المحور 4

الإحتمالات

التمارين

التمرين 1 ★★★★★ الحل

في منزلي يوجد سلم يتكون من 17 درجة. لنزول هذا السلم، يمكنني في كل خطوة نزول درجة واحدة، أو درجتين، أو ثلاث درجات معاً. بكم طريقة مختلفة يمكنني نزول هذا السلم بالكامل؟

التمرين 2 ★★★★★ الحل

بكالوريا 2018 تقني رياضي-بتصرف

كيس به 5 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها 2 بيضاء و 3 خضراء. نسحب عشوائياً وفي آن واحد كرتين من الكيس.

I) أحسب إحتمال الحوادث التالية:

1. A: "سحب كرتين مختلفتين في اللون".
2. B: "سحب كرتين من نفس اللون".
3. C: "الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني".
4. D: "الحصول على كرة خضراء على الأقل".
5. E: "الحصول على كرة خضراء على الأكثر".

II نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب α ، (DA) حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

- إذا سحب كرتين بيضاويتين يتحصل على $100DA$.
- إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$.
- إذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α.

1. برر أن قيم X هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$ ثم عين قانون احتماله.
2. بين أن الأمل الرياضياتي هو: $E(X) = -\alpha + 40$.
3. استنتج أكبر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

III أعد الإجابة في حالة:

1. سحب كرتين على التوالي دون إرجاع.
2. سحب كرتين على التوالي مع الإرجاع

التمرين 3 ★★★★★ الحل

بكالوريا 2021 علوم تجريبية-بتصرف

I يراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين لهما نفس المهام من بين ثلاث رجال H_1 ، H_2 و H_3 وإمرأتان F_1 و F_2. نعتبر الحوادث A ، B و C حيث:

- A: "عضوا اللجنة من نفس الجنس".
- B: "عضوا اللجنة من جنسين مختلفين".
- C: "H_1 عضو في اللجنة".

1. انشئ مخططا توضح فيه مجموعة الإمكانيات.

2 أحسب $p(A)$ ، $p(B)$ وبين أن $p(C)=\frac{2}{5}$.

3 المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية إختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة.

- برر أن مجموعة قيم X هي $\{0,1,2\}$.
- عين قانون إحتمال المتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضياتي.

II يراد الآن تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين بمهام (الرئيس والنائب) من بين ثلاث رجال H_1 ، H_2 و H_3 وإمرأتان F_1 و F_2. أعد الإجابة على الأسئلة السابقة.

التمرين 4 ★★★★★ الحل

يحتوي صندوق على بطاقات متساوية الأبعاد: بطاقة تحمل الرقم 1، بطاقتان تحملان الرقم 2، وثلاث بطاقات تحمل الرقم 3. نسحب عشوائياً بطاقتين من الصندوق الواحدة تلو الأخرى مع إرجاع الأولى إلى الصندوق قبل سحب الثانية. نحصل على عدد مكون من رقمين حيث رقم الآحاد يمثل رقم البطاقة الثانية.

1 ضع مخططاً توضح فيه جميع الحالات الممكنة لهذه التجربة.

2 أحسب إحتمال الحوادث التالية:

- A: "العدد المتحصل عليه فردي".
- B: "الرقمان المكونان للعدد أوليان فيما بينهما".
- C: "مجموع الرقمين المكونين للعدد يساوي 4".

3 نعتبر اللعبة الآتية: يربح اللاعب 40 نقطة إذا تحصل على عدد يشمل رقمين زوجيين، يربح 10 نقاط إذا تحصل على عدد يشمل رقماً زوجياً بالضبط ويخسر 5 نقاط إذا تحصل على عدد لا يشمل رقماً زوجياً

- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إمكانية عدد النقاط المتحصل عليها.
- أ) عين قانون إحتمال المتغير العشوائي X.
- ب) أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$، هل المشاركة في هذه اللعبة هي لصالح اللاعب؟
- ج) أراد صاحب اللعبة إختيار عدد النقاط التي يخسرها اللاعب حتى تكون اللعبة عادلة، ساعده في إختياره.

التمرين 5 ★★★★★ الحل

I) نرمي مرة واحدة زهرة نرد مزيفة ذات أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4. نرمز بالرمز p_i لإحتمال ظهور الوجه ذي الرقم i، حيث $i\in\{1,2,3,4\}$. إذا علمت أن $p_1=\frac{1}{10}$ و $p_i=p_1+r(i-1)$ ، حيث $i\in\{1,2,3,4\}$ و r ثابت حقيقي.

