بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

سلاسل التفوق في الرياضيات

الجيل الثاني

السنة الرابعة من التعليم المتوسط

2020/2019

ملخصات دروس مرفقة بتمارين تطبيقية

ووضعيات بدون حلول.

أستاذة الرياضيات

جبلاحي حليمة

تذكـــير:

❖ قواسم عدد طبيعي:

a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.

✓ القول أن b قاسم للعدد a، معناه أن باقي القسمة الإقليدية لـ a على b هو 0.

✓ القول أن b قاسم للعدد a، معناه يوجد عدد طبيعي q حيث $a = b \times q$.

مثال:

$120 = 6 \times 20$ ومنه 6 قاسم للعدد 120 وحاصل القسمة $q = 20$

ولدينا: أيضا $120 = 6 \times 20$ ومنه 20 قاسم للعدد 120 و $q = 6$.

ملاحظات:

1. كل الجمل الآتية لها نفس المعنى:
   - b قاسم لـ a. • b يقسم a.
   - a يقبل القسمة على b. • a مضاعف لـ b.
2. 1 قاسم لكل عدد طبيعي a لأن $a = 1 \times a$.
3. كل عدد طبيعي غير معدوم يقبل القسمة على نفسه ونكتب: $a = a \times 1$

❖ خواص قواسم عدد طبيعي:

خاصية 01:

a، b و n أعداد طبيعية غير معدومة.

- إذا كان n يقسم كلا من a و b، فإن n يقسم $a + b$ و $a - b$ ($a \geq b$).
- إذا كان n يقسم a، فإنّ n يقسم $a \times k$ حيث k عدد طبيعي.

خاصية 02:

a، b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$.

إذا كان n يقسم كلا من a و b، فإنّ n يقسم باقي القسمة الإقليدية لـ a على b.

❖ تعيين قواسم عدد طبيعي:

للبحث عن قواسم عدد طبيعي a.

نجري القسمة الإقليدية للعدد a على الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها أصغر من a أو يساويه، وفي حالات الباقي المعدوم، فإنّ كلا من المقسوم عليه والناتج هما قاسمان للعدد a.

في حالة الأعداد 2، 3، 4، 5 و 9 نطبق قواعد قابلية القسمة.

مثال: عيّن كل قواسم العدد 124.

لدينا: 124 محصور بين 11^2 و 12^2 ومنه نختبر قابلية قسمة 124 على الأعداد من 1 إلى 11. نجد 124 يقبل القسمة على كل من الأعداد 1، 2، 4. ومن المساويات: $124 = 1 \times 124$ ، $124 = 2 \times 62$، $124 = 4 \times 31$.

نجد أن 124 يقبل القسمة على 31، 62، 124.

ومنه قواسم 124هي: 1، 2، 4، 31، 62، 124.

❖ القواسم المشتركة لعددين طبيعيين:

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين a و b هي الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تقسم a و b في آن واحد.

مثال:

6 قاسم مشترك لـ 12 و 18 لأن: $12 = 2 \times 6$ و $18 = 3 \times 6$

قواسم 12هي: 1، 2، 3، 4، 6، 12.

قواسم 18هي: 1، 2، 3، 6، 9، 18.

إذن القواسم المشتركة للعددين 12 و 18 هي 1، 2، 3، 6.

❖ القاسم المشترك الأكبر:

يُسمّى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين a و b القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين، ويرمز له بالرمز $PGCD(a;b)$.

مثال:

قواسم 12هي: 1، 2، 3، 4، 6، 12.

قواسم 18هي: 1، 2، 3، 6، 9، 18.

القواسم المشتركة لـ 12 و 18 هو 1، 2، 3، 6.

القاسم المشترك الأكبر لـ 12 و 18 هو 6.

ونكتب: $PGCD(12;18) = 6$

❖ طريقة إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

خوارزمية عمليات القسمات المتتابعة (خوارزمية اقليدس):

مثال: أوجد $PGCD(156;132)$

$$156 = 132 \times 1 + 24$$
$$132 = 24 \times 5 + 12$$
$$24 = 12 \times 2 + 0$$

إذن: $PGCD(156;132) = 12$

اخر باقي قسمة غير معدوم هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 156 و132

خوارزمية الفروق المتتابعة:

مثال: أوجد $PGCD(156;132)$

$$156 - 132 = 24$$
$$132 - 24 = 108$$
$$108 - 24 = 84$$
$$84 - 24 = 60$$
$$60 - 24 = 36$$
$$36 - 24 = 12$$
$$24 - 12 = 12$$
$$12 - 12 = 0$$

إذن: $PGCD(156;132) = 12$

اخر ناتج عملية طرح غير معدوم هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 156 و132

نتائج مباشرة:

a و b عددان طبيعيان.

- $PGCD(a;a) = a$
- $PGCD(a;0) = a$
- إذا كان b قاسما للعدد a فإن $PGCD(a;b) = b$
- $PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$

ملاحظات:

1. (a و b أوليان فيما بينهما) معناه ($PGCD(a;b) = 1$) معناه (الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال).
2. لاختزال الكسر $\frac{a}{b}$ الى كسر غير قابل للاختزال يكفي قسمة كلا من a و b على $PGCD(a;b)$.

تمارين – وضعيات

التمرين 01:

أوجد جميع قواسم الأعداد الآتية:

48، 75، 2×13، $3 \times 11 \times 17$

التمرين 02:

1. عين كل قواسم العددين 105 و 75.
2. ماهو أكبر قاسم مشترك لهما؟
3. ماهو أصغر قاسم مشترك لهما؟

التمرين 03:

باستعمال الفوارق المتتابعة، جد في كل حالة من الحالات الآتية القاسم المشترك الأكبر للعددين.

أ. $b = 580$ و $a = 928$

ب. $b = 496$ و $a = 806$

ج. $b = 1575$ و $a = 3465$

التمرين 04:

احسب القاسم المشترك الأكبر لكل من الأعداد التالية باستعمال خوارزمية اقليدس في كل حالة:

أ. $b = 348$ و $a = 725$

ب. $b = 693$ و $a = 845$

ج. $b = 1216$ و $a = 2736$

التمرين 05:

احسب ذهنيا القاسم المشترك الأكبر للعددين في كل حالة من الحالات الآتية:

أ. 60 و 60 ؛ ب. 45 و 0 ؛ ج. 10 و 200.

التمرين 06:

عيّن العدد الطبيعي a المحصور بين 25 و 40 و الذي يحقّق $PGCD(a;15)=5$.

التمرين 07:

عندما نقسم 402 على العدد x نجد الباقي 12.

عندما نقسم 488 على العدد x نجد الباقي 8.

- اوجد العدد x، علما أنّ $x>12$.

التمرين 08:

1. بيّن أن العددين 63 و 110 أوليان فيما بينهما.
2. بيّن أنّ: $\frac{63}{110}=\frac{441}{770}$
3. عين العدد الطبيعي n حيث: $\frac{441}{770}=\frac{315}{315+n}$

التمرين 09:

a و b عددان أوليان فيما بينهما.

- هل العددان $3a$ و $6b$ أوّليان فيما بينهما؟

التمرين 10:

x و y عددان طبيعيان غير معدومين بحيث: $240x=120y$.

1. احسب الكسر $\frac{x}{y}$.
2. أعط الناتج على شكل كسر غير قبل للاختزال.

التمرين 11:

اكتب كل كسر من الكسور التالية على شكل كسر غير قابل للاختزال.

$\frac{136}{104}$ ؛ $\frac{240}{520}$ ؛ $\frac{651}{310}$ ؛ $\frac{333}{666}$ ؛ $\frac{1978}{732}$

التمرين 12:

احسب وأعط النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

$$B=\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\div\frac{7}{12} \quad ; \quad A=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)\times\frac{7}{6}$$

$$\mathrm{D}=\frac{2-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} \quad ; \quad C=\frac{5}{2}\times\frac{\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\div 5}{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{4}}$$

التمرين 13:

إليك العدد E حيث $E=\frac{2175}{1044}+\frac{17}{12}$

1. هل العددان 2175 و 1044 أوليان فيما بينهما؟ علّل.
2. اكتب الكسر $\frac{2175}{1044}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.
3. استنتج كتابة للعدد E على شكل $a+\frac{b}{c}$ حيث a، b و c أعداد طبيعية مع a أكبر ما يمكن و b أصغر ما يمكن.

التمرين 14:

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1631 و 932.
2. اكتب الكسر $\frac{1631}{932}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.
3. احسب العدد A حيث: $A=\frac{1631}{932}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$

التمرين 15:

إليك الاعداد $A;B$ حيث:

$$B=\frac{90\times\left(10^3\right)^2\times12\times10^{-4}}{5\times10^3} \quad ; \quad A=\frac{133}{27}$$

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 133 و 27. ماذا تستنتج بالنسبة للكسر A.
2. أعط الكتابة العلمية للعدد B.

التمرين 16:

1. اكتب الكسر $\frac{210}{301}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.
2. احسب الفرق $\frac{210}{301}-\frac{17}{86}$ ثم اكتب النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

الوضعية 01:

اشترى عمي سعيد 1392 كراسا و812 كتابا من أجل توزيعها على أكبر عدد ممكن من التلاميذ المحتاجين بحيث كل تلميذ يحصل على كراريس وكتب في ان واحد ويجب ان تكون القسمة عادلة.

1. على كم تلميذ يمكن توزيع كل الكراريس وكل الكتب؟
2. كم كراس وكم كتاب يحصل عليه كل تلميذ؟

الوضعية 02:

يريد المسؤولون عن الحماية المدنية وضع 240 عون حماية و105 ضابطاً للحماية المدنية في مجموعات متماثلة وبأكبر عدد ممكن من الافراد.

1. احسب عدد المجموعات التي تمّ تشكيلها.
2. احسب عدد أعوان الحماية وعدد الضباط في كل مجموعة.

الوضعية 03:

عمي محمد الفلاح، يملك حقل نخيل مستطيلة الشكل طوله $135\,m$ و عرضه $39\,m$ يريد تسييجه. لهذا الغرض يغرس أعمدة متساوية المسافة عن بعضها البعض، حيث تكون هذه المسافة عدد طبيعي وأكبر من $2\,m$، بالإضافة إلى ذلك يضع عمود في كل ركن من أركان الحقل.

1. ماهي المسافة الفاصلة بين كل عمودين؟
2. ماهو عدد الأعمدة؟

الوضعية 04:

نريد ملء دنّين بالماء وذلك باستعمال دّن سعته xL حيث x عدد طبيعي.

نعلم أنّ سعة الدنّ ① هي $24\,L$ وسعة الدّن ② هي $18\,L$.

② ①

1. ماهي أكبر قيمة للعدد x؟ (نفرغ هذا الدّن كلّيا في كل مرّة).
2. كم مرّة استعملنا هذا الدّن لملء الدّن ①؟ لملء الدّن ②؟

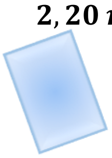
الوضعية 05:

قطعة أرض مستطيلة الشكل بعداها $165\,m$، $88\,m$ نريد أن نقيم عليها بيوتا بلاستيكية ذات قواعد مربعة الشكل لها نفس البعد d.

1. أوجد قيمة d حتى يكون عدد البيوت البلاستيكية أقل ما يمكن.
2. ماهو عندئذ عدد البيوت البلاستيكية؟

الوضعية 06:$(BEM\ 2010)$

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 140 و 220.
2. صفيحة زجاجية مستطيلة الشكل بعداها $1,40\,m$ و $2,20\,m$ جزئت إلى مربعات متساوية بأكبر ضلع دون ضياع .



أ. ماهو طول ضلع كل مربع؟

ب. ماهو عدد المربعات الناتجة؟

بالتوفيق والنجاح

العمليات على الكسور:

❖ جمع وطرح كسرين:

📖 لجمع (أو طرح) كسرين لهما نفس المقام نجمع (أو نطرح) البسطين ونحتفظ بالمقام المشترك.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \text{ ؛ } \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b} \quad (b \neq 0)$$

مثال 01:

$$\frac{5}{12}+\frac{8}{12}=\frac{5+8}{12}=\frac{13}{12}$$

مثال 02:

$$\frac{5}{17}-\frac{9}{17}=\frac{5-9}{17}=-\frac{4}{17}$$

📖 لجمع (أو طرح) كسرين مقام أحدهما مضاعف لمقام الآخر نكتب الكسرين بنفس المقام (توحيد المقامات).
ثمّ نجمع (أو نطرح) البسطين ونحتفظ بالمقام المشترك.

مثال 01:

$$\frac{1}{3}+\frac{7}{12}=\frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{7}{12}=\frac{4}{12}+\frac{7}{12}=\frac{4+7}{12}=\frac{11}{12}$$

مثال 02:

$$\frac{1}{2}-\frac{9}{16}=\frac{1\times 8}{2\times 8}-\frac{9}{16}=\frac{8}{16}-\frac{9}{16}=\frac{8-9}{16}=-\frac{1}{16}$$

❖ ضرب كسرين:

لضرب عددين مكتوبين على شكل كسر، نضرب البسطين فيما بينهما و نضرب المقامين فيما بينهما.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d} \quad (b \neq 0) \text{ و } (d \neq 0)$$

مثال 01:

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times 5}{3\times 7}=\frac{10}{21}$$

مثال 02:

$$3\times\frac{4}{5}=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}$$

❖ قسمة كسرين:

مثال 01:

$$\frac{2}{3}\div\frac{5}{13}=\frac{2}{3}\times\frac{13}{5}=\frac{2\times 13}{3\times 5}=\frac{26}{15}$$

مثال 02:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{7}}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}=\frac{1\times 7}{3\times 2}=\frac{7}{6}$$

القوى ذات أسس صحيحة نسبية:

❖ قواعد الحساب على قوى عدد نسبي:

a و b عددان نسبيان غير معدومين؛ n و m عددان صحيحان.

$(a^n)^m=a^{n\times m}$ ؛ $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ ؛ $a^n\times a^m=a^{n+m}$ ؛

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ ؛ $(a\times b)^n=a^n\times b^n$

أمثلة:

$10^3\times 10^4=10^{3+4}=10^7$ ؛ $\frac{10^7}{10^5}=10^{7-5}=10^2$

$(10^2)^3=10^{2\times 3}=10^6$ ؛ $\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}$

$(5\times 3)^2=5^2\times 3^2=25\times 9=225$

القيم المقربة:

❖ لدينا: $A=\frac{41}{13}\approx 3,153846\cdots\cdots$

3 هو القيمة المقربة بالنقصان إلى الوحدة للعدد A.
$3,1$ هو القيمة المقربة بالنقصان إلى $0,1$ للعدد A.
$3,15$ هو القيمة المقربة بالنقصان إلى $0,01$ للعدد A.
$3,153$ هو القيمة المقربة بالنقصان إلى $0,001$ للعدد A.

4 هو القيمة المقربة بالزيادة إلى الوحدة للعدد A.
$3,2$ هو القيمة المقربة بالزيادة إلى $0,1$ للعدد A.
$3,16$ هو القيمة المقربة بالزيادة إلى $0,01$ للعدد A.
$3,154$ هو القيمة المقربة بالزيادة إلى $0,001$ للعدد A.

3 هو المدور إلى الوحدة للعدد A.
$3,2$ هو المدور إلى $0,1$ للعدد A.
$3,15$ هو المدور إلى $0,01$ للعدد A.
$3,154$ هو المدور إلى $0,001$ للعدد A.

❖ تدوير عدد عشري إلى الوحدة:

مدور عدد عشري إلى الوحدة هو أقرب عدد طبيعي إليه لإيجاد مدور عدد إلى الوحدة تنظر إلى رقم أعشار:
إذا كان رقم أعشار 0، 1، 2، 3، 4 نأخذ القيمة المقربة إلى الوحدة بالنقصان.
إذا كان رقم أعشار 5، 6، 7، 8، 9 نأخذ القيمة المقربة إلى الوحدة بالزيادة.

أمثلة:

مدور العدد $19,287$ إلى الوحدة 19.
مدور العدد $19,843$ إلى الوحدة 20.

ملاحظة:

إذا لم يشترط في السؤال أن القيمة تأخذ مدور أو مقرب بالنقصان أو بزيادة فنأخذ التقريب كالتالي:

- في حساب الاطوال نأخذ بعد الفاصلة رقم واحد فقط.
- في حساب $\sin\alpha$ أو $\cos\alpha$ أو $\sin\alpha$ من الاحسن أخذ بعد الفاصلة ثلاث أرقام فقط.
- في حساب الزوايا من الاحسن نأخذ المدور إلى الوحدة من الدرجة.

الأولوية في الحساب:

❖ الأولوية في الحساب:

📖 في سلسلة عمليات نجري:

✓ العمليات داخل الاقواس والداخلية أولا.
✓ العمليات على القوى.
✓ الضرب والقسمة قبل الجمع و الطرح.

مثال:

$M=26-(3-1)^3\times 3$
$M=26-2^3\times 3$
$M=26-8\times 3$
$M=26-24$
$M=2$

الكتابة العلمية لعدد:

❖ **الكتابة العلمية لعدد:**

كتابة عدد عشري كتابة علمية تعني كتابته على شكل $a \times 10^n$ حيث n عدد صحيح نسبي و a عدد عشري مكتوب برقم واحد (غير معدوم) قبل الفاصلة .

أمثلة:

$4800 = 4.8 \times 10^3$

$12,05 = 1,205 \times 10^1$

$0,067 = 6.7 \times 10^{-2}$

جداول وحدات القياس:

❖ **جدول الأطوال:**

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

أمثلة:

$1\ km = 1000\ m$ ؛ $1\ m = 100\ cm$

$1\ m = 0,001\ km$ ؛ $1\ cm = 0,01\ m$

❖ **جدول المساحات:**

		ha		a		ca							
km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	

أمثلة:

$1\ km^2 = 1000000\ m^2$ ؛ $1\ a = 100\ m^2$

$1\ m^2 = 0,000001\ km^2$ ؛ $1\ m^2 = 0,01\ a$

❖ **جدول الحجوم:**

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		

أمثلة:

$1\ km^3 = 1000000000\ m^3$ ؛ $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$

$1\ m^3 = 0,000000001\ km^3$ ؛ $1\ cm^3 = 0,001\ dm^3$

❖ **جدول السعات:**

hl	dal	l	dl	cl	ml

أمثلة:

$1\ l = 1000\ ml$ ؛ $1\ l = 100\ cl$

$1\ ml = 0,001\ l$ ؛ $1\ cl = 0,01\ l$

❖ **جدول الحجوم والسعات:**

hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3		
									hl	dal	l	dl	cl	ml

أمثلة:

$1\ m^3 = 1000000\ cm^3$ ؛ $1\ l = 1000\ cm^3$

$1\ cm^3 = 0,000001\ m^3$ ؛ $1\ cm^3 = 0,001\ l$

❖ **جدول الأوزان:**

t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

أمثلة:

$1\ kg = 1000\ g$ ؛ $1\ q = 100\ kg$

$1\ g = 0,001\ kg$ ؛ $1\ kg = 0,01\ q$

تحويل بين وحدات الزمن:

أمثلة:

$1\ min = 60\ s$

$1\ h = 60\ min = 3600\ s$

$1\ jour = 24h = 1440\ min = 86400\ s$

مربعات الأعداد حتى العدد 30:

العدد	مربعه
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225

العدد	مربعه
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400
21	441
22	484
23	529
24	576
25	625
26	676
27	729
28	784
29	841
30	900

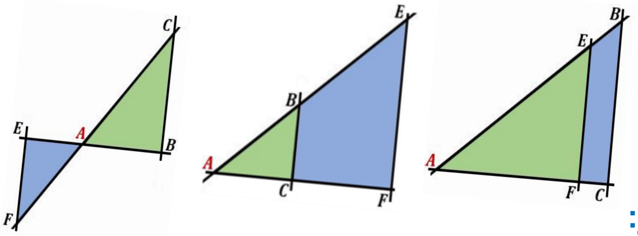
بالتوفيق والنجاح

تذكــــير:

❖ خاصية طالس:

(BE) و (CF) مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
إذا كان (EF) و (BC) متوازيين، فإنّ:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC} \quad \text{أو} \quad \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{EF}$$



نتائج:
الجدول الآتي هو جدول تناسبية:

أطوال أضلاع المثلث AEF	AE	AF	EF
أطوال أضلاع المثلث ABC	AB	AC	BC

والمثلث AEF هو تكبير أو تصغير للمثلث ABC.

ملاحظة 01: (BE) و (CF) مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
يكفي عدم تساوي نسبتين من النسب $\frac{AE}{AB}$، $\frac{AF}{AC}$ و $\frac{EF}{BC}$ للقول أنّ المستقيمين (EF) و (BC) غير متوازيين.

ملاحظة 02: تسمح خاصية طالس بحساب الاطوال والنسب وإثبات عدم توازي مستقيمين.

❖ خاصية طالس وتناسب الأطوال:

ABC و AEF مثلثان في وضعية طالس.

- لاستنتاج الأطوال المتناسبة في المثلثين ننظم رؤوسهما كالآتي:

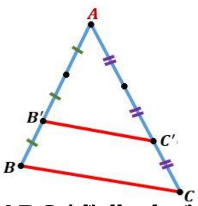
A	B	C
A	E	F

- ثم ننشئ جدول التناسبية التالي:

AB	AC	BC	
AE	AF	EF	$\times k$

معامل التناسبية هو العدد الموجب تماما k.
ولدينا: $AE = k\times AB$ و $AF = k\times AC$ و $EF = k\times BC$.
في الحالة $k<1$: k هو معامل التصغير والمثلث AEF تصغير للمثلث ABC.
في الحالة $k>1$: k هو معامل التكبير والمثلث AEF تكبير للمثلث ABC.

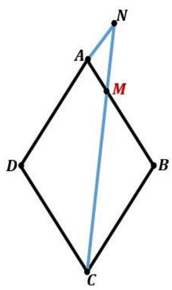
مثال: المثلثان ABC و $AB'C'$ في وضعية طالس.



لدينا: $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{2}{3}$
ومنه: $AB'=\frac{2}{3}AB$ و $AC'=\frac{2}{3}AC$
و $B'C'=\frac{2}{3}BC$.
لدينا معامل التناسبية هو $\frac{2}{3}$ إذن المثلث $AB'C'$ هو تصغير للمثلث ABC.

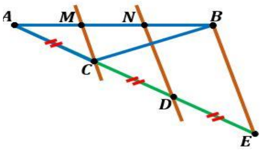
📖 حساب أطوال:

مثال: (وحدة الأطوال هي السنتيمتر)
$ABCD$ معين حيث $AB = 3,3$.
M نقطة من القطعة $[AB]$ حيث $MB = 2,2$.
المستقيم (CM) يقطع المستقيم (DA) في N.
إنجاز شكلا مناسبا ثم حساب AN:



لدينا: $(AD)//(BC)$ (لأنّ $ABCD$ معين)،
بما أن N تقع على (AD) إذن $(AN)//(BC)$،
ينتج أنّ المثلثين MBC و MNA في وضعية طالس،
وبالتالي يكون: $\frac{AN}{BC}=\frac{MN}{MC}=\frac{MA}{MB}$ نأخذ: $\frac{MA}{MB}=\frac{AN}{BC}$
أي: $\frac{1,1}{2,2}=\frac{AN}{3,3}$ ومنه: $AN=\frac{1,1\times 3,3}{2,2}=1,65$

📖 تقسيم قطعة مستقيمة:



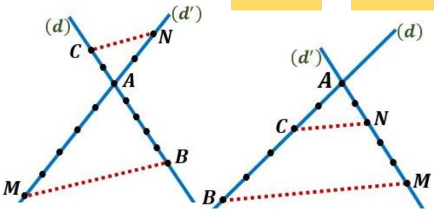
ABC مثلث. D هي نظيرة A بالنسبة إلى C و E نظيرة C بالنسبة إلى D. تقسيم الضلع $[AB]$ إلى 3 قطع متقايسة.
المستقيم الذي يشمل C ويوازي (BE) يقطع (AB) في M.
المستقيم الذي يشمل D ويوازي (BE) يقطع (AB) في N.

- المثلثان ACM و AEB في وضعية طالس إذن: $\frac{AM}{AB}=\frac{AC}{AE}=\frac{1}{3}$
ومنه: $AM=\frac{AB}{3}$ ...①
- المثلثان ADN و AEB في وضعية طالس إذن: $\frac{AN}{AB}=\frac{AD}{AE}=\frac{2}{3}$ ومنه: $AN=\frac{2AB}{3}$.
- لدينا $NB = AB - AN = AB - \frac{2AB}{3} = \frac{AB}{3}$ ...②
- لدينا C منتصف $[AD]$ و $(MC)//(ND)$ إذن M منتصف $[AN]$
ومنه $AM = MN$ ...③

من ① و ② و ③ نستنتج أن $AM = MN = NB = \frac{AB}{3}$.
وهكذا قسّمنا الضلع $[AB]$ إلى 3 قطع متقايسة.

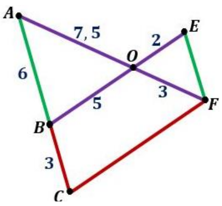
❖ الخاصية العكسية لخاصية طالس:

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
C و B نقطتان من (d) تختلفان عن A.
M و N نقطتان من (d) تختلفان عن A.
إذا كان $\frac{AN}{AM}=\frac{AC}{AB}$ والنقط A,C,B و A,N,M مرتبة بنفس الترتيب، فإنّ $(MB)\,//\,(CN)$.
يمكن ترجمة هذه الخاصية بإحدى الوضعيتين التاليتين:



📖 إثبات توازي (أو عدم توازي) مستقيمين:

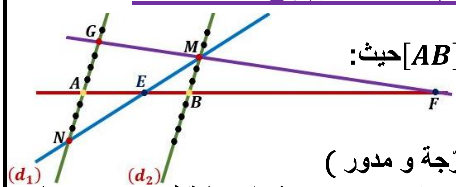
مثال: (وحدة الأطوال هي السنتيمتر)



1. في الشكل المقابل، لدينا:
① ... $\frac{OA}{OF}=\frac{7,5}{3}=2,5$
② ... $\frac{OB}{OE}=\frac{5}{2}=2,5$
من ① و ② نجد $\frac{OA}{OF}=\frac{OB}{OE}$ و بما أن النقط A، O، F و النقط B، O، E في استقامية وبنفس الترتيب إذن حسب الخاصية العكسية لطالس فإنّ $(AB)//(EF)$.
2. النقط A، O، F و النقط A، B، C في استقامية وبنفس الترتيب
$\frac{AF}{AO}=\frac{10,5}{7,5}=1,4$ و $\frac{AC}{AB}=\frac{9}{6}=1,5$ إذن: $\frac{AF}{AO}\neq\frac{AC}{AB}$.
لو كان المستقيمان (BO) و (CF) متوازيين لكان $\frac{AF}{AO}=\frac{AC}{AB}$ حسب خاصية طالس، لكن المساواة خاطئة، إذن المستقيمان (BO) و (CF) غير متوازيين.

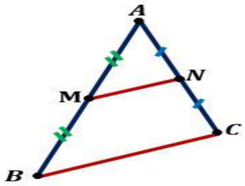
📖 إنشاء النقطة التي تقسم قطعة مستقيم إلى نسبة معلومة :

مثال: $[AB]$ قطعة مستقيم.
إنشاء نقطة E من القطعة $[AB]$ حيث: $\frac{EA}{EB}=\frac{4}{3}$



(استعمال مسطرة غير مدرّجة و مدور)
نرسم مستقيمين (d_1) و (d_2) متوازيين ويشملان النقطتين A و B على الترتيب ومدرجين بانتظام وبنفس الوحدة. للحصول على وضعية طالس يكفي تعيين نقطة M على (d_2) بحيث $BM = 3$ ونقطة N على (d_1) بحيث $AG = AN = 4$. لدينا (MN) يقطع (AB) في E. بتطبيق خاصية طالس في المثلثين AEN و EBM ينتج أن: $\frac{4}{3}=\frac{AN}{BM}=\frac{EA}{EB}$ و بالتالي E هي النقطة من $[AB]$ تقسيم $[AB]$ في النسبة $\frac{4}{3}$.

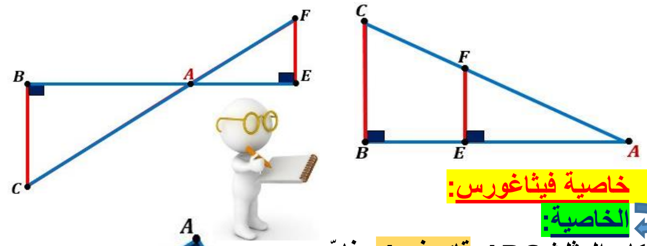
❖ إثبات ان: $(MN)//(BC)$



في المثلث ABC.
M منتصف $[AB]$ و N منتصف $[AC]$،
إذن حسب خاصية مستقيم المنتصفين فإنّ:
$(MN)//(BC)$.

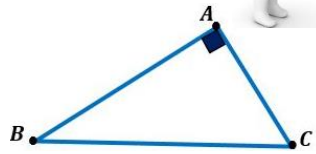
❖ استنتاج أن: $(EF)//(BC)$

بما أن: $(BE)\perp(EF)$ و $(BE)\perp(BC)$ فإنّ: $(EF)//(BC)$.



❖ خاصية فيثاغورس:

الخاصية:



إذا كان المثلث ABC قائم في A، فإنّ
مربع طول الوتر يساوي مجموع
مربعي طولي الضلعين الآخرين.
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

الخاصية العكسية:

إذا كانت أطوال المثلث ABC تحقق: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
فإن المثلث ABC قائم في A.

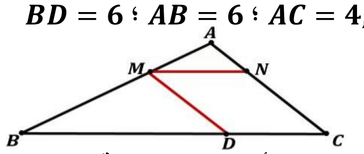
ملاحظة:

المثلث إذا كان أحد اضلاعه قطر للدائرة المحيطة به فهو مثلث قائم.

تماريـــــــــــن – وضعيــــات

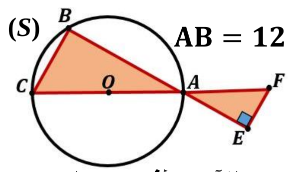
التمرين 01:

الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية (وحدة الطول هي السنتيمتر).
$BD = 6$ ؛ $AB = 6$ ؛ $AC = 4,5$ ؛ $BC = 9$ ؛ $AN = 1,5$
و $(MN)\ //\ (BC)$.



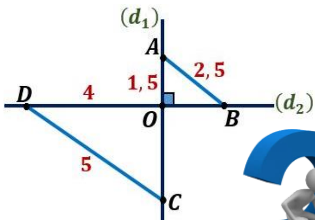
1. احسب طول AM .
2. بين أنّ: $(MD)\ //\ (AC)$.

التمرين 02: إليك الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.



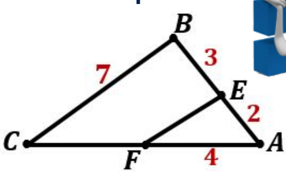
(S) دائرة مركزها O وقطرها $[AC]$.
$AB = 12\ cm$ ؛ $BC = 5\ cm$ ؛ $AF = 2,6\ cm$
1. بين أن المثلث ABC قائم في B.
2. استنتج أن: $(EF)\ //\ (BC)$.
3. احسب AC ؛ AE ؛ EF.
4. أيّ من المثلثين ABC و AEF يمثل تكبير للآخر؟ أذكر معامل التكبير.

التمرين 03:



لاحظ الشكل المعطى:
المستقيمان (d_1) و (d_2) متعامدان.
- هل (AB) يوازي (DC)؟

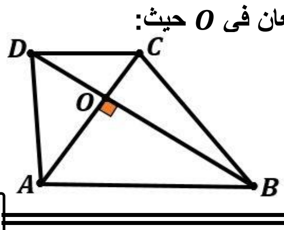
التمرين 04: $(BEM\ 2010)$



في الشكل المقابل $(EF)\ //\ (BC)$.
- احسب الطولين FC ؛ EF.

التمرين 05: $(BEM\ 2015)$

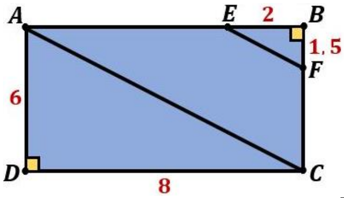
الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.
$ABCD$ رباعي قطراه متعامدان ومتقاطعان في O حيث:
$OB = 18\ cm$ ؛ $OA = 12\ cm$
$OD = 7,5\ cm$ ؛ $OC = 5\ cm$



1. برهن أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان.
2. احسب الطول AB.

التمرين 06: $(BEM\ 2018)$ (وحدة الطول هي السنتيمتر)

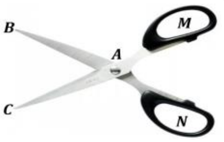
$ABCD$ مستطيل حيث: $AD = 6$ و $DC = 8$.



1. احسب الطول AC.
2. E و F نقطتان من الضلعين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب حيث: $BE = 2$ و $BF = 1,5$
- بيّن أنّ: (EF) يوازي (AC).

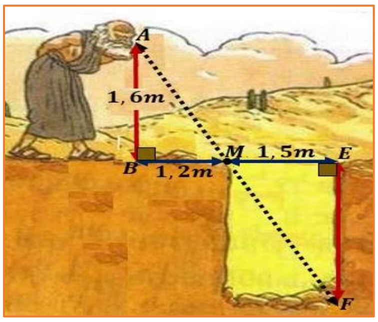
الوضعية 01:

الشكل المقابل يمثل مقص، مهما كانت الفتحة فإنّ:
$(MN)\ //\ (BC)$ متوازيان حيث:
$AB = AC = 5\ cm$ ؛ $AM = AN = 6\ cm$
عند استعمال هذا المقص فإنّ أكبر فتحة بين M و N تساوي $9\ cm$.



- احسب أكبر فتحة بين B و C.

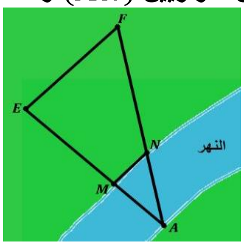
الوضعية 02:



تمعّن في الشكل الآتي:
- اوجد عمق الحفرة باستعمال المعطيات الموضحة في الشكل:

الوضعية 03:

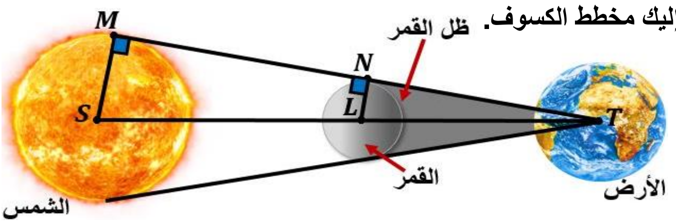
أراد أحمد تقدير عرض نهر، لهذا رسم مستقيمين متوازيين (MN) و (EF). عن طريق البصر جعل على استقامية النقط A، M، E من ناحية و النقط A، N، F من الجانب الاخر. قام أحمد بقياس الأطوال MN، EF، EM فوجد: $MN = 2\ m$، $EF = 5\ cm$ ؛ $EM = 6\ cm$.



- احسب AM.

الوضعية 04:

الكسوف هو ظاهرة تحجب فيها الشمس بمرور القمر بين الأرض و الشمس، وهي ظاهرة تحدث 6 أشهر، إلاّ أنها تلاحظ في أماكن معينة من الكرة الأرضية. في 03 أكتوبر 2005 حدث كسوف حلقي بالجزائر.
إليك مخطط الكسوف.



إذا علمت أنّ: نصف قطر الشمس هو $695000\ Km$ نصف قطر القمر هو $1736\ Km$، بعد مركز الشمس عن مركز الأرض هو $150000000\ Km$.
- ماهو بعد مركز القمر عن مركز الأرض؟

بالتوفيق والنجاح

تذكـــير:

❖ الجذر التربيعي لعدد موجب:

a عدد موجب.

الجذر التربيعي للعدد a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

نرمز للجذر التربيعي للعدد a بالرمز $\sqrt{a}$ ونقرأ: «الجذر التربيعي لـ a».

أمثلة: $\sqrt{4}=2$ لأن 4 عدد موجب و $2^2=4$.

كذلك $\sqrt{25}=5$، $\sqrt{1}=1$، $\sqrt{0}=0$، $\sqrt{0,04}=0,2$.

خواص: a عدد موجب.

- $\sqrt{a}$ هو العدد الموجب الذي مربعه a. أي: $(\sqrt{a})^2=a$.
- $\sqrt{a^2}$ هو العدد الموجب الذي مربعه a^2. أي: $\sqrt{a^2}=a$.

أمثلة: $(\sqrt{2})^2=2$، $(\sqrt{2,6})^2=2,6$، $\sqrt{5^2}=5$، $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{3}{7}$.

❖ الأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة:

a عدد ناطق موجب.

- في حالة a مربعا لعدد ناطق، يكون $\sqrt{a}$ عدداً ناطقاً.
- في حالة a ليس مربعا لعدد ناطق، فإنّ $\sqrt{a}$ ليس عدداً ناطقاً.

أمثلة:

- نعلم أن: $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ إذن $\sqrt{\frac{9}{16}}$ عدد ناطق، ولدينا $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$.
- نعلم أنّه لا يوجد عدد ناطق مربعه 11.إذن $\sqrt{11}$ عدد غير ناطق.

❖ المعادلات من الشكل $x^2=a$:

خاصية 01:

a عدد موجب.

يوجد عددان متعاكسان هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ مربع كل منهما يساوي a.

ملاحظة: مربع أي عدد هو دائما عدد موجب.

مثال:

$$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2=3$$
$$(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^2=3$$

العدد $-\sqrt{3}$ هو معاكس العدد الموجب $\sqrt{3}$.

خاصية 02:

a عدد كيفي.

- إذا كان $a>0$، فإنّ المعادلة $x^2=a$ تقبل حلين متعاكسين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.

مثال 01: حل المعادلة $x^2=7$.

$x^2=7$ ومنه $x=\sqrt{7}$ أو $x=-\sqrt{7}$ إذن المعادلة تقبل حلين متعاكسين هما $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$.

- إذا كان $a=0$، فإنّ المعادلة $x^2=a$ حلاّ واحداً و هو العدد 0.

مثال 02: حل المعادلة $x^2=0$.

$x^2=0$ ومنه $x=0$ إذن المعادلة تقبل حلاً واحداً وهو العدد 0 .

- إذا كان $a<0$، فإنّ المعادلة $x^2=a$ لا تقبل حلاً حقيقياً لأنّ $x^2\geq 0$.

مثال 03: حل المعادلة $x^2=-7$.

$x^2=-7$ ومنه المعادلة لا تقبل حلاً حقيقيا لأنّ x^2 موجب و (-7) عدد سالب تماماً.

❖ العمليات على الجذور التربيعية:

a و b عددان موجبان.

- $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$، أمثلة: $\sqrt{9\times2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{5\times3}=\sqrt{15}$

- $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b\neq0)$، أمثلة: $\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{30}{15}}=\sqrt{2}$

- $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$، مثال: $\sqrt{6}^2=6$.
- $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$، مثال: $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$

ملاحظة: المساواة غير محققة في كل من الجمع والطرح على الجذور التربيعية، أي:

- $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
- $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$ حيث $(a>b)$.

❖ توظيف خواص الجذور التربيعية:

طريقة: لكتابة الجذر التربيعي لعدد طبيعي n على الشكل $a\sqrt{b}$، حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.

نبحث عن أكبر مربع a^2 يقسم n، $n=a^2\times b$.

لتبسيط العبارة $x\sqrt{b}+y\sqrt{b}+z\sqrt{b}$ نطبق الخاصية التوزيعية:

$x\sqrt{b}+y\sqrt{b}+z\sqrt{b}=(x+y+z)\sqrt{b}$.

مثال: كتابة E على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.

$$E=5\sqrt{32}-3\sqrt{2}+7\sqrt{18}-2\sqrt{50}$$
$$E=5\sqrt{16\times2}-3\sqrt{2}+7\sqrt{9\times2}-2\sqrt{25\times2}$$
$$E=5\sqrt{4^2\times2}-3\sqrt{2}+7\sqrt{3^2\times2}-2\sqrt{5^2\times2}$$
$$E=5\times4\sqrt{2}-3\sqrt{2}+7\times3\sqrt{2}-2\times5\sqrt{2}$$
$$E=20\sqrt{2}-3\sqrt{2}+21\sqrt{2}-10\sqrt{2}$$
$$E=(20-3+21-10)\sqrt{2}$$
$$E=28\sqrt{2}$$

❖ نسبة مقامها عدد غير ناطق:

لجعل مقام النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عدد ناطقاً نضرب كلا من a و $\sqrt{b}$ في العدد $\sqrt{b}$

أمثلة: كتابة على شكل نسبة مقامها عدد ناطق كلا من $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{7}{2\sqrt{5}}$.

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}^2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$
$$\frac{7}{2\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{2\sqrt{5}^2}=\frac{7\sqrt{5}}{2\times5}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$$

تمارين – وضعيات

التمرين 01: اكتب كل عدد من الأعداد التالية كتابة عشرية.

$\sqrt{1,44}$ ؛ $\sqrt{0,09}$ ؛ $\sqrt{0,16}$ ؛ $\sqrt{25}$ ؛ $\sqrt{0,0001}$

التمرين 02: اكتب الأعداد التالية على شكل عدد طبيعي.

$\sqrt{(-5)^2}$ ؛ $\sqrt{0}$ ؛ $\sqrt{(-1)^4}$ ؛ $\sqrt{-(-49)}$ ؛ $\sqrt{-3(-12)}$

التمرين 03: اكتب كل عدد من الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 10.

$\sqrt{10^{-2}}$ ؛ $\sqrt{10^2}$ ؛ $\sqrt{10^{-4}}$ ؛ $\sqrt{10^4}$ ؛ $\sqrt{10^{-100}}$

التمرين 04: عين القيمة المقربة إلى الجزء من 100 بالنقصان و القيمة المقربة إلى الجزء من 100 بالزيادة لكل عدد مما يلي:

$4\sqrt{2}-1$ ؛ $8+\sqrt{11}$ ؛ $\sqrt{1,6}$ ؛ $7-\sqrt{3}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

التمرين 05: حل المعادلات التالية ذات المجهول x .

$x^2=-5$ ؛ $x^2+7=7$ ؛ $3x^2=12$ ؛ $x^2=\frac{1}{4}$ ؛ $x^2=2$

التمرين 06:

لتكن العبارة $M=x(2x-3)+3(x+2)-24$

1. انشر العبارة M وبسّطها.
2. عيّن قيم x التي تكون من أجلها $M=0$.

التمرين 07: احسب ما يلي:

$\sqrt{0,01\times64}$ ؛ $\sqrt{25\times1600}$ ؛ $\sqrt{0,9}\times\sqrt{0,4}$ ؛ $\sqrt{8}\times\sqrt{2}$

التمرين 08: اكتب كل عدد مما يلي على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.

$\sqrt{252}$ ؛ $\sqrt{200}$ ؛ $\sqrt{12}$ ؛ $\sqrt{125}$ ؛ $\sqrt{1053}$

التمرين 09: اكتب كل عدد مما يلي على الشكل $\sqrt{n}$ حيث n عدد طبيعي.

$7\sqrt{7}$ ؛ $2\sqrt{8}$ ؛ $4\sqrt{0,25}$ ؛ $0,6\sqrt{100}$ ؛ $3\sqrt{5}$

التمرين 10: اكتب كل عدد مما يلي على شكل كسر.

$\sqrt{\frac{25600}{400}}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{3600}}$ ؛ $\sqrt{\frac{1600}{22500}}$ ؛ $\sqrt{\frac{25}{121}}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{169}}$

التمرين 11: بسّط كل عدد مما يلي وأعط النتيجة على شكل كسر.

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{320}}$ ؛ $\frac{\sqrt{1100}}{\sqrt{1584}}$ ؛ $\frac{\sqrt{900}}{\sqrt{400}}$ ؛ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$ ؛ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

التمرين 12: اكتب كل عدد مما يلي على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

$\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$ ؛ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ ؛ $\frac{8}{\sqrt{11}}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{7}}$ ؛ $\frac{1+2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$

التمرين 13: عيّن العدد n في كل حالة مما يلي:

$\sqrt{2n} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ؛ $\frac{n}{\sqrt{7}} = 4-\sqrt{7}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{n}$

التمرين 14: A، B عددان حقيقيان حيث:

$A = \sqrt{180}$ ؛ $B = 2\sqrt{125}$

1. اكتب A و B على شكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان موجبان و b أصغر ما يمكن .
2. بيّن أنّ $A \times B$ عدد طبيعي .
3. حلّ المعادلة $x^2 = A \times B$.

التمرين 15: $(BEM\ 2009)$

لتكن الأعداد A، B، C حيث:

$C = \sqrt{5}+1$ ، $B = 2\sqrt{45}$ ، $A = \sqrt{80}$

1. اكتب $A+B$ على الشكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد طبيعي.
2. بيّن أن العدد $A \times B$ هو عدد طبيعي.
3. اكتب $\frac{C^2}{\sqrt{5}}$ على نسبة مقامها عدد ناطق.

التمرين 16: $(BEM\ 2012)$

ليكن العددان الحقيقيان m و n حيث:

$m = \sqrt{112} - 3\sqrt{28} + 3\sqrt{7} - \sqrt{25}$ ؛ $n = (\sqrt{7}+3)(4-\sqrt{7})$

1. اكتب كلا من العددين m و n على الشكل $a\sqrt{7}+b$ حيث a و b عددان نسبيان.
2. بيّن أن الجداء $m \times n$ عدد ناطق .
3. اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}}$ عددا ناطقا.

التمرين 17: $(BEM\ 2014)$

إليك الاعداد A، B، C حيث:

$A = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{4}$ ؛ $B = \frac{1,2\times10^{-2}\times7}{12,5\times10^{3}}$ ؛

$C = \sqrt{175} - \sqrt{112} + 6\sqrt{7}$

1. احسب A ثم اكتبه على الشكل العشري .
2. أعط الكتابة العلمية للعدد B .
3. اكتب C على أبسط شكل ممكن.

التمرين 18: $(BEM\ 2017)$

A، B عددان حقيقيان حيث:

$A = \sqrt{108} - \sqrt{12}$ ؛ $B = \frac{3}{2\sqrt{3}}$

1. اكتب العدد A على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي .
2. اكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .
3. بيّن أن C هو عدد طبيعي حيث: $C = (A+1)(8B-1)$.

التمرين 19: $(BEM\ 2018)$

A و B عددان حيث:

$A = 3\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ و $B = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}$

1. بيّن أنّ A عدد طبيعي.
2. اكتب العدد B على شكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي.
3. بيّن أنّ: $\frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

التمرين 20: $(BEM\ 2019)$

ليكن العددان الحقيقيان A و B حيث:

$A = \frac{9}{7} \times \left(\frac{10}{3} - 1\right)$ و $B = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{48}$

1. بيّن أن A عدد طبيعي.
2. اكتب العدد B على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي.
3. اكتب $\frac{A}{B}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

الوضعية 01:

a و b عددان حقيقيان حيث:

$a = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ؛ $b = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

1. اكتب كلا من العددين a و b على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .
2. احسب مساحة قطعة أرض مستطيلة الشكل التي بعداها a و b (وحدة الطول هي الكيلومتر)

الوضعية 02:

غرفة آلاء على شكل مربع مساحتها $16\ m^2$ تريد تزيين حافة أرضية الغرفة بإحاطتها بشريط لاصق مزخرف.

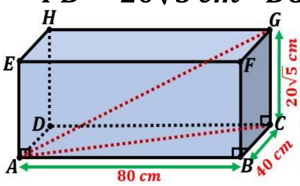
- ساعد آلاء على إيجاد طول الشريط.

الوضعية 03:

سبّاك لديه أنبوب نحاسي طوله $95\ cm$ وصندوق شكله متوازي مستطيلات أبعاده كالتالي:

$AB = 80\ cm$ ؛ $BC = 40\ cm$ ؛ $FB = 20\sqrt{5}\ cm$

- هل يستطيع هذا السبّاك وضع هذا الأنبوب في الصندوق (اشرح ذلك، علماً أن قطر وسمك الصندوق مهملين)؟



الوضعية 04:

أرادت أسيل شراء سجادة مستطيلة الشكل لوضعها على أرضية غرفة الاستقبال. عندما طلبت من البائع بعديها أجاب التاجر بالعبارة التالية: مساحتها $24\ m^2$ وطولها ضعف عرضها.

- ساعد أسيل على معرفة طول وعرض هذه السجادة. (تدوّر النتائج إلى cm)

بالتوفيق والنجاح

تذكير:

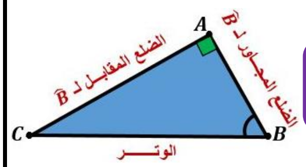
❖ **جيب تمام وجيب وظل زاوية حادة:**

في المثلث ABC قائم في A.

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{طول الضلع المجاور لـ } \hat{B}}{\text{طول الوتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \hat{B}}{\text{طول الوتر}} = \frac{AC}{BC}$$

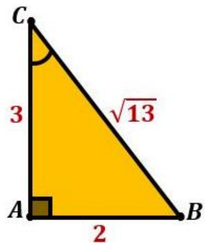
$$\tan \hat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \hat{B}}{\text{طول الضلع المجاور لـ } \hat{B}} = \frac{AC}{AB}$$



ملاحظات:

1. الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم.
بالتالي $\cos \hat{B}$ و $\sin \hat{B}$ هما عددان محصوران بين 0 و 1.
2. ظل زاوية حادة في مثلث قائم هو عدد موجب.

مثال: من الشكل المقابل لدينا:



$$\cos \hat{C} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

$\frac{2}{\sqrt{13}}$ هي القيمة المضبوطة للعدد $\sin \hat{C}$.

باستعمال حاسبة، نجد أن $0,55$ هي القيمة المقربة إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\sin \hat{C}$.

ملاحظة: لحساب طول ضلع في مثلث قائم يمكن استعمال النسبة المثلثية $\sin$ أو $\cos$ أو $\tan$.

❖ **استعمال الآلة الحاسبة في حساب نسب مثلثية:**

قبل استعمال الآلة الحسابة، يجب برمجتها بالوحدة الدرجة (d^o).

أمثلة:

1. حساب $Sin\, 30^o$:
نضغط بدءا من اليسار على:

الآلة 01: [3] [0] [Sin]

الآلة 02: [Sin] [3] [0] [)]

نقرأ: [0.5]

2. حساب قيس x علما أن $Sin\, x = 0,5$:
نضغط بدءا من اليسار على:

الآلة 01: [0] [.] [5] [2ndf] [Sin]

الآلة 02: [Shift] [Sin] [0] [.] [5] [)]

نقرأ: [30]

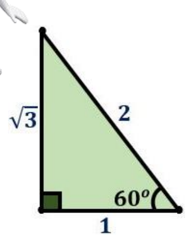
❖ **العلاقات بين النسب المثلثية في مثلث قائم:**

من أجل كل زاوية حادّة في مثلث قائم قيسها x، فإنّ:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{و} \quad \tan x = \frac{Sin\, x}{cos\, x}$$

ملاحظة: $Sin^2x = (Sin\, x)^2$ و $Sin^2x \neq Sin\, x^2$

مثال:



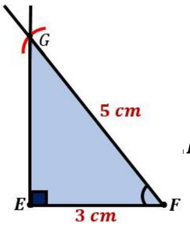
$$\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \cos 60^o = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$$(\cos 60^o)^2 + (\sin 60^o)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

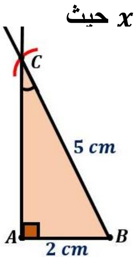
❖ **إنشاء هندسي لزاوية حادة علمت القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية:**

مثال 01: إنشاء، بدون استعمال منقلة الزاوية التي قيسها x حيث $\cos x = \frac{3}{5}$. تحقق بحاسبة ثم بمنقلة.



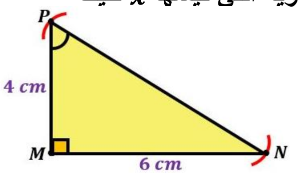
نضع وحدة الطول هي السنتيمتر.
ننشئ زاوية قائمة $\widehat{GEF}$ رأسها E.
نعيّن على أحد ضلعيها النقطة F حيث $EF = 3\ cm$.
نرسم الدائرة التي مركزها F ونصف قطرها $5\ cm$
تقطع هذه الدائرة الضلع الثاني في النقطة G.
في المثلث EFG القائم في E، لدينا: $\cos \hat{F} = \frac{EF}{GF} = \frac{3}{5}$. إذن: $x = \hat{F}$.
عند التحقق بحاسبة نجد $\hat{F} \approx 53,1^o$، وبالمنقلة نجد، $\hat{F} = 53^o$.

مثال 02: إنشاء، بدون استعمال منقلة الزاوية التي قيسها x حيث $\sin x = \frac{2}{5}$. تحقق بحاسبة ثم بمنقلة.



نضع وحدة الطول هي السنتيمتر.
ننشئ زاوية قائمة $\widehat{CAB}$ رأسها A.
نعيّن على أحد ضلعيها النقطة B حيث $AB = 2\ cm$.
نرسم الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $5\ cm$
تقطع هذه الدائرة الضلع الثاني لهذه الزاوية في النقطة C.
في المثلث ABC القائم في A، لدينا: $\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$. إذن: $x = \hat{C}$.
عند التحقق بحاسبة نجد $\hat{C} \approx 23,6^o$، وبالمنقلة نجد، $\hat{C} = 24^o$.

مثال 03: إنشاء، بدون استعمال منقلة الزاوية التي قيسها x حيث $\tan x = \frac{6}{4}$. تحقق بحاسبة ثم بمنقلة.



نضع وحدة الطول هي السنتيمتر.
ننشئ زاوية قائمة $\widehat{PMN}$ رأسها M.
نعيّن على الضلعين النقطتين N و P حيث $MP = 4\ cm$ و $MN = 6\ cm$ (نستعمل مسطرة مدرّجة و مدور)
في المثلث MNP القائم في M، لدينا: $\tan \hat{P} = \frac{MN}{MP} = \frac{6}{4}$. إذن: $x = \hat{P}$.
عند التحقق بحاسبة نجد $\hat{P} \approx 56,3^o$، وبالمنقلة نجد، $\hat{P} = 56^o$.

تمارين – وضعيات

التمرين 01:

EFG مثلث حيث: $EF = 3,7\ cm$ ؛ $EG = 3,5\ cm$ ؛ $FG = 1,2\ cm$.

1. أثبت أن المثلث EFG قائم.
2. احسب كلا من $\cos\widehat{FEG}$ ، $\sin\widehat{FEG}$ ، $\tan\widehat{FEG}$.

التمرين 02:

ABC مثلث قائم في A حيث: $AB = 12\ cm$ ؛ $BC = 13\ cm$.

1. احسب الطول AC.
2. احسب $\cos\hat{B}$ ، $\sin\hat{B}$ ، $\tan\hat{B}$ ، $\cos\hat{C}$ ، $\sin\hat{C}$ ، $\tan\hat{C}$.
3. احسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاويتان $\hat{B}$ و $\hat{C}$.

التمرين 03:

MNP مثلث قائم في M حيث: $MN = 4\ cm$ ؛ $NP = 5\ cm$.

1. احسب $\cos\widehat{MNP}$ ، $\sin\widehat{MNP}$ ، $\tan\widehat{MNP}$.
2. احسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية $\widehat{MNP}$.

التمرين 04:

أنشئ بدون استعمال منقلة، زاوية بحيث جيبها يساوي $0,8$.

عيّن قيس هذه الزاوية (بالحاسبة و بالمنقلة).تدوّر النتيجة إلى الدرجة.

التمرين 05:$(BEM\ 2011)$

ABC مثلث قائم الزاوية في A. $[AH]$ الارتفاع المتعلق بالوتر $[BC]$.

بيّن أنّ: $AB^2 = BH \times BC$ (يمكنك الاعتماد على $\cos\widehat{ABC}$ في كل من المثلثين ABC و ABH).

التمرين 06:$(BEM\ 2013)$

ABC مثلث قائم في B حيث: $AB = 4\ cm$ و $CB = 8\ cm$.

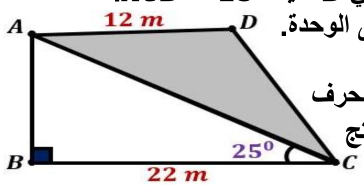
لتكن M نقطة من $[BC]$ حيث $BM = \frac{BC}{4}$، المستقيم (Δ) العمودي على (BC) في النقطة M يقطع $[AC]$ في النقطة H .

1. احسب الطول MH .
2. احسب $\tan\widehat{AMB}$ و استنتج قيس الزاوية $\widehat{AMB}$ بالتدوير الى الدرجة.

التمرين 07:$(BEM\ 2014)$

الشكل $ABCD$ شبه منحرف قائم في B، فيه $\widehat{ACB} = 25^o$.

1. احسب الطول AB بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ: $\tan\widehat{ACB}$).
2. احسب مساحة كل من شبه المنحرف $ABCD$ و المثلث ABC. ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.



تعطي:

$$\text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{(\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$$

التمرين 08: $(BEM\ 2018)$ (وحدة الطول هي cm)

TIC مثلث فيه: $CI = 13$ ؛ $TI = 5$ ؛ $TC = 12$

1. بيّن أنّ المثلث TIC قائم ثم احسب مساحته.
2. لتكن H المسقط العمودي للنقطة T على الضلع $[CI]$.
   - احسب الطول TH بالتدوير إلى $0,1$.

التمرين 09:$(BEM\ 2019)$

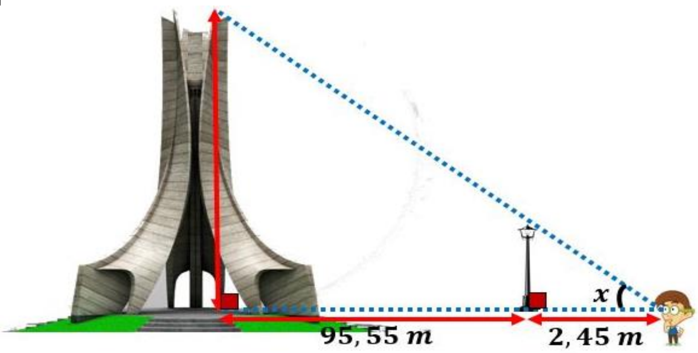
RST مثلث قائم في R حيث: $\sin\widehat{RTS} = 0,8$ و $RS = 8\ cm$.

1. احسب الطولين ST و TR.
2. لتكن M نقطة من $[TR]$ حيث $TM = 4\ cm$، المستقيم (Δ) العمودي على (TR) في النقطة M يقطع $[TS]$ في النقطة N.
   - احسب الطول MN بالتدوير إلى الوحدة من السنتيمتر.

الوضعية 01:

يريد أمجد قياس ارتفاع المعلم التاريخ « مقام الشهيد » المتواجد بالجزائر العاصمة.

لإنجاز هذه المهمة، استعان بعمود كهربائي طوله $2,30\ m$ ووقف في مكان حيث يشاهد قمة العمود الكهربائي وقمة« مقام الشهيد ».



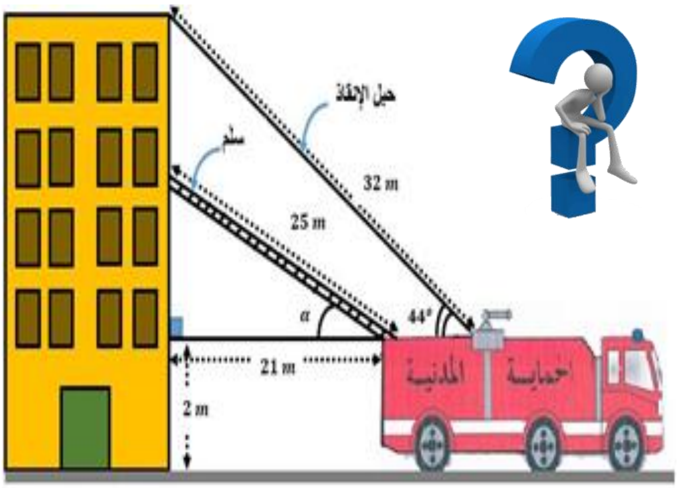
1. ساعد أمجد على إيجاد ارتفاع هذا المقام.
2. عيّن قيس الزاوية x المحدّدة على الشكل.

(يعطى المدوّر إلى الدرجة للزاوية x).

الوضعية 02:

الصورة المقابلة عملية إطفاء لحريق وإنقاذ لمواطنين محاصرين فوق العمارة، طول حبل الإنقاذ $32\ m$ والزاوية التي يصنعها حبل الإنقاذ مع الأفق 44^o .

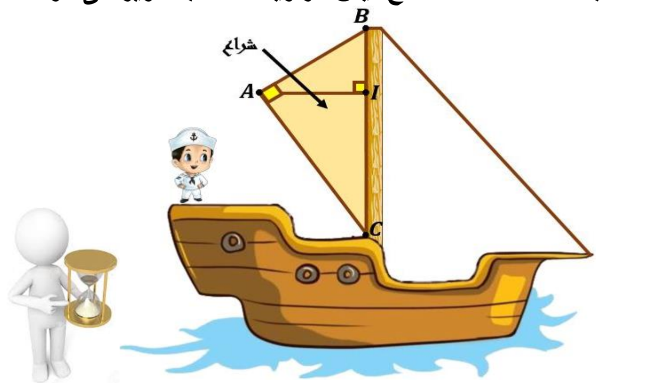
1. احسب ارتفاع العمارة بالتدوير الى الوحدة، حيث ارتفاع الشاحنة عن الأرض $2\ m$.
2. كما مبين لك في الشكل، طول السلّم $25\ m$ و بُعْدُ الشاحنة عن العمارة $21\ m$، أوجد قيس الزاوية α التي يصنعها السلّم مع الأفق (مستوى الارض) مدوراً إلى الوحدة.



الوضعية 03:

المخطط المقابل يمثل وجها جانبيا لسفينة شراعية صغيرة، نريد دراسة شراع هذه السفينة الذي هو على شكل مثلث ABC قائم في A وهو مثبت بعمود $[CB]$ على سطح السفينة عند النقطة C، المستقيمان (CB) و (IA) متعامدان، وبحيث $AB = 1,5\ m$ و $CA = 2\ m$.

1. احسب ارتفاع الشرّاع CB.
2. علما أن: $IC = 1,6\ m$، احسب الطول IA.
3. احسب $\cos\widehat{ICA}$، استنتج قيس الزاوية $\widehat{ICA}$ بالتدوير الى الوحدة.



بالتوفيق والنجاح

الأستاذة: جبلاحي حليمة

المستوى: الرابعة متوسط

سلسلة التفوق في الرياضيات رقم 05

الموسم الدراسي: 2019 - 2020

تذكـــير:

❖ **المتطابقات الشهيرة:**

النشر

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

التحليل

مثال 01: نشر العبارات الآتية:

■ $(2x+1)^2 = (2x)^2+(1)^2+2(2x)(1)$

$(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$

■ $(x-3)^2 = (x)^2+(3)^2-2(x)(3)$

$(x-3)^2 = x^2-6x+9$

■ $(\sqrt{3}x+5)(\sqrt{3}x-5) = (\sqrt{3}x)^2-(5)^2$

$(\sqrt{3}x+5)(\sqrt{3}x-5) = 3x^2-25$

مثال 02: تحليل العبارات الآتية:

■ $9x^2+12x+4 = (3x)^2+(2)^2+2(3x)(2)$

$9x^2+12x+4 = (3x+2)^2$

■ $x^2-2x+1 = (x)^2+(1)^2-2(x)(1)$

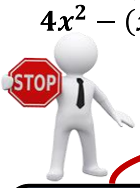
$x^2-2x+1 = (x-1)^2$

■ $4x^2-(x+1)^2 = (2x)^2-(x+1)^2$

$4x^2-(x+1)^2 = [2x+(x+1)][2x-(x+1)]$

$4x^2-(x+1)^2 = (3x+1)(x-1)$

❖ **الخاصية التوزيعية:**



النشر

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$(a+b)(c+d) = a(c+d)+b(c+d)$$

التحليل

مثال 01: نشر العبارات الآتية:

■ $4(2x+1) = 8x+4$

■ $(x+5)(3x+2) = x(3x+2)+5(3x+2)$

$(x+5)(3x+2) = 3x^2+2x+15x+10$

$(x+5)(3x+2) = 3x^2+17x+10$

■ $\sqrt{3}(\sqrt{12}x+1) = \sqrt{36}x+\sqrt{3} = 6x+\sqrt{3}$

مثال 02: تحليل العبارات الآتية:

■ $2x+4 = 2(x+2)$

■ $18-3x = 3(6-x)$

■ $5x^2-15x = 5x(x-3)$

■ $\frac{4}{3}x-\frac{16}{3} = \frac{4}{3}(x-4)$

■ $2x(x+3)-(x+3) = (x+3)(2x-1)$

■ $3x-12-(x-4)^2 = 3(x-4)-(x-4)^2$

$3x-12-(x-4)^2 = (x-4)[3-(x-4)]$

$3x-12-(x-4)^2 = (x-4)(3-x+4)$

$3x-12-(x-4)^2 = (x-4)(7-x)$

تماريـــــن – وضعيـــات

التمرين 01: انشر، ثم بسط العبارات التالية:

$(3x+1)^2$ ؛ $(x-5)^2$ ؛ $(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})$

$(7x+9)(x-1)$ ؛ $4x(3x+6)$

التمرين 02: حلّل العبارات الجبرية:

x^2+4x+4 ؛ $9x^2-6x+1$ ؛ $(3x-4)^2-(2x+5)^2$

$5x^2+10$ ؛ $(4x+3)(x-2)-(4x+3)(7x-1)$

التمرين 03:

حلّل كل عبارة مما يلي:

$A = 2x\left(\frac{2}{7}-x\right)+\left(\frac{2}{7}-x\right)\left(\frac{5x-4}{3}\right)$

$B = 1,2x(3,4+x)-(x-6,5)(3,4+x)+(3,4+x)$

$C = \frac{25}{3}x^2-\frac{5}{3}x$

$D = (x+5)^2-(x+2)^2+(2x+7)$

التمرين 04:

1. حلّل كل عبارة مما يلي:

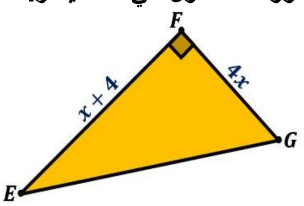
$E = (2-x)^2-4x^2$

$F = (2x+3)^2-(x+1)^2$

2. انشر كلا من العبارتين E و F وبسّطهما ثمّ احسب كلا من $E+F$ و $E-F$.

التمرين 05:

EFG مثلث قائم في F، و x عدد موجب، ووحدة الطول هي السنتيمتر.



1. تحقّق من أنّ مساحة المثلث EFG تساوي $2x^2+8x$، واحسب هذه المساحة من أجل $x = 1$.
2. عبّر عن EG^2 بدلالة x، واكتب العبارة على شكل نشر مبسّط.
3. احسب الطول EG من أجل $x = 2$.

التمرين 06:

إليك العبارة الجبرية M حيث:

$M = (1-2x)^2-9+(4-2x)(5x+3)$

1. انشر العبارة M.
2. حلّل $(1-2x)^2-9$ استنتج تحليلا للعبارة M.
3. استعمال العبارة المناسبة لحساب قيمة M من أجل: $x = 2$ ؛ $x = 0$ ؛ $x = -\frac{1}{3}$.

التمرين 07:

لتكن العبارة T.

حيث $T = (x+1)(x+9)-(x+3)^2$

1. انشر وبسّط العبارة T.
2. استعمال نتيجة السؤال (1) لحساب كل مما يلي ذهنيا:

$1,5\times 9,5-(3,5)^2$ ؛ $101\times 109-103^2$

التمرين 08:

1. تحقق بالنشر من أن: $(2x+7)(2x-7) = 4x^2-49$
2. لتكن العبارة A حيث:

$A = 4x^2-49+(2x+7)(x-2)$

حلّل العبارة A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين 09:

لتكن العبارة F حيث:

$F = (2x-5)^2-(1-x)(2x-3)-4$

1. بيّن أن: $F = 6x^2-25x+24$ واحسب F من أجل $x = 2\sqrt{3}$.
2. حلّل العبارة F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين 10: $(BEM\ 2007)$

لتكن العبارة الجبرية E حيث:

$$E = 10^2 - (x-2)^2 - (x+8)$$

1. انشر ثم بسّط E.
2. حلّل العبارة $10^2 - (x-2)^2$، ثم استنتج تحليل العبارة الجبرية E.

التمرين 11: $(BEM\ 2008)$

A عدد حيث: $A = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$

1. انشر، ثمّ بسّط A.
2. لتكن العبارة الجبرية E حيث: $E = x^2 - \left(7-4\sqrt{3}\right)$
   - احسب القيمة المضبوطة للعبارة E من أجل $x = \sqrt{7}$.
   - حلّل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين 12: $(BEM\ 2009)$

لتكن العبارة E حيث: $E = 2x - 10 - (x-5)^2$

1. انشر، ثمّ بسّط العبارة E.
2. حلّل العبارة E.

التمرين 13: $(BEM\ 2011)$

1. تحقق بالنشر من أن: $(2x-1)(x-3) = 2x^2 - 7x + 3$.
2. لتكن العبارة A حيث:

$$A = 2x^2 - 7x + 3 + (2x-1)(3x+2)$$

- حلّل A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين 14: $(BEM\ 2012)$

لتكن العبارة E حيث:

$$P = (4x-1)^2 - (3x+2)(4x-1)$$

1. انشر وبسّط العبارة E.
2. حلّل العبارة E إلى جداء عاملين.

التمرين 15: $(BEM\ 2014)$

لتكن العبارة E حيث: $E = (2x+5)^2 - 36$

1. تحقق بالنّشر أنّ: $E = 4x^2 + 20x - 11$
2. حلّل العبارة E إلى جداء عاملين.

التمرين 16: $(BEM\ 2015)$

تعطى العبارة: $F = (2x-3)^2 - 16$

1. تحقق بالنّشر أنّ: $F = 4x^2 - 12x - 7$
2. حلّل العبارة F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
3. احسب F من أجل $x = 1 + \sqrt{2}$ و اكتب النتيجة على الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان نسبيان.

التمرين 17: $(BEM\ 2016)$

1. تحقّق من صحة المساواة التالية:

$$5(2x+1)(2x-1) = 20x^2 - 5$$

2. حلّل العبارة A بحيث:

$$A = (2x+1)(3x-7) - (20x-5)$$

التمرين 18: $(BEM\ 2017)$

لتكن العبارة P حيث:

$$P = (1-3x)(3x+3) - 2(3x+3)$$

1. انشر وبسط العبارة P.
2. حلّل العبارة P إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين 19: $(BEM\ 2018)$

1. تحقّق من المساواة الآتية:

$$(3x+1)(x-4) = 3x^2 - 11x - 4$$

2. حلّل إلى جداء عاملين العبارة:

$$E = 3x^2 - 11x - 4 + (3x+1)^2$$

التمرين 20: $(BEM\ 2019)$

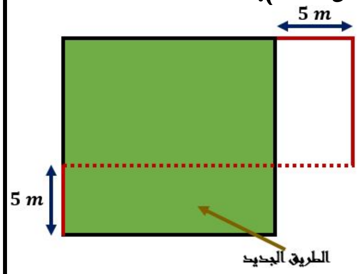
لتكن العبارة E حيث: $E = (x+1)^2 - (x+1)(2x-3)$

1. انشر ثم بسط العبارة E.
2. حلّل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

الوضعية 01:

أرادت البلدية شق طريق على حساب قطعة أرض مربعة الشكل يملكها أحمد، وقد اقترحت عليه تغيير أطوالها.

حيث يتم اقتطاع 5 أمتار من أحد الأضلاع، وتعويضها بـ 5 أمتار في طول الضلع المجاور (كما هو مبين في الشكل أدناه).

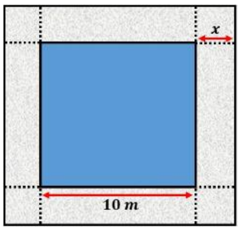


- هل سيقبل أحمد بهذا الاقتراح؟ ولماذا؟

الوضعية 02:

الشكل الملوّن بالأزرق هو حوض شكله مربع، طول ضلعه $10\ m$.

نريد تهيئة شريط منتظم حول هذا الحوض يخصص للراجلين عرضه x.



- ماهي قيمة x حتى تكون مساحة الشريط تساوي $44\ m^2$؟

مساعدة:

$$x^2 + 10x - 11 = (x-1)(x+11)$$

الوضعية 03:

سلم يتكون من 5 درجات لها نفس الارتفاع $20\ cm$ و نفس العرض $40\ cm$.

- احسب مساحة الجزء الظاهر في الرسم باستعمال أقل عدد ممكن من العمليات.

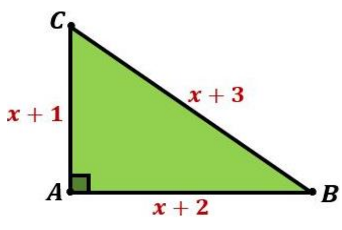
الوضعية 04: (وحدة الطول هي m)

هيأت البلدية قطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها $8x$ و عرضها $(7x+5)$، لإنشاء 4 عمارات ومساحة خضراء.

1. أعط عبارة المساحة الخضراء S بدلالة x علماً أن بعدي قاعدة العمارة هما $(x+5)$ و x.
2. ماهي العبارة المبسطة للمساحة الخضراء؟
3. أعط عبارة المساحة الخضراء على شكل جداء.
4. احسب المساحة الخضراء إذا كان $x = 25$.

الوضعية 05:

لدى ياسر قطعة أرض مهيئة لزرعها، الشكل المقابل يمثل مخططاً لها (وحدة الطول هي m).



- ساعد ياسر على إيجاد مساحة هذه الأرض.

BEM 2020

تحليل عبارة جبرية على شكل جداء عاملين من الدرجة الأولى

استخرج العامل المشترك

وحيد حد

$$42x^2 - 24x = 6x(7x - 4)$$

ثنائي حد

ظاهر

$$A = (2x+1)(x+3) - (2x+1)(7x-5)$$
$$A = (2x+1)[(x+3) - (7x-5)]$$
$$A = (2x+1)(x+3-7x+5)$$
$$A = (2x+1)(-6x+8)$$

مخفي

بالمضاعفات

$$B = (8x+4)(x+3) - (2x+1)(7x-5)$$
$$B = 4(2x+1)(x+3) - (2x+1)(7x-5)$$
$$B = (2x+1)[4(x+3) - (7x-5)]$$
$$B = (2x+1)(4x+12-7x+5)$$
$$B = (2x+1)(-3x+17)$$

بالمتطابقات الشهيرة

$$C = (2x+1)(x+3) + x^2 - 9$$
$$C = (2x+1)(x+3) + x^2 - 3^2$$
$$C = (2x+1)(x+3) + (x+3)(x-3)$$
$$C = (x+3)[(2x+1) + (x-3)]$$
$$C = (x+3)(2x+1+x-3)$$
$$C = (x+3)(3x-2)$$

المتطابقات الشهيرة

$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$

$$E = 9x^2 + 12x + 4$$
$$E = (3x)^2 + (2)^2 + 2(3x)(2)$$
$$E = (3x+2)^2$$

$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$

$$F = 9x^2 - 12x + 4$$
$$F = (3x)^2 + (2)^2 - 2(3x)(2)$$
$$F = (3x-2)^2$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$G = 16x^2 - 49$$
$$G = (4x)^2 - (7)^2$$
$$G = (4x+7)(4x-7)$$

$$H = (x-5)^2 - 49$$
$$H = (x-5)^2 - (7)^2$$
$$H = [(x-5)+7][(x-5)-7]$$
$$H = (x-5+7)(x-5-7)$$
$$H = (x+2)(x-12)$$

$$M = (x-5)^2 - (2x+1)^2$$
$$M = [(x-5)+(2x+1)][(x-5)-(2x+1)]$$
$$M = (x-5+2x+1)(x-5-2x-1)$$
$$M = (3x-4)(-x-6)$$

$$N = 4(x-5)^2 - 9(x+1)^2$$
$$N = 2^2(x-5)^2 - 3^2(x+1)^2$$
$$N = \left(2(x-5)\right)^2 - \left(3(x+1)\right)^2$$
$$N = (2x-10)^2 - (3x+3)^2$$
$$N = [(2x-10)+(3x+3)][(2x-10)-(3x+3)]$$
$$N = (2x-10+3x+3)(2x-10-3x-3)$$
$$N = (5x-7)(-x-13)$$

الأستاذة: جبلاحي حليمة

تذكـــير:

❖ المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

يؤول حل كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إلى حل معادلة من الشكل $ax = b$ حيث $a \neq 0$. الحل الوحيد لهذه المعادلة هو العدد $\frac{b}{a}$.

مثال:

حل المعادلة $5x - 3 = 7$ نضيف 3 إلى كل طرف فنجد:

$5x - 3 + 3 = 7 + 3$ أي: $5x = 10$ ومنه: $x = \frac{10}{5} = 2$

والمعادلة $5x - 3 = 7$ حل وحيد هو 2.

❖ معادلة جداء معدوم:

كل معادلة من الشكل $(ax+b)(cx+d) = 0$ حيث a، b، c و d أعداد معلومة، تُسمّى معادلة جداء معدوم

مثال 01: $(3x+2)(x-5) = 0$ هي معادلة جُداء معدوم.

خاصية الجداء المعدوم:

- إذا كان جداء عاملين معدوماً فإن أحد هذين العاملين على الأقل معدوم.
- بعبارة أخرى إذا كان $a \times b = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

مثال 02: $5x = 0$ يعني أنّ $x = 0$ لأن: $5 \neq 0$.

❖ حل معادلة جداء معدوم:

لحل المعادلة من النوع $(ax+b)(cx+d) = 0$ حيث أن a و b و c و d أعداد حقيقية معلومة مع $a \neq 0$ و $c \neq 0$ نحل المعادلتين :

$ax + b = 0$ و $cx + d = 0$

مثال: لنحل المعادلة: $(x+3)(2x-5) = 0$

يعني أن: $x + 3 = 0$ أي: $x = -3$ أو $2x - 5 = 0$ أي: $2x = 5$

ومنه: $x = \frac{5}{2}$ إذن للمعادلة حلاّن هما -3 و $\frac{5}{2}$.

❖ حل معادلة يؤول حلّها إلى حل معادلة جداء معدوم:

لحل معادلة ليست من الدرجة الأولى نتبع الخطوات التالية:

1. نجعل طرفها الأيمن صفراً.
2. نقوم بتحليل الطرف الايسر لهذه المعادلة، نتحصل عندئذ على معادلة جداء معدوم من الدرجة الأولى.
3. نحل هذه المعادلة الأخيرة. 4. نستنتج حلول المعادلة الأولى.

مثال: حل المعادلة $4x^2 = 5x$

لدينا: $4x^2 - 5x = 0$ أي $x(4x-5) = 0$ يعني أن: $x = 0$

أو $4x - 5 = 0$ أي: $4x = 5$ ومنه: $x = \frac{5}{4}$.

إذن للمعادلة حلان هما $\frac{5}{4}$ و0.

❖ ترييض مشكلة وحلها:

لحل مشكلة بواسطة معادلة نتبع الخطوات التالية:

1. اختيار المجهول، وليكن مثلا x؛
2. ترجمة كل المعطيات الواردة في النص بدلالة x؛ 3. وضع المعادلة ؛
4. حل المعادلة؛ 5. التصريح بالحل؛ 6. التحقق من صحة النتيجة.

مثال: مستطيل طوله هو 3 مرات عرضه و محيطه $240\ cm$.

إيجاد طول وعرض المستطيل:

نفرض x عرض المستطيل فيكون $3x$ هو طول المستطيل.

لدينا: $2(x+3x) = 240$ وعليه: $2(4x) = 240$

وبالتالي: $8x = 240$ أي: $x = \frac{240}{8}$ ومنه: $x = 30$

إذن عرض المستطيل هو $30\ cm$ وطول المستطيل هو $90\ cm$ لأن $30 \times 3 = 90$.

❖ المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

- المتراجحة بمجهول x هي متباينة قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة وهذا حسب قيم x.
- قيم x التي من أجلها تكون المتباينة صحيحة هي حلول المتراجحة.
- حل متراجحة هو إيجاد كل حلولها.
- يُقال عن متراجحة أنّها من الدرجة الأولى لمجهول x، إذا أمكن كتابتها على أحد الاشكال الآتية:

$ax + b > cx + d$ أو $ax + b < cx + d$.

$ax + b \leq cx + d$ أو $ax + b \geq cx + d$.

مثال 01:

المتباينة $2x > -3$ هي متراجحة ذات المجهول x.

من أجل $x = -4$ نكتب $2 \times (-4) > -3$ فنحصل على متباينة خاطئة $-8 > -3$ إذن العدد(-4) ليس حلا للمتراجحة $2x > -3$.

طريق:

لحل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد، نستعمل القواعد الآتية:

- نُحافظ على نفس اتجاه المتراجحة عندما نُضيف إلى (أو نطرح من) طرفيها نفس العدد.
- نُحافظ على نفس اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) نفس العدد الموجب تماما.
- نُغيّر اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في(أو نقسم طرفيها على) العدد السالب تماما نفسه.

مثال 02: حل المتراجحات التالية:

1. لدينا: $3(x-2) < 5x + 4$ و بالتالي: $3x - 6 < 5x + 4$
أي: $3x - 5x < 4 + 6$ وهذا يكافئ: $-2x < 10$
وعليه: $x > \frac{10}{-2}$ ومنه: $x > -5$
ينتج أن حلول هذه المتراجحة هي كل قيم x الأكبر تماماً من -5.

2. لدينا: $5x \geq 20$ أي: $x \geq \frac{20}{5}$ ومنه: $x \geq 4$
ينتج أن حلول هذه المتراجحة هي كل قيم x الأكبر من أو تساوي 4.

3. لدينا: $4x + 2 > 7x + 1$ أي: $4x - 7x > 1 - 2$
وهذا يكافئ: $-3x > -1$ وعليه: $x < \frac{-1}{-3}$ ومنه: $x < \frac{1}{3}$
ينتج أن حلول هذه المتراجحة هي كل قيم x الأصغر تماماً من $\frac{1}{3}$.

4. لدينا: $6x \leq -18$ أي: $x \leq \frac{-18}{6}$ ومنه: $x \leq -3$
ينتج أن حلول هذه المتراجحة هي كل قيم x الأصغر من أو تساوي -3.

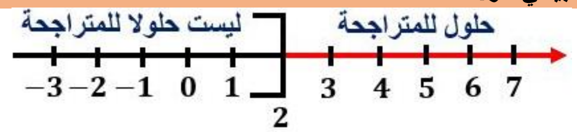
ملاحظة: نسمي كل عدد يحقق المتراجحة حلا لها.

❖ تمثيل حلول متراجحة بيانيا:

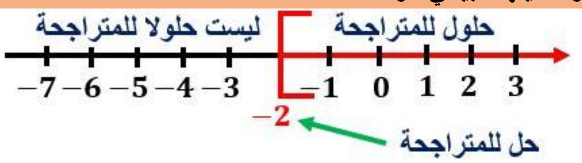
تُمثَّل حلول متراجحة على مستقيم عددي مدرّج (تلوّن الجزء الذي يمثل الحلول).

أمثلة:

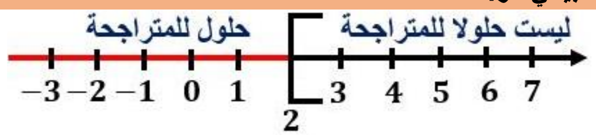
1. المتراجحة $x > 2$ تمثل كل قيم x الأكبر تماماً من 2 وتمثيلها البياني هو:



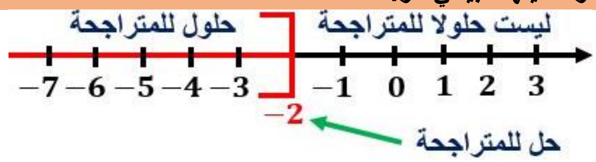
2. المتراجحة $x \geq -2$ تمثل كل قيم x الأكبر من أو تساوي من -2 و تمثيلها البياني هو:



3. المتراجحة $x < 2$ تمثل كل قيم x الأصغر تماماً من 2 و تمثيلها البياني هو:



4. المتراجحة $x \leq -2$ تمثل كل قيم x الأصغر من أو تساوي من -2 و تمثيلها البياني هو:



تماريـــــــــــن – وضعيـــات

التمرين 01: حل المعادلات:

$2+3x=\frac{1}{2}$ ؛ $11x+10=0$ ؛ $(x-8)(2x+5)=0$

$\frac{2x+1}{4}=\frac{3x-2}{2}$ ؛ $x^2+8x+16=0$ ؛ $x^2-\sqrt{3}x=0$

$4x^2-9=0$ ؛ $(x+2)(2x+3)+7(x+2)=0$

$x^2-2x+1=0$ ؛ $x+6=3x-4$ ؛ $\sqrt{2}x=1$

التمرين 02:
اوجد ثلاث أعداد طبيعية متتالية بحيث يكون مجموعها يساوي 24.

التمرين 03:
اوجد عددين طبيعيين بحيث يكون أحدهما ضعف الآخر و مجموعهما 27.

التمرين 04: مستطيل عرضه هو$\frac{1}{3}$ طوله ومحيطه $160\ cm$.
اوجد طول وعرض المستطيل.

التمرين 05:
1. حل المعادلتين: $2x-1=5x$ و $x^2-9=(x-1)^2$
2. حقل مستطيل الشكل مساحته$250m^2$ وعرضه خمسي طوله.
- اوجد بعدي هذا المستطيل.

التمرين 06: تستقبل متوسطة 528 شخص(تلاميذ وتلميذات وأساتذة)
إذا كان عدد التلميذات $\frac{2}{3}$ من عدد التلاميذ وعدد الأساتذة $\frac{1}{6}$ من عدد التلاميذ. أوجد عدد التلاميذ وعدد التلميذات وعدد الأساتذة؟

التمرين 07:
1. بين ان : $2(x-6)(x+8)=2x^2+4x-96$
2. مثلث أطوال أضلاعه: 10 ؛ $x+2$ ؛ x.
- عيّن العدد x علما أنّ المثلث قائم ووتره $10\ cm$.

التمرين 08: يبلغ عمر أب 43 سنة وعمرا ابنيه 4 و 7 سنوات، بعد كم سنة يكون عمر الأب ضعف مجموع عمري ابنيه؟

التمرين 09: حل المتراجحات الآتية ومثّل حلول كل منها بيانيا .

$5x+4\leq x-1$ ؛ $\frac{x+1}{2}\leq\frac{5x+1}{3}$ ؛ $6x+\sqrt{3}>x+2$

$-3x-1>x+8$.

التمرين 10: تحقق من أن الأعداد 0؛ $1-$؛ 5 هي حلول للمتراجحات التالية: $2x-1\leq 3x+5$ ؛ $4(2x+7)\geq x$

التمرين 11: مستطيل بعداه $7\ cm$ و $16\ cm$. ماهو العدد x المعبر عنه بالسنتيمتر الذي يمكن إضافته إلى طوله وعرضه بحيث لا يتجاوز محيطه $86\ cm$؟

التمرين 12: ABC مثلث قائم في A بحيث $AB=16\ cm$.
- عين حصرا لطول الضلع $[AC]$ بحيث تكون مساحته تساوي على الأكثر $72\ cm^2$ و على الأقل $48\ cm^2$.

التمرين 13: لتكن العبارة A حيث:

$A=(2x-1)^2-4$

- حلّ المتراجحة : $A\geq 4x^2$ ومثّل الحلول بيانيا.

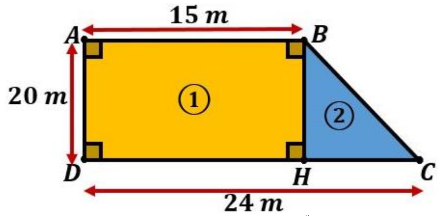
التمرين 14:
لتكن العبارة E حيث: $E=\left(9x^2-1\right)+6x^2+7x-3$.
1. تحقّق أنّ: $(3x-1)(2x+3)=6x^2+7x-3$.
2. حلّل العبارة $9x^2-1$.
3. حلّل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
4. حلّ المعادلة: $E=0$.
5. حلّ المتراجحة: $E\geq 3\left(5x^2+1\right)$ ثم مثّل مجموعة حلولها بيانيا.

التمرين 15: $(BEM\ 2013)$
1. لتكن العبارة: $A=3x-5$ حيث x عدد حقيقي.
أ. احسب القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد A من أجل $x=\sqrt{2}$
ب. حلّ المتراجحة: $A\geq 0$ ثم مثّل مجموعة حلولها بيانيا.
2. أ. انشر ثم بسّط العبارة B حيث:$B=(3x-5)^2+9x^2-25$
ب. استنتج أنّ: $B=6x(3x-5)$.
ج. حلّ المعادلة: $B=0$.

الوضعية 01:

الجزء الأول:
تملك عائلة قطعة ارض على شكل شبه منحرف كما هو مبين في الشكل:
1. بيّن ان مساحة القطعة تساوي $390m^2$.
2. احسب الطول BC (بالتدوير الى الوحدة).

الجزء الثاني:
لدى هذه العائلة $80\ m$ من السلك لتسييج هذه القطعة.



1. هل هذا السلك كافي لتسييجها ؟علّل.
2. لو تركت العائلة باب عرضه $1m$ فهل يكفي السلك؟
3. إذا كان: $AB=x$.
- احسب مساحة القطعة ① و ② بدلالة x.
4. عيّن العدد x لكي تكون المساحتان متساويتين .
5. عين قيم x التي يكون من أجلها سُبع مساحة القطعة $ABHD$ أقل من مساحة BCH.

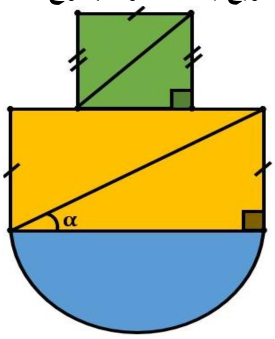
الوضعية 02:
صفيحة مربعة الشكل تعرضت للحرارة، فتمددت طولاً بمقدار $3\ cm$ و عرضاً بمقدار $1\ cm$،ونتيجة لذلك زادت مساحتها بمقدار $23\ cm^2$.

- أوجد بعدي الصفيحة قبل هذا التغيير وبعده.

الوضعية 03:
يملك أمجد أرض، يريد أن يستغل قطعة منها مستطيلة الشكل للزراعة حيث يكون طولها $300\ m$ وعرضها لم يقرّره بعد.
يوّد أمجد أن يكون محيط هذه القطعة أقل من $1000\ m$ و أن تزيد مساحتها عن $9000\ m^2$.

1. عبّر عن ذلك بمتراجحتين.
2. حل المتراجحتين.
3. استنتج حصرا لعرض القطعة.

الوضعية 04:$(BEM\ 2010)$
يُمثل الشكل أرضية قاعة حفلات مكونة من مربع ومستطيل ونصف قرص طول قطر المستطيل يزيد عن طول قطر المربع بـ $2\ m$ و مجموع طوليهما $28\ m$.
يريد صاحبها تبليطها ببلاط سعر المتر المربع الواحد 800 دينار.



1. احسب طول قطر المربع.
2. احسب طول وعرض المستطيل علماً أن: $cos\alpha=0,8$.
3. احسب السعر الإجمالي للبلاط.

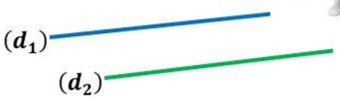
بالتوفيق والنجاح

تذكـــــير:

❖ **الانسحاب ومفهوم الشعاع:**

1. المنحنى والاتجاه:

عندما يكون مستقيمان متوازيان، نقول إنّ لهذين المستقيمين نفس المنحى.

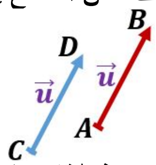


للمستقيمين (d_1) و (d_2) نفس المنحى معناه $(d_1)//(d_2)$.

النقطتان المتمايزتان A و B تعيّنان على المستقيم (AB)، اتجاهين أحدهما من A نحو B والأخر من B نحو A.

2. الانسحاب ومفهوم الشعاع:

A و B نقطتان متمايزتان. الانسحاب الذي يحوّل A الى B يحوّل أيضا C إلى D. كل من الثنائيات $(A;B)$، $(C;D)$، تعرّف نفس الشعاع $\vec{u}$ الذي:

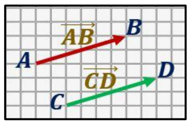


- منحاه هو منحى المستقيم (AB).
- اتجاهه هو من A إلى B.
- طويلته هي طول القطعة $[AB]$.

يمكن أن نرمز لهذا الشعاع بالرمز $\overrightarrow{AB}$ (مبدؤه A و نهايته B) أو $\overrightarrow{CD}$.
نقول إنّ كل من $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ هو مُمثّل للشعاع $\vec{u}$.

3. تساوي شعاعين:

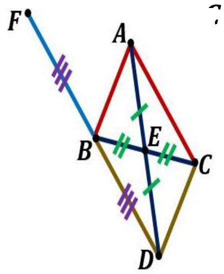
القول عن شعاعين أنّهما متساويان يعني أنّ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس الطول.



مثال: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ معناه:

- للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$: نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس الطول.
- الانسحاب الذي يحوّل A إلى B يحوّل أيضا C إلى D.

📖 **إنشاء صورة بالانسحاب عُلم شعاعه:**

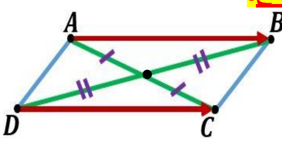


1. إنشاء مثلثا ABC ثم النقطة D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
إذن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.
قطرا الرباعي $ABDC$ هما $[AD]$ و $[BC]$.
ينتج أن D هي نظيرة A بالنسبة إلى النقطة E منتصف $[BC]$.

2. إنشاء النقطة F حيث: $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AC}$:
على الشكل لدينا: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ إذن $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BD}$. نلاحظ أ للشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و FB نفس المنحى وهو نفس منحى (BD)، نفس الطول وهو BD و نفس الاتجاه.
بالتالي: B منتصف $[DF]$ أي النقطة F هي نظيرة D بالنسبة إلى B.
ينتج أن الانسحاب الذي يحول D إلى B هو الانسحاب الذي يحول B إلى F.

❖ **الشعاعان المتساويان ومتوازي الأضلاع:**

خاصية: A، B، C، D أربع نقط بحيث كل ثلاثة منها ليست في استقامية.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ تعني أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع.

ملاحظات: من أجل كل أربع نقط A، B، C، D لدينا:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس منتصف.

- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

حالة خاصة: النقط A، B، C، D في استقامية.

📖 **إثبات تساوي شعاعين:**

طريقة:
لإثبات تساوي شعاعين نعتمد على متوازي أضلاع أو على الانسحاب.

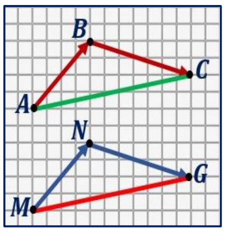
❖ **الشعاعان المتساويان ومفهوم منتصف قطعة:**

خاصية: I، A، B ثلاث نقط.
إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
إذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن I منتصف $[AB]$.
إذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن I منتصف $[AB]$.
على الشكل المقابل لدينا $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ لأن للشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{IB}$.

نفس المنحى ونفس الاتجاه و $AI = IB$ إذن I منتصف $[AB]$.

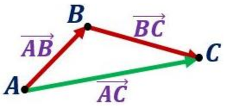
❖ **مجموع شعاعين:**

1. صورة نقطة بانسحابين متتابعين:



A، B، C ثلاث نقط.
إذا كانت صورة نقطة كيفية M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ هي N و صورة N بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هي G فإن:
G هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.
ونقول $\overrightarrow{AC}$ هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.

2. مجموع شعاعين:



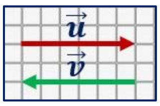
A، B، C ثلاث نقط.
مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$
نكتب $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
المساواة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ تسمى علاقة شال (لاحظ أن نهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو مبدأ الشعاع $\overrightarrow{BC}$)

حال خاصة: إذا كانت A منطبقة على B، نقول أن $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع المعدوم ويرمز إليه بـ $\vec{0}$. لدينا: $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

❖ **الشعاعان المتعاكسان:**

A، B نقطتان. نعلم أنّ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
نقول أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان، ونكتب: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
للشعاعين المتعاكسين نفس الطول و نفس المنحى و اتجاهين متعاكسين.

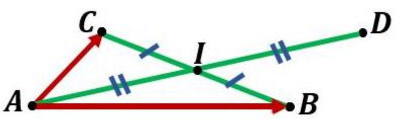
مثال: الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعاكسان.
$\vec{u} = -\vec{v}$



❖ **قاعدة متوازي الأضلاع:**

A، B، C ثلاث نقط ليست على استقامية.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
معناه: $ABDC$ متوازي أضلاع.

ملاحظة: D هي نظيرة A بالنسبة إلى منتصف القطر $[BC]$.



📖 **إنشاء ممثل لمجموع شعاعين:**

طريقة: لإنشاء ممثل لمجموع شعاعين يمكن استعمال علاقة شال أو قاعدة الأضلاع.

📖 **استعمال تساوي شعاعين لإنجاز برهان:**

طريقة: لإثبات أن شعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان، يكفي إثبات أن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

❖ **خصائص الأشكال الرباعيّة:**

متوازي الأضلاع: - كل ضلعان في متوازي الاضلاع متوازيان و متقايسان - قطرا متوازي الاضلاع متناصفان - مركز تناظر متوازي الاضلاع هو نقطة تقاطع قطريه.

المستطيل: - كل ضلعان في المستطيل متوازيان و متقايسان - قطران المستطيل متناصفان و متقايسان - مركز تناظر المستطيل هو نقطة تقاطع قطريه - زواياه الأربعة قائمة.

المربع: - كل اضلاعه متقايسة و زواياه قائمة - قطرا المربع متناصفان و متقايسان و متعامدان - مركز تناظر المربع هو نقطة تقاطع قطريه - للمربع أربعة محاور هي حاملا قطراه و محورا كل ضلعان متقابلان.

المعين: - كل اضلاعه متقايسة - قطرا المعين متناصفان ومتعامدان - مركز تناظر المعين هو نقطة تقاطع قطريه - حاملا قطراه هما محورا تناظره.

تماريـــــــــــــــــن – وضعيــــات

التمرين 01:

ABC مثلث E منتصف $[AC]$.

1. أنشئ النقطة D حيث: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
2. ماهي صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CA}$؟
3. احسب المجاميع الآتية مع الشرح:

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}$ ؛ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$ ؛ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}$.

التمرين 02:

$ABCD$ متوازي الاضلاع.

1. أنشئ النقطة E بحيث: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$.
ما نوع الرباعي $ACED$؟ مع التعليل.
2. أنشئ النقطة F بحيث: $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.
3. أنشئ G نظيرة D بالنسبة إلى C.
4. بيّن أن: $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CA}$.

التمرين 03:

A، B، C ثلاث نقاط ليست في استقامية.

1. أنشئ النقطة D بحيث أن: D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.
2. أنشئ النقطة K بحيث: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
3. بيّن أن: $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{CD}$. واستنتج أن C منتصف $[DK]$.

التمرين 04:

1. أرسم معينّا $ABCD$ قطراه $AC=6\ cm$ ؛ $BD=4\ cm$.
2. احسب AB.
3. عين النقطة E حيث C منتصف $[BE]$.
4. أنشئ النقطة M صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DC}$.
5. ما نوع الرباعي $DBME$ ؟ علّل.

التمرين 05:

ABC مثلث قائم في A حيث: $AB=4\ cm$ و $AC=5\ cm$.

1. أنشئ النقطة M صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.
2. أنشئ D بحيث: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.
3. برهن أن النقط M، C، D في استقامية.

التمرين 06:

1. أنشئ دائرة مركزها O ونصف قطرها $4\ cm$. ليكن $[AB]$ قطر هذه الدائرة.
2. عين النقطة C من الدائرة بحيث: $AC=6\ cm$.
3. أنشئ النقط F ، N ، E صورة النقط A، C، B على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$.
4. احسب محيط ومساحة المثلث FEN.

التمرين 07:

1. أرسم مثلثا ABC ثم عيّن النقطة E منتصف القطعة $[BC]$.
2. أنشئ النقطة M، نظيرة A بالنسبة للنقطة E.
   - أثبت أنّ: $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{AB}$.
3. أنشئ النقطة N صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$.
   - بيّن أنّ: النقطة C هي منتصف القطعة $[MN]$ ثم استنتج نوع الرباعي $ABCN$.

التمرين 08:$(BEM\ 2012)$

(T) دائرة مركزها O وقطرها $AB=8\ cm$، C نقطة من دائرة حيث: $BC=3\ cm$.

1. احسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية $\widehat{BAC}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{BOC}$.
   - F هي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$، المستقيم الذي يشمل F ويوازي (BC) يقطع (AC) في D.
2. احسب DF.

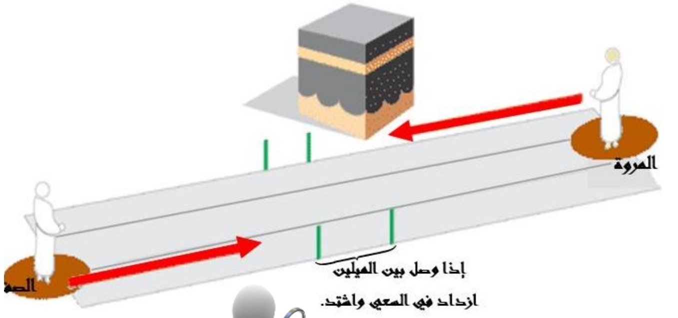
ملاحظة: يطلب إنجاز الشكل الهندسي.

التمرين 09:$(BEM\ 2016)$

1. أنشئ المثلث EFG القائم في F حيث: $EF=FG=4cm$.
2. أنشئ النقطتين D : صورة النقطة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EF}$.
C صورة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$.
3. بيّن أن الرباعي $EGDC$ مربع.
   - احسب مساحته.
4. ليكن الشعاع $\vec{U}$ حيث: $\vec{U}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FG}$، بيّن أن: $\vec{U}=\overrightarrow{ED}$.

الوضعية 01:

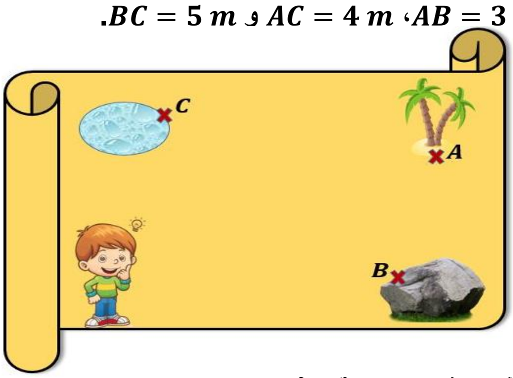
السعي بين الصفا والمروة هو ركن من أركان الحج، ولهذا الغرض خصص رواقين متوازيين لتسهيل حركة الحجيج، ينطلق الحاج هيثم من الصفا والحاج عبد النور من المروة في نفس الوقت.



1. مثل مسار الحاجين بشعاعين.
2. فسر ملاحظاتك.

الوضعية 02:

في احدى مناطق الصحراء وجد أحمد في خزانة جده خريطة كنز مخبأ في احدى الواحات. في هذه الواحة توجد نخلة A، صخرة B و بركة ماء C حيث: $AB=3\ m$، $AC=4\ m$ و $BC=5\ m$.



1. بيّن أن المثلث ABC قائم في A.
1. أنشئ المثلث ABC (نأخذ $1\ cm$ لكل $1\ m$) مع تمثل الأشعة $\overrightarrow{BA}$، $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BC}$ مستنتج العلاقة بين الأشعة الثلاثة.
2. قرأ أحمد في الخريطة العبارة: ابحث عن البئر E الذي هو مركز الدائرة المحيطة بالنخلة و الصخرة وبركة الماء. أنشئ النقطة E.
3. عندما عثر أحمد على البئر وجد مكتوبا على جداره العبارة: أذهب إلى القبة مكان الكنز F التي هي نظيرة النخلة A بالنسبة إلى البركة C. أنشئ النقطة F مكان الكنز.

بالتوفيق والنجاح

تذكـــير:

❖ **معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين:**

تكتب معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y على شكل: $ax+by=c$ حيث a و b و c أعداد معلومة. إن حلول هذه المعادلة غير منتهية ويكفي إعطاء قيمة لأحد المجهولين لإيجاد الآخر.

ملاحظة: المعادلتان المتكافئتان معادلتان لهما نفس الحلول.

مثال: كل من $x+3y=-\frac{1}{2}$ ؛ $2x+6y=-1$ هما معادلتان من الدرجة الأولى بمجهولين وهما معادلتان متكافئتان.

❖ **جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:**

نسمّي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

حيث a، b، c، a'، b'، c' أعداد معلومة.

مثال:

$\begin{cases} 3x+y=-2 \\ 2x-5y=-7 \end{cases}$ جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.

❖ **حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين جبريا:**

هو إيجاد الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق المعادلتين في آن واحد من أجل ذلك نتبع إحدى الطرق التالية:

1. طريقة الحل بالتعويض:

مثال 01: حل الجملة:

$$\begin{cases} x-3y=-8 \ \dots(1) \\ 2x+y=5 \ \dots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد : $x=-8+3y \ \dots(3)$.

نعوض قيمة x في المعادلة (2) فنجد: $2(-8+3y)+y=5$ أي: $-16+6y+y=5$ أي: $6y+y=5+16$ وبالتالي: $7y=21$ أي: $y=\frac{21}{7}$ ومنه: $y=3$.

نعوض قيمة y في المعادلة(3)فنجد: $x=-8+3\times 3$ أي: $x=1$.

إذن الثنائية $(1;3)$ حل لهذه الجملة.

2. طريقة الحل بالجمع:

مثال 02: حل الجملة:

$$\begin{cases} 6x+4y=3 \ \dots(1) \\ 3x-5y=-9 \ \dots(2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (2) في العدد -2 فنحصل على الجملة:

$$\begin{cases} 6x+4y=3 \ \dots(3) \\ -6x+10y=18 \ \dots(4) \end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (3) و (4) طرفا لطرف فنجد:

$6x+4y-6x+10y=3+18$ أي: $14y=21$ وبالتالي: $y=\frac{21}{14}$ ومنه: $y=1,5$.

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 5 و نضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 4 فنحصل على الجملة:

$$\begin{cases} 30x+20y=15 \ \dots(5) \\ 12x-20y=-36 \ \dots(6) \end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (5) و (6) طرفا لطرف فنجد:

$30x+20y+12x-20y=15-36$ أي: $42x=-21$

وعليه: $x=-\frac{21}{42}$ ومنه: $x=-0,5$.

إذن الثنائية $(-0,5;1,5)$ حل لهذه الجملة.

3. طريقة الحل بالجمع والتعويض:

مثال 03: حل الجملة:

$$\begin{cases} 2x+5y=-3 \ \dots(1) \\ 7x-3y=10 \ \dots(2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد -7 و نضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 2 فنحصل على الجملة:

$$\begin{cases} -14x-35y=21 \ \dots(3) \\ 14x-6y=20 \ \dots(4) \end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (3) و (4) طرفا لطرف فنجد:

$-14x-35y+14x-6y=21+20$ أي: $-41y=41$

وعليه: $y=-\frac{41}{41}$ ومنه: $y=-1$.

نعوض قيمة y في المعادلة (2) فنجد: $7x-3\times(-1)=10$ أي: $7x+3=10$ وعليه: $7x=10-3$ أي: $7x=7$

وعليه: $x=\frac{7}{7}$ ومنه: $x=1$.

إذن الثنائية $(1;-1)$ حل لهذه الجملة.

❖ **حل ترييض مشكلة بتوظف جملة معادلتين:**

1.اختيار المجهولين. 2.ترييض الوضعية بالتعبير عنها بمعادلتين.

3.حل جملة معادلتين. 4. مراقبة النتيجة (معقوليتها ملاءمتها للمعطيات).

5.الإجابة عن السؤال.

مثال: ثمن باقة زهور متكونة من 8 زهور أقحوان و زهرة نرجس هو $255\ DA$ بينما ثمن باقة متكونة من 17 زهرة أقحوان و 4 زهور نرجس هو $570\ DA$.

ماهو ثمن كل من زهرة الأقحوان وثمن زهرة النرجس؟

- نفرض أن x ثمن زهرة الأقحوان و y ثمن زهرة النرجس فيكون:

نحل الجملة:

$$\begin{cases} 8x+y=255 \ \dots(1) \\ 17x+4y=570 \ \dots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد : $y=255-8x \ \dots(3)$.

نعوض قيمة y في المعادلة (2) فنجد: $17x+4(255-8x)=570$

أي: $17x+1020-32x=570$ أي: $-15x=570-1020$ وعليه: $-15x=-450$ أي: $x=\frac{-450}{-15}$ ومنه: $x=30$.

نعوض قيمة x في المعادلة (3) فنجد: $y=255-8\times 30$

ومنه: $y=15$.

إذن ثمن زهرة الأقحوان هو $30\ DA$ و ثمن زهرة النرجس هو $15\ DA$.

تمارين – وضعيات

التمرين 01:

نعتبر المعادلة التالية $x-y=4$ من الدرجة الأولى بمجهولين :

- اذكر إن كانت كلّ من الثنائيات الآتية حلا لهذه المعادلة مع تعليل.

$(0;1)$ ؛ $(2;-2)$ ؛ $(-2;2)$.

التمرين 02:

اذكر حلين مختلفين لكل معادلة من المعادلات الآتية:

أ. $x-y=0$

ب. $4x+2y=5$

ج. $4x-5y=-2$

التمرين 03: لتكن الجملة التالية:

$$\begin{cases} 3x+y=7 \\ 5x+2y=11 \end{cases}$$

- عيّن الحل المناسب لهذه الجملة: $(3;2)$ ؛ $(3;-2)$ ؛ $(-3;-2)$.

التمرين 04:

حل جمل المعادلتين مع اختيار أي طريقة مع توضيح جميع الخطوات:

$\begin{cases} 3x-15y=-2 \\ 6x+10y=4 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x+1,5y=2 \\ 2,5x+0,5y=-1,5 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=2 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=-\frac{1}{2} \end{cases}$

التمرين 05:

اوجد عددين علما أن مجموعهما -3 و أن الفرق بين ضعف العدد الأول و ثلاثة أمثال العدد الثاني هو 14.

التمرين 06:

عددان طبيعيان مجموعهما 2020 والفرق بينهما 32.

- عيّن هذين العددين.

التمرين 07:

اوجد كسرا، إذا أضفنا إلى بسطه 1 و أنقصنا من مقامه 1 يكون ناتج الكسر هو 1، واذا أضفنا إلى المقام 1 يكون ناتج الكسر مساويا $\frac{1}{2}$.

التمرين 08:
اوجد عددين علما أن مجموعهما 260 وإذا قسمنا أكبرهما على أصغرهما، يكون الحاصل 2 و الباقي 50.

التمرين 09:
x و y هما قيسا زاويتين بالدرجات. اوجد x و y، إذا كان x ينقص عن y بـ 30^o و كانت الزاويتان متتامتان.

التمرين 10:
α و β هما قيسا زاويتين بالدرجات. اوجد α و β، إذا كان α يزيد عن β بـ 40^o و كانت الزاويتان متكاملتين.

التمرين 11:

ABC مثلث قائم في A حيث: $AB = 4\ cm$.
إذا علمت أنّ محيط المثلث ABC يساوي $12\ cm$.
- احسب الطولين AC و BC.

التمرين 12:
حقل مستطيل الشكل محيطه يساوي $220\ m$.
عند إنقاص $2\ m$ من طوله وزيادة $2\ m$ إلى عرضه، تزداد مساحته بـ $16m^2$.
- اوجد بعدي الحقل في البداية.

التمرين 13:
ABC مثلث مجموع طولا ضلعيه $[AB]$ و $[BC]$ يساوي $9\sqrt{3}$، وطول الضلع $[BC]$ يزيد عن طول الضلع $[AB]$ بـ $\sqrt{3}$.
- احسب الطولين AB و BC.

الوضعية 01:
تحصّل فلّاح مختصّ في تربية النحل على $7\ kg$ من العسل.

لتسويق هذه الكمية، تمكّن من توزيعها على 18علبة زجاجية، بعضها من فئة $500\ g$ والأخرى من فئة $250\ g$، ممتلئة بالعسل.
- ماهو عدد قارورات كل فئة؟

الوضعية 02:
خلال يوم واحد، سُحب من موزّع آلي للأوراق النقدية 356 ورقة نقدية كلها من فئة $1000\ DA$ أو $2000\ DA$.
وبلغ المبلغ الإجمالي الموزّع $454000\ DA$.
- ماهو عدد أوراق كلّ فئة؟



الوضعية 03:
للدخول إلى قاعة المسرح اشترت عائلة أحمد تذاكر لأربعة أفراد كبار وفرد صغير بمبلغ $1400\ DA$، أماّ عائلة عمر فقد اشترت تذكرتين للكبار وثلاثة تذاكر للصغار بمبلغ $1200\ DA$.
1. اوجد ثمن التذكرة للكبار وثمن التذكرة للصغار.
2. كم تدفع عائلة خالد لشراء 5 تذاكر للكبار و 4 تذاكر للصغار؟

الوضعية 04:


1. حل الجملة الآتية:
$$\begin{cases} x + y = 75 \\ 3x + 4y = 255 \end{cases}$$
2. علبة تحتوي على مجموعة من الجراد و العناكب، عدد الرؤوس الإجمالي هو 75 رأسا وعدد الأرجل هو 510.
- اوجد عدد الجراد وعدد العناكب.

الوضعية 05:

1. حل الجملة الآتية:
$$\begin{cases} x + y = 78 \\ 7x + 10y = 642 \end{cases}$$
2. يضم أحد رفوف المدرسة القرآنية 78 مصحفا. سمك بعض المصاحف $3,5\ cm$ وسمك البعض الآخر $5\ cm$. هذه المصاحف موضوعة في صف طوله $321\ cm$.
- اوجد عدد المصاحف التي سمكها $3,5\ cm$ وعدد المصاحف التي سمكها $5\ cm$.

الوضعية 06:
مجموع عُمرَي يوسف وعلي 45 سنة، إذا انقصنا من عمر يوسف 5 سنوات يصبح عمر يوسف أربعة أمثال عمر علي.
- ماهو عمر يوسف وعمر علي؟

الوضعية 07:
في مزرعة لتربية الدواجن، يوجد دجاج و أرانب، عدد رؤوسها الإجمالي 78 رأساً. أما العدد الإجمالي لسيقانها فهو 218 ساقاً.
- ماهو عدد الأرانب وعدد الدجاج؟


الوضعية 08:
قسم السنة الرابعة متوسط يتكون من 39 تلميذ، إذا غاب منها 3 ذكور يصبح عدد الذكور ضعف عدد الإناث.
- ماهو عدد الذكور وعدد الاناث؟

الوضعية 09:
انطلقت درجة نارية من مدينة A على الساعة 9 بسرعة متوسطة قدرها $45\ km/h$ متوجهة نحو مدينة B. وفي نفس الوقت انطلقت دراجة هوائية من المدينة B نحو المدينة A بسرعة متوسطة قدرها $27\ km/h$.

- عين اللحظة التي تتلاقى فيها الدرجة النارية بالدراجة الهوائية، وبُعد نقطة التلاقي عن المدينة B، علما أن المسافة بين المدينتين A و B هي $180\ km$.

الوضعية 10: $(BEM\ 2007)$
1. حل الجملة الأتية:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 105 \\ 6x + 4y = 112 \end{cases}$$

2. اشترى رضوان من مكتبه أربعة كراريس وخمسة أقلام بمبلغ $105\ DA$ واشترت مريم ثلاثة كراريس وقلمين بمبلغ $56\ DA$.
- اوجد ثمن الكراس الواحد وثمن القلم الواحد.

الوضعية 11: $(BEM\ 2009)$
1. حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x + 4y = 32 \end{cases}$$

2. اوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 500 و 125.
ملأ تاجر $4000\ g$ من الشاي في علب صنف $125\ g$ و صنف $500\ g$، إذا علمت أنّ العدد الكلّي للعلب هو 14، اوجد عدد العلب لكل صنف. (لاحظ أنّ: $32 \times 125 = 4000$)

بالتوفيق والنجاح


تذكـــير:

❖ الدّالّة الخطيّة:

📖 **تعريف:**

a عدد معطى.

عندما نرفق كل عدد x بالجداء $a \times x$ نقول أننا عرّفنا دالة خطية f معاملها a.

- العدد $a \times x$ يسمى صورة x بالدّالّة f ونرمز لهذه الصورة بالرمز $f(x)$ ونكتب $f(x) = ax$.
- نرمز لهذه الدّالّة بـ $f: x \to ax$.

مثال 01: الدالة f التي ترفق كل عدد x بنصفه هي دالة خطية نرمز لها بـ:

$f: x \to \frac{1}{2}x$ أو $f(x) = \frac{1}{2}x$

📖 **تعيين صورة عدد بدالة، تعيين عدد إذا عُلمت صورته بدالة:**

إذا كانت f دالة خطية معرفة كما يلي: $f(x) = ax$ فإنه يمكننا إيجاد صورة عدد بهذه الدالة (بالتعويض) أو إيجاد عدد علمت صورته بهذه الدالة كذلك (بحل معادلة من الدرجة الأولى).

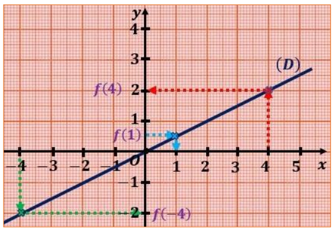
مثال 02: لتكن الدالة g المعرفة كما يلي: $g(x) = 12x$

1. لتعيين صورة $\frac{1}{2}$ بهذه الدالة نعوض x بـ $\frac{1}{2}$ نجد:
$g\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$ فصورة العدد $\frac{1}{2}$ بالدالة g هي العدد 6.
2. لإيجاد العدد الذي صورته 36 بالدالة g نعوض $g(x)$ بـ 36
أي: $3 = \frac{36}{12} = x$ ومنه: $x = 3$
فالعدد الذي صورته 36 بالدالة g هو العدد 3.

📖 **قراءة تمثيل بياني لدالة خطية:**

- لتعيين صورة عدد بدالة، نقرأ ترتيب النقطة من التمثيل البياني التي فاصلتها هذا العدد.
- لتعيين عدد صورته معلومة n بدالة، نقرأ فاصلة النقطة من التمثيل البياني التي ترتيبها n.

مثال 04: المستقيم (D) يمثل بيان دالة خطية f.



بقراءة بيانية:

- صورة 4 هي 2. إذن $f(4) = 2$.
- صورة -4 هي -2.إذن: $f(-4) = -2$.
- هو العدد الذي صورته $\frac{1}{2}$. إذن: $f(1) = \frac{1}{2}$.

📖 **تعيين دالة خطية انطلاقا من عدد وصورته:**

لتعيين دالة خطية f علما أن $f(m) = n$، نحل المعادلة $am = n$ ذات المجهول a.

مثال 03: عيّن الدالة الخطية h إذا علمت أن: $h(3) = -7$.

الدّالة h من الشكل $h(x) = ax$.إذن $h(3) = -7$ معناه $3a = -7$

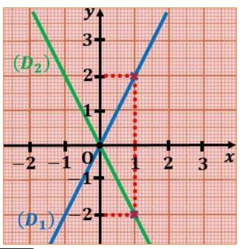
أي: $a = -\frac{7}{3}$ إذن العبارة الجبرية لدالة h هي: $h(x) = -\frac{7}{3}x$.

📖 **التمثيل البياني لدالة خطية:**

في مَعلم، التمثيل البياني لدالة خطية معاملها a هو مستقيم يشمل المبدأ إذن تكفي نقطة واحدة تختلف عن المبدأ لرسمه.

نقول إنّ $y = ax$ هي معادلة لهذا المستقيم و a هو معامل توجيه له.

مثال 05: التمثيل البياني للدّالة الخطية $g: x \to -2x$ هو مستقيم يشمل المبدأ O.



لإنشائه يكفي تعيين نقطة ثانية من (D_1)، مثلا النقطة $A(1; -2)$.

(D_2) هو التمثيل البياني للدالة $h: x \to 2x$.

ملاحظة: يعيّن المعامل a للدالة الخطية منحى المستقيم (D_1).

- إذا كان $a > 0$ فإن (D_1) « يصعد ».
- إذا كان $a < 0$ فإن (D_2) « ينزل ».

❖ الدّالّة الخطية و التناسبية:

- جدول قيم دالة خطية هو جدول فيه أعداد السّطر الثاني هي صورة أعداد السّطر الأول بالدالة الخطية.
- جدول قيم دالة خطية هو جدول تناسبية.
- معامل الدالة الخطية هو معامل تناسبية لهذا الجدول.

مثال: f هي الدّالة الخطية المعرّفة بالشّكل: $f(x) = -3x$.

جدول القيم للدالة f الآتي هو جدول تناسبية.

x	$-2,5$	-1	0	1	$2,5$
$f(x)$	$7,5$	3	0	-3	$-7,5$

$\times(-3)$

(-3) هو معامل تناسبية لهذا الجدول و هو أيضا معامل الدالة الخطية.

❖ تطبيقات التناسبية:

📖 **الدوال الخطية والنسب المئوية:**

	تخفيض x بـ $t\,\%$ يعني ضرب x في $1 - \frac{t}{100}$	زيادة x بـ $t\,\%$ يعني ضرب x في $1 + \frac{t}{100}$	أخذ $t\,\%$ من x يعني ضرب x في $\frac{t}{100}$
الدالة الخطية المرفقة	$x \to \left(1 - \frac{t}{100}\right)x$	$x \to \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$	$x \to \frac{t}{100}x$

- أخذ 5% من x يعني ضرب x في $0,05$ والدالة المرفقة هي $x \to 0,05\,x$.
- زيادة 5% من x يعني ضرب x في $1,05$ والدالة المرفقة هي $x \to 1,05\,x$.
- تخفيض 5% من x يعني ضرب x في $0,95$ والدالة المرفقة هي $x \to 0,95\,x$.

➢ **استعمال النسب المئوية:**

تخفيض x بـ $t\,\%$ ثم زيادة الناتج بـ t'، يعني ضرب x في الجداء $\left(1 - \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{t'}{100}\right)$.

مثال: خزان ماء مملوء تبلغ سعته $30\,m^3$، افرغنا 30 % منه ثم أضفنا 15% مما فيه. يصبح حجم الماء الخزان: $24,15\,m^3$

لأن $30 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right)\left(1 + \frac{15}{100}\right) = 24,15$.

📖 **المقادير المركبة:**

عندما نحسب جداء مقدارين نتحصل على مقدار جداء.

أمثلة:

➢ **مساحة مستطيل:**

طول مستطيل هو $8\,cm$ وعرضه $3\,cm$. مساحته هي $(8 \times 3)\,cm^2$ أي: $24\,cm^2$. A هي مساحة مستطيل، L طوله و l عرضه.

نكتب $A = L \times l$، A هو مقدار جداء.

➢ **الطاقة الكهربائية:**

يستهلك جهاز كهربائي $1,2\,kw$ في $1\,h$ في $5\,h$، يستهلك هذا الجهاز $1,2\,kw \times 5\,h$ أي: $6\,kw/h$. إذن الطاقة الكهربائية E التي يستهلكها جهاز استطاعته P في مدة زمنية t هي $E = P \times t$.

📖 **مقدار حاصل القسمة:**

عندما نحسب حاصل قسمة مقدارين، نتحصل على مقدار حاصل القسمة.

أمثلة:

- السرعة المتوسطة لمتحرك هي حاصل قسمة المسافة المقطوعة على مدة قطع هذه المسافة.
نكتب $v(km/h) = \frac{d(km)}{t(h)}$ أو $v(m/s) = \frac{d(m)}{t(s)}$.
- الكتلة الحجمية لجسم هي حاصل قسمة كتلة هذا الجسم على حجمه.
نكتب $m_v = \frac{m}{v}(kg/m^3)$. السرعة المتوسطة لدراجة عندما تقطع مسافة $42\,km$ في $1,5\,h$ هي $\left(\frac{42}{1,5}\right)km/h$ أي $28\,km/h$.
- الكتلة الحجمية لجسم كتلته $2,4\,kg$ وحجمه $0,01\,m^3$ هي $\left(\frac{2,4}{0,01}\right)kg/m^3$ أي $(240)kg/m^3$.

التمرين 01: سعر حذاء رياضي هو $2500\ DA$. أصبح هذا السعر $2400\ DA$ بعد التخفيض.

1. عيّن الدّالة الخطية التي تنمذج هذه الوضعية.
2. ماهي نسبة هذا التخفيض؟

التمرين 02: سعر سروال رياضي هو $3000\ DA$. أصبح هذا السعر بعد زيادة $3240\ DA$.

1. ماهو معامل الدّالة الخطية التي تنمذج هذه الوضعية؟
2. استنتج النسب المئوية بهذه الزيادة.

التمرين 03: خفّض تاجر سعر منتوج بـ $5\ \%$.

1. عبّر عن السعر y للمنتوج بعد التخفيض بدلالة السعر x قبل التخفيض.
2. إذا كان سعر المنتوج هو $1200\ DA$ قبل التخفيض فماهو سعره بعد التخفيض؟
3. إذا كان سعر المنتوج هو $1900\ DA$ بعد التخفيض فماهو سعره قبل التخفيض؟

التمرين 04: هل الدّوال التالية دوال خطية؟ في حالة الإيجاب عيّن المعامل.

$h: x \to x^2$ ، $g: x \to 4x + \sqrt{3}$ ، $f: x \to 2\pi x$

التمرين 05:

1. عين الدالة الخطية f التي تمثيلها البياني يشمل النقطة $E(3;6)$.
2. هل النقطة $K(-1;-2)$ تنتمي الى هذا التمثيل ؟
3. اوجد العدد الذي صورته 4 بالدالة f .
4. اوجد صورة العدد 7 بالدالة f.

التمرين 06: g هي الدّالة الخطية المعرّفة بالدّستور $g(x) = -\sqrt{3}x$.

1. احسب $g(2\sqrt{3})$، $g(-4)$، $g(0)$.
2. عين صور الأعداد $\sqrt{12}$، -3، 5.
3. عيّن العدد الذي صورته $\sqrt{3}$.

التمرين 07: مثّل بيانيا الدّوال التالية:

$f: x \to 3x$ ، $g: x \to -\frac{5}{4}x$ ، $h: x \to \frac{4}{5}x$

التمرين 08: نعتبر الدّالة الخطية h حيث $h(-2,5) = 6$.

1. مثّل بيانيا الدّالة h.
2. ماهو معامل الدّالة h؟
3. عيّن العدد الذي صورته $-4,8$.

التمرين 09: نعتبر قرصا نصف قطره r. محيطه P و مساحته A.

r (بالمتر)	$2,5$	3	$9,5$
P (بالمتر)	5π		
A (بالمتر المربع)			$90,25\ \pi$

1. انقل الجدول السابق وأتممه.
2. هل A و P متناسبان؟ في حالة الإيجاب عيّن معامل التناسبية.
3. هل A و r متناسبان؟ في حالة الإيجاب عيّن معامل التناسبية.

التمرين 10: ثمن هاتف نقال $25400\ DA$، ازداد ثمنه بـ 5%، ماهو مقدار الزيادة؟

التمرين 11: يزن أحمد $60kg$، ازداد وزنه بـ 25%. ماهو وزنه الجديد؟

التمرين 12: خزان ماء مملوء $5\ m^3$، أفرغنا 30% من سعته، ثم أضفنا 20% من محتواه.

كم أصبح محتوى الخزان بالمتر المكعب (m^3)، ثم باللتر (l).

التمرين 13: احسب المسافة المقطوعة d في دقيقة واحدة لدرّاج يسير بسرعة $54\ km/h$.

التمرين 14: مستطيل طوله $15\ cm$ وعرضه $12\ cm$. نزيد 20% في طوله وننقص 20% من عرضه.

1. احسب الطول والعرض الجديدين لهذا المستطيل.
2. ماهي نسبة التغير في مساحة هذا المستطيل؟

الوضعية 01: تقترح شركة سيارات أجرة تسعيرتين للمسافة $500\ km$.

التسعيرة الأولى: $20\ DA$ للكيلومتر الواحد.

التسعيرة الثاني: مبلغ ثابت قدره $4000\ DA$.

- استعمال تمثيلا بيانيا لتحديد أفضل التسعيرتين.

الوضعية 02:

دخل يوسف مكتبة صباحا لشراء كراس بثمن $42\ DA$ الذي يزيد عن الثمن القديم للكراس بنسبة $20\ \%$.

- ماهو الثمن القديم للكراس؟

الوضعية 03:

يمثل الماء 80% من وزن الإنسان.

1. ماهو وزن الماء وحجمه لشخص يزن $75kg$، إذا علمت أن الكتلة الحجمية للماء هي $1\ g/cm^3$؟
2. ماهو وزن شخص، حجم الماء المتواجد في جسمه هو $50\ l$؟

الوضعية 04:

أراد صائغ أن يعرف مدى نقاوة سبيكة من الذهب كتلتها $500\ g$ وذلك بقياس حجمها، فوجد أنّ حجمها $27cm^3$.

اذا علمت ان الكتلة الحجمية للذهب هي $19,3\ g/cm^2$.

- فهل هذه السبيكة مغشوشة؟

الوضعية 05:

بلغ ارتفاع الماء في السد $45\ m$.

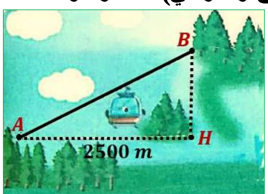
وبسبب قلّة المطر انخفض الماء بنسبة 2%.

وبعد سقوط الأمطار ارتفع مستوى الماء بنسبة 5%.

1. كم أصبح ارتفاع الماء في السد بعد الانخفاض؟
2. ماهو ارتفاع ماء السد بعد سقوط الأمطار؟

الوضعية 06:

1. ينطلق مصعد هوائي من ارتفاع $900\ m$ ليصل ارتفاع $1400\ m$ (الشكل). ماهي المدة الزمنية (مقدّرة بالدقائق والثواني) لصعود واحد، إذا كانت سرعة المصعد الهوائي $5,5\ m/s$؟



2. ليكن x سعر التذكرة لشخص بالغ لرحلة واحدة (ذهابا و إيابا).
   - أ. عبّر عن تكلفة الرحلة بدلالة x لعائلة متكوّنة من شخصين بالغين و3 أطفال، علما أنّ كلّ طفل يستفيد من تخفيض قدره $40\ \%$ من قيمة x.
   - ب. ماهي أكبر قيمة لسعر التذكرة التي تسمح للعائلة بدفع ثمن الرحلة في حدود المبلغ المخصص لذلك و المقدر بـ $2000\ DA$؟

بالتوفيق والنجاح

تذكـــير:

الدالة التآلفية:

تعريف: a و b عددان.
عندما نرفق بكل عدد x العدد $ax+b$. نقول إنّنا عرّفنا دالة تآلفية.
يسمى العدد $ax+b$ صورة x بهذه الدّالة.
a و b هما معاملا هذه الدّالة.

الترميز: يرمز لدالة تألفية بإحدى الرموز f، g، h...
إذا كان $ax+b$ هو صورة x بالدّالة التآلفية f،نكتب $f:x\to ax+b$
،نكتب أيضا $f(x)=ax+b$.

مثال 01: الدالة f التي ترفق كل عدد x بضعفه مضافاً إليه العدد 3 هي دالة تآلفية نرمز لها بـ: $f:x\to 2x+3$ أو $f(x)=2x+3$

حالات خاصة:
- الدالة التآلفية ليست وضعية تناسبية (في الحالة $b\neq 0$).
- في حالة $b=0$ تصبح الدالة التآلفية دالة خطية.
- إذا كان $a=0$ تسمى الدالة الثابتة.

تعيين صورة عدد بدالة وتعيين عدد إذا عُلمت صورته بدالة:

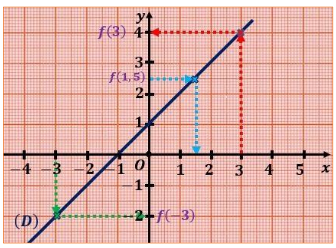
إذا كانت f دالة تآلفية معرفة كما يلي $f(x)=ax+b$ فإنه يمكننا إيجاد صورة عدد بهذه الدالة (بالتعويض) أو إيجاد عدد علمت صورته بهذه الدالة كذلك (بحل معادلة من الدرجة الأولى).

مثال 02: لتكن الدالة g المعرفة كما يلي: $g(x)=4x+1$
1. لتعيين صورة 2 بهذه الدالة نعوض x بـ 2 نجد:
$g(2)=4\times 2+1=9$
فصورة العدد 2 بالدالة g هي العدد 9.
2. لإيجاد العدد الذي صورته 5 بالدالة g نعوض $g(x)$ بـ 5
أي: $g(x)=5$ وعليه: $4x+1=5$ وبالتالي: $4x=5-1$
أي: $4x=4$ فإن: $x=\frac{4}{4}$ ومنه: $x=1$.
فالعدد الذي صورته 5 بالدالة g هو العدد 1.

قراءة تمثيل بياني لدالة تآلفية:

- لتعيين صورة عدد بدالة، نقرأ ترتيب النقطة من التمثيل البياني التي فاصلتها هذا العدد.
- لتعيين عدد صورته معلومة n بدالة، نقرأ فاصلة النقطة من التمثيل البياني التي ترتيبها n.

مثال 03: المستقيم (D) يمثل بيان دالة تآلفية f.
بقراءة بيانية:
- صورة 3 هي 4. إذن $f(3)=4$.
- صورة -3 هي -2. إذن $f(-3)=-2$.
- $1,5$ هو العدد الذي صورته $2,5$. $f(1,5)=2,5$.

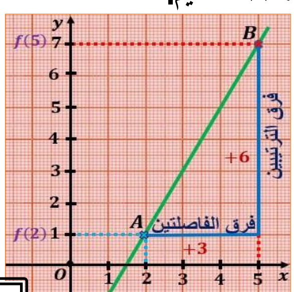


تناسبية التزايدات:

خاصية:
fدالة تآلفية حيث $f(x)=ax+b$ مع a و b عددان معلومان.
من أجل كل عددين x_1 و x_2 حيث $x_1\neq x_2$ لدينا $a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

ملاحظة: هذه الخاصية تعني أنّ تزايد $f(x)$ و تزايد x متناسبان ومعامل التناسبية هو a.
a هو أيضا معامل توجيه المستقيم الذي يمثّل الدالة f.
يسمح معامل توجيه مستقيم بمعرفة منحى هذا المستقيم.

مثال 04: fهي الدالة التآلفية حيث $f(2)=1$ و $f(5)=7$.
f من الشكل: $f(x)=ax+b$
لدينا:
$$a=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{7-1}{5-2}=\frac{6}{3}=2$$



تعيين دالة تآلفية انطلاقا من عددين وصورتها:

لتعيين دالة تآلفية معاملاهاa وb علما أن $f(x_1)=y_1$ و$f(x_2)=y_2$، نحسب a باستعمال تناسبية التزايدات وبحلّ المعادلة $f(x_1)=y_1$ و $f(x_2)=y_2$ نجد المجهول b.

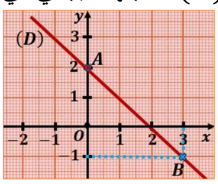
مثال 05: عين الدالة التآلفية h حيث: $h(1)=3$ و $h(-3)=-5$
$$a=\frac{h(1)-h(-3)}{1-(-3)}=\frac{3-(-5)}{1-(-3)}=\frac{3+5}{1+3}=\frac{8}{4}=2$$
معامل الدالة التآلفية h هي 2 ومنه $h(x)=2x+b$
لدينا: $h(1)=3$ وعليه: $2(1)+b=3$ أي: $2+b=3$
وبالتالي: $b=3-2$ ومنه: $b=1$
إذن العبارة الجبرية لدالة h هي: $h(x)=2x+1$

التمثيل البياني لدالة خطية:

في مَعلم للمستوي، التمثيل البياني لدالة تآلفية هو $f:x\to ax+b$ هو مستقيم.

ملاحظات:
- لدينا $f(0)=b$، العدد b يسمى الترتيب عند المبدأ للمستقيم (D) الممثل للدّالة التآلفية $f:x\to ax+b$.
- النقطة $M(x_0;y_0)$ تنتمي إلى المستقيم (D)معناه $y_0=ax+b$.
- العلاقة $y=ax+b$ تسمى معادلة المستقيم (D) و العدد a هو معامل توجيهه.

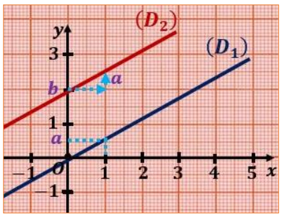
مثال 06:
f هي الدّالة التآلفية حيث $f(x)=-x+2$ و (D) تمثيلها البياني في معلم. لإنشاء (D) يكفي تعيين النقطتين A و B.
المستقيم (D) هو المستقيم (AB).



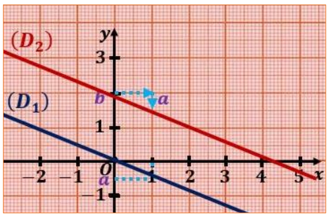
x	0	3
$f(x)$	2	-1
النقط	$A(0;2)$	$B(3;-1)$

الأوضاع النسبية للتمثيلين البيانيين لدالة تآلفية و الدالة الخطية المرفقة:

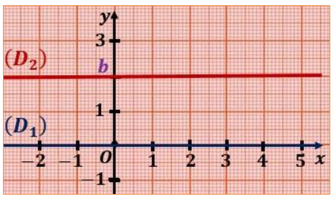
المستقيم (D_1) الذي يمثل الدّالة التآلفية $x\to ax+b$ هو صورة المستقيم (D_2) الذي يمثل الدّالة الخطية $x\to ax$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0;b)$. (D_1) و (D_2) متوازيان.



الحالة $a>0$



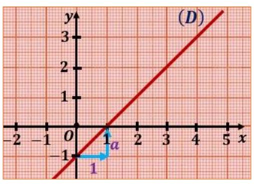
الحالة $a<0$



الحالة $a=0$

تعيين دالة تآلفية انطلاقا من تمثيلها البياني:

مثال 07: (D) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية f (الشكل المقابل).
تعيين $f(x)$ صورة x بالدالة f: لدينا $f(x)=ax+b$ حيث:
- العدد b هو الترتيب إلى المبدأ، (أو $f(0)=b$) ومنه $b=-1$.
- العدد a هو معامل توجيه المستقيم (D)، ومنه $a=1$ أي: $f(x)=x-1$.
(يمكن قراءة العدد a بيانيا كما هو موضح في الشكل، أو حسابه باستعمال نسبة التزايدات).



تفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا:

نعني بتفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا أن نرفق بهذه الجملة مستقيمين يمثلان الدالتين التآلفيتين المرفقتين بالجملة. الثنائية المشكلة من إحداثيتي نقطة تقاطع هذين المستقيمين، عند وجودها، هي حلّ هذه الجملة.

مثال 08:

نعتبر الجملة : $\begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

لتفسير حل هذه الجملة بيانيا، نعبّر عن y بدلالة x في كلتا المعادلتين

ونجد: $\begin{cases} y= x+3 \\ y=-2x \end{cases}$

نسمّي (D_1) و (D_2) المستقيمين الممثلين للدالتين التآلفيتين:

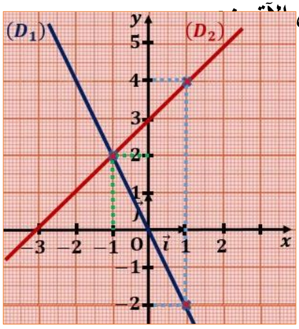
$f(x)=-2x$ و $g(x)=x+3$ (الشكل المقابل).

في معلم متعامد و متجانس مبدؤه O.

لإنشاء (D_1) و (D_2) نستعين بالجدولين الآتيين:

x	0	1
$f(x)$	0	-2

x	0	1
$g(x)$	3	4



حل الجملة هو الثنائية المشكّلة من إحداثيتي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2).

بقراءة بيانيا، نجد: $(-1;2)$

تمارين – وضعيات

التمرين 01:

هل الدّوال التالية دوال تآلفية؟ في حالة الإيجاب عيّن المعاملي.

$f: x \to 2\pi x+1$ ، $g: x \to 4x+\sqrt{3}$ ، $h: x \to x^2+1$

التمرين 02: f هي الدّالة التآلفية حيث $f(x)=1-2x$.

1. عيّن معاملي الدالة f.
2. احسب $f(-1)$، $f(-5)$، $f(0)$.
3. احسب صورة كل عدد مما يلي : $\sqrt{3}$، -4، 2.
4. عيّن العدد الذي صورته هي -3 بالدالة f.

التمرين 03: مثّل بيانيا الدّوال التالية:

$f: x \to 3x-1$ ، $g: x \to -x+2$ ، $h: x \to -5-x$

التمرين 04:

1. عين الدالة التآلفية f التي تمثيلها البياني يشمل النقطتين $M(2;5)$ ، $N(-1;-4)$.
2. هل النقطة $H(4;11)$ تنتمي الى هذا التمثيل ؟
3. اوجد العدد الذي صورته 5 بالدالة f .
4. اوجد صورة العدد -2 بالدالة f.

التمرين 05: لتكن النقاط $M(1;1)$ ؛ $F(0;3)$ ؛ $E(3;-3)$

1. اوجد الدالة التآلفية التي تمثيلها البياني هو المستقيم (EF).
2. برهن أن النقاط E، F، M على استقامة واحدة.

التمرين 06: التمثيل البياني (T) لدالة تآلفية h يمر بالنقطتين $A(2;-3)$ و $B(-1;8)$.

1. عيّن معامل توجيه المستقيم (T).
2. عبّر عن $h(x)$ بدلالة x.

التمرين 07: f هي الدالة التآلفية حيث تمثيلها البياني هو مستقيم (P) معامل توجيهه 3.

- عبّر عن $f(x)$ بدلالة x إذا علمت أن $f(2)=5$.

التمرين 08: أنشئ المستقيمين (D_1) و (D_2) في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ بحيث:

(D_1) معادلته: $y=-x+1$، (D_2) معادلته: $y=2x+4$.

1. عيّن بيانيا إحداثيتي M نقطة تقاطع (D_1) و (D_2).
2. استنتج الحل البياني للجملة الآتية:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$$

التمرين 09: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

- برهن أن النقط $A(11;-17)$، $B(0;5)$ و $C(-8;21)$ على استقامة واحدة.

التمرين 10: حلّ جبريا كلاّ من الجملتين ثمّ تحقق بيانيا.

$\begin{cases} x-7y=4 \\ 6x-3y=3 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 5x-3y=-1 \\ x+y=3 \end{cases}$

التمرين 11: لتكن f الدالة التآلفية معرفة كما يلي: $f(x)=2x-1$.

1. احسب $f(1)$ ؛ $f(-1)$.
2. هل النقطتان $A(0;-1)$ و $B\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$ تنتميان إلى (Δ) التمثيل البياني لـدالة f؟
3. أنشئ المستقيم (Δ) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
4. g دالة خطية تمثيلها البياني يشمل النقطة B.
5. مثّل بيانيا g في نفس المعلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
6. انطلاقا من التمثيل البياني للدالