السلسلة رقم 03

الاشتقاقية وتطبيقاتها

- قابلية الاشتقاق
- الدوال المشتقة
- معادلة المماس
- المشتقة واتجاه التغير
- القيم الحدية المحلية

التمرين رقم 01

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 في كل حالة:

1. $f(x)=x^2-2x+1 \quad ; \quad x_0=-1$
2. $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x} \quad ; \quad x_0=-2$
3. $f(x)=\sqrt{4x-x^2} \quad ; \quad x_0=\dfrac{3}{2}$
4. $f(x)=-x^3+x^2-5 \quad ; \quad x_0=1$
5. $f(x)=x\sqrt{x} \quad ; \quad x_0=4$
6. $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{4-3x} \quad ; \quad x_0=0$

التمرين رقم 02

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-1$، و a عدد حقيقي.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $h\neq 0$:

$$\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=3a^2+3ah+h^2$$

2) احسب عندئذ $f'(1)$، $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ و $f'(2)$.

3) اكتب معادلة المماسات لمنحنى الدالة f عند النقط ذات الفواصل 1، $-\dfrac{1}{2}$ و 2.

التمرين رقم 03

1) عيّن أحسن تقريب تآلفي للعدد $(3+h)^2$ لمّا $h\to 0$، ثم استنتج قيمة مقربة لكل من $(3{,}004)^2$ و $(2{,}98)^2$.

2) g الدالة المعرفة على $]-\infty;2]$ بـ: $g(x)=\sqrt{2-x}$.

أ- احسب نسبة تزايد الدالة g بين العددين 1 و $1+h$.

ب- استنتج أنّ g تقبل الاشتقاق عند 1، عيّن $g'(1)$.

ج- اكتب معادلة المماس (T) لمنحنى g عند $x_0=1$.

د- احسب قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0{,}995}$ و $\sqrt{1{,}01}$.

3) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{4x+3}{1-x}$$

أ- بيّن أنّ: $\dfrac{f(x)-3}{x}=\dfrac{7}{1-x}$، ثمّ احسب $f'(0)$.

ب- اكتب معادلة المماس (Δ) لمنحنى الدالة f عند الترتيبة 3، ثم استنتج قيمة مقربة للعدد $f(-0{,}004)$.

التمرين رقم 04

احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=3x^2-x+1$

2) $f(x)=x^3+3x-4$

3) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{6}x^2-x+1$

4) $f(x)=(x+1)^2\sqrt{x}$

5) $f(x)=2x-\dfrac{3x+2}{4-x^2}$

6) $f(x)=(2x^4-1)^3$

7) $f(x)=\sqrt{5x^3+4x}$

8) $f(x)=\dfrac{-1}{(3x^2-1)^2}$

9) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

10) $f(x)=3x\sqrt{x^2+2}$

11) $f(x)=(10-x^4)^3$

12) $f(x)=\sin^2(3x-1)$

13) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x+1)^2}$

14) $f(x)=\dfrac{-2x^2+x}{x^2-3x+2}$

15) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-3}}$

التمرين رقم 05

ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكّل جدول تغيراتها على المجال I في كل حالة ممّا يلي:

❶ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+4 \quad ; I=[-2;5]$

❷ $f(x)=-2x^3+9x^2-12x-2 \quad ; I=[0;3]$

❸ $f(x)=x^4-2x^2-1 \quad ; I=[-2;2]$

❹ $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1} \quad ; I=[-3;4]$

❺ $f(x)=\frac{x^2+4x}{-2x^2+x-3} \quad ; I=[-4;4]$

التمرين رقم 06

عيّن معادلة المماس (T) لمنحني الدالة f في النقطة ذات الفاصلة x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

❶ $f(x)=-3x^3+x-4 \quad ; \quad x_0=0$

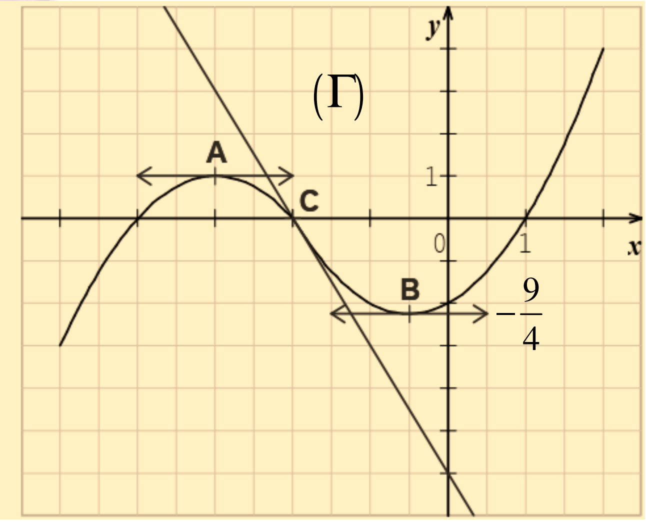
❷ $f(x)=\frac{2x+1}{x-2} \quad ; \quad x_0=3$

❸ $f(x)=\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x} \quad ; \quad x_0=-2$

❹ $f(x)=2x+3-\frac{1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x_0=1$

التمرين رقم 07

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-5;2]$.



بقراءة بيانية:

1) عيّن حلول المتراجحة $f'(x)\times f(x)\geq 0$.

2) عيّن $f'(-3)$ ، $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ و $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}$.

3) اكتب معادلات المماسات للمنحني (Γ) عند النقط A ، B و C .

4) أعط قيمة مقربة للعدد $f(-2{,}0003)$.

5) شكّل جدول تغيرات f .

6) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

التمرين رقم 08

لتكن f الدالة المعرفة بجدول تغيراتها كما يلي:

x	-3	-1	0	1	2	3	5
$f'(x)$	...			‖	...		
$f(x)$	-1 ↘	-2 ↗	0	‖	0 ↗	3 ↘	1

1) أكمل الجدول أعلاه.

2) حدّد إشارة $f(x)$ على D_f .

3) نعتبر الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\left[f(x)\right]^2$.

أ- عيّن D_g ثمّ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة g .

4) لتكن h الدالة المعرفة بـ: $h(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- عيّن D_h ثمّ احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين رقم 09

f الدالة المعرّفة على $]-\infty;3]$ بـ: $f(x)=x\sqrt{3-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أنّه لكل $x\in\,]-\infty;3[$: $f'(x)=\frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$.

ب- استنتج اتجاه تغير f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

ج- جد حصرا لـ $f(x)$ من أجل $x\in\left[\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right]$.

2) أثبت أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $\sqrt{3}$، يطلب كتابة معادلة له.

3) احسب $f(-1)$ ثمّ أنشئ (C_f) و (T).