- بيّن أن $r=\frac{1}{10}$ ، ثم استنتج p_2 ، p_3 و p_4.

II) نقترح اللعبة التالية: يدفع اللاعب k ديناراً، إذا ظهر رقم زوجي يربح دينارين اثنين، إذا ظهر الرقم 1 يربح ثمانية دنانير، أما إذا ظهر الرقم 3 فإنه يربح ثلاثة دنانير. نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية قيمة ما يربحه اللاعب أو يخسره.

1 ماهي قيم المتغير العشوائي X.

2 أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X.

3 عين قيمة k حتى تكون اللعبة عادلة.

4 إذا اعتبرنا $k=3$ هل اللعبة هي لصالح اللاعب؟ علّل.

التمرين 6 ★★★★★ الحل

يحتوي كيس على 4 قريصات مرقمة بـ: 2، 3، 6 و 9.
نسحب عشوائيا قريصة ثم نعيدها إلى الكيس ثم نسحب قريصة أخرى.

1 ضع مخططاً توضح فيه جميع الحالات الممكنة لهذه التجربة.

2 نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمين المسجلين على القريصتين المسحوبتين.

- أ) عين القيم الممكنة للمتغير X.
- ب) عرّف قانون الاحتمال للمتغير X.
- ج) أحسب الاحتمالات التالية: $p(X \geq 27)$ ، $p(X^2-10X+24=0)$ ، $p(X<9)$.

3 أعد نفس الأسئلة السابقة في حالة سحب قريصتين دفعة واحدة.

التمرين 7 ★★★★★ الحل

نعتبر $\Omega = \{-1;0;2;5;6;10\}$ ونعرف قانون الإحتمال على Ω كما في الجدول:

e_i	-1	0	2	5	6	10
p_i	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	a

1 عيّن العدد الحقيقي a.

2 أحسب الأمل الرياضياتي E لهذا القانون.

3 أحسب التباين V ثم الانحراف المعياري σ لهذا القانون.

التمرين 8 ★★★★★ الحل

$p(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$ كثير حدود للمتغير الحقيقي x.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(E) : p(x) = 0$ بالاستعانة بالمجهول المساعد $Y = x^2$.

II) نرمي زهرة نرد غير مزيفة وجوهها هي حلول المعادلة (E) مرتين متتاليتين ونهتم بالرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة.

1 ضع مخططا توضح فيه جميع الحالات الممكنة لهذه التجربة.

2 أحسب إحتمال الحوادث التالية :

- A: "الحصول على رقمين متعاكسين".
- B: "الحصول على رقمين من نفس الإشارة".
- C: "مجموع الرقمان الظاهران أكبر من أو يساوي أربعة".
- D: "مجموع الرقمان الظاهران أصغر من أربعة".
- E: "الحادثة $A \cup B$".

التمرين 9 ★★★★★ الحل

يحتوي قفل على رمز مكون من 3 أرقام من 1 إلى 9.

1 كم عدد الرموز الممكنة؟

2 كم عدد الرموز التي تنتهي برقم زوجي؟

3 كم عدد الرموز التي تحتوي على الرقم 4 مرة واحدة على الأقل؟

4 كم عدد الرموز التي تحتوي على الرقم 4 مرة واحدة بالضبط؟

الجزء الثاني: الرمز يتكون من ثلاثة أرقام متمايزة.

1 كم عدد الرموز الممكنة؟

2 كم عدد الرموز التي تنتهي برقم فردي؟

3 كم عدد الرموز التي تحتوي الرقم 6؟

التمرين 10 ★★★★★

الحل

نعتبر متتالية احتمالات (p_n) معرفة بحدها الأول $p_0 = 0.6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$$

ونضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = p_n - 0.4$.

1 أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

2 اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة p_n بدلالة n.

3 أحسب نهاية المتتالية (p_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين 11 ★★★★★

الحل

يحتوي كيس على 8 قريصات متماثلة: 3 حمراء تحمل الأرقام $\{1,2,3\}$ و 5 خضراء تحمل الأرقام $\{1,1,2,2,3\}$.
نسحب عشوائياً قريصتين من الكيس الواحدة تلو الأخرى **بدون إرجاع**.

1 ارسم شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.

2 أحسب احتمال الحوادث التالية:

- A: "الحصول على قريصتين من نفس اللون".
- B: "الحصول على رقمين مجموع أرقامهما يساوي 4".
- C: "القريصة الأولى حمراء والثانية تحمل رقماً زوجياً".

