الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران — **المستوى: 3 تسيير و إقتصاد**

ثانوية الأمير خالد — **يوم: الإثنين 08-12- 2025**

مادة : الرياضيات. — **المدة: ساعتين.**

إختبار الفصل الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

- في كل حالة من الحالات التالية اختر الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير:

1. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n المعرفة بحدها العام: $U_n = 3 \times 5^n$

أ-(U_n) حسابية — ب-(U_n) هندسية — ج-(U_n) لا حسابية و لا هندسية

2. (V_n) متتالية حسابية أساسها 4 و حدها الأول $V_0 = 1$. قيمة n التي من أجلها يكون : $V_1 + V_2 + ... + V_n = 2015$

أ- $n = 30$ — ب- $n = 31$ — ج- $n = 32$

3. نعتبر المتتالية العددية (W_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n المعرفة بحدها العام: $W_n = -n^2 - n + 1$ هي:

أ- متتالية متزايدة — ب- متتالية متناقصة — ج- متتالية ليست رتيبة

4. المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ مستقيم مقارب ل (C_f) و موازي لمحور الفواصل إذا كان:

أ- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ — ب- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = +\infty$ — ج- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

5. g دالة معرفة على المجال $[0,1]$ ب: $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$, المعادلة $g(x) = 0$ تقبل :

أ- حلا وحيدا — ب- حلان — ج- لا تقبل حلول

التمرين الثاني: (07 نقاط)

I. نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in N}$ المعرفة على IN بحيث:

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3} \end{cases}$$

1. أحسب: U_1, U_2, U_3 .
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \leq 2$.

3. بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.
4. استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة.

II. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $V_n = U_n - 2$

1. بين أن المتتالية (V_n) هندسية, يطلب تعيين أساسها وحدها الاول V_0.
2. بين أن: $V_n = -3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$. ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.
3. أحسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(U_n)$.
4. أحسب بدلالة n, المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + V_2 ..... + V_n$.
5. استنتج عبارة S'_n حيث: $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 ..... + U_n$.

التمرين الثالث: (08 نقاط)

- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$

نرمز ب (C_f) الى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- أحسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}1} f(x)$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}1} f(x)$

ب- بين أن المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=-1$ مستقيمين مقاربين ل (C_f) .

ج- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ماذا تستنتج؟:

2. بين من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ أن $f'(x)=\frac{6x}{(x^2-1)^2}$ (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f).
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ أن: $f(-x)=f(x)$ ماذا تستنتج؟
5. عين نقط تقاطع (C_f) مع حاملي المعلم ثم أرسم المنحني (C_f) و مستقيماته المقاربة
6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

بالتوفيق و السداد في شهادة البكالوريا

حل الاختبار:

حل التمرين الأول:

العبارة رقم 01:

0,5 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times 5^{n+1}}{3\times 5^n} = 5^{n+1-n} = 5$

0,5 اذن: (u_n) هندسية أساسها $q=5$

0,25 $V_1 + V_2 + \dots + V_n = 2015$

0,25 $\frac{n(V_1+V_n)}{2} = 2015$

حساب المجموع بدلالة n.

$\frac{n(5+1+4n)}{2} = 2015$

$\frac{n(4n+6)}{2} = 2015$

$n(2n+3) = 2015$

$2n^2+3n-2015=0$ $\quad a=2 \quad b=3 \quad c=-2015$

$\Delta = 3^2 - 4\times 2\times(-2015) = 16129$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-127}{4} = \frac{-65}{2}$ "مرفوض"

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+127}{4} = 31$ "مقبول"

0,5 اذن: $n=31$

عدد الحدود $= n-1+1 = n$

$V_n = V_0 + nr$

$= 1+4n$

$V_1 = 1+4\times 1$

$= 5$

$W_n = -n^2 - n + 1$

$W_{n+1} = -(n+1)^2 - (n+1) + 1$

$= -(n^2+2n+1) - n - 1 + 1$

$= -n^2 - 2n - 1 - n$

$= -n^2 - 3n - 1$

0,5 $W_{n+1} - W_n = (-n^2 - 3n - 1) - (-n^2 - n + 1)$

$= -3n - 1 + n - 1$

$= -2n - 2 < 0$

0,5 اذن: (W_n) متناقصة تماما.

