

(u_n) **متتالية عددية معرفة على** $\mathbb{N}$ **بـ:**

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n **:** $0 < u_n < 4$

	2) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. **3) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر** **4) جد نـهاية المتتالية (u_n) .**	60 د	
الوسائل المستعملة	جو مناسب.		

الأستاذة: يماني ليلى

مذكرة : رقم 06

ثانوية: أول نوفمبر 1954 **المستوى: 3 ع ت – 3 تقني – 3 ر**	**المحور: المتتاليات العددية** **الموضوع:المتتاليتان المتجاورتان**	**الأستاذة: يماني ليلى** **المدة:ساعتان**

الكفاءات المستهدفة :- تعريف ومفهوم متتاليتين متجاورتين.

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات
	تعريف : **تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت وفقط إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة، والفرق بينهما يؤول إلى الصفر.** **مثال :** (u_n) **و** (v_n) **متتاليتان معرفتان على** IN **حيث :** $u_n = \frac{-2}{2n+1}$ **و** $v_n = \frac{1}{n+1}$ **لنبين أن** (u_n) **و** (v_n) **متتاليتان متجاورتان.** **مبرهنة :** إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متجاورتين فإنهما متقاربتان ولهما نفس النهاية. **مثال :** (u_n) **و** (v_n) **متتاليتان معرفتان على** $IN^* - \{1\}$ **كما يلي :** $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$ **و** $v_n = \frac{-2}{n}$ **- بين أن** (u_n) **و** (v_n) **متتاليتان متجاورتان.** **توجيه : تمرين محلول صفحة 17**		رسم توضيحي
الوسائل المستعملة	**الكتاب المدرسي، جو مناسب**		

الأستاذة: يماني ليلى