الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قسنطينة — الثانوية: الحرّية

المادة: رياضيات — المستوى: ثانية ثانوي

الشعبة: الرياضيات — المعامل:7

الإختبار الأول — المدة: 2 سا

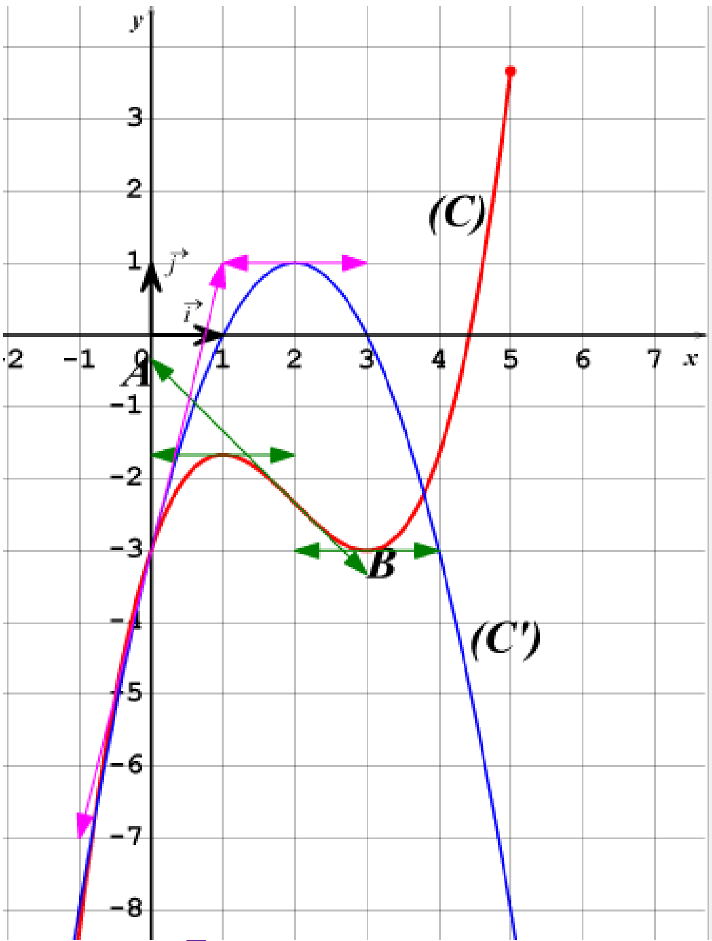
التمرين الأول(8ن):

الشكل أدناه هو لتمثيلين بيانيين (C) وَ (C') لدالتين معرّفتين وَقابلتين للإشتقاق على المجال $[-2;5]$ في معلم متعامد وَمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ترتيبة A هو $\left(-\frac{1}{3}\right)$ ، وَترتيبة B هو $\left(-\frac{10}{3}\right)$.

نعتبر الدالة ϕ_m المعرّفة على $[-2;5]$ بـ: $\phi_m(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x+1-m^2$.

وَالدالة g المعرّفة على $[-2;5]$ بـ: $g(x)=-x^2+4x-3$.

وَ m وسيط حقيقي موجب تمامًا.



1) عيّني قيمة m حتى تكون ترتيب نقطة تقاطع بيان الدالة ϕ_m مع حامل محور التراتيب مساويًا لـ (-3).

2) أحسبي $\phi_2'(x)$ وَأكتبيها بدلالة $g(x)$.

3) في الشكل المقابل، منحنيين يُمثلان بيان الدالتين ϕ_2 وَ g ، أرفقي كل بيان بالدالة المرافقة لها مع التبرير.

4) بقراءة بيانية:

أ- جِدي: $\phi_2'(2)$ وَ $\lim_{h\to 0}\frac{3+g(h)}{h}$ ، ثم إستنتجي $(\sqrt{3}g-2)'(0)$.

ب- حلول المتراجحة: $g(x)\times\phi_2'(x)\leq 0$.

جـ - أدرسي الوضعية النسبية لــ (C) وَ (C')، ثُمّ قارني وَدون حساب بين $\phi_2\left(\frac{2025}{1447}\right)$ وَ $g\left(\frac{2025}{1447}\right)$.

5) لتكن الدالة التآلفية k، جِدي العبارة الممكنة للدالة k علمًا أنّ: $g\circ k(x)=-x^2+2x$.

