تمرين1:

f_m الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f_m(x)=\dfrac{x(x-2)+m}{(x-1)^2}$ ، حيث m وسيط حقيقي يختلف عن 1 ، وليكن $(\mathscr{C}_m)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس حسب قيم m نهايات f_m في حدود مجالي مجموعة التعريف.

2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m اتّجاه تغيّر الدالة f_m.

3) ناقش حسب قيم m الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_m)$ و$(\mathscr{C}_{-m})$.

4) عيّن m حتى يقبل $(\mathscr{C}_m)$ مماسا يمر من المبدأ عند الفاصلة -1.

5) عيّن قيم m بحيث $(\mathscr{C}_m)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين.

6) بيّن أنّ $(\mathscr{C}_m)$ يقبل كمحور تناظر المستقيم ذي المعادلة: $x=1$.

7) بيّن أنّ $(\mathscr{C}_m)$ و $(\mathscr{C}_{2-m})$ متناظران بالنسبة للمستقيم: $y=1$.

8) $M(\alpha;\beta)$ نقطة كيفية من المستوي $(\alpha\neq1)$. بيّن أنّه يوجد بيان وحيد $(\mathscr{C}_m)$ يشمل M. ماذا تقول عن $(\mathscr{C}_m)$ و $(\mathscr{C}_{m'})$ ؟ $(m\neq m')$

9) g_m الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $g_m(x)=\dfrac{x|x-2|+m}{(x-1)^2}$ ، حيث m وسيط حقيقي يختلف عن 1.

ادرس قابلية اشتقاق g_m عند $x_0=2$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.

الحل:

1) النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f_m(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+m}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f_m(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+m}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+m)=m-1$ و $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0^+$ ، نميّز حالتين:

الحالة الأولى: $\boxed{m>1}$ $\lim\limits_{x\to1}f_m(x)=+\infty$

الحالة الثانية: $\boxed{m<1}$ $\lim\limits_{x\to1}f_m(x)=-\infty$

2) التغيرات:

f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$، ومن أجل كل x من D_{f_m}، لدينا:

$$f'_m(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x+m)}{(x-1)^4}$$

$$f'_m(x)=\frac{2(x-1)(1-m)}{(x-1)^4}=\frac{2(1-m)}{(x-1)^3}$$

♦ $1-m<0$ أي $\boxed{m>1}$ ، إشارة $f'_m(x)$: $\xrightarrow{\quad 1\quad}$ (+ ثم ⊕ ثم −)

f_m متزايدة تماما من أجل $x<1$، ومتناقصة تماما من أجل $x>1$.

♦ $1-m>0$ أي $\boxed{m<1}$ ، إشارة $f'_m(x)$: $\xrightarrow{\quad 1\quad}$ (− ثم ⊕ ثم +)

f_m متناقصة تماما من أجل $x<1$، ومتزايدة تماما من أجل $x>1$.

3) الأوضاع النسبية: ندرس إشارة $f_m(x)-f_{-m}(x)$.

$$f_m(x)-f_{-m}(x)=\frac{x^2-2x+m}{(x-1)^2}-\frac{x^2-2x-m}{(x-1)^2}=\frac{2m}{(x-1)^2}$$

♦ $\boxed{m<0}$ $f_m(x)-f_{-m}(x)<0$: $(\mathscr{C}_m)$ أسفل $(\mathscr{C}_{-m})$.

♦ $\boxed{m>0}$ و$m\neq1$ ، $f_m(x)-f_{-m}(x)>0$: $(\mathscr{C}_m)$ أعلى $(\mathscr{C}_{-m})$.

♦ $\boxed{m=0}$ ، $f_m(x)-f_{-m}(x)=0$: $(\mathscr{C}_m)$ يطابق $(\mathscr{C}_{-m})$.

4) معادلة المماس عند -1 : $y=f'_m(-1)(x+1)+f_m(-1)$

$$y=\frac{m-1}{4}(x+1)+\frac{m+3}{4}=\frac{m-1}{4}x+\frac{m+1}{2}$$

نعوض $(x;y)$ بـ$(0;0)$: $\dfrac{m-1}{4}(0)+\dfrac{m+1}{2}=0$ ، نجد: $\boxed{m=-1}$

5) $(\mathscr{C}_m)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين أي المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين. لدينا: $\dfrac{x^2-2x+m}{(x-1)^2}=0$ ، يعني: $x^2-2x+m=0$.

تقبل هذه المعادلة حلين متمايزين عندما يكون المميّز موجب تماما.

لدينا: $\Delta=4-4m$ ، $\Delta>0$ أي $4-4m>0$ ومنه: $\boxed{m<1}$.

6) لدينا: $x\neq1$ ، $-x\neq-1$ ، ومنه: $2-x\neq1$.

$$f_m(2-x)=\frac{(2-x)(-x)+m}{(2-x-1)^2}=\frac{x(x-2)+m}{(x-1)^2}=f_m(x)$$

$f_m(2-x)=f_m(x)$ ، ومنه المستقيم: $x=1$ محور تناظر لـ$(\mathscr{C}_m)$.

7) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1:

$$\frac{f_m(x)+f_{2-m}(x)}{2}=\frac{\dfrac{x(x-2)+m}{(x-1)^2}+\dfrac{x(x-2)+2-m}{(x-1)^2}}{2}$$

$$\frac{f_m(x)+f_{2-m}(x)}{2}=\frac{2(x^2-2x+1)}{2(x-1)^2}=\frac{2(x-1)^2}{2(x-1)^2}=\mathbf{1}$$

ومنه: $(\mathscr{C}_m)$ و$(\mathscr{C}_{2-m})$ متناظران بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=1$.

8) $M(\alpha;\beta)$ يعني: $f_m(\alpha)=\beta$ ، أي: $\dfrac{\alpha^2-2\alpha+m}{(\alpha-1)^2}=\beta$ ،

$\boxed{m=\beta(\alpha-1)^2-\alpha^2+2\alpha}$: معادلة للمجهول m تقبل حلا وحيدا.

$(\mathscr{C}_m)$ و$(\mathscr{C}_{m'})$ لا يتقاطعان، لا توجد نقطة ثابتة تشملها المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$.

9)

♦ $$\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{g_m(x)-g_m(2)}{x-2}=\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{\dfrac{x(x-2)+m}{(x-1)^2}-m}{x-2}$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{(1-m)x(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}=\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{(1-m)x}{(x-1)^2}=2-2m=g'_{m_d}(2)$$

♦ $$\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{g_m(x)-g_m(2)}{x-2}=\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{\dfrac{x(2-x)+m}{(x-1)^2}-m}{x-2}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{(-1-m)x(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}=-2-2m=g'_{m_g}(2)$$

g_m غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$، لأنّ: $g'_{m_d}(2)\neq g'_{m_g}(2)$.

بيانيا: $A(2;m)$ هي نقطة زاوية، يقبل عندها $(\mathscr{C}_m)$ نصفي مماسين معامل توجيه أحدهما $2-2m$ والآخر $-2-2m$.

تمرين2:

f_k الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=3x^2-6x(1+ke^{-x})$، حيث k وسيط حقيقي، وليكن $(\mathscr{C}_k)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_k)$ و$(\mathscr{C}_{k'})$، حيث $(k'>k)$.

2) بيّن أنّ جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_k)$ تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

3) بيّن أنّ: $f_k'(x)=6(x-1)(1+ke^{-x})$، ثم حدّد حسب قيم k وجود وعدد القيم الحدية المحلية لـ f_k. أنشئ جدول تغيرات f_{-1}.

4) من أجل كل عدد حقيقي x، $x\neq 1$، نعتبر A_k النقطة من $(\mathscr{C}_k)$ بحيث يكون عندها المماس موازيا لحامل محور الفواصل. عيّن مجموعة النقط A_k التي من أجلها k يمسح (يتغيّر) في $\mathbb{R}^*_-\{-e\}$.

الحل:

1) **الوضعية:** ندرس إشارة $f_k(x)-f_{k'}(x)=6(k'-k)xe^{-x}$.

بما أنّ $k'>k$، فإنّ إشارة $f_k(x)-f_{k'}(x)$ من إشارة x. $e^{-x}>0$

$x<0$: $(\mathscr{C}_k)$ أسفل $(\mathscr{C}_{k'})$. $x>0$: $(\mathscr{C}_k)$ أعلى $(\mathscr{C}_{k'})$.

$x=0$: $(\mathscr{C}_k)$ يقطع $(\mathscr{C}_{k'})$ في المبدأ $O(0;0)$.

2) $A(x_0;y_0)$ النقطة الثابتة التي تشملها جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_k)$.

لدينا: $y_0=3x_0^2-6x_0-6kx_0e^{-x_0}$،

$\begin{cases}-6x_0e^{-x_0}=0.....(1)\\ y_0-3x_0^2+6x_0=0....(2)\end{cases}$ أي: $x_0=0$ و $y_0=0$. $A(0;0)$.

طريقة ثانية: $f_k(x)=f_{k'}(x)$، نجد $x=0$، ومنه: $A(0;0)$.

للإيجاد النقطة الثابتة يمكن كذلك استعمال: $f_k(x)=f_{k+1}(x)$.

3) f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$، لدينا:

$f_k'(x)=6x-6(1+ke^{-x}-kxe^{-x})=6(x-1)+6ke^{-x}(x-1)$

$$f_k'(x)=6(x-1)(1+ke^{-x})$$

- $k\geq 0$: f_k تقبل قيمة حدية محلية وحيدة عند 1.
- $k<0$ و $(k\neq -e)$: f_k تقبل قيمتين حديتين عند 1 و $\ln(-k)$.
- $k=-e$: f_k لا تقبل قيم حدية. $(\mathscr{C}_{-e})$ يقبل نقطة انعطاف $B(1;3)$

جدول تغيرات الدالة f_{-1}:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_{-1}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_{-1}(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$6e^{-1}-3$	↗	$+\infty$

4) من أجل $k<0$ و $k\neq -e$: $f_k'(x)$ تنعدم في 1 و $\ln(-k)$.

ومنه: $A_k\left(\ln(-k);3[\ln(-k)]^2\right)$، أي: $\begin{cases}x_k=\ln(-k)\\ y_k=3[\ln(-k)]^2\end{cases}$.

مجموعة النقط A_k هي القطع المكافئ: $y=3x^2$.

تمرين3:

f_m الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_m(x)=\dfrac{x+1}{x}+m\ln x$، حيث m وسيط حقيقي، وليكن $(\mathscr{C}_m)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$ تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

2) ناقش حسب قيم m الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_m)$ و$(\mathscr{C}_{2m+1})$.

3) ناقش حسب قيم m النهايتين $\lim\limits_{x\to 0^+}f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)$.

4) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m اتّجاه تغيّر الدالة f_m.

5) عيّن قيمة m بحيث $(\mathscr{C}_m)$ يقبل نقطة انعطاف عند الفاصلة 2.

الحل:

1) $A(x_0;y_0)$ النقطة الثابتة التي تشملها جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$.

لدينا: $y_0=\dfrac{x_0+1}{x_0}+m\ln x_0$، $y_0-\dfrac{x_0+1}{x_0}+m\ln x_0=0$،

$\begin{cases}\ln x_0=0.....(1)\\ y_0-\dfrac{x_0+1}{x_0}=0...(2)\end{cases}$، أي $x_0=1$ و $y_0=2$، إذن $A(1;2)$.

2) $f_{2m+1}(x)-f_m(x)=\dfrac{x+1}{x}+(2m+1)\ln x-\dfrac{x+1}{x}-m\ln x$

$$f_{2m+1}(x)-f_m(x)=(m+1)\ln x$$

♦ $m<-1$، إشارة $f_{2m+1}(x)-f_m(x)$: 0 (+) 1 (−) →

$0<x<1$: $(\mathscr{C}_{2m+1})$ أعلى $(\mathscr{C}_m)$. $x>1$: $(\mathscr{C}_{2m+1})$ أسفل $(\mathscr{C}_m)$.

$x=1$: $(\mathscr{C}_{2m+1})$ يقطع $(\mathscr{C}_m)$ في النقطة $A(1;2)$. (النقطة الثابتة)

♦ $m>-1$، إشارة $f_{2m+1}(x)-f_m(x)$: 0 (−) 1 (+) →

$0<x<1$: $(\mathscr{C}_{2m+1})$ أسفل $(\mathscr{C}_m)$. $x>1$: $(\mathscr{C}_{2m+1})$ أعلى $(\mathscr{C}_m)$.

$x=1$: $(\mathscr{C}_{2m+1})$ يقطع $(\mathscr{C}_m)$ في النقطة $A(1;2)$. (النقطة الثابتة)

♦ $m=-1$، $f_{2m+1}(x)-f_m(x)=0$: $(\mathscr{C}_m)$ يطابق $(\mathscr{C}_{2m+1})$.

3) ♦ $m>0$، $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=+\infty$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f_m(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1+mx\ln x}{x}=+\infty$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$.

♦ $m<0$، $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=-\infty$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f_m(x)=+\infty$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

♦ $m=0$، $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}f_m(x)=+\infty$.

4) f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$، بحيث: $f_m'(x)=\dfrac{mx-1}{x^2}$.

♦ $m\leq 0$، $f_m'(x)<0$: ومنه f_m متناقصة تماما لما $x\in\mathbb{R}_+^*$.

♦ $m>0$، $f_m'(x)$ تنعدم في $\dfrac{1}{m}$ وإشارتها: 0 (−) $\frac{1}{m}$ (+) →

f_m متناقصة تماما لما: $0<x\leq\dfrac{1}{m}$، ومتزايدة تماما لما: $x\geq\dfrac{1}{m}$.

5) لدينا: $f_m''(x)=\dfrac{-mx+2}{x^3}$ و $f_m''(2)=0$، ومنه: $m=1$.