ن1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ يعني أن المستقيم ذو المعادلة $y=3$ مقارب لـ (C_f) موازي لمحور الفواصل

نضع:

$g(x) = 2x^2 + 2x - 3$

$g'(x) = 4x + 2.$

$x \in [0;1]$ معناه: $0 \leq x \leq 1$

معناه: $0 \leq 4x \leq 4$

معناه: $2 \leq 4x+2 \leq 6$

اذن: $g'(x) > 0$

ن1. و g متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

$g(0) = -3 < 0$

$g(1) = 1 > 0$

منه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;1]$

حل التمرين الثاني (8ن)

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{4}{3} = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

0,75

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + \frac{4}{3} = \frac{5}{9} + \frac{12}{9} = \frac{17}{9}$$

البرهان بالتراجع أن $u_n \leq 2$

1) من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = -1 \leq 2$ و هذا صحيح من أجل $n = 0$ ... (1)

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

نفرض أن: $u_n \leq 2$

ونبين أن: $u_{n+1} \leq 2$

لدينا فرضا: $u_n \leq 2$ ومنه: $\frac{1}{3}u_n \leq \frac{2}{3}$

0,5 ومنه: $\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq \frac{6}{3}$

ومنه: $u_{n+1} \leq 2$ ... (2)

من (1) و (2) وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n \leq 2$ من أجل كل عدد طبيعي n.

---

3) تبيان أن (u_n) متزايدة تماما:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - \frac{3u_n}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

لدينا مما سبق: $u_n \leq 2$ ومنه: $-\frac{2}{3}u_n \geq -\frac{2}{3}.2$

0,5 ومنه: $-\frac{2}{3}u_n \geq -\frac{4}{3}$

ومنه: $-\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \geq -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}$

ومنه: $-\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \geq 0$.

II. 1. تبيان أن (v_n) هندسية:

لدينا:

ومنه:

$$v_n = u_n - 2$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$$

$$= \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2$$

0,5 $$= \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - \frac{2.3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(u_n - 2)$$

إذن: $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

و (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -1 - 2 = -3$

0,5 2. (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى $(u_n \leq 2)$ فهي متقاربة ②

3. عبارة V_n :

$V_n = V_0 \cdot q^n$ (0,5)
$= -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

عبارة U_n :

لدينا : $V_n = U_n - 2$ ومنه : $U_n = V_n + 2$ (0,5)
ومنه : $= -3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2$

3.2 حساب $\lim U_n$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} -3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 = 2$ (0,5)

لأن : $-1 < \frac{1}{3} < 1$
$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

4. حساب S_n :

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$
$= V_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$= -3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -3 \times \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}{\frac{2}{3}}$ (01)

$= -3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{-9}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

5. حساب S_n' :

لدينا : $U_n = V_n + 2$ ومنه : (0,75)

$U_0 = V_0 + 2$
$U_1 = V_1 + 2$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$U_n = V_n + 2$

$n+1$ حد (01)

ومنه : $(U_0 + U_1 + \cdots + U_n) = (V_0 + V_1 + \cdots + V_n) + 2(n+1)$
ومنه : $S_n' = \frac{-9}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + 2n + 2$

حل التمرين الثالث :

حساب : $\lim_{x \to 1} f(x)$: $\lim_{x \to 1} f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

$<$ $>$

لدينا : $\lim_{x \to 1} x^2 - 4 = -3$ ، $\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 0^-$

ومنه : $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$ (0,5)

لدينا : $\lim_{x \to 1} x^2 - 4 = -3$ ، $\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 0^+$

ومنه : $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$

1 ب. لدينا مما سبق $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

ومنه: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

لدينا: $\lim_{x\to -1} x^2 - 4 = -3$ و $\lim_{x\to -1} x^2 - 1 = 0^+$

ومنه: $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$

لدينا: $\lim_{x\to -1} x^2 - 4 = -3$ و $\lim_{x\to -1} x^2 - 1 = 0^-$

$\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

0,5 إذن: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي لـ (C_f).

---

2. 1. تبيان أن $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

0,25×2 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

0,5 التفسير: المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي لـ (C_f)

---

2. تبيان أن $f'(x) = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$

0,75 $f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{(2x^3 - 2x) - (2x^3 - 8x)}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{-2x + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$

---

3. اتجاه تغير الدالة f:

$6x = 0$

ومنه: $x = 0$

معناه: $x = 0$ "أكثر خطأ تكرارا"

$f(0) = \frac{0^2-4}{0^2-1} = 4$

قيم x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
إشارة $6x$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
تغيرات f	$+\infty$	$\searrow$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\|$ $+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$	$\|$				$\|$ $-\infty$		

0,5 الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[0;1[$ و $]1;+\infty[$

0,5 ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$

---

4. تبيان أن $f(-x) = f(x)$

0,5 $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ $f(-x) = \frac{(-x)^2-4}{(-x)^2-1} = \frac{x^2-4}{x^2-1} = f(x)$

0,25 الاستنتاج: f دالة زوجية

---

5. الرسم:

0,25 نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب: $(0; f(0))$ أي $(0;4)$

نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة:

