ثانوية: المجاهد بوضياف قدور	السلسلة رقم -5-	المستوى: 2 ع ت + 2 ر + 2 ت ر
السنة الدراسية: 2025/2024	الاشتقاقية وتطبيقاتها	الأستاذ:بولغيتي عبد الرزاق

تمـريـن 1 ★

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$
(C_f) تمثيلها البياني في م.م.م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 عين العددين الحقيقيين α و β بحيث (C_f) يقبل مماس عند النقطة $A(0;1)$ يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=-2x-3$

2 نضع : $\alpha=-2$ و $\beta=1$

✍ أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أعط حصرا للدالة f على المجال $[-1;1]$

4 بين أن النقطة A هي مركز تناظر لـ (C_f)

5 أنشئ المنحنى (C_f) على المجال $[-3;3]$

6 h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(|x|)$
(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

(ا) بين أن الدالة h زوجية
(ب) اشرح كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه على المجال $[-3;3]$

تمـريـن 2 ★★

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$
(C_f) تمثيلها البياني في م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 أحسب $f(1)$ ثم أكتب $f(x)$ على الشكل
$f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ حيث a; b و c ، أعداد حقيقية يطلب تعيينها

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا

3 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f(x)>0$ ثم فسر النتيجة بيانيا

4 عين النقط من (C_f) التي يكون فيها معامل توجيه المماس يساوي 3

تمـريـن 3 ★★★

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ
$f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-2}$:
(C_f) تمثيلها البياني في م م.م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 عين الأعداد الحقيقية a; b و c بحيث من أجل كل x من $]2;+\infty[$ لدينا $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

2 عين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذو المعادلة $y=ax+b$ على المجال $]2;+\infty[$

3 (ا) بين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$:
$f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$
(ب) عين إشارة $f'(x)$ على المجال $]2;+\infty[$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f

4 (ا) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1
(ب) استنتج قيمة للعدد $f(0.9999)$

تمـريـن 4 ★★★★

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+6x^2+12x+7$

1 أحسب $f(-1)$. ماذا تستنتج ؟

2 أوجد الأعداد الحقيقية a; b و c حيث
$f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$

3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم شكل جدول إشارة الدالة f

II- g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ:
$g(x)=x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2(x+2)^2}$
(C_g) تمثيلها البياني في معلم م.م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $g'(x)=\dfrac{f(x)}{(x+2)^3}$

2 استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3 أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة (-3)

تمرين 5

f دالة معرفة على المجال $[-3;3]$ بجدول تغيراتها التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-5	↗	2	↘	↘	-3	↗	1

1 انطلاقا من جدول تغيرات الدالة f حل المعادلة $f(x)=0$ ثم شكل جدول إشارة $f(x)$ في المجال $[-3;3]$

2 أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس

3 g دالة معرفة على المجال $[-3;3]$ حيث $g(x)=|f(x)|$

✍ شكل جدول تغيرات الدالة g.

4 h دالة معرفة على المجال $[-3;3]$ حيث $h(x)=[f(x)]^2$

(ا) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

(ج) عين حصر للدالة h

تمرين 6

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=x^3+6x+12$ و جدول تغيراتها كالتالي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h(x)$	↗	0	↗

عين حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $h(x)$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في م م م.

1 (ا) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=\dfrac{x\cdot h(x)}{(x^2+2)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2 أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$

3 بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 مثل بيانيا (D) و (C_f)

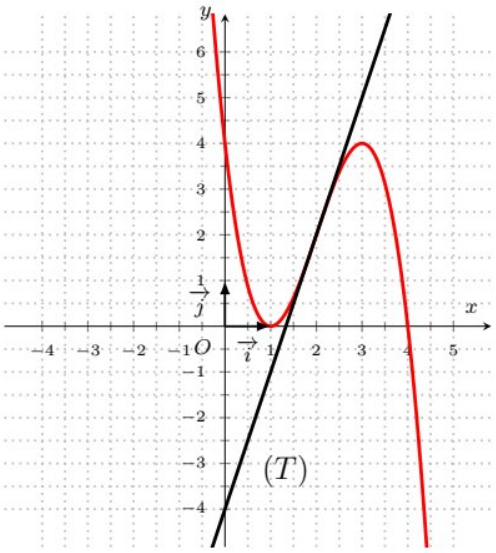
5 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=m$

تمرين 7

I- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-x^3+6x^2-9x+4$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ؛ (T) مماس (C_f) في النقطة $A(2;2)$.

