ثانوية العربي عبد القادر - بوقيراط — السنة الدراسية : 2026/2025 .

المستوى: 3 تسيير و اقتصاد — المدة :02 ساعة.

الإختبار الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول : (10 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على IN بـ : $u_0=\alpha$ ، $\alpha\in IR$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{2}$

- عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .
- نضع $u_0=1$

1. أحسب الحدود u_1, u_2 ثمّ خمّن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n<2$.

برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n-2$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ يطلب حساب حدها الأول .
2. أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2-\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
3. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. ليكن المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $S'_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

أحسب المجموع S_n واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S'_n=3\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2$.

التمرين الثاني: (10 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $IR-\{-1\}$ كمايلي : $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ و فسر النتيجتين هندسيا.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $IR-\{-1\}$ فان: $f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}$

3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقاربا مائلا.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

4) أ)بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $IR-\{-1\}$: $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ,ثم شكل جدول تغيراتها .

5) أكتب معادلة المستقيم (D) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$

6) بيّن أنّ النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

7) أ) أحسب $f(0)$ ثمّ أنشىء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمماس (D) .

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة حلين متمايزين .

8) h الدالة المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $h(x)=\frac{x^2}{1-|x|}$ ، (Ch) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

- أثبت أنّ الدالة h زوجية .
- تحقق أنّه من أجل كل x من $]-1;0[$ ، $h(x)=f(x)$
- اشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (Ch) انطلاقا من (C_f) ثمّ أنشئه

وفـــقكـــــم اللّه.

التصحيح النموذجي للاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول : 10 نقاط

$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2}$; $U_0 = \alpha$

1- (U_n) ثابتة يعني من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n = U_0 = \alpha$ إذن :

$\alpha = \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}$

معناه :

$\alpha - \frac{3}{4}\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$ (04)

$\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{2}$

$\boxed{\alpha = 2}$

2- $U_0 = 1$;

$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2}$

$U_1 = \frac{3}{4}U_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$ (015)

$U_2 = \frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{15}{16} + \frac{8}{16} = \frac{23}{16}$ (015)

بما أن : $U_0 < U_1 < U_2$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة (015) نهائيا .

2) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ نثبت أن : $U_n < 2$: $P(n)$

• من أجل $n=0$; $1 < 2$ أي $U_0 < 2$ ومنه الخاصية $P(0)$ صحيحة . (015)

• نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل n عدد طبيعي كيفي وكتب صحتها من أجل $n+1$.

لدينا : $U_n < 2$ ومنه : $\frac{3}{4}U_n < \frac{6}{4}$ أي $\frac{3}{4}U_n < \frac{3}{2}$

ومنه : $\frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ أي $U_{n+1} < 2$ (01)

ومنه : $P(n+1)$ صحيحة .

من أجل كل n من $\mathbb{N}$; $U_n < 2$.

3- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2} - U_n = \frac{3U_n + 2 - 4U_n}{4}$

$= \frac{-U_n + 2}{4}$ (01)

لدينا : $U_n < 2$ ومنه : $-U_n > -2$

أي $-U_n + 2 > 0$ ومنه $\frac{-U_n+2}{4} > 0$ أي $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه : المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

• المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما فإنها متقاربة . (0125)

* من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n = U_n - 2$

1- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2} - 2$

$= \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = \frac{3}{4}U_n - \frac{3}{2}$

لدينا : $V_n = U_n - 2$ ومنه : $U_n = V_n + 2$

ومنه :

$V_{n+1} = \frac{3}{4}(V_n + 2) - \frac{3}{2}$

$= \frac{3}{4}V_n + \frac{6}{4} - \frac{3}{2}$

$= \frac{3}{4}V_n + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$ (01)

$\boxed{V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$

$V_0 = U_0 - 2 = 1 - 2 = -1$ (0125)

2- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$V_n = V_0 \times q^n = -1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$ (015)

استنتاج عبارة U_n بدلالة n :

لدينا : $U_n = V_n + 2 = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$

$= 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (015)

3- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 2$ (05)

لدينا : $-1 < \frac{3}{4} < 1$ بكافي : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

4- $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)$ (01)

$= -1\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}\right) = -\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{4}}\right) = 4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$

$S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$= (V_0 + 2) + (V_1 + 2) + \cdots + (V_n + 2)$

$= V_0 + V_1 + \cdots + V_n + \underbrace{(2 + 2 + \cdots + 2)}_{n+1 \text{ مرة}}$ (1)

$S'_n = S_n + 2(n+1)$

$= 4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right) + 2n + 2$

$= 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 + 2n + 2$

$S'_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

التمرين الثاني: (10 نقاط)

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ 0,5

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ 0,5

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{1} \times \frac{1}{x+1} = +\infty$ 0,5

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{1} \times \frac{1}{x+1} = -\infty$ 0,5

التحصير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x = -1$. 0,5

2- من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$f(x) = \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$

$= x - 1 + \frac{1}{x+1}$ 0,5

3) أ- من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$;

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} - x + 1\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ 0,5

وكذلك بنفس الطريقة $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$

ب- من أجل كل x من D_f ;

$f(x) - y = f(x) - (x-1) = \frac{1}{x+1}$ 0,5

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي.	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

4- أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2}$

$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ 0,75

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x+2)$ لأن: $(x+1)^2 > 0$.

0,5 $x(x+2) = 0$ يكافئ: $x = 0$ أو $x = -2$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ || $-$	0	$+$

0,5 الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -2]$ و $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $[-2; -1[$ و $]-1; 0]$.

0,5 جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ || $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-4 ↘	$+\infty$ || $+\infty$ ↘	0 ↗	$+\infty$

5- معادلة المماس (T) عند $x_0 = 1$:

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. 0,5

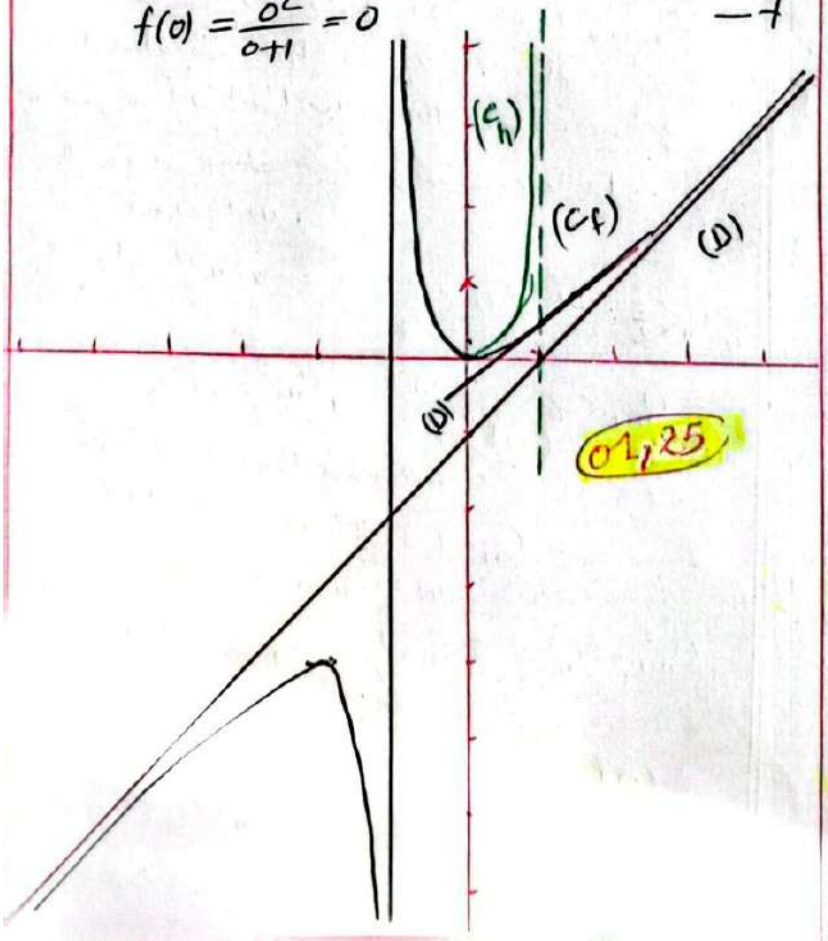
6- من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$; $-2-x$ من $\mathbb{R} - \{-1\}$;

$f(-2-x) + f(x) = -2 - x - 1 + \frac{1}{-2-x+1} + x - 1 + \frac{1}{x+1}$ 0,75

$= -4 + \frac{1}{-x-1} + \frac{1}{x+1} = -4 \neq 2(-2)$

ومنه $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

7- $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$



0,25

ب- حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$

(0,25) لما $m<-4$ أو $m>0$ المعادلة تقبل حلين متمايزين.

-ج $h(x)=\frac{x^2}{1-|x|}$; $D=]-1;1[$ (0,25)

- من أجل كل x من $]-1;1[$; $-x$ من $]-1;1[$

$$h(-x)=\frac{(-x)^2}{1-|-x|}=\frac{x^2}{1-|x|}=h(x) \quad (|-x|=|x|)$$

ومنه الدالة h زوجية.

- من أجل كل x من $]-1;0]$; $|x|=-x$ (0,25)

$$h(x)=\frac{x^2}{1-(-x)}=\frac{x^2}{1+x}=f(x).$$

- لما $x\in]-1;0]$ ينطبق (C_h) على الجزء (C_f)

ولما $x\in[0;1[$: (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب (0,25)

أنشاء (C_h) (0,25)