الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران — **التاريخ: الإثنين 08-12- 2025**

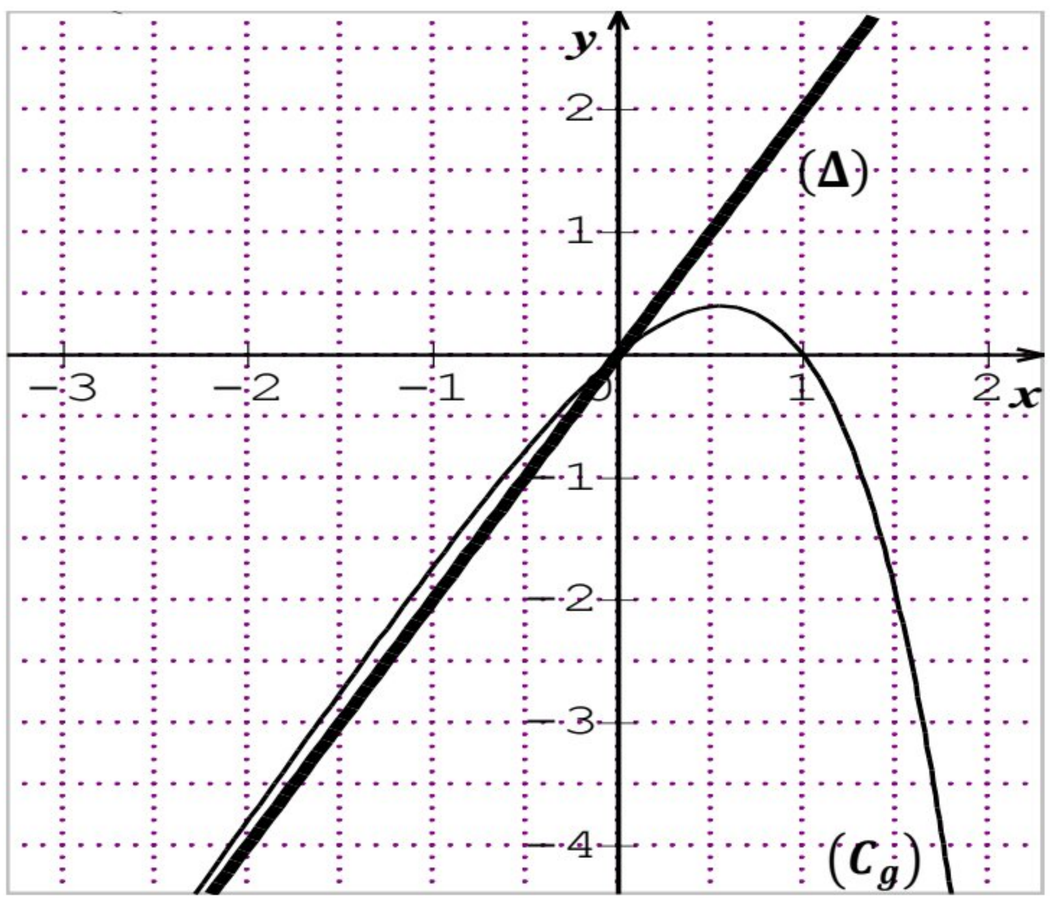
ثانوية الأمير خالد — **الشعبة : السنة ثالثة علوم تجريبية**

مادة : الرياضيات. — **المدة : ساعتين**

إختبار الفصل الأول

التمرين الأول:

I-نعتبر الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 2x(1 - e^{x-1})$. المنحنى (C_g) المقابل هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ الممثل في نفس المعلم.



بقرائة بيانية:

1) حدد وضعية (C_g) بالنسبة ل (Δ)

2) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II)نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^{x-1}$

وليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (نقبل أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{x-1}$)

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن: $f(x) = e^x\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e} + \frac{2}{e}\right)$

ج) نقبل أن ($\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$) : بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2- أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي: $f'(x) = g(x)$

ب- أدرس إتجاه تغيرالدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$

4- نسمي (γ) القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2$

أ)أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (γ)

ب) بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x^2 = 0$ ثم فسر النتيجة بيانيا؟

5- أرسم (C_f) و(γ)

التمرين الثاني:

i. نعتبر g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ب: $g(x) = 1 - x^2 - ln(x)$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

ii. نعتبر f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ب: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- نقبل أن ($\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$) : أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- بين أن: $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x) = +\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ-بين أن (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة ل: (Δ) .