3 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الأرقام الفردية المسحوبة.

- أ) عيّن قانون احتمال المتغير X.
- ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

الحلـــول

E² MY

حل التمرين 1 ★★★★★

التمرين

نرمز بـ a_n لعدد الطرق الممكنة لنزول سلم مكون من n درجة.

1) العلاقة التراجعية: للوصول للدرجة n يمكن المجيء من الدرجات الثلاث السابقة:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

2) الحالات الابتدائية:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 4$$

3) جدول الحساب (مقسم للعمود):

n	a_3	a_4	a_5	a_6
a_n	4	7	13	24

n	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_n	44	81	149	274

n	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_n	504	927	1705	3136

n	a_{15}	a_{16}	a_{17}
a_n	5768	10609	19513

النتيجة النهائية: عدد الطرق لنزول 17 درجة هو:

$$a_{17} = 19513$$

حل التمرين 2 ★★★★☆

التمرين

عدد الحالات الكلية (في آن واحد): $card(\Omega) = 10$.

I) حساب الاحتمالات:

- $P(A) = \frac{2\times 3}{10} = 0.6$
- $P(B) = \frac{1(WW)+3(GG)}{10} = 0.4$
- $P(C) = 0.6$ ، $P(D) = 0.9$ ، $P(E) = 0.7$

II) المتغير العشوائي X: قانون الاحتمال:

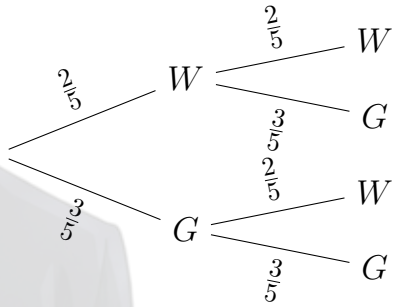
x_i	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
P_i	0.1	0.6	0.3

الأمل الرياضياتي:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0.3(-\alpha) + 0.6(50-\alpha) + 0.1(100-\alpha) \\ &= -0.3\alpha + 30 - 0.6\alpha + 10 - 0.1\alpha \\ &= 40 - \alpha \end{aligned}$$

أكبر قيمة لـ α هي $\alpha = 39$.

III) الحالات الأخرى: 1) دون إرجاع: $card(\Omega) = 20$.
النتائج مطابقة للجزء الأول.
2) مع الإرجاع: $card(\Omega) = 5 \times 5 = 25$.
شجرة الاحتمالات (مع الإرجاع):



- $P(A) = 2 \times (\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}) = 0.48$
- $P(B) = (\frac{2}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2 = 0.52$

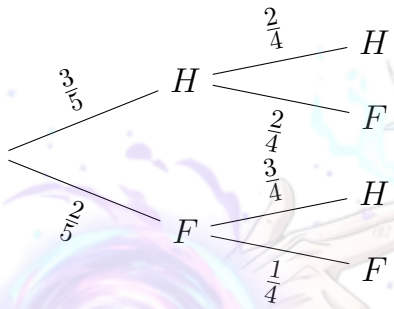
قانون الاحتمال (مع الإرجاع):

x_i	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
P_i	0.16	0.48	0.36

$E(X) = 0.36(-\alpha) + 0.48(50-\alpha) + 0.16(100-\alpha) = 40-\alpha$.

حل التمرين 3 ★★★★★
التمرين

الجزء الأول: (I) المهام متماثلة (سحب في آن واحد) عدد الحالات الكلية هو عدد التوفيقات لعنصرين من بين 5:
$card(\Omega) = \frac{5\times4}{2} = 10$.
1) شجرة الإمكانيات (من اليسار إلى اليمين):



2) حساب الاحتمالات:

- $p(A) = \frac{(H,H)+(F,F)}{10} = \frac{3+1}{10} = 0.4$
- $p(B) = 1 - p(A) = 0.6$
- $p(C)$: الحالات التي تضم H_1 هي 4 حالات $(H_1H_2, H_1H_3, H_1F_1, H_1F_2)$. $p(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

3) المتغير العشوائي X:

- القيم: $\{0,1,2\}$ لأن اللجنة قد لا تضم رجالاً، أو رجلاً واحداً، أو رجلين.