4) g الدالة المعرفة على $[0;3]$ بـ: $g(x)=\sqrt{3-x}$، (C_g) تمثيلها البياني.

A نقطة من (C_g) و B مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل.

➢ عيّن قيمة x حتى تكون مساحة المثلث OAB أعظمية، ثمّ احسب هذه المساحة.

التمرين رقم 10

أوجد عبارة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

حيث a، b، c و d أعداد حقيقية والتي تحقّق :

✓ f تقبل عند 0 قيمة حدّية محلية قيمتها 1.

✓ (C_f) يقبل في النقطة $A(1;2)$ مماسا يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

التمرين رقم 11

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=a+\frac{bx+c}{x^2+1}$.

حيث a، b و c أعداد حقيقية، (C_f) تمثيلها البياني.

➢ عيّن قيم a، b و c بحيث:

- (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة 2 مماسا يوازي حامل محور الفواصل.
- المماس لـ (C_f) في النقطة $A\left(1;\frac{5}{2}\right)$ يشمل النقطة $B(3;5,5)$.

التمرين رقم 12

f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{m\}$ بـ: $f_m(x)=\frac{mx+3}{m-x}$.

حيث m وسيط حقيقي، (C_m) تمثيلها البياني.

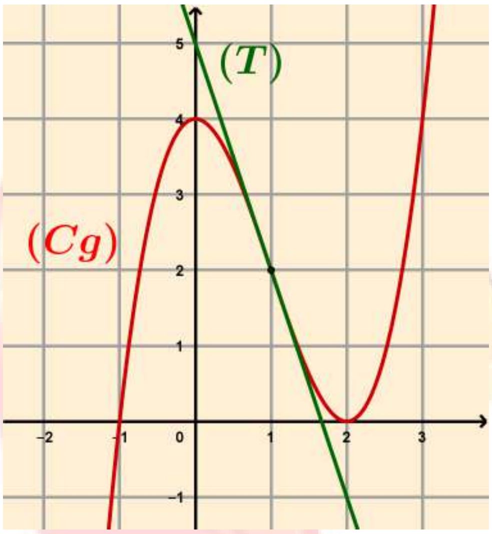
✦ عيّن قيم m حتى يقبل (C_m) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا يعامد المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x+1$.

التمرين رقم 13

الجزء الأول: g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

حيث a، b و c أعداد حقيقية، (C_g) تمثيلها البياني.



قراءة بيانية:

1) عيّن $g(0)$، $g(1)$، $g(2)$، $g'(0)$ و $g'(2)$.

2) بيّن أنّ: $\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-2}{h}=-3$، ثمّ اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3) عيّن الوضع النسبي للمنحني (C_g) و المماس (T)، ماذا تستنتج ؟

4) جد قيمة مقربة لكلّ من $g(1,003)$ و $g(0,99)$.

5) حل بيانيا المتراجحة $g'(x)<0$.

6) شكّل جدول تغيرات الدالة g.

7) حدّد إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

8) باستعمال المعطيات السابقة، بيّن أنّ: $a=-3$، $b=0$ و $c=4$.

الجزء الثاني: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2-8}{8x}$$

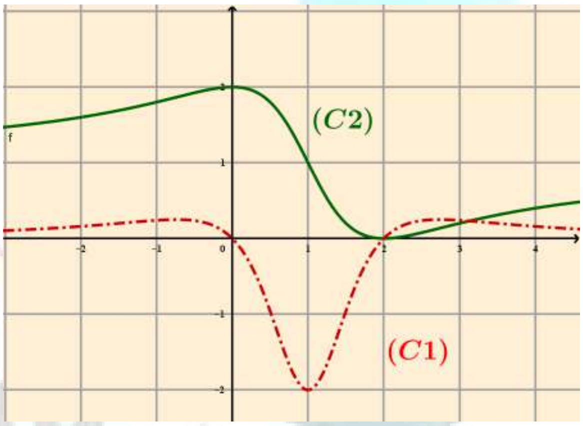
1) بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(2x)^2}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها على $[-4;0[\cup]0;4]$.

3) عيّن حصرا لـ $f(x)$ على المجال $[-3;-2]$.

التمرين رقم 14

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-2x+2}$ ، حيث $a,b\in\mathbb{R}$، إليك في الشكل الموالي المنحنيين (C_1) و (C_2) حيث أحدهما يمثل f والآخر يمثل f' .



1) عيّن (C_f) من بين المنحنيين.

2) عيّن بيانيا الأعداد $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f'(1)$ و $f''(1)$.

3) حدّد إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

4) بيّن أنّ: $a=-4$ و $b=4$.

5) أ- بيّن أنه لكل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

6) أ- بيّن أنّ النقطة $\omega(1;1)$ مركز تناظر (C_f) ، ثمّ اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند ω .

ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (T).

7) نعتبر الدالة k المعرفة بـ: $k(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

أ- عيّن D_k ، ثمّ احسب $k'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير k ثمّ شكل جدول تغيراتها.

التمرين رقم 15

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=ax^3+bx^2+c$$

حيث a، b و c أعداد حقيقية، (C_g) تمثيلها البياني.

1) عيّن a، b و c علما أنّ (C_g) يشمل النقطة $A(0;-5)$ ويقبل عند النقطة ذات الفاصلة -1 مماسا معادلته $y=-4$.

2) نضع: $a=2$ ، $b=3$ و $c=-5$.

أ- احسب $g'(x)$ ثمّ ادرس إشارتها.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة g ثمّ شكل جدول تغيراتها.

ج- احسب $g(1)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

د- بيّن أنّ (C_g) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

II. f الدالة المعرفة على $D_f=[-2;-1[\cup]-1;3]$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3-x+4}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

1) بيّن أنّه لكل x من D_f : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3) اكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة $B(0;4)$.

4) ادرس إشارة الفرق $f(x)-(-5x+4)$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

5) عيّن -دون حساب- النهاية $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ، ماذا نستنتج بيانيا ؟

التمرين رقم 16

(C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-x^4+2x^2+3$$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ، فسّر النتيجة بيانيا.

2) ادرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها على المجال $[-2;2]$.

4) عين حصرا لـ $f(x)$ من أجل $0 \leq x \leq 2$.

5) أ- جد معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{3}$.

ب- أعط قيمة مقربة للعدد $f\left(\sqrt{3}+0,004\right)$.

6) بيّن أنّ f زوجية ، ثمّ أنشئ (C_f) على المجال $[-2;2]$ في معلم متعامد متجانس.

7) أ- اكتب دون رمز القيمة المطلقة عبارة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left|-x^4+2x^2+3\right|$.