التمرين الثاني (12ن):

I) لتكن الدالة h المعرّفة على المجال $[-4;4]$ بـ: $h(x)=\frac{3x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$، حيث: α وَ β عددان حقيقيان.

وَ (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَالمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) جِدي α وَ β بحيث (C_h) يقبل المماس $(T): y=4x+3$ عند $x_0=0$.

II) لتكن الدّالة f المعرّفة على المجال $[-4;4]$ بـ: $f(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$. وَليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَالمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّني أنّه من أجل كل x من المجال $[-4;4]$ فإنّ: $f'(x)=\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

2) أدرسي إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[-4;4]$ وَشكّلي جدول تغيّراتها.

3) بيّني أنّ النقطة $\omega(0;3)$ مركز تناظر لـ (C_f).

4) أكتبي معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) الذي معامل توجيهه مساويًا لــ 4.

5) أدرسي الوضعية النسبية لـ (C_f) وَ (Δ) ، ماذا تستنتجين بالنسبة إلى النقطة ω؟

6) ارسمي (C_f) على المجال $[-4;4]$.(وحدة الرسم $2cm$).

7) ناقشي بيانيًا حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد وَإشارة حلول المعادلة: $f(x)=\frac{m}{17}$.

III) لتكن الدّالة l المعرّفة على المجال بــ: $l(x)=\sqrt{f(x)}$.

1) ما هي مجموعة تعريف الدالة l؟

2) أكتبي $l'(x)$ بدلالة $f(x)$ وَ $f'(x)$.

3) إستنتجي إتجاه تغيّر الدالة l وَشكّلي جدول تغيّراتها.

الأستاذة زعتر آمال

الإجابة النموذجية	العلامة
التمرين الأول: نعتبر الدالة ϕ_m المعرّفة على $[-2;5]$ بـ: $\phi_m(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x+1-m^2$. وَالدالة g المعرّفة على $[-2;5]$ بـ: $g(x)=-x^2+4x-3$. **1) تعيين قيمة m حتى تكون ترتيب نقطة تقاطع بيان الدالة ϕ_m مع حامل محور التراتيب مساويًا لـ (-3):** لتعيين نقطة التقاطع مع حامل محور التراتيب، نضع: $x=0$ وَنُعوّض: $\phi_m(0)=1-m^2=-3$. وَمنه: $m^2=4$ ، إما $(m=-2)$ أَوْ $(m=2)$ ، وَبما أنّ: $m>0$ ، إذن: $m=2$.	**(8 ن)** 0.25 0.25
2) حساب $\phi_2'(x)$ وَأكتبيها بدلالة $g(x)$: بوضع $m=2$ ، فإنّ: $\phi_2(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-3$ ، ϕ_2 قابلة للإشتقاق على $[-2;5]$ كجزء من $\mathbb{R}$ لأنّها كثير حدود، حيث: $\phi_2'(x)=x^2-4x+3=-(-x^2+4x-3)$. إذن: $\phi_2'(x)=-g(x)$.	0.25 0.25
3) ارفاق كل بيان بالدالة المرافقة لها مع التبرير: بما أنّ g دالة مربع، يكون تمثيلها البياني عبارة عن قطع مكافئ وَهو (C') ، أما ϕ_2 فهي الدّالة مكعب وتمثيلها البياني هو (C). لأنّ: $g(1)=g(3)=0$ وَ $(C')\cap(xx')=\{(1;0);(3;0)\}$. كما أنّ: (C) يقبل مماسين أفقيين عند $(x_0=1)$ وَ $(x_1=3)$.	0.25 0.25
4) بقراءة بيانية: **أ-إيجاد $\phi_2'(2)$:** لدينا النقطتين $A\left(0;-\frac{1}{3}\right)$ وَ $B\left(3;-\frac{10}{3}\right)$ ينتميان إلى مماس (C) عند $x_0=2$، وَعليه: $\phi_2'(2)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{-10}{3}-\frac{-1}{3}}{3-0}=\frac{\frac{-9}{3}}{3}=\frac{-3}{3}$ ، إذن: $\phi_2'(2)=-1$. **- إيجاد $\lim_{h\to0}\frac{3+g(h)}{h}$:** من أجل $h\neq0$ ، نعلم أنّ: $g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$. وَبما أنّ: $g(0)=-3$ ، فإنّ: $g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(h)+3}{h}$ ، حيث: $D(1;1)$ وَ $E(0;-3)$ ينتميان إلى مماس (C') عند $x_0=0$، وَعليه: $g'(0)=\frac{y_D-y_E}{x_D-x_E}=\frac{1+3}{1-0}=\frac{4}{1}$ ، إذن: $g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(h)+3}{h}=4$. **- استنتاج $(\sqrt{3}g-2)'(0)$:** الدالة: $x\mapsto\sqrt{3}g-2$ قابلة للإشتقاق على $[-2;5]$ حيث: $(\sqrt{3}g-2)'(x)=\sqrt{3}g'(x)$ ، وَمنه: $(\sqrt{3}g-2)'(0)=\sqrt{3}g'(0)$ ، إذن: $(\sqrt{3}g-2)'(0)=4\sqrt{3}$.	 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
ب- حلول المتراجحة: $g(x)\times\phi_2'(x)\leq0$: بما أنّ: $\phi_2'(x)=-g(x); \forall x\in[-2;5]$ ، فإنّ: $g(x)\times\phi_2'(x)\leq0$ تُكافئ $g(x)\times(-g(x))\leq0$ ، أي: $[g(x)]^2\geq0$، من أجل كل $x\in[-2;5]$. إذن: $S=[-2;5]$.	0.25 0.25 0.25
جـ - دراسة الوضعية النسبية لـ (C) وَ (C'): حسب البيان، فإنّ: - (C) يقع تحت (C') لما $x\in[0;3.8]$.(تُقبل أي قيمة بين 3.6 وَ3.9).	0.25