كما هو موضح في الشكل الآتي:



1 بقراءة بيانية:

(ا) عين $f'(2)$ ثم أكتب معادلة لـ (T)

(ب) عين القيم الحدية المحلية للدالة f.

(ج) عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(د) عين إشارة $f(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

2 بين أن النقطة A مركز تناظر المنحنى (C_f).

II- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$h(x) = f(x+1) + 2$$

2 استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي يطلب تعيينه ثم أنشئه .

تمرين 8

I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = x^3 + 3x + 4$

1 باستعمال تعريف العدد المشتق بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق عند 1.

2 (ا) أحسب $g(-1)$ ثم عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$

(ب) أدرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$)

1 (ا) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$$

(ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2 عين القيم الحدية المحلية للدالة f.

3 عين حصرا لـ $f(x)$ على المجال $[0;2]$.

4 أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5 أنشئ (T) و (C_f) على المجال $[-2;4]$. (نعطي $f(0.75) = 0$)

6 h الدالة المعرفة على المجال $[-2;4]$ بـ $h(x) = |f(x)|$ ، و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

اشرح كيفية انشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه.

حل مقترح للسلسلة رقم (05) حول الإشتقاقية وتطبيقاتها

المستوى: ع/ 02 عت/ 02 تر/ 02 ر

الأستاذ: ★ الأستاذ ★ بولغيتي عبد الرزاق

تمرين (01) ع/

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 + 1}$$

① تعيين العددين الحقيقيين α و β:

لدينا (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(0;1)$ يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = -2x - 3$

يكافئ $\begin{cases} f'(0) = -2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x) = \frac{(2x+\alpha)(x^2+1) - 2x(x^2+\alpha x+\beta)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x + \alpha x^2 + \alpha - 2x^3 - 2\alpha x^2 - 2\beta x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-\alpha x^2 + 2x - 2\beta x + \alpha}{(x^2+1)^2}$$

لدينا: $f'(0) = -2$

ومنه $\frac{-\alpha(0) + 2(0) - 2\beta(0) + \alpha}{(0^2+1)^2} = -2$

أي $\boxed{\alpha = -2}$

ولدينا: $f(0) = 1$

يكافئ $\boxed{\beta = 1}$

2/ $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

دراسة اتجاه تغير الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2}$$

وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x^2 - 2$

$2x^2 - 2 = 0$ يكافئ $x^2 = 1$

أي $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$2x^2-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;1]$

× جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	0	↗	

التصحيح

3/ إيجاد حصر للدالة f على المجال $[-1;1]$:

لدينا من أجل كل $x \in [-1;1]$ فإن :

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

وبما أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-1;1]$ فإن :

$$f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(-1)$$

أي $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$

④ إثبات أن النقطة $A(0;1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) :

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f(2(0)-x)+f(x)$$

$$= f(-x)+f(x)$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} + \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$