4) بين أن (C_f) يقبل مماس (T) موازي (Δ) ثم عين معادلة له.

5) أرسم (Δ) , (T) و (C_f) (وحدة الطول 2cm)

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(m+1)x + \ln x = 0$

انتهى بالتوفيق و السداد في شهادة البكالوريا

بسم الله الرحمن الرحيم

• تصحيح الإختبار الأول :

. حل التمرين الأول :

I. 1. تحديد وضعية (C_g) بالنسبة (Δ) :

قيم x	$-\infty$		0		$+\infty$
الوضع النسبي لـ (C_g) و (Δ)	(C_g) فوق (Δ)		يتقاطعان في $(0;0)$		(C_g) تحت (Δ)

0,5

I. 2. إشارة $g(x)$ بيانيًا :

قيم x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	

0,5

II. 1. أ. حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x^2 - 2(x-1)e^{x-1} \right]$$

لأن :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \longmapsto +\infty \\ 2(x-1)e^{x-1} \longmapsto 0 \end{array}\right\}$$

0,5

$$= +\infty$$

II. 1. ب : التحقق أن : $f(x) = e^x\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e} + \frac{2}{e}\right)$

لدينا :

$$e^x\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e} + \frac{2}{e}\right) = e^x \cdot \frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e} \cdot e^x + \frac{2}{e} \cdot e^x$$

$$= x^2 - 2x e^{x-1} + 2e^{x-1}$$

$$= x^2 + (-2x + 2)e^{x-1}$$

$$= x^2 - 2(x-1)e^{x-1}$$

0,5

$$= f(x)$$

II. 1. 2 : تبيان أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left[\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e} + \frac{2}{e} \right]$$

$$= \pm \infty$$

لأن :

$$e^x \longrightarrow +\infty$$

$$\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e} + \frac{2}{e} \longrightarrow -\infty$$

نعلم أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ ، 0,5

II. 2. أ: إثبات أن : $f'(x) = g(x)$

لدينا : f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة.

ومن :

$$f'(x) = 2x - 2\left[1\, e^{x-1} + (x-1)\, e^{x-1} \right]$$

$$= 2x - 2\left[1\, e^{x-1} + x\, e^{x-1} - 1\, e^{x-1} \right]$$

$$= 2x - 2x\, e^{x-1}$$

0,75

$$= 2x\,(1 - e^{x-1})$$

$$= g(x).$$

II. 2. ب: اتجاه تغير الدالة f:

لدينا مما سبق :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه : الدالة f متناقصة تماما على كلا المجالين

$]-\infty ; 0]$ و $[1 ; +\infty[$

0,5

والدالة f متزايدة على المجال $[0 ; 1]$

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
تغيرات الدالة f	$+\infty$	↘	$2e^{-1}$	↗	1	↘	$-\infty$

$$f(0) = 0^2 - 2(0-1)\, e^{0-1}$$

$$= 2e^{-1}$$

0,5

$$f(1) = 1^2 - 2(1-1)\, e^{1-1}$$

$$= 1$$

II . 3 . تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$

لدينا : $f(x)$ موجبة تماماً على المجال $]-\infty ; 1]$ ومنه:

ومنه: المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلاً في المجال $]-\infty ; 1]$

ولدينا:
- $f(1,7) \simeq 0,07 > 0$
- $f(1,8) \simeq -0,32 < 0$
- f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $[1 ; +\infty[$

وبالخصص على المجال $]1,7 ; 1,8[$

ومنه: فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث $1,7 < \alpha < 1,8$

II) 4 . دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (δ)

$$f(x) - x^2 = -2(x-1)e^{x-1}$$
$$= (-2x+2)e^{x-1}$$

$-2x+2=0$ يعني: $-2x=-2$

يعني: $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$	0	$-$	
e^{x-1}		$+$		$+$	
$f(x)-x^2$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي لـ (C_f) و (δ)		(C_f) فوق (δ)	يتقاطعان في النقطة $(1;1)$		(C_f) تحت (δ)

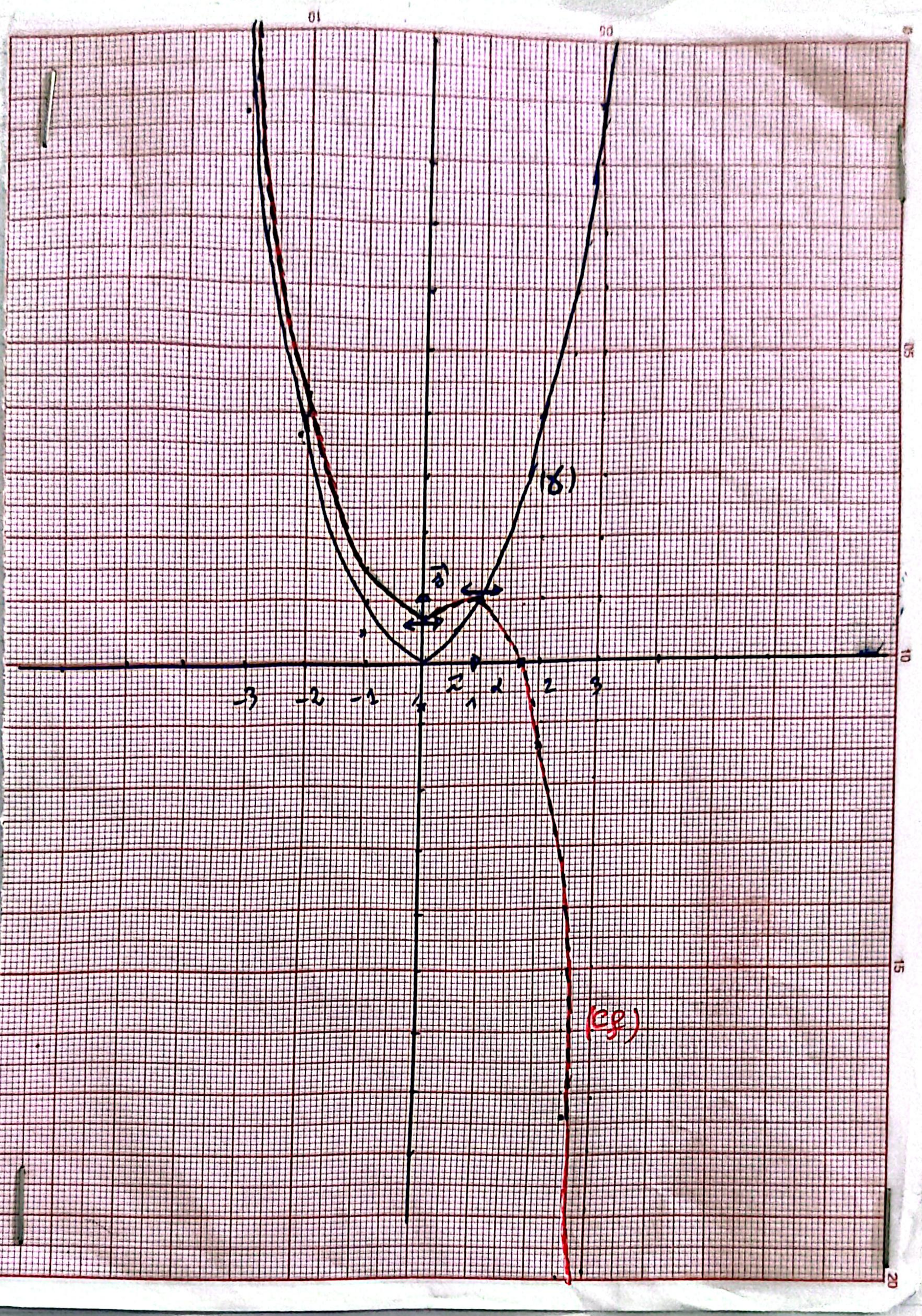
II) 4 . ب : حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x^2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x^2 = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 2(x-1)e^{x-1} - x^2$$
$$= \lim_{x \to -\infty} -2(x-1)e^{x-1}$$
$$= 0$$

لأن: $(x-1)e^{x-1} \to 0$ "مما سبق"

التفسير: المنحنى (δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

التمثيل البياني :



حل التمرين الثاني :

I. 1. دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات :

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} [1 - x^2 - \ln x]$

$1 - x^2 \longmapsto 1$
$-\ln x \longmapsto +\infty$

$= +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} [1 - x^2 - \ln x]$

$1 - x^2 \longmapsto -\infty$
$-\ln x \longmapsto -\infty$

$= -\infty$

• حساب $g'(x)$:

g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة g' معرفة بـ: 0,5

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x}$$

• اشارة $g'(x)$:

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0$$ 0,5

• اتجاه تغير g :

الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

• جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
اشارة $g'(x)$	$\|$	$-$
اتجاه تغيرات الدالة g	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

0,5

I.2 حساب $g(+1)$ 0,25

$$g(+1) = 1 - (+1)^2 - \ln 1$$
$$= 1 - 1 - \ln 1$$
$$= 0$$

اشارة $g(x)$: 0,5

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$+$ 0 $-$	

• الجزء الثاني :

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right]$$
$$= +\infty$$

لأن: 0,5

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

II.2.ب: لأن: 0,5

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} -\ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0^+$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x - 1 - \frac{\ln x}{x}$$
$$= +\infty$$

التفسير المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f). 0,5

II-2- تبيان أن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة f' معرفة بـ:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\ln x}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-(1 - x^2 - \ln x)}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$ 0,75

x	0		1		$+\infty$
$-g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
x^2	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
تغيرات الدالة f	$\|$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	

0,5 0,5

ب- اتجاه تغير f:

اذن: f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ 0,5

3) تبيان أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 1 - \frac{\ln x}{x} - (x-1)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$ 0,75

اذن: المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ): $-\ln x > 0$ معناه: $\ln x < 0$

معناه: $x < e^0$

معناه: $x < 1$.

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	$\|$	$+$	0	$-$	
x	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f(x) - y$	$\|$	$+$	0	$-$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	$\|$	(C_f) فوق (Δ)	يتقاطعان في $(1;0)$	(C_f) تحت (Δ)	

0,75

4) كتابة معادلة المماس الموازي لـ (Δ):

$(T) // (\Delta)$ معناه: $f'(x_0) = 1$

معناه: $\frac{-1 + x_0^2 + \ln x_0}{x_0^2} = \frac{1}{1}$

معناه: $-1 + x_0^2 + \ln x_0 = x_0^2$ 0,75

معناه: $\ln x_0 = 1$

معناه: $x_0 = e^1$

اذن: $x_0 = e$.

$f(e) = e - 1 - \frac{\ln e}{e}$ $\qquad$ $f'(e) = 1$ مما سبق

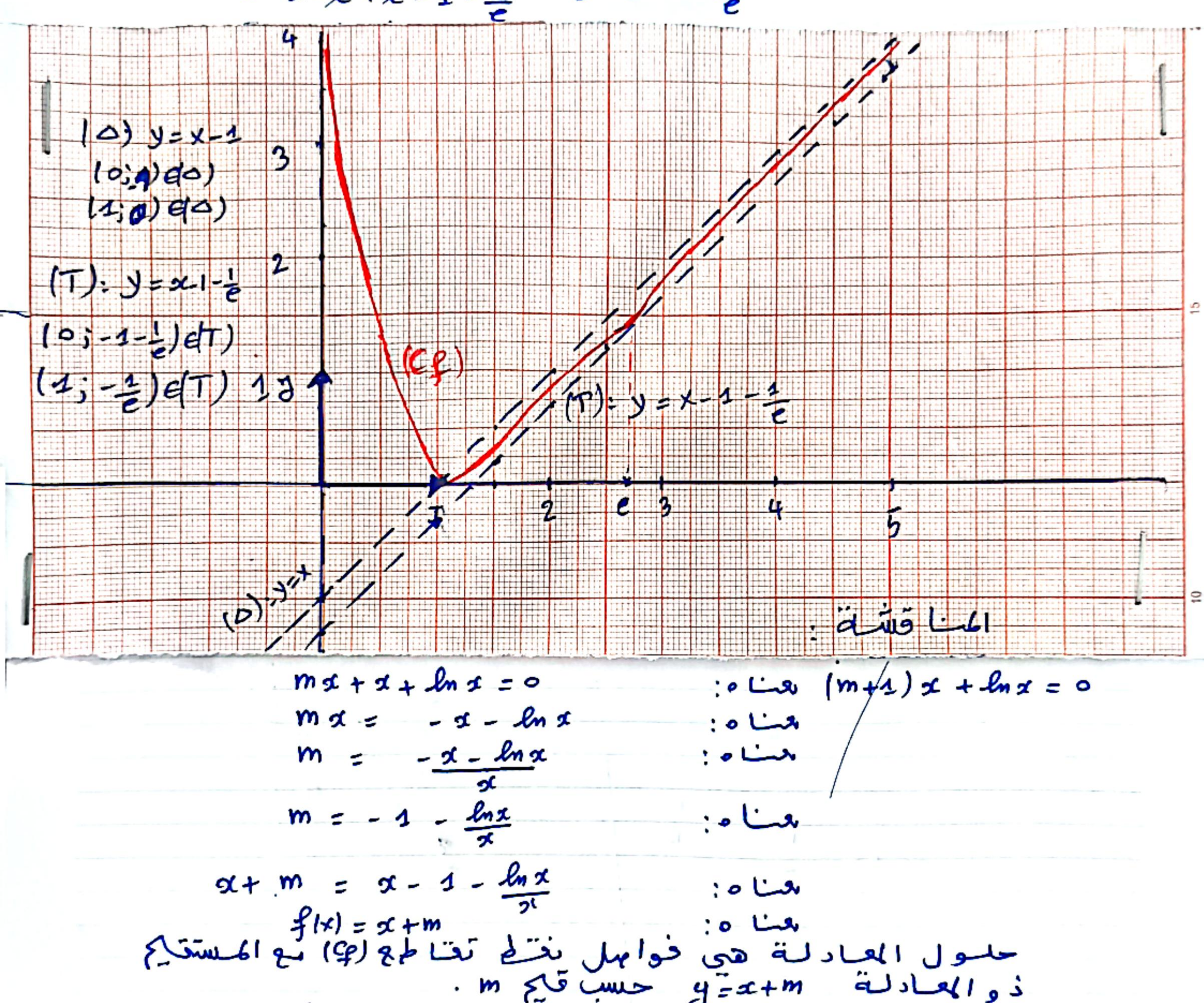
$= e - 1 - \frac{1}{e}$

كتابة معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة e

(T) $\quad y = f'(e)(x-e) + f(e)$

$= 1(x-e) + e - 1 - \frac{1}{e}$

$= x - e + e - 1 - \frac{1}{e} = x - 1 - \frac{1}{e}$



الحالة الثانية:

$(m+1)x + \ln x = 0$ يعني: $mx + x + \ln x = 0$

يعني: $mx = -x - \ln x$

يعني: $m = \frac{-x - \ln x}{x}$

يعني: $m = -1 - \frac{\ln x}{x}$

يعني: $x + m = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

يعني: $f(x) = x + m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ حسب قيم m.

من أجل $m < -1 - \frac{1}{e}$ لا يوجد حلول

$m = -1 - \frac{1}{e}$ حل وحيد

$-1 - \frac{1}{e} < m < -1$ حلان

$m \geq -1$ يوجد حل وحيد.

تم بحمد الله