0.25 0.25 0.25 0.25x2	- $(C)\cap(C')=\{(0;-3);(3.8;-2.2)\}$. - (C) يقع فوق (C') لما $x\in[3.8;5]$. **- المقارنة وَدون حساب بين $\phi_2\left(\frac{2025}{1447}\right)$ وَ $g\left(\frac{2025}{1447}\right)$:** لدينا: $\frac{2025}{1447}\simeq 1.399$ ، وَبما أنّ: $\frac{2025}{1447}\in[0;3.8]$ ، فإنّ: $\phi_2\left(\frac{2025}{1447}\right)<g\left(\frac{2025}{1447}\right)$.
    0.25 0.25x2 0.25x2 0.25 0.25	**5) لتكن الدالة التآلفية k، إيجاد عبارة الدالة k علمًا أنّ: $g\circ k(x)=-x^2+2x$:** بما أنّ: k دالة تآلفية، فمن أجل كل عددين حقيقيين a وَ b ، فإنّ: $k(x)=ax+b$. لدينا: $g\circ k(x)=g[(ax+b)]=-(ax+b)^2+4(ax+b)-3$ ، أي: $g\circ k(x)=-a^2x^2-2abx-b^2+4ax+4b-3$. وَمنه: $g\circ k(x)=-a^2x^2+(4a-2ab)x-b^2+4b-3$. وَبالمطابقة: $\begin{cases}-a^2=-1\to a^2=1\to(a=1)\text{أوْ}(a=-1)\\ 4a-2ab=2\to b=\dfrac{4a-2}{2a}\to(b=1;a=1)\text{أوْ}(b=3;a=-1)\\ -b^2+4b-3=0\to(-1+4-3=0)\text{أوْ}(-9+12-3=0)\end{cases}$ إذن: $(a;b)=(1;1)$ وَ $k(x)=x+1$. أوْ $(a;b)=(-1;3)$ وَ $k(x)=-x+3$.
(12ن) 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25	**التمرين الثاني:** I) لتكن الدالة h المعرّفة على المجال $[-4;4]$ بـ: $h(x)=\frac{3x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$ ، حيث: α وَ β عددان حقيقيان. **1) إيجاد α وَ β بحيث (C_h) يقبل المماس $(T):y=4x+3$ عند $x_0=0$:** نعلم أنّ معادلة المماس عند $x_0=0$ هي: $(T):y=h'(0)(x-0)+h(0)$. h قابلة للإشتقاق على $[-4;4]$ كجزء من $\mathbb{R}$، وَكحاصل قسمة دالتين قابلتين للإشتقاق، حيث: $h'(x)=\frac{(6x+\alpha)(x^2+1)-2x(3x^2+\alpha x+\beta)}{(x^2+1)^2}$ ، $h'(x)=\frac{\cancel{6x^3}+\alpha x^2+6x+\alpha-\cancel{6x^3}-2\alpha x^2-2\beta x}{(x^2+1)^2}=\frac{-\alpha x^2+(6-2\beta)x+\alpha}{(x^2+1)^2}$ ، وَمنه: $\begin{cases}h'(0)=\alpha\\ h(0)=\beta\end{cases}$ وَتكون: $(T):y=\alpha x+\beta$ ، بالمطابقة نجد: $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=3\\ h(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}\end{cases}$
   0.25 0.25	II) لتكن الدّالة f المعرّفة على المجال $[-4;4]$ بـ: $f(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$. **1) اثبات أنّه من أجل كل x من المجال $[-4;4]$ فإنّ: $f'(x)=\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$:** f قابلة للإشتقاق على $[-4;4]$ كجزء من $\mathbb{R}$، وَكحاصل قسمة دالتين قابلتين للإشتقاق، حيث: $f'(x)=\frac{(6x+4)(x^2+1)-2x(3x^2+4x+3)}{(x^2+1)^2}$ ، $f'(x)=\frac{\cancel{6x^3}+4x^2+\cancel{6x}+4-\cancel{6x^3}-8x^2-\cancel{6x}}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$ ، وَمنه: $f'(x)=\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$
	2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[-4;4]$: لدينا: $f'(x)=0$ تُكافئ:

0.25x2 0.25 $\begin{cases}-4(x^2-1)=0 \to (x=-1) \text{ أوْ } (x=1)\\ (x^2+1)^2>0; \forall x\in[-4;4]\end{cases}$ ، أما إشارتها:

x	-4		-1		1		4
$-4(x^2-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

0.25

0.25

0.25 - $f'(x)\le 0$ لما $x\in[-4;-1]\cup[1;4]$، أي f متناقصة تمامًا على $[-4;-1]$

0.25 وَعلى $[1;4]$.

- $f'(x)\ge 0$ لما $x\in[-1;1]$، أي f متزايدة تمامًا على $[-1;1]$.

*** تشكيل جدول تغيّراتها:**

x	-4		-1		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-4)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$

0.25

0.25 0.25 0.25 0.25

حيث: $\begin{cases}f(-4)=\frac{48-16+3}{4^2+1}=\frac{35}{17}\simeq 2.05\\ f(-1)=\frac{3-4+3}{1+1}=1\\ f(1)=\frac{3+4+3}{1+1}=5\\ f(4)=\frac{48+16+3}{4^2+1}=\frac{67}{17}\simeq 3.94\end{cases}$.

3) اثبات أنّ النقطة $\omega(0;3)$ مركز تناظر لـ (C_f):

الطريقة الأولى:

0.25 لدينا: $\omega(0;3)$ بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، حيث: $\begin{cases}x=X+x_\omega=X\\ y=Y+y_\omega=Y+3\end{cases}$ ، وَبما أنّ:

$y=f(x)$ ، نُعوّض، نجد أنّ: $Y+3=f(X)=\frac{3X^2+4X+3}{X^2+1}$ ، أي:

$Y=f(X)-3=\frac{3X^2+4X+3}{X^2+1}-3=\frac{\cancel{3X^2}+4X+\cancel{3}-\cancel{3X^2}-\cancel{3}}{X^2+1}$ ، وَمنه:

0.25 $Y=f(X)-3=\frac{4X}{X^2+1}$ ، أي ندرس شفعية الدالة t ، حيث: $t(X)=\frac{4X}{X^2+1}$ ، نجد:

0.25 0.25 $\begin{cases}i)\forall X\in D_t=\mathbb{R}\,;(-X)\in\mathbb{R} \text{ ،(شرط التناظر محقّق)}\\ ii)t(-X)=\frac{4(-X)}{(-X)^2+1}=\frac{-4X}{X^2+1}=-t(X)\end{cases}$ ، إذن: t فردية،

وَ $\omega(0;3)$ هو مركز تناظر لـ (C_f).