قانون الاحتمال:

x_i	0	1	2
p_i	0.1	0.6	0.3

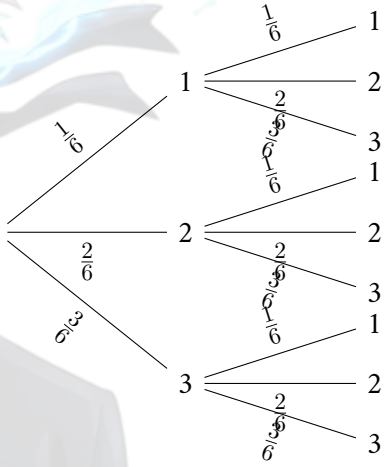
الأمل الرياضياتي: $E(X) = (0\times0.1) + (1\times0.6) + (2\times0.3) = 1.2$.
الجزء الثاني: (II) المهام مختلفة (ترتيبات) $card(\Omega) = 5\times4 = 20$.

- $p(A) = \frac{3\times2+2\times1}{20} = 0.4$
- $p(B) = 0.6$ ، $p(C) = \frac{8}{20} = 0.4$
- الأمل الرياضياتي $E(X)$ يبقى نفسه 1.2.

حل التمرين 4 ★★★★★
التمرين

عدد الحالات الكلية هو: $card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$.

1) مخطط الحالات (شجرة الاحتمالات): LTR)



2) حساب الاحتمالات:

- $P(A) = \frac{6\times4}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ (رقم الآحاد فردي: 1 أو 3).
- $P(B)$: الحالات هي $(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)$.

$$P(B) = \frac{1+2+3+2+6+3+6}{36} = \frac{23}{36}$$

- $P(C)$: الحالات هي $(1,3), (3,1), (2,2)$.

$$P(C) = \frac{(1\times3)+(3\times1)+(2\times2)}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

3) المتغير العشوائي X:

- أ) **قانون الاحتمال:** حالات رقمين زوجيين $(2,2)$: $2 \times 2 = 4$. حالات رقم زوجي واحد $(1,2), (3,2), (2,1), (2,3)$: $2+6+2+6 = 16$. حالات لا يوجد رقم زوجي $(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)$: $1+3+3+9 = 16$.

x_i	40	10	-5
p_i	4/36	16/36	16/36

- ب) $E(X) = \frac{1}{36}[40(4) + 10(16) - 5(16)] = \frac{240}{36} \approx 6.67$. بما أن $E(X) > 0$ فاللعبة لصالح اللاعب.
- ج) لتكن k هي النقاط المخسورة. اللعبة عادلة يعني $E(X) = 0$.

$$160+160-16k=0 \Longrightarrow 16k=320 \Longrightarrow k=20.$$

حل التمرين 5 ★★★★★

التمرين

الجزء الأول: (I) لدينا مجموع الاحتمالات يساوي 1: $\sum p_i = 1$. $p_1 = 0.1$ $p_2 = 0.1+r$ $p_3 = 0.1+2r$ إذن: $p_4 = 0.1+3r$ $0.1+(0.1+r)+(0.1+2r)+(0.1+3r)=1$. $0.4+6r=1 \Longrightarrow 6r=0.6 \Longrightarrow r=0.1$. **الاستنتاج:** $p_1=0.1$ ، $p_2=0.2$ ، $p_3=0.3$ ، $p_4=0.4$.

الجزء الثاني: (II)

1 قيم X: الربح الصافي هو (الجائزة - k): $x_1 = 8-k$ (للرقم 1) $x_2 = 2-k$ (للأرقام الزوجية 2 و 4) $x_3 = 3-k$ (للرقم 3) قيم X هي: $\{8-k, 2-k, 3-k\}$.

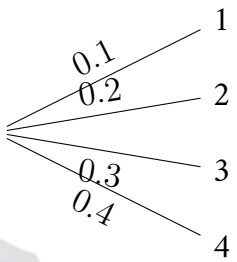
2 **قانون الاحتمال:** للرقم 1: $P = p_1 = 0.1$ للأرقام الزوجية: $P = p_2 + p_4 = 0.2+0.4 = 0.6$ للرقم 3: $P = p_3 = 0.3$

x_i	$8-k$	$2-k$	$3-k$
p_i	0.1	0.6	0.3

3 قيمة k لتكون اللعبة عادلة $(E(X) = 0)$: $E(X) = 0.1(8-k)+0.6(2-k)+0.3(3-k) = 0$. $0.8-0.1k+1.2-0.6k+0.9-0.3k=0$ $\Longrightarrow k = 2.9$. $2.9-k=0$.

4 إذا كان $k=3$: $E(X)=2.9-3=-0.1$. بما أن $E(X)<0$ ، فاللعبة ليست لصالح اللاعب بل هي خاسرة.