ب- اشرح كيفية إنشاء (C_g) اعتمادا على (C_f)، ثمّ أنشئه في المعلم السابق.

التمرين رقم 17

I. لتكن f_m الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$f_m(x)=\frac{mx^2+2x+3}{x+1}$$

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، حيث m وسيط حقيقي.

1) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد القيم الحدّية المحلية للدالة f_m.

3) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع (C_m) مع حامل محور الفواصل.

II. نضع : $m=1$،

ونعتبر الدالة f_1 حيث $f_1(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$.

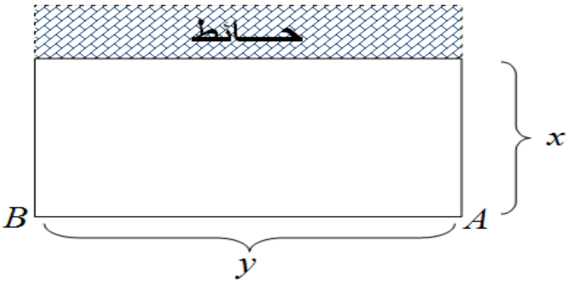
1) ادرس اتجاه تغير الدالة f_1.

2) أعط حصرا للعدد $f_1(x)$ من أجل $x\in[0;3]$.

3) أثبت أنّ المنحني (C_1) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(1;2)$ يطلب كتابة معادلة له.

التمرين رقم 18

أراد فلاح إنشاء مدجنة مستطيلة الشكل مساحتها $392m^2$ ، أحد جوانبها حائط كما هو مبين في الشكل الموالي.



نرمز بـ x لعرض المستطيل و بـ y لطول المستطيل،
نرمز بـ L إلى طول السياج المراد إحاطته بالمدجنة.

1) بيّن أنّ: $L=2x+\dfrac{392}{x}$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

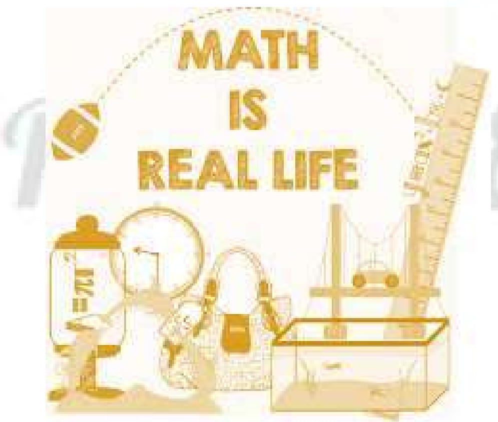
$$f(x)=2x+\frac{392}{x}$$

أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2(x-14)(x+14)}{x^2}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) استنتج وضعية الوتدين A و B حتى يكون سياج المدجنة أصغر ما يمكن.



حلول السلسلة 03 : الاشتقاقية وتطبيقاتها
2ع ت + ر + تر

Prof : KHELOUF SARRA

ت 01 : دراسة قابلية الاشتقاق:

① $f(x)=x^2-2x+1 \quad , \quad x_0=-1$

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{(-1+h)^2-2(-1+h)-3}{h}=\frac{h^2-4h}{h}=h-4$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}(h-4)=\boxed{-4}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند -1 حيث

$$f'(-1)=-4$$

② $f(x)=\frac{3x^2-1}{x} \quad ; \quad x_0=-2$

$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\frac{\frac{3(-2+h)^2-1}{-2+h}+\frac{11}{2}}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{6h^2-13h}{2(-2+h)}\right)=\frac{6h-13}{2h-4}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6h-13}{2h-4}=\boxed{\frac{13}{4}}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند -2 حيث

$$f'(-2)=\frac{13}{4}$$

③ $f(x)=\sqrt{4x-x^2} \quad ; \quad x_0=\frac{3}{2}$

$$\frac{f(\frac{3}{2}+h)-f(\frac{3}{2})}{h}=\frac{\sqrt{4(\frac{3}{2}+h)-(\frac{3}{2}+h)^2}-\frac{\sqrt{15}}{2}}{h}=\frac{\sqrt{-h^2+h+\frac{15}{4}}-\frac{\sqrt{15}}{2}}{h}$$

بالضرب في المرافق نجد

$$\frac{f(\frac{3}{2}+h)-f(\frac{3}{2})}{h}=\frac{-h+1}{\sqrt{-h^2+h+\frac{15}{4}}+\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{3}{2}+h)-f(\frac{3}{2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h+1}{\sqrt{-h^2+h+\frac{15}{4}}+\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\boxed{\frac{\sqrt{15}}{15}}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند $\frac{3}{2}$ حيث

$$f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

④ $f(x)=-x^3+x^2-5 \quad ; \quad x_0=1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-x^3+x^2}{x-1}=\frac{-x^2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-x^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(-x^2)=\boxed{-1}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 1 حيث $f'(1)=-1$

⑤ $f(x)=x\sqrt{x} \quad ; \quad x_0=4$

$$\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\frac{x\sqrt{x}-8}{x-4}$$

نستعمل الضرب في المرافق والمتطابقة الشهيرة $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ نجد

$$\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\frac{x^3-64}{(x-4)(x\sqrt{x}+8)}=\frac{\cancel{(x-4)}(x^2+4x+16)}{\cancel{(x-4)}(x\sqrt{x}+8)}=\frac{x^2+4x+16}{x\sqrt{x}+8}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+4x+16}{x\sqrt{x}+8}$$
$$=\frac{48}{16}=\boxed{3}$$
إذن f تقبل الاشتقاق عند 4 حيث
$$f'(4)=3$$

⑥ $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{4-3x}$; $x_0=0$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{4-3h}}{h}$$
$$=\frac{1}{\cancel{h}}\left(\frac{-3\cancel{h}}{2(4-3h)}\right)$$
$$=\frac{-3}{8-6h}$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{8-6h}=\boxed{\frac{-3}{8}}$$
إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 حيث
$$f'(0)=\frac{-3}{8}$$

$f(x)=x^3-1$ **ت 02:**

① من أجل كل $h\neq 0$ لدينا:
$$\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=\frac{\cancel{a^3}+3a^2h+3ah^2+h^3-\cancel{a^3}}{h}$$
$$=\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h}$$
بالاختزال نجد:
$$\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=3a^2+3ah+h^2$$
وهو المطلوب

② حساب $f'(1)$ ، $f'(-\frac{1}{2})$ ، $f'(2)$:
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1^3}{h}$$

حسب الجواب 1 يكون لدينا:
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\left[3(1)^2+3(1)h+h^2\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)$$
$$=\boxed{3}$$
بنفس الطريقة نجد:
$$f'(-\tfrac{1}{2})=\lim_{h\to 0}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}h+h^2\right)=\boxed{\frac{3}{4}}$$
$$f'(2)=\lim_{h\to 0}(12+6h+h^2)=\boxed{12}$$