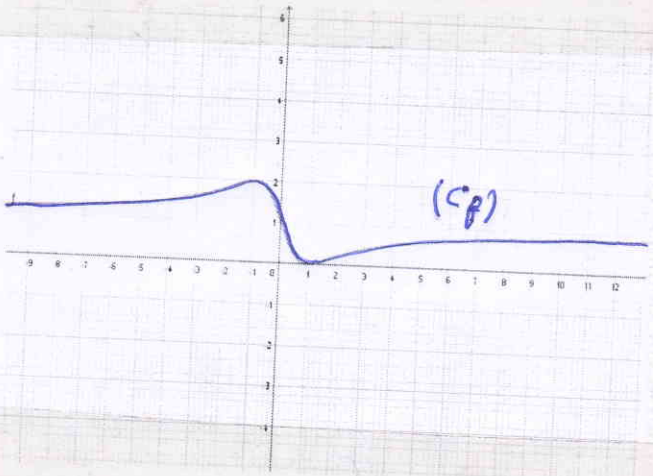
$$= \frac{2x^2+2}{x^2+1}$$

$$= \frac{2(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= 2$$

وعليه النقطة $A(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

⑤ إنشاء (C_f) و (C_h) :



⑥ $h(x) = f(|x|)$

أ) إثبات أن h دالة زوجية :

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $-x \in \mathbb{R}$

وعليه $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة للصفر

ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|)$$

$$= h(x)$$

وعليه h دالة زوجية

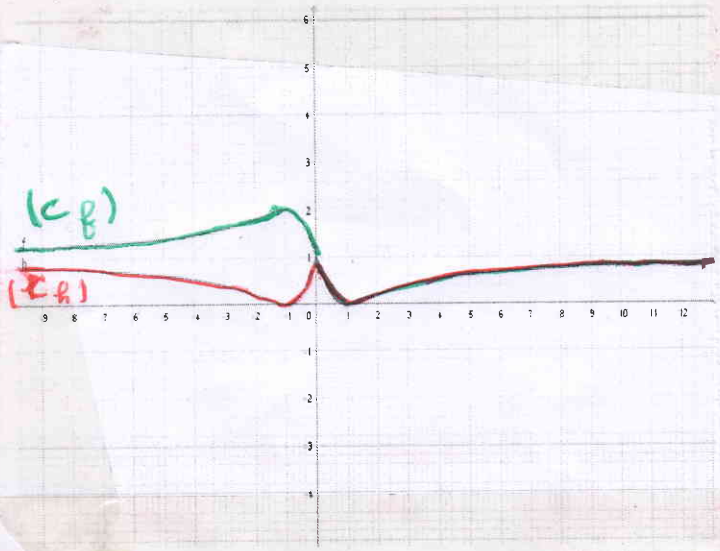
ب) شرح كيفية إنشاء (C_h) :

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

وعليه (C_h) منطبق على (C_f) لما $x > 0$

و (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لما $x < 0$

بالتشاء (C_f) :



التمرين (02) :

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

/1

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + (1)(3) - 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1$

$= 0$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	$x - 1$
$-x^3 + x^2$	$x^2 - 2x + 1$
$-2x^2 + 3x - 1$	
$-(-2x^2 + 2x)$	
$x - 1$	
$-(x - 1)$	
0	

وعليه $c = 1 / b = -2 / a = 1$

/02 حل المعادلة $f(x) = 0$

لدينا : $f(x) = 0$

يكافئ $(x-1)(x^2 - 2x + 1) = 0$

وهذه

$\begin{cases} x = 1 \\ \Delta = 4 - 4(1)(1) = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$ إما

$x_0 = \frac{2}{2} = 1$ وهذه

وعليه حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي

$S = \{1\}$

*تفسير النتيجة بيانيا :

المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1 .

(03) / حل في IR المتراجحة $f(x) > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x^2 - 2x + 1$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

وعليه حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $S =]1; +\infty[$

* تفسير النتيجة بيانيا :

المنحنى (C_f) يقع فوق محور الفواصل على المجال $]1; +\infty[$.