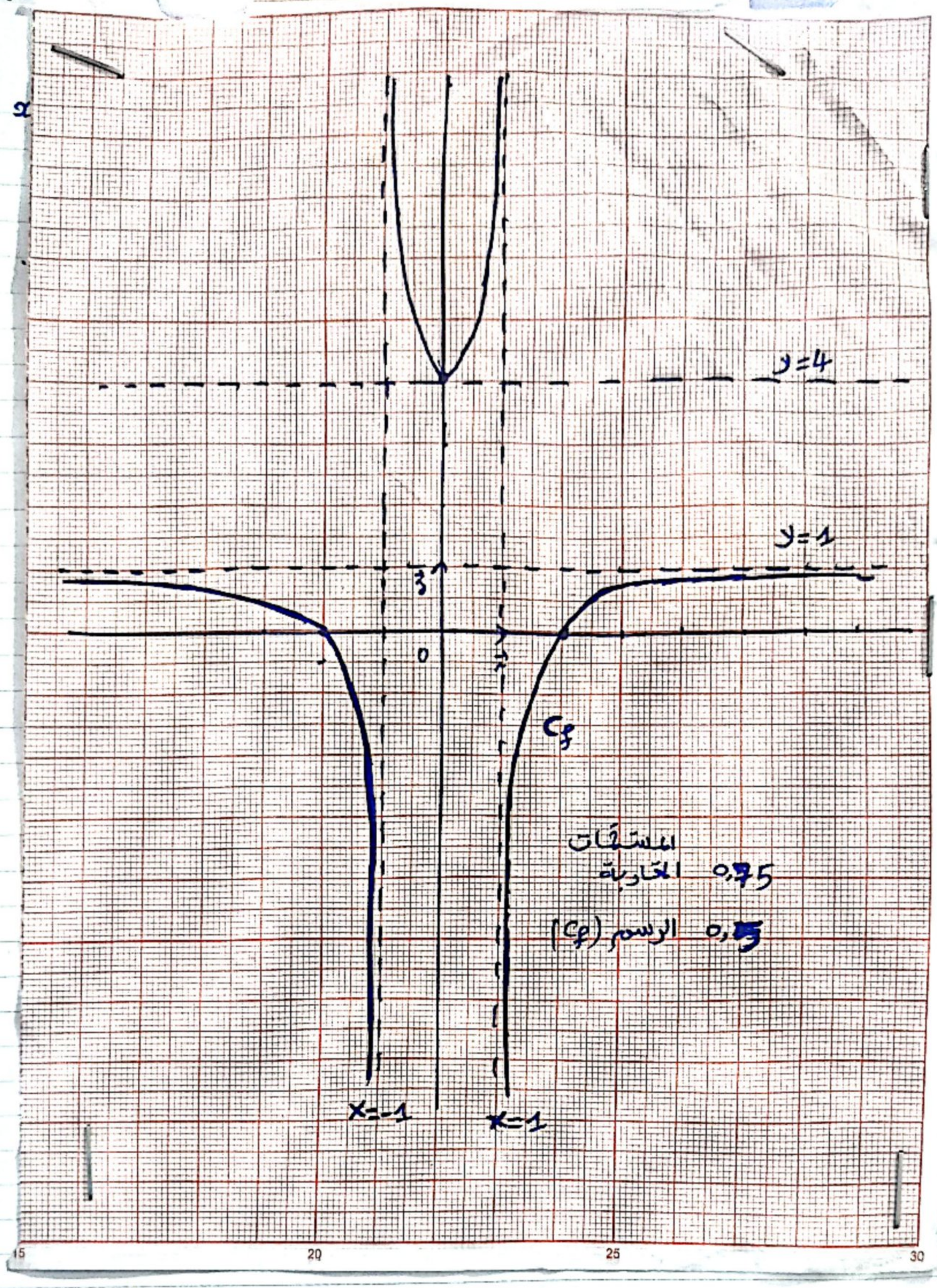
$f(x) = 0$ أي $\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ أي $x^2 - 4 = 0$ و $x^2 - 1 \neq 0$

0,25 أي: $x^2 = 4$ و $x^2 - 1 \neq 0$

أي $x = 2$ أو $x = -2$ (و $x^2 - 1 \neq 0$)

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 2

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 2-.



0,25 لكل مستقيم مقارب

0,5 (C_f)

0,75 المستقيمات المقاربة

0,5 الرسم (C_f)

6. حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$ حسب قيم m

(0,5) • من أجل $m<1$ تقبل المعادلة حلان مختلفان
• من أجل $1<m<4$ تقبل المعادلة حلولاً.
• من أجل $m=4$ تقبل المعادلة حلاً وحيداً
• من أجل $m>4$ تقبل المعادلة حلان مختلفان