شجرة الاحتمالات: (LTR)



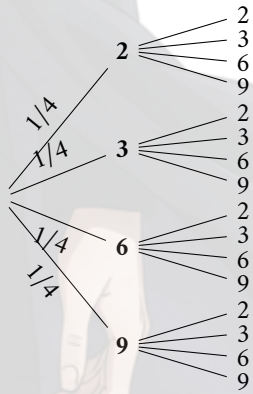
حل التمرين 6

★★★★★

التمرين

1) الحالات الممكنة (مع الإرجاع): $card(\Omega)=4\times 4=16$.

شجرة الاحتمالات: (LTR)



2) المتغير العشوائي X (الجداء):

- القيم: $\{4,6,9,12,18,27,36,54,81\}$.
- قانون الاحتمال:

x_i	4	6	9	12	18
p_i	1/16	2/16	1/16	2/16	2/16

x_i	27	36	54	81
p_i	2/16	1/16	2/16	1/16

- حساب الاحتمالات:

$p(X\geq 27)=\frac{2+1+2+1}{16}=\frac{6}{16}=0.375$ -

$p(X=4\text{ أو }6)=\frac{1+2}{16}=\frac{3}{16}=0.1875$ -

3) سحب دفعة واحدة: $card(\Omega)=6$. القيم: $\{6,12,18,27,54\}$.

x_i	6	12	18	27	54
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

حل التمرين 7

★★★★★

التمرين

1) تعيين العدد a: بما أن مجموع الاحتمالات يساوي 1:

$$\sum p_i=1$$

$$\frac{4+1+1+2+4}{15}+a=1$$

$$\frac{12}{15}+a=1\Longrightarrow a=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

2) الأمل الرياضياتي E:

$$E=\sum e_i p_i$$

$$E=\frac{-1(4)+0(1)+2(1)+5(2)+6(4)+10(3)}{15}$$

$$=\frac{-4+0+2+10+24+30}{15}$$

$$=\frac{62}{15}\approx 4.13$$

3) التباين V والانحراف المعياري σ:

$$V = \sum e_i^2 p_i - E^2$$

$$\sum e_i^2 p_i = \frac{4+0+4+50+144+300}{15}$$
$$= \frac{502}{15} \approx 33.47$$

$$V = 33.47 - (4.13)^2 = 16.41$$

$$\sigma = \sqrt{16.41} \approx 4.05$$

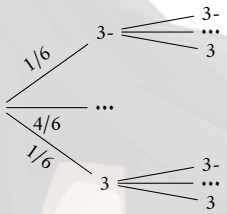
حل التمرين 8

التمرين

I) حل المعادلة (E): نضع $Y = x^2$ $(Y \geq 0)$. نجد: $Y^3 - 14Y^2 + 49Y - 36 = 0$. الحلول هي: $Y \in \{1,4,9\}$. بما أن $x = \pm\sqrt{Y}$، أوجه النرد هي: $S = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$.

II) الاحتمالات: $card(\Omega) = 6^2 = 36$.

1) شجرة الاحتمالات :



2) حساب الاحتمالات:

- $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $P(B) = \frac{9+9}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $P(D) = 1 - P(C) = \frac{5}{6}$
- $P(E) = P(A \cup B)$ بما أن الحادثتين متنافيتان: $P(E) = \frac{6}{36} + \frac{18}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

حل التمرين 9

التمرين

الجزء الأول (التكرار مسموح): في هذا الجزء، كل خانة من الخانات الثلاث يمكن أن تشغل بأي رقم من 1 إلى 9 (9 خيارات لكل خانة).

1 **عدد الرموز الممكنة:** بما أن التكرار مسموح، نستخدم المبدأ الأساسي للعد: $9 \times 9 \times 9$.

$$N = 9^3 = 729$$

2 **الرموز التي تنتهي برقم زوجي:** الأرقام الزوجية المتاحة هي $\{2,4,6,8\}$ (4 خيارات للخانة الأخيرة). الخانات الأخرى تبقى 9 خيارات.

$$N_1 = 9 \times 9 \times 4 = 324$$

3 **الرقم 4 مرة واحدة على الأقل:** الطريقة الأسهل هي حساب (العدد الكلي - عدد الرموز التي لا تحتوي على 4 تماماً). الأرقام بدون الرقم 4 هي 8 أرقام.

$$N_2 = 9^3 - 8^3 = 729 - 512 = 217$$

4 **الرقم 4 مرة واحدة بالضبط:** لدينا 3 أماكن محتملة للرقم 4. في كل حالة، الخانتان المتبقيتان لهما 8 خيارات (أي رقم ما عدا 4).

$$N_3 = 3 \times (1 \times 8 \times 8) = 192$$

الجزء الثاني (أرقام متمايزة - بدون تكرار): هنا الرقم الذي نختاره لخانة لا يمكن استخدامه مرة أخرى.

1 **عدد الرموز الممكنة:** الخانة الأولى 9 خيارات، الثانية 8، والثالثة 7.

$$N' = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

2 **الرموز التي تنتهي برقم فردي:** نبدأ بالشرط (الخانة الأخيرة): الأرقام الفردية هي $\{1,3,5,7,9\}$ (5 خيارات). يبقى للخانة الأولى 8 خيارات وللثانية 7 خيارات.

$$N'_1 = 8 \times 7 \times 5 = 280$$

3 **الرموز التي تحتوي الرقم 6:** الرقم 6 له 3 أماكن ممكنة. بمجرد وضعه، يبقى للخانة الثانية 8 خيارات وللثالثة 7 خيارات.

$$N'_2 = 3 \times (1 \times 8 \times 7) = 168$$

حل التمرين 10 ★★★★★

التمرين

1) إثبات أن (v_n) هندسية: نحسب v_{n+1} بدلالة v_n (من اليسار لليمين):

$$v_{n+1} = p_{n+1} - 0.4$$

$$v_{n+1} = (0.5p_n + 0.2) - 0.4$$

$$v_{n+1} = 0.5p_n - 0.2$$

نخرج 0.5 كعامل مشترك:

$$v_{n+1} = 0.5(p_n - 0.4)$$

$$v_{n+1} = 0.5v_n$$

إذن المتتالية هندسية أساسها $q = 0.5$. الحد الأول:

$$v_0 = p_0 - 0.4 = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

2) عبارة v_n و p_n بدلالة n: بما أنها هندسية:

$$v_n = v_0 \times q^n = 0.2 \times (0.5)^n$$

استنتاج p_n:

$$p_n = v_n + 0.4 = 0.2(0.5)^n + 0.4$$

3) حساب النهاية: بما أن الأساس $|0.5| < 1$ فإن:

$$\lim_{n \to +\infty} (0.5)^n = 0$$

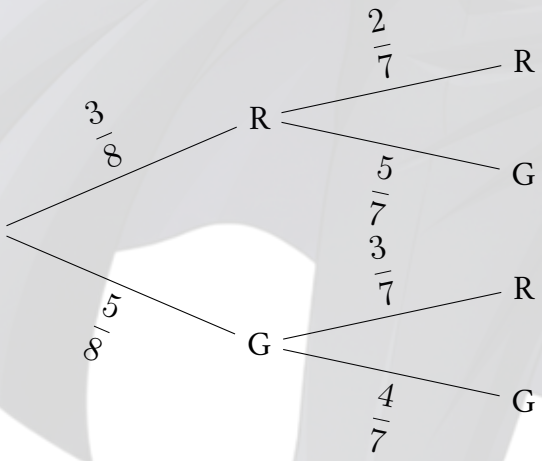
إذن نهاية الاحتمال هي:

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0.4$$

حل التمرين 11 ★★★★★

التمرين

1) شجرة الاحتمالات: (نرمز للحمراء بـ R والخضراء بـ G)



2) حساب الاحتمالات: عدد الحالات الكلية هو: $8 \times 7 = 56$.

- **الحادثة A (نفس اللون):** إما (R,R) أو (G,G).

$$P(A) = \left(\frac{3}{8} \times \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}\right)$$

$$P(A) = \frac{6}{56} + \frac{20}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

- **الحادثة B (المجموع 4):** الثنائيات الممكنة هي: $(1,3),(3,1),(2,2)$.

$$P(B) = \frac{6}{56} + \frac{6}{56} + \frac{6}{56} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

- **الحادثة C (الأولى R والثانية زوجية):**

$$P(C) = \frac{2}{56} + \frac{6}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

3) المتغير العشوائي X (عدد الأرقام الفردية):

- **أ) قانون الاحتمال:**

p_i	$\frac{6}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{20}{56}$
x_i	0	1	2

- **ب) الأمل الرياضياتي $E(X)$:**

$$E(X) = \left(0 \times \frac{6}{56}\right) + \left(1 \times \frac{30}{56}\right) + \left(2 \times \frac{20}{56}\right)$$

$$E(X) = \frac{30+40}{56} = \frac{70}{56} = 1.25$$