(04) /

يكون معامل توجيه المماس يساوي 3 إذا وفقط إذا كان $f'(x_0) = 3$

أي $3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 3$

وهذه $3x_0^2 - 6x_0 = 0$

أي $3x_0(x_0 - 2) = 0$

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$ وهذه $\begin{cases} 3x_0 = 0 \\ x_0 - 2 = 0 \end{cases}$ أي

وعليه النقط من (C_f) التي يكون فيها معامل توجيه المماس يساوي 3 هي

$B(0; -1)$ و $C(2; 1)$

تمرين 03 / ك

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x-2} \qquad D_f=]2;+\infty[$$

(1) تعيين الأعداد الحقيقية a ; b و c :

لدينا من أجل كل $x\in]2;+\infty[$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$$

$$=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$$

$$=\frac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$$

بالمطابقة مع عبارة الدالة f نجد :

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=9 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} a=1 \\ -2a+b=0 \\ -2b+c=5 \end{cases}$$

ومنه $f(x)=x+2+\frac{9}{x-2}$

(2) تعيين وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+2$ على المجال $]2;+\infty[$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

لدينا :

$$f(x)-y=x+2+\frac{9}{x-2}-x-2$$

$$=\frac{9}{x-2}$$

ومنه إشارة $f(x)-y$ هي إشارة $x-2$

x	2	$+\infty$
$x-2$	‖ +	
$f(x)-y$	‖ +	
الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)	‖ (C_f) يقع فوق (D)	

(3) إثبات أنه من أجل كل $x\in]2;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x+5)}{(x-2)^2}$$

لدينا :

$$\frac{(x+1)(x+5)}{(x-2)^2}=\frac{x^2+5x+x+5}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} \quad \cdots (1)$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2+5)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x-x^2-5}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} \quad \cdots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

لدينا من أجل كل $x \in]2;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x+5)}{(x-2)^2}$$

وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x+1)(x+5)$

ومنه

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$+$	0	$+$	
$x-5$		$-$	0	$+$		$+$	

وبما أن الدالة f معرفة على المجال $]2;+\infty[$

فإن جدول إشارة $f'(x)$ يصبح كالآتي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]2;+\infty[$

* جدول تغيرات الدالة f:

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	
$f(x)$	‖ ↗	

④ كتابة معادلة (T) مماس المنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= -8(x-1) + 6$$
$$= -8x + 8 - 6$$

$$\boxed{(T): y = -8x + 2}$$

ب) استنتاج قيمة مقربة للعدد $f(0,9999)$

من أجل كل عدد h قريب من الصفر لدينا:

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$$

$$f(0,9999) = f(1 - 0,0001)$$

ومنه

$$f(0,9999) \simeq f(1) + f'(1)(-0,0001)$$
$$\simeq -6 - 8(-0,0001)$$
$$\simeq -5,9992$$

$$f(0,9999) \simeq -5,9992$$

التمرين ④ / ص 04

(I

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 7$$

①

$$f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 12(-1) + 7$$
$$= -1 + 6 - 12 + 7$$
$$= 0$$

نستنتج أن (-1) جذر لـ $f(x)$

② إيجاد الأعداد الحقيقية a و b و c

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 12x + 7 & x + 1 \\ \hline -x^3 - x^2 & x^2 + 5x + 7 \\ \hline 5x^2 + 12x + 7 & \\ -5x^2 - 5x & \\ \hline 7x + 7 & \\ -7x - 7 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه

$$c = 7 \;/\; b = 5 \;/\; a = 1$$

3/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$

لدينا $f(x)=0$

يكافئ $(x+1)(x^2+5x+7)=0$

وهذا

$\begin{cases} x+1=0 \\ x^2+5x+7=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=-1 \\ x^2+5x+7=0 \end{cases}$

حل المعادلة $x^2+5x+7=0$

$\Delta = 25-4(1)(7)$

$= 25-28$

$= -3 < 0$

وهذه

وعليه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

وهذه حلول المعادلة $f(x)=0$ هي:

$S = \{ -1 \}$

* جدول إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+5x+7		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

II)

$g(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2(x+2)^2}$

$D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

1) إثبات أن: $g'(x) = \frac{f(x)}{(x+2)^3}$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-2\}$ ودالتها المشتقة g' حيث:

$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-2(x+2)}{(x+2)^4}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(x+2)^3}$

$= \frac{(x+2)^3 - 1}{(x+2)^3}$

$= \frac{x^3+8+6x^2+12x-1}{(x+2)^3}$

$= \frac{x^3+6x^2+12x+7}{(x+2)^3}$

$= \frac{f(x)}{(x+2)^3}$

2) استنتاج اتجاه تغير الدالة g:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{-2\}$:

$g'(x) = \frac{f(x)}{(x+2)^3}$

وعليه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$

و $x+2$ وعليه:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		$-$	$\|$	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

وعليه الدالة g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2[$ و $[-1;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-2;-1]$

* جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	$\|$	↘	1	↗	

③ كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة (-3)

$$(T): y = g'(-3)(x+3) + g(-3)$$

$$y = 2(x+3) + 1$$

$$y = 2x + 6 - 1$$

$$\boxed{(T): y = 2x + 5}$$

③ g الدالة معرفة على $[-3;3]$

$$g(x) = |f(x)| \quad :\text{لدينا}$$

* جدول تغيرات الدالة g :

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ f(x) & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = |f(x)| \geq 0$$

x	-3		-2		-1		0		1		2		3
$g'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$g(x)$	5	↘	0	↗	2	↘	0	↗	3	↘	0	↗	4

④ أ) حساب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ثم دراسة اتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها :

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ ودالتها المشتقة h' حيث :

$$h'(x) = 2f'(x)f(x)$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة h :

لدينا $h'(x) = 2f'(x)f(x)$

وعليه إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(x)$ و $f(x)$ ومنه

x	-3		-2		-1		0		1		2		3
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$f(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

تمرين ② /:

f الدالة معرفة على المجال $[-3;3]$ بجدول تغيراتها المعطى

1) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة f

نلاحظ أن $f(-2) = 0$ و $f(0) = 0$ و $f(2) = 0$

وعليه حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي

$$S = \{-2; 0; 2\}$$

* جدول إشارة $f(x)$:

x	-3		-2		0		2		3
$f(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	

وهذه الدالة h متناقصة تماما على المجالات $[-3;-2]$ و $[-1;0]$ و $[1;2]$

ومتزايدة تماما على المجالات $[-2;-1]$ و $[0;1]$ و $[2;3]$

* تشكيل جدول تغيرات الدالة h:

x	-3		-2		-1		0		1		2		3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	25	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	11

ج) تعيين حصر لـ h:

من جدول تغيرات الدالة h لدينا:

$$1 \leqslant h(x) \leqslant 25$$

تمرين (06) ك/

$$h(x) = x^3 + 6x + 12$$

- تعيين إشارة $h(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

II)

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

1/ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \dfrac{x \cdot h(x)}{(x^2+2)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2) - 2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4 + 12x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 6x^2 + 12x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x \cdot h(x)}{(x^2+2)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x \cdot h(x)}{(x^2+2)^2}$$

وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة x و $h(x)$ ومنه:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$		↗	-3	↘	$f(\alpha)$	↗	

② دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)

$$f(x)-y = f(x)-x$$
$$= \frac{x^3-6}{x^2+2} - x$$
$$= \frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}$$
$$= \frac{\cancel{x^3}-6-\cancel{x^3}-2x}{x^2+2}$$
$$= \frac{-2x-6}{x^2+2}$$

وهذا إشارة $f(x)-y$ من إشارة البسط وهذه :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$-2x-6$		$+$	$\|$	$-$	
$f(x)-y$		$+$	$\|$	$-$	
الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)	(C_f) يقع فوق (D)		(C_f) يقطع (D)		(C_f) يقع تحت (D)