0.25 **الطريقة الثانية:** لدينا: - من أجل كل x من $[-4\,;4]$، فإنّ: $-4\le x\le 4$، وَبضرب أطرافها في $(-1)<0$ نحصل على: $-4\le -x\le 4$، أي: $(-x)\in[-2\,;4]$ ، وَمنه: شرط التناظر محقّق.

0.25x3 - من جهة أخرى: $f(-x)+f(x)=\frac{3x^2-4x+3}{x^2+1}+\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}=\frac{6\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}=6$ ،

إذن: $\omega(0;3)$ هو مركز تناظر لـ (C_f).

4) كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) الذي معامل توجيهه مساويًا لـ 4:

0.25 معناه أنّ: $f'(x_0)=4$، وَ هذا يُكافئ: $\frac{-\cancel{4}(x_0^2-1)}{(x_0^2+1)^2}=\cancel{4}$ ،

0.25 أي: $-x_0^2+\cancel{1}=x_0^4+2x_0^2+\cancel{1}$ ، وَمنه: $x_0^4+3x_0^2=0$ ،

أي: $x_0^2(x_0^2+3)=0$ ، تُكافئ: $x_0=0$ ، لأنّه: $\forall x_0\in\mathbb{R}; x_0^2+3>0$.

0.25 وتكون معادلة المماس (Δ) عند $x_0=0$ هي: $(\Delta): y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

0.25 $\begin{cases} f'(0)=4 \\ f(0)=3 \end{cases}$ ، إذن: $(\Delta): y=4x+3$.

5) دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) وَ (Δ) : أي ندرس إشارة $f(x)-y$، حيث:

0.25
$$f(x)-y=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}-4x+3=\frac{3x^2+\cancel{4x}+\cancel{3}-4x^3-\cancel{4x}-\cancel{3x^2}-\cancel{3}}{x^2+1}=\frac{-4x^3}{x^2+1}$$

0.25 حيث: $f(x)-y=0$، تُكافئ: $-4x^3=0\to x=0$ وَ $\forall x\in\mathbb{R}; x^2+1>0$.

أما إشارتها:

x	-4	0	4
-4	$-$		$-$
x^3	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

0.25

- (C_f) يقع فوق (Δ) لما $x\in[-4\,;0]$.
- 0.25 $(C_f)\cap(\Delta)=\{\omega(0;3)\}$.
- (C_f) يقع تحت (Δ) لما $x\in[0\,;4]$.

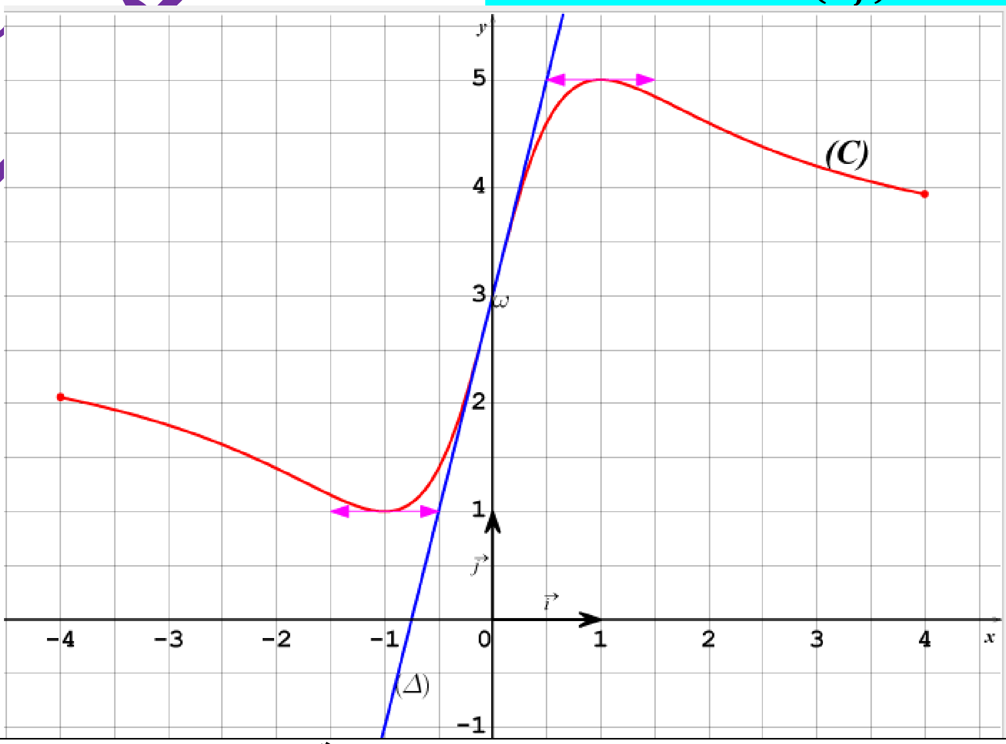
*** الاستنتاج بالنسبة إلى النقطة ω:** بما أنّ المماس (Δ) اخترق البيان (C_f) عند ω فهي نقطة انعطاف.