③ معادلة المماس عند الفاصلة 1:
$$(T_1):\ y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=\boxed{3x-3}$$
معادلة المماس عند الفاصلة $-\frac{1}{2}$:
$$(T_2):\ y=f'(-\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2})+f(-\tfrac{1}{2})$$
$$=\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}-\frac{9}{8}$$
$$=\boxed{\frac{3}{4}x-\frac{6}{8}}$$
معادلة المماس عند الفاصلة 2:
$$(T_3):\ y=f'(2)(x-2)+f(2)$$
$$=12x-24+7$$
$$=\boxed{12x-17}$$

ت 03:

① أحسن تقريب تآلفي للعدد $(3+h)^2$ بجوار 0 هو:

بوضع $f(x)=x^2$

نجد: $f'(x)=2x$

ومنه حسب علاقة التقريب التآلفي:
$$f(3+h)\simeq hf'(3)+f(3)$$
إذن:

من أجل $h\to 0$: $(3+h)^2\simeq 6h+9$

* القيم المقربة:
$$(3,004)^2=(3+0,004)^2\simeq 6(0,004)+9$$
$$\simeq\boxed{9,024}$$
$$(2,98)^2=(3-0,02)^2\simeq 6(-0,02)+9$$
$$\simeq\boxed{8,88}$$

2) $g(x)=\sqrt{2-x}$

أ- نسبة التزايد بين 1 و $1+h$:

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{\sqrt{1-h}-1}{h}$$

ب- استنتاج أن g تقبل الاشتقاق عند 1:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-h}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(\sqrt{1-h}+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-h}+1}$$

$$=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

ومنه g قابلة للاشتقاق عند 1 وعددها المشتق هو $g'(1)=-\frac{1}{2}$

ج- معادلة المماس عند $x_0=1$:

$$(T):\ y=g'(1)(x-1)+g(1)$$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)+1$$

$$(T):\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

د- القيم المقربة:

بجوار 1 : $g(x)\simeq-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

ومنه،

$$\sqrt{0,995}=\sqrt{2-1,005}$$

$$=g(1,005)$$

$$\simeq-\frac{1}{2}(1,005)+\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{0,995}\simeq\boxed{0,9975}$$

$$\sqrt{1,01}=\sqrt{2-0,99}$$

$$=g(0,99)$$

$$\simeq-\frac{1}{2}(0,99)+\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1,01}\simeq\boxed{1,005}$$

3) $f(x)=\frac{4x+3}{1-x}$

أ- لدينا:

$$\frac{f(x)-3}{x}=\frac{\frac{4x+3}{1-x}-3}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\frac{4x+3-3(1-x)}{1-x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\frac{7x}{1-x}\right)$$

$$=\frac{7}{1-x}$$ وهو المطلوب.

حساب $f'(0)$:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7}{1-x}$$

$$=\boxed{7}$$

ب- معادلة المماس (Δ) عند الترتيبة 3:

نضع $f(x_0)=3$ معناه $\frac{4x_0+3}{1-x_0}=3$

لدينا في د: $\frac{4x_0+3}{1-x_0}=\frac{3-3x_0}{1-x_0}$ ومنه $\begin{cases}7x_0=0\\ x_0\neq 1\end{cases}$

إذن $\boxed{x_0=0}$.

نحسب معادلة (Δ) عند الفاصلة $x_0=0$

$$(\Delta):\ y=f'(0)(x)+f(0)$$

$$y=7x+3$$

قيمة مقربة: بجوار 0 : $f(x)\simeq 7x+3$

$$f(-0,004)\simeq 7(-0,004)+3$$

$$\simeq\boxed{2,972}$$

ت 4: حساب $f'(x)$:

1) $f'(x)=6x-1$

2) $f'(x)=3x^2+3$

3) $f'(x)=2x^2+\frac{1}{3}x-1$

(4) $f'(x)=2(x+1)\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)^2$

$=\frac{4x^2+4+x^2+2x+1}{2\sqrt{x}}$

$=\frac{5x^2+2x+5}{2\sqrt{x}}$

(5) $f'(x)=2-\frac{3(4-x^2)+2x(3x+2)}{(4-x^2)^2}$

$=2-\frac{3x^2+16}{(4-x^2)^2}$

(6) $f'(x)=3(8x^3)(2x^4-1)^2$

$=24x^3(2x^4-1)^2$

(7) $f'(x)=\frac{15x^2+4}{2\sqrt{5x^3+4x}}$

(8) $f'(x)=\frac{2(6x)(3x^2-1)}{(3x^2-1)^4}=\frac{12x}{(3x^2-1)^3}$

(9) $f'(x)=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}$

(10) $f'(x)=3\sqrt{x^2+2}+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}(3x)$

$=3\sqrt{x^2+2}+\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+2}}$

$=\frac{6x^2+6}{\sqrt{x^2+2}}$

(11) $f'(x)=3(-4x^3)(10-x^4)^2$

$=-12x^3(10-x^4)^2$

(12) $f'(x)=2\times3\cos(3x-1)\sin(3x-1)$

$=6\cos(3x-1)\sin(3x-1)$

(13) $f'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x+1)^2-2(x+1)(x^3-2x^2)}{(x+1)^4}$

$=\frac{x^3+3x^2-4x}{(x+1)^3}$

(14) $f'(x)=\frac{(-4x+1)(x^2-3x+2)-(2x-3)(-2x^2+x)}{(x^2-3x+2)^2}$

$=\frac{5x^2-11x+2}{(x^2-3x+2)^2}$

(15) $f'(x)=\frac{\frac{2x(x-3)-x^2-1}{(x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-3}}}$

$=\frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-3}}}$

$=\frac{x^2-6x-1}{2(x-3)\sqrt{x-3}\sqrt{x^2+1}}$

ت ك : دراسة اتجاه تغير f :

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+4$ ، $I=[-2;5]$

$f'(x)=x^2-1$

-2		-1		1		5
	+	0	−	0	+	

f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-2;-1]$ و $[1;5]$ ومتناقصة تماما على $[-1;1]$.

x	-2		-1		1		5
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\frac{10}{3}$	↗	$\frac{14}{3}$	↘	$\frac{10}{3}$	↗	$\frac{122}{3}$

(2) $f(x)=-2x^3+9x^2-18x-2$ ، $I=[0;3]$

$f'(x)=-6x^2+18x-12$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+3x-2=0$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=2$

0		1		2		3
	−	0	+	0	−	

f متناقصة تماما على كل من المجالين $[0;1]$ و $[2;3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;2]$.

س6: كتابة معادلة المماس (T):

① $f(x)=-3x^3+x-4 \quad , x_0=0$

$f'(x)=-9x^2+1 \Rightarrow f'(0)=1$

$(T): y=f'(0)(x)+f(0)=\boxed{x-4}$

② $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2} \quad , x_0=3$

$f'(x)=\dfrac{-5}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(3)=-5$

$(T): y=f'(3)(x-3)+f(3)$

$= -5x+15+7$

$y=-5x+22$

③ $f(x)=\dfrac{x^2+5x+2}{x^2+4x} \quad , x_0=-2$

$f'(x)=\dfrac{-x^2-4x-8}{(x^2+4x)^2} \Rightarrow f'(-2)=-\dfrac{1}{4}$

$(T): y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

$=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}+1$

$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$

④ $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2} \quad , x_0=1$

$f'(x)=2+\dfrac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'(1)=\dfrac{9}{4}$

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$=\dfrac{9}{4}x-\dfrac{9}{4}+\dfrac{19}{4}$

$y=\dfrac{9}{4}x+\dfrac{10}{4}$

س7:

① حلول المتراجحة $f'(x)\times f(x)\geq 0$

x	-5		-4		-3		-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)\times f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow S=[-4;-3]\cup[-2;-1]\cup[1;2]$

③ $f(x)=x^4-2x^2-1 \quad , I=[-2;2]$

$f'(x)=4x^3-4x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=-1$ أو $x=1$

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

f متناقصة تماما على كل من المجالين $[-2;-1]$ و $[0;1]$ ، ومتزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0]$ و $[1;2]$

④ $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1} \quad ; I=[-3;4]$

$f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-x^2+2x+1$

$-x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ \text{أو} \\ x=1-\sqrt{2} \end{cases}$

x	-3		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f متناقصة تماما على كل من المجالين $[-3;1-\sqrt{2}]$ و $[1+\sqrt{2};4]$ ، ومتزايدة تماما على المجال $[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$.

⑤ $f(x)=\dfrac{x^2+4x}{-2x^2+x-3} \quad ; I=[-4;4]$

$f'(x)=\dfrac{9x^2-6x-12}{(-2x^2+x-3)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $9x^2-6x-12$

$9x^2-6x-12=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-4=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{3}\simeq -0{,}9 \\ \text{أو} \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{3}\simeq 1{,}5 \end{cases}$

x	-4		x_1		x_2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على كل من المجالين $\left[-4;\dfrac{1-\sqrt{13}}{3}\right]$ و $\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{3};4\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{3};\dfrac{1+\sqrt{13}}{3}\right]$

2) بقراءة بيانية:

$f'(-3)=f'(-\frac{1}{2})=0$ (مماس أفقي) حد الذروة

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$$
$$=f'(-2)$$
$$=\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad \begin{cases} C(-2;0)\\ D(-3;3)\end{cases}$$
$$=\boxed{-3}$$

3) معادلات المماسات:

$(T_A): y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$
$\underbrace{\quad}_{=0}(x+3)+1$
$y=1$

$(T_B): y=f'(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})$
$=0(x+\frac{1}{2})-\frac{9}{4}$
$y=-\frac{9}{4}$

$(T_C): y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$
$=-3(x+2)+0$
$y=-3x-6$

4) قيمة مقربة: بجوار -2 يكون لدينا:
$f(x)\simeq-3x-6$
ومنه
$f(-2{,}0003)\simeq-3(-2{,}0003)-6$
$\simeq 0{,}0009$

5) جدول تغيرات f:

x	-5		-3		$-\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	1	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	4

6) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة $y=m$

* من أجل $m\in]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$: لا توجد حلول
* // // $m\in[-3;-\frac{9}{4}[$: حل وحيد سالب
* // // $m=-\frac{9}{4}$: حلان سالبان
* // // $m\in]-\frac{9}{4};-2[$: 3 حلول سالبة
* // // $m=-2$: 3 حلول أحدها معدوم والآخران سالبان.
* // // $m\in]-2;1[$: 3 حلول مختلفة في الإشارة أحدها موجب.
* // // $m=1$: حلان مختلفان في الإشارة
* // // $m\in]1;4[$: حل وحيد موجب.

ت 8:

1) جدول تغيرات f:

x	-3		-1		0		1		2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$			‖	$+$			0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	0	↗	‖	↗	0	↗	3	↘	1

2) إشارة $f(x)$ على D_f:

x	-3		0		1		2		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

3) $g(x)=[f(x)]^2$

أ- مجموعة التعريف: $D_g=D_f=[-3;5]$

حساب $g'(x)$:

$g'(x)=2f'(x)f(x)$

إشارة $g'(x)$:

x	-3		-1		0		1		2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول تغيرات g:

x	-3		-1		0		1		2		3		5
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	4	↘	0	↗	‖	↘	0	↗	9	↘	1

4) $h(x)=\sqrt{f(x)}$

أ- مجموعة التعريف:

$D_h=[0;1[\cup[2;5]$
(حيث تكون f موجبة)

حساب $h'(x)$:

$h'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(x)$.

ب- جدول تغيرات h :

x	0		1		2		3		5
$h'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	‖	↗	0	↗	$\sqrt3$	↘	1

تمرين 09:

$f(x)=x\sqrt{3-x}$

1) أ- لكل $x\in]-\infty;3[$ لدينا:

$f'(x)=\sqrt{3-x}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}(x)$

$=\frac{2(\sqrt{3-x})^2-x}{2\sqrt{3-x}}$

$=\frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$ وهو المطلوب

ب- اتجاه تغير f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $6-3x$

$-\infty$		2		3
	$+$	0	$-$	

f متزايدة تماما على $]-\infty;2]$ ومتناقصة تماما على $[2;3]$.

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$		↗	2	↘	0

ج- حصر $f(x)$ من أجل $x\in[\frac{7}{3};\frac{5}{2}]$

بما أن f متناقصة تماما على $[2;3]$ فإن

$f(\frac{5}{2})\leq f(x)\leq f(\frac{7}{3})$

أي: $\frac{5}{2\sqrt2}\leq f(x)\leq\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

2) نضع $f'(x_0)=\sqrt3$ أي

$\frac{6-3x_0}{2\sqrt{3-x_0}}=\sqrt3$

$\Rightarrow \frac{6-3x_0-2\sqrt{9-3x_0}}{2\sqrt{3-x_0}}=0$

$\Rightarrow \begin{cases}6-3x_0=2\sqrt{9-3x_0}\\ x_0\neq 3\end{cases}$

بالتربيع نجد: $36+9x_0^2-36x_0=36-12x_0$

ومنه: $9x_0^2-24x_0=0$

$x_0=0$ (مقبول) أو $x_0=\frac{8}{3}$ (مرفوض)

ومنه (C_f) يقبل مماسا عند $x_0=0$ معامل توجيهه $\sqrt3$

معادلة (T) :

$(T): y=f'(0)(x)+f(0)$

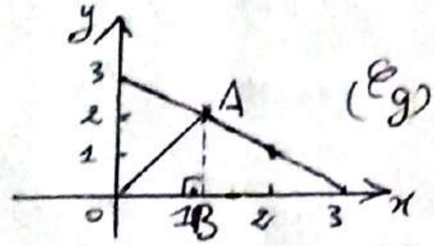
$y=\sqrt3\,x$

3) حساب $f(-1)=-2$

إنشاء (C_f) و (T) (يترك للتلميذ)

4) $g(x)=\sqrt{3-x}$

تعيين قيمة x حتى تكون مساحة OAB أعظمية.



$A(x;g(x))$, $B(x;0)$

$S_{OAB}=\frac{OB\times AB}{2}=\frac{x.g(x)}{2}$

$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{x\sqrt{3-x}}{2}=\frac{f(x)}{2}$

حسب ما سبق جدول تغيرات الدالة $\frac{f}{2}$ كما يلي:

x	0		2		3
$\frac{f}{2}(x)$	0	↗	1	↘	0

ومنه مساحة المثلث OAB تكون أعظمية من أجل $\boxed{x=2}$ (قيمة حدية محلية كبرى)

قيمة المساحة عندئذ $S_{OAB}=1$

تمرين 10:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

1) $f(0)=1\Rightarrow \boxed{d=1}$

② $f'(0)=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

③ $f(1)=2 \Rightarrow a+b+1=2 \Rightarrow a+b=1$

④ $f'(1)=1 \Rightarrow 3a+2b=1$

ومنه $a=1-b$

نعوض في ④ نجد: $3(1-b)+2b=1$

ومنه: $\boxed{b=2}$

معناه $\boxed{a=-1}$

إذن: $f(x)=-x^3+2x^2+1$

ت 11:

$$f(x)=a+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{b(x^2+1)-2x(bx+c)}{(x^2+1)^2}=\frac{-bx^2-2cx+b}{(x^2+1)^2}$$

① $f'(2)=0 \Rightarrow \frac{-4b-4c+b}{25}=0$

$\Rightarrow 3b+4c=0$ ... ①

② $f(1)=\frac{5}{2} \Rightarrow a+\frac{b+c}{2}=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2a+b+c=5$ ... ②

③ $f'(1)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5,5-2,5}{3-1}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow f'(1)=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{-b}-2c+\cancel{b}}{4}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \boxed{c=-3}$

بالتعويض في ① نجد: $3b+4(-3)=0$

$\Rightarrow \boxed{b=4}$

نعوض b و c في ② نجد: $2a+4-3=5$

$\Rightarrow \boxed{a=2}$

إذن: $f(x)=2+\frac{4x-3}{x^2+1}$

ت 12:

$$f_m(x)=\frac{mx+3}{m-x}$$

(C_m) يقبل عند الفاصلة 1 مماسا يعامد

$f_m'(1)\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow (\Delta): y=-\frac{1}{2}x+1$

$f_m'(1)=2 \Leftrightarrow$

$$f_m'(x)=\frac{m(m-x)+mx+3}{(m-x)^2}=\frac{m^2+3}{(m-x)^2}$$

$f_m'(1)=2$ يكافئ: $\frac{m^2+3}{(m-1)^2}=2$

$\begin{cases} m^2+3-2(m-1)^2=0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$-m^2+4m+1=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \Delta=20 \\ m_1=2+\sqrt{5} \\ m_2=2-\sqrt{5} \end{cases}$

إذن قيم m هي $m\in\left\{2+\sqrt{5}\,;\,2-\sqrt{5}\right\}$

ت 13:

I. $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$

① : $g(2)=0$، $g(1)=2$، $g(0)=4$

$g'(0)=g'(2)=0$ (مماس أفقي عند فاصلة الذروة)

② $\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$

$=g'(1)$

$=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\begin{cases} A(1\,;2) \\ B(0\,;5) \end{cases}$

$=\boxed{-3}$

معادلة المماس (T)

$(T)\ y=g'(1)(x-1)+g(1)$

$=-3(x-1)+2$

$y=-3x+5$

3) الوضع النسبي لـ (C_g) مع (T)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)-y$		0	
الوضع النسبي	(C_g) تحت (T)	(C_g) يخترق (T)	(C_g) فوق (T)

(C_g) يخترق (T) في النقطة $A(1;2)$
ومنه نستنتج أن A هي نقطة انعطاف لـ (C_g)

5) حلول المتراجحة $g'(x)<0$ هي
$S=]0;2[$

4) القيم المقربة
$g(x)\simeq -3x+5$ في جوار 1:
$g(1,003)\simeq -3(1,003)+5\simeq 1,991$
$g(0,99)\simeq -3(0,99)+5\simeq 2,03$

6) جدول تغيرات g:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

7) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

8) تعيين a، b و c:
$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$
$g'(x)=3x^2+2ax+b$
$g(0)=4 \Rightarrow \boxed{c=4}$
$g'(0)=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$
$g'(2)=0 \Rightarrow 12+4a=0 \Rightarrow \boxed{a=-3}$
إذن: $g(x)=x^3-3x^2+4$

II $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2-8}{8x}$

1) f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا:
$$f'(x)=\frac{(3x^2-12x)(8x)-8(x^3-6x^2-8)}{(8x)^2}$$
$$=\frac{16x^3-48x^2+64}{64x^2}$$
$$=\frac{x^3-3x^2+4}{4x^2}$$
$$=\frac{g(x)}{(2x)^2}$$ وهو المطلوب

2) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على كل من $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$
جدول تغيرات f:

x	-4		-1		0		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	$\frac{15}{8}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{5}{4}$

3) من أجل $x\in[-3;-2]$ تكون لدينا
$f(-2)\leq f(x)\leq f(-3)$ (لأن f متناقصة تماما)
أي $\dfrac{5}{2}\leq f(x)\leq \dfrac{89}{24}$

ت 14

$f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-2x+2}$

1) (C_f) هو المنحنى $(C2)$.

2) $f'(1)=-2$ ، $f(2)=0$ ، $f(0)=2$
من المنحنى $(C1)$
لأن $f''(1)=0$ و $(C1)$ يقبل ذروة فاصلتها 1.
($(C1)$ هو منحنى f')

3) إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

4) تبيان أن $a=-4$ ، $b=4$:

$$f(0)=\frac{b}{2}=2 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

$$f(2)=\frac{8+2a}{2}=0 \Rightarrow 4+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-4}$$

إذن:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+2}$$

5) أ- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا،

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x^2-2x+2)-(2x-2)(x^2-4x+4)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$ وهو المطلوب

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على كل من $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;2]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	

6) تبيان أن $w(1;1)$ مركز تناظر (C_f) :

لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $(2-x)\in\mathbb{R}$ ولدينا،

$$f(2-x)+f(x)=\frac{(2-x)^2-4(2-x)+4}{(2-x)^2-2(2-x)+2}+\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{2x^2-4x+4}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{2\cancel{(x^2-2x+2)}}{\cancel{x^2-2x+2}}$$

$$=2$$

أي $f(2-x)+f(x)=2$ إذن $w(1;1)$ هي مركز تناظر (C_f)

* معادلة المماس (T) عند w:

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$y=-2x+3$$

ب- دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (T):

$$f(x)-y=\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+2}-(-2x+3)$$

$$=\frac{x^2-4x+4-(-2x+3)(x^2-2x+2)}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{2(x^3-3x^2+3x-1)}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{2(x-1)^3}{x^2-2x+2}=\frac{2(x-1)(x-1)^2}{x^2-2x+2}$$

بما أن $x^2-2x+2>0$ على $\mathbb{R}$ $(\Delta<0)$

فإن إشارة الفرق من إشارة $(x-1)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (T)	(C_f) يخترق (T) في w	(C_f) فوق (T)

7)

$$k(x)=\frac{1}{f(x)}$$

أ- مجموعة التعريف:

$$D_k=\{x\in\mathbb{R} \,/\, f(x)\neq 0\}$$
$$=\mathbb{R}-\{2\}$$

حساب $k'(x)$

$$k'(x)=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

إشارة $k'(x)$ هي عكس إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

ومنه k متناقصة تماما على كل من $]-\infty;0]$ و $]2;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $[0,2[$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$k(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	

I ص 15

$g(x)=ax^3+bx^2+c$

$g'(x)=3ax^2+2bx$

1) تعيين a ، b و c :

$g(0)=-5 \Rightarrow \boxed{c=-5}$

$g'(-1)=0 \Rightarrow 3a-2b=0$ ... (1)

$g(-1)=-4 \Rightarrow -a+b-5=-4$

$\Rightarrow -a+b=1$ ... (2)

نضرب (2) في 2 ثم نجمع مع (1) نجد:

$\boxed{a=2}$

ومنه بالتعويض في (2) نجد: $\boxed{b=3}$

إذن:

$g(x)=2x^3+3x^2-5$

2) أ- حساب $g'(x)$:

$g'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب- اتجاه تغير g:

g متزايدة تماما على كل من $]-\infty;-1]$ و $[0;+\infty[$

ومتناقصة تماما على $[-1;0]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

جـ- $g(1)=0$

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

د- تبيان أن (C_g) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لـ $y=x$

نبحث عن x_0 بحيث $g'(x_0)=1$

أي $6x_0^2+6x_0=1$

$\Leftrightarrow 6x_0^2+6x_0-1=0$

$\Leftrightarrow \Delta=60$

$\Leftrightarrow x_0=\frac{-3+\sqrt{15}}{6}$ أو $x_0=\frac{-3-\sqrt{15}}{6}$

إذن (C_g) يقبل مماسين (T) عند $x_0=\frac{-3+\sqrt{15}}{6}$ و (T') عند $x_0=\frac{-3-\sqrt{15}}{6}$ موازيين لـ $y=x$ (للمنصف الأول). (المعادلة غير مطلوبة).

II. $f(x)=\frac{x^3-x+4}{x+1}$

1) لكل $x\in D_f$:

$f'(x)=\frac{(3x^2-1)(x+1)-x^3+x-4}{(x+1)^2}$

$=\frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}$

$=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ وهو المطلوب

2) اتجاه تغير f ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	-2		-1		1		3
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

f متناقصة تماما على كل من $[-2;-1[$ و $]-1;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;3]$.

جدول التغيرات:

x	-2		-1		1		3
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	7

3) معادلة المماس (Δ) عند النقطة $A(0;4)$

$(\Delta): y=f'(0)(x)+f(0)$

$y=-5x+4$

4) دراسة إشارة الفرق $f(x)-(-5x+4)$

$f(x)-(-5x+4)=\frac{x^3-x+4}{x+1}-(-5x+4)$

$=\frac{x^3-\cancel{x}+\cancel{4}+5x^2+\cancel{5x}-\cancel{4x}-\cancel{4}}{x+1}$

$=\frac{x^3+5x^2}{x+1}$

$=\frac{x^2(x+5)}{x+1}$

x	-2		-1		0	
x^2		$+$		$+$	0	$+$
$x+5$		$+$		$+$		$+$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$

منه إشارة الفرق كما يلي:

x	-2		-1		0	
$f(x)-y$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$

التفسير البياني:

(C_f) تحت (Δ) من أجل $x\in[-2;-1[$

(C_f) فوق (Δ) من أجل $x\in]-1;0[\cup]0;3]$

(C_f) يمس (Δ) في $A(0;-4)$.

5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

ومما سبق: $f'(1)=\dfrac{g(1)}{(1+1)^2}=0$

لأن $g(1)=0$

نستنتج أن (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا موازيا لحامل محور الفواصل (أفقي).

ت 16

$f(x)=-x^4+2x^2+3$

1) حل المعادلة $f(x)=0$

بوضع $t=x^2$ $(t\geq 0)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow -t^2+2t+3=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1=3 \\ t_2=-1 \text{ (مرفوض)} \end{cases}$

ومنه $x^2=3$ معناه $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

إذن: $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

التفسير البياني:

$(C_f)\cap(xx')=\{(-\sqrt{3};0),(\sqrt{3};0)\}$

2) إشارة $f(x)$:

حسب ① فإن: $f(t)=-(t-3)(t+1)$
$=(3-t)(t+1)$

ومنه: $f(x)=(3-x^2)(x^2+1)$

إشارة $f(x)$ من إشارة $3-x^2$ لأن $x^2+1>0$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن:

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3) دراسة اتجاه تغير f:

$f'(x)=-4x^3+4x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=-1$ أو $x=1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-4x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول تغيرات f على $[-2;2]$:

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5

4) من أجل $0\leq x\leq 2$ فإن،

$-3\leq f(x)\leq 4$ أو $-5\leq f(x)\leq 4$

إذن $-5\leq f(x)\leq 4$

5) أ- معادلة المماس (T) عند $x=\sqrt{3}$،

$(T):\ y=f'(\sqrt{3})(x-\sqrt{3})+f(\sqrt{3})$
$=-8\sqrt{3}(x-\sqrt{3})+0$

$y=-8\sqrt{3}x+24$

ب- قيمة مقربة،

$f(\sqrt{3}+0{,}004)\simeq -8\sqrt{3}(\sqrt{3}+0{,}004)+24$
$\simeq \boxed{-0{,}06}$

6) f دالة زوجية لأنه لكل x و $-x$ من $\mathbb{R}$:
$$f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 3 = f(x)$$
إنشاء (C_f) على $[-2;2]$: يترك للتلميذ

7) أ. كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة
$$g(x) = |-x^4 + 2x^2 + 3|$$
$$= |f(x)|$$
$$= \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -x^4 + 2x^2 + 3 & ; x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}] \\ x^4 - 2x^2 - 3 & , x \in [-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};2] \end{cases}$$

ب - (C_g) ينطبق على (C_f) لما $x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ ، ويناظره بالنسبة إلى محور الفواصل من أجل $x \in [-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};2]$

الإنشاء : يترك للتلميذ .

ت 17 :
$$f_m(x) = \frac{mx^2 + 2x + 3}{x+1}$$

1) تبيان أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة

نبحث عن $A(x_0;y_0)$ التي تحقق ،
من أجل كل $m \in \mathbb{R}$ ، $A \in (C_m)$.

$(A \in C_m)$ يكافئ ، $y_0 = \frac{mx_0^2 + 2x_0 + 3}{x_0 + 1}$
$$\Leftrightarrow \frac{y_0(x_0+1) - mx_0^2 - 2x_0 - 3}{x_0 + 1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y_0 - 2)x_0 + y_0 - 3 - mx_0^2 = 0 \quad (*) \\ x_0 \neq -1 \end{cases}$$
من أجل كل $m \in \mathbb{R}$: $(*)$ تكافئ :
$$\begin{cases} -x_0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 0} \\ (y_0 - 2)x_0 + y_0 - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{y_0 = 3} \end{cases}$$

إذن : تمر جميع المنحنيات (C_m) تشمل النقطة $A(0;3)$.

2) مناقشة عدد القيم الحدية المحلية للدالة f_m
$$f_m'(x) = \frac{(2mx + 2)(x+1) - mx^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{mx^2 + 2mx - 1}{(x+1)^2}$$
f_m تقبل قيمة حدية محلية $\Leftrightarrow$ $f_m'(x) = 0$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 2mx - 1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$
$$\Delta_m = 4m^2 + 4m = 4m(m+1)$$

m	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Δ_m		$+$	0	$-$	‖	$+$	

من أجل $m \in [-1;0]$: f_m لا تقبل قيما حدية محلية
" $m \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$: f_m تقبل قيمتين حديتين محليتين .

3) مناقشة عدد نقط تقاطع (C_m) مع حامل محور الفواصل :
(C_m) تقطع (xx') $\Leftrightarrow$ $f_m(x) = 0$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 2x + 3 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$
$$\Delta_m = 4 - 12m = 4(1 - 3m)$$

m	$-\infty$		0		$1/3$		$+\infty$
Δ_m		$+$	‖	$+$	0	$-$	

* من أجل $m = 0$ ، $m = \frac{1}{3}$: (C_m) يقطع (xx') في نقطة وحيدة .
* من أجل $m \in]-\infty;0[\cup]0;\frac{1}{3}[$: (C_m) يقطع (xx') في نقطتين .
* من أجل $m \in]\frac{1}{3};+\infty[$: (C_m) لا يقطع (xx')

ت 18 :

1) تبيان أن: $L=2x+\frac{392}{x}$

$L=2x+y=2x+\frac{392}{x}$ وهو المطلوب

2) نعتبر f حيث: $f(x)=2x+\frac{392}{x}$

أ. لكل $x\in]0;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=2-\frac{392}{x^2}$$
$$=\frac{2x^2-392}{x^2}$$
$$=\frac{2(x^2-196)}{x^2}$$
$$=\frac{2(x^2-14^2)}{x^2}$$
$$=\frac{2(x-14)(x+14)}{x^2}$$
وهو المطلوب.

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-14)(x+14)$

x	0		14		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

f متناقصة تماما على $]0;14]$ ومتزايدة تماما على $[14;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0		14		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	56	$\nearrow$	

3) استنتاج وضعية A و B :

A و B على بُعد $14m$ من O ، f تقبل عند قيمة $x_0=14$ قيمة حدية محلية صغرى ، طول السياج عندئذ هو $56m$.

دعواتكم لنا بالتوفيق

Prof: KHELOUF SARRA

II.
$$f_1(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$$

1) دراسة اتجاه تغير f_1 :

$$f_1'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

إشارة $f_1'(x)$ من إشارة x^2+2x-1

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

f_1 متزايدة تماما على كل من $]-\infty;-1-\sqrt{2}]$ و $[-1+\sqrt{2};+\infty[$ ومتناقصة تماما على كل من $[-1-\sqrt{2};-1[$ و $]-1;-1+\sqrt{2}]$.

2) من أجل $x\in[0;3]$ لدينا:

$0\leq x\leq -1+\sqrt{2}$ أو $-1+\sqrt{2}\leq x\leq 3$

$f(-1+\sqrt{2})\leq f_1(x)\leq f(0)$ (f_1 متناقصة تماما) ، $f(-1+\sqrt{2})\leq f_1(x)\leq f(3)$ (f_1 متزايدة تماما)

ومنه لما $x\in[0;3]$ فإن:

$$f_1(-1+\sqrt{2})\leq f_1(x)\leq f_1(3)$$
$$2\sqrt{2}\leq f_1(x)\leq \frac{9}{2}$$

3) تبيان أن (C_1) يقبل مماسا يشمل $A(1;2)$

$(T):\ y=f_1'(x_0)(x-x_0)+f_1(x_0)$

$$2=f_1'(x_0)(1-x_0)+f_1(x_0)$$
$$2=\frac{x_0^2+2x_0-1}{(x_0+1)^2}(1-x_0)+\frac{x_0^2+2x_0+3}{x_0+1}$$
$$2=\frac{(x_0^2+2x_0-1)(1-x_0)+(x_0^2+2x_0+3)(x_0+1)}{(x_0+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x_0^2+8x_0+2}{(x_0+1)^2}=2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+4x_0+1=(x_0+1)^2 \\ x_0\neq -1 \end{cases}$$

ومنه: $\boxed{x_0=0}$

كتابة معادلة (T): $(T):\ y=f_1'(0)x+f_1(0)$

$\boxed{y=-x+3}$