③ إثبات أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

لدينا $h(\alpha) = 0$

أي $\alpha^3 + 6\alpha + 12 = 0$

وهذه

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2} - \frac{3}{2}\alpha$$
$$= \frac{2(\alpha^3-6)-3\alpha(\alpha^2+2)}{2(\alpha^2+2)}$$
$$= \frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{2(\alpha^2+2)}$$
$$= \frac{-\alpha^3-6\alpha-12}{2(\alpha^2+2)}$$
$$= \frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{2(\alpha^2+2)}$$
$$= \frac{-h(\alpha)}{2(\alpha^2+2)} = 0$$

وعليه $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$

علما أن $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,4$

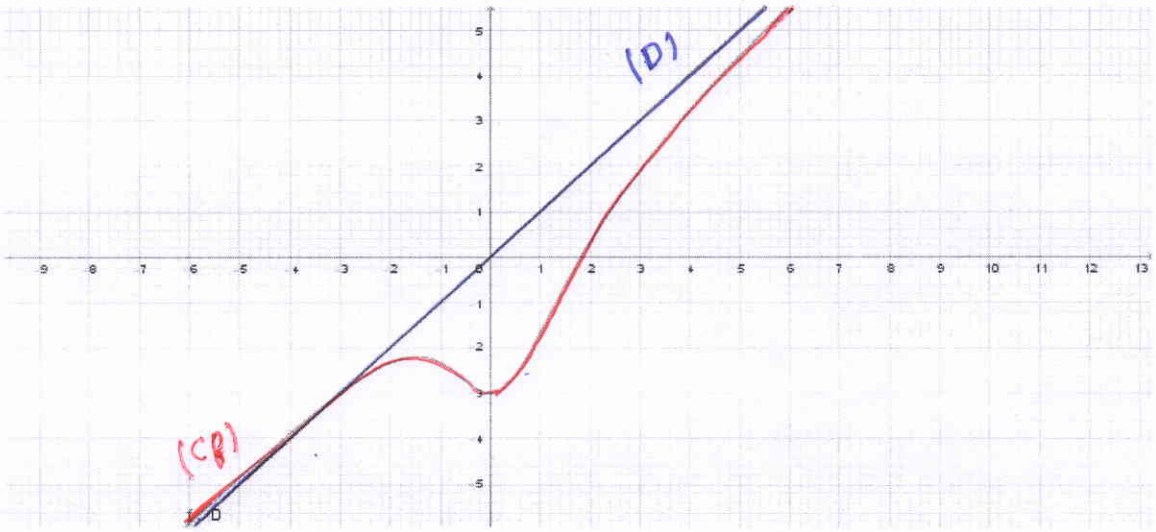
لدينا $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,4$

وهذه $-4,8 \leqslant 3\alpha \leqslant -4,2$

وهذه $-2,4 \leqslant \frac{3}{2}\alpha \leqslant -2,1$

وهذه $-2,4 \leqslant f(\alpha) \leqslant -2,1$

- رسم (C_f) و (D) :



- مناقشة حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانيا معناه تعيين تواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$

لما $m < -3$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا إشارته سالبة

لما $m = -3$ ، $f(x) = m$ ، حلينه لهما نفس الإشارة (سالبان)

لما $-3 < m < 0$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين سالبين و حل واحد موجب

لما $m > 0$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا إشارته موجبة

التمرين (07) ص 1

1/

أ) تعيين $f'(2)$

$$f'(2) = \frac{5-(-4)}{3-0} = \frac{9}{3} = 3$$

* كتابة معادلة لـ (T) :

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$(T): y = 3(x-2) + 2$$

$$(T): y = 3x - 6 + 2$$

$$\boxed{(T): y = 3x - 4}$$

ب) تعيين القيم الحدية المحلية للدالة f :

f تقبل قيمة حدية محلية كبرى هي 4 عند 3 و قيمة حدية محلية صغرى هي 0 عند 1 .