0.25

6) رسم (C_f) على المجال $[-4;4]$:

0.25

1



7) المناقشة بيانيًا حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد وَإشارة حلول المعادلة: $f(x)=\frac{m}{17}$:

0.25 هي فواصل نقط تقاطع البيان (C_f) مع المستقيمات الأفقية: $(\Delta_m): y=\frac{m}{17}=\frac{1}{17}m$.

0.25 - لما $\frac{m}{17}\in]-\infty;1[$ ، أي: $m\in]-\infty;17[$ ، فإنّه لا توجد حلول.

- لما $\frac{m}{17}=1$ ، أي: $m=17$ ، فإنّ للمعادلة حل مضاعف سالب: $x_1=x_2=-1$.

0.25 - لما $\frac{m}{17}\in\left]1;\frac{35}{17}\right[$ ، أي: $m\in]17;35[$ ، فإنّه يوجد حلان سالبان مختلفان.

- لما $\frac{m}{17}\in\left]\frac{35}{17};3\right[$ ، أي: $m\in]35;51[$ ، فإنّه يوجد حل وحيد سالب.

0.25 - لما $\frac{m}{17}=3$ ، أي: $m=51$ ، فإنّه يوجد حل وحيد معدوم.

- لما $\frac{m}{17}\in\left]3;\frac{67}{17}\right]$ ، أي: $m\in]51;67]$ ، فإنّه يوجد حل وحيد موجب.

- لما $\frac{m}{17}\in\left]\frac{67}{17};5\right[$ ، أي: $m\in]67;85[$ ، فإنّه يوجد حلان موجبان مختلفان.

0.25 - لما $\frac{m}{17}=5$ ، أي: $m=85$ ، فإنّ للمعادلة حل مضاعف موجب: $x_1=x_2=1$.

- لما $\frac{m}{17}\in]5;+\infty[$ ، أي: $m\in]85;+\infty[$ ، فإنّه لا توجد حلول.

III) لتكن الدّالة l المعرّفة على المجال بـ: $l(x)=\sqrt{f(x)}$.

1) مجموعة تعريف الدالة l:

0.25 $D_l=\{x/x\in[-4;4]: f(x)\geq 0\}$ ، حيث: $f(x)\geq 0; \forall x\in[-4;4]$.
(بالاعتماد على رسم البيان (C_f) وَالذي يقع فوق محور الفواصل، أَوْ بدراسة إشارتي البسط وَالمقام (كلاهما موجبين تمامًا). إذن: $D_l=[-4;4]$.

2) كتابة $l'(x)$ بدلالة $f(x)$ وَ $f'(x)$: l قابلة للاشتقاق على $[-4;4]$ كتركيب دالتين

0.25 قابلتين للاشتقاق، حيث: $l'(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$.

3) استنتاج إتجاه تغيّر الدالة l : أي ندرس إشارة $l'(x)$ وَ هي من إشارة $f'(x)$، لأنّ:

0.25 $\sqrt{f(x)}>0 ; \forall x\in[-4;4]$ ، وَحسب الجزء الثاني، فإنّ:

x	-4		-1		1		4
$l'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

0.25 - $l'(x)\leq 0$ لما $x\in[-4;-1]\cup[1;4]$، أي l متناقصة تمامًا على $[-4;-1]$ وَعلى $[1;4]$.

- $l'(x)\geq 0$ لما $x\in[-1;1]$، أي l متزايدة تمامًا على $[-1;1]$.

*** تشكيل جدول تغيّراتها:**

0.25

x	-4		-1		1		4
$l'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$l(x)$	$\frac{\sqrt{595}}{17}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{1139}}{17}$