ج) تعيين اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; 1]$ و $[3; +\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[1; 3]$

* جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

2/ إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2/ إثبات أن $A(2;2)$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

$x \in \mathbb{R}$ لدينا من أجل كل $(4-x) \in \mathbb{R}$

و لدينا :

$$f(4-x) + f(x)$$

$$= -(4-x)^3 + 6(4-x)^2 - 9(4-x) + 4 - x^3 + 6x^2 - 9x + 4$$

$$= -64 - 4x^2 + 32x + 16x + x^3 - 8x^2 + 96 + 6x^2 - 48x - 36 + 9x + 4x^3 + 16x^2 - 9x + 4$$

$$= 4$$

ومنه $f(4-x) + f(x) = 4 = 2(2)$

وعليه النقطة A هي مركز تناظر لـ (C_f)

II/

$$h(x) = -x^3 + 3x^2 + 2 \quad / D_h = \mathbb{R}$$

1/ إثبات أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = f(x+1) + 2$$

لدينا :

$$f(x+1) + 2 = -(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - 9(x+1) + 4 + 2$$

$$= -x^3 - 1 - 3x^2 - 3x + 6x^2 + 6 + 12x - 9x - 9 + 6$$

$$= -x^3 + 6x^2 - 3x^2 + 2$$

$$= -x^3 + 3x^2 + 2$$

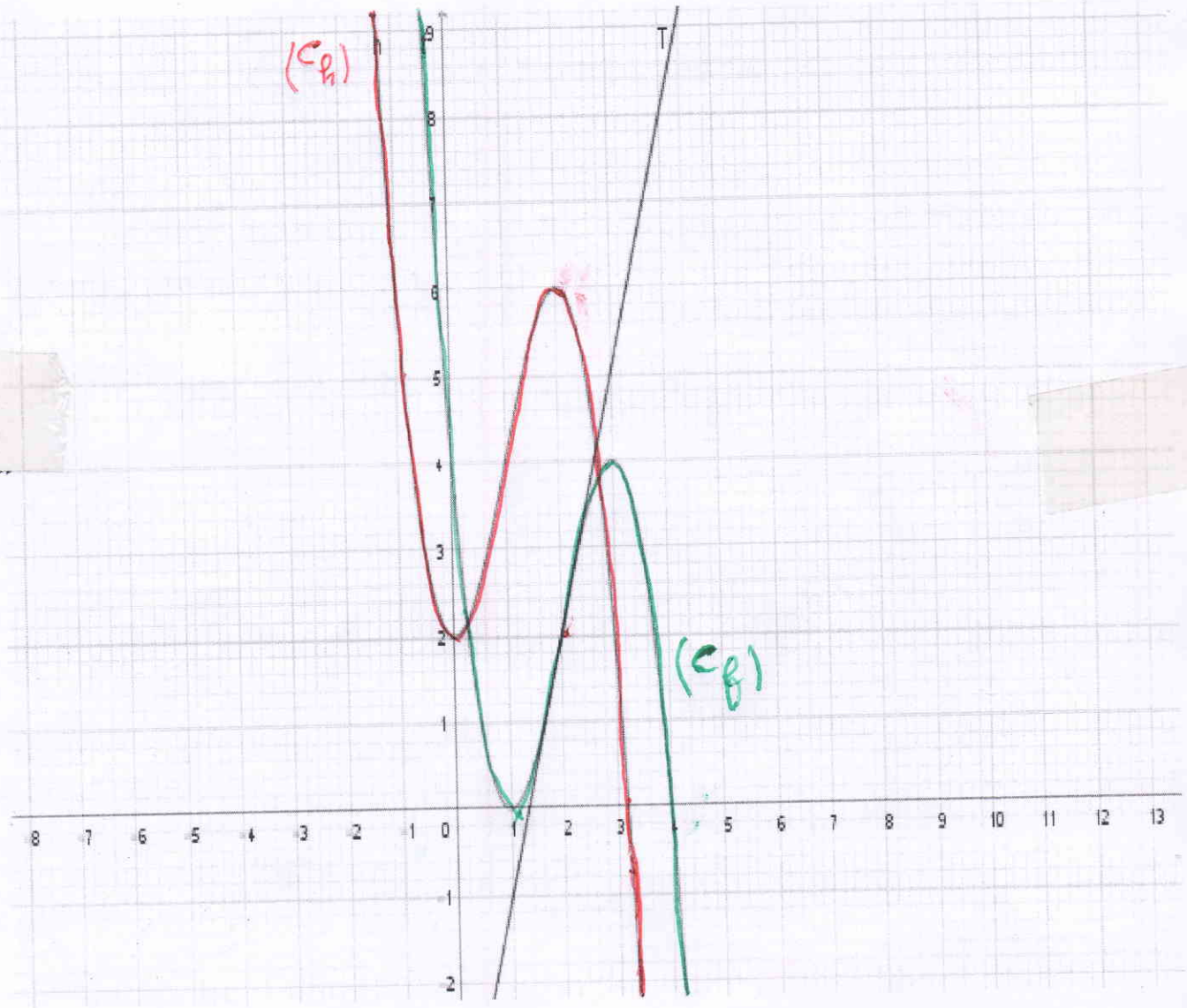
$$= h(x)$$

/2

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = f(x+1) + 2$$

وعليه (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



التمرين (08) ص /

I)

$g(x) = x^3 + 3x + 4$ / $D_g = \mathbb{R}$

1/ إثبات أن الدالة g قابلة للاشتقاق عند 1 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 + 3(1+h) + 4 - 8}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 3h + 3h^2 + 1 + 3 + 3h - 4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 6h + 3h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h^2 + 3h + 6)}{h}$$

$$= 6$$

وعليه الدالة g قابلة للاشتقاق عند 1

ولدينا : $g'(1) = 6$

2/

أ)

$g(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 4$

$= -1 - 3 + 4$

$= 0$

$g(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x + 4 & x + 1 \\ -x^3 + x^2 & \hline \\ -x^2 + 3x + 4 & x^2 - x + 4 \\ -(-x^2 - x) & \\ \hline 4x + 4 & \\ -4x + 4 & \\ \hline 0\,0 & \end{array}$$

وهنه $c = 4$ / $b = -1$ / $a = 1$

$g(x) = (x+1)(x^2 - x + 4)$

ب) دراسة إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

$g(x) = 0$

يحاقق $(x+1)(x^2 - x + 4) = 0$

وهنه

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2 - x + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - x + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{إما أو}$$

حل المعادلة $x^2 - x + 4 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(4)$

$= 1 - 16 = -15 < 0$

وهنه المعادلة لاتقبل حلولا في $\mathbb{R}$ وعليه

إشارة $x^2 - x + 4$ من إشارة a أي 1

وهنه

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
x^2-x+4		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad / D_f = \mathbb{R}$$

1/

أ) إثبات أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$$

ولدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ودالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x)(x^2+1) - 2x(x^3 + x^2 - 1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4+3x^2+2x^3+2x-2x^4-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3+3x+4)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$$

وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

ومنه

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;0]$

* جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{-1}{2}$	↘	-1	↗	

2/ نلاحظ أن الدالة f' تنعدم عند كل من 0 و -1 مغيرة إشارتها وعليه الدالة f تقبل قيمة حدية محلية كبرى هي $\frac{-1}{2}$ عند -1 وقيمة حدية محلية صغرى هي -1 عند 0.

3/ نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;2]$

وعليه من أجل كل $x \in [0;2]$

لدينا $0 \leq x \leq 2$

ومنه $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$

أي $-1 \leq f(x) \leq \frac{11}{5}$

4/ كتابة معادلة لـ (T) :

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = 2(x-1) + \frac{1}{2}$$

$$(T): y = 2x - 2 + \frac{1}{2}$$

$$(T): y = 2x - \frac{3}{2}$$

6) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;4]$ بـ $h(x) = |f(x)|$

لدينا:

$$h(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

(C_h) منطبق على (C_f) فوق محور الفواصل

(C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

فوق (C_h) يكون تحت محور الفواصل

- إنشاء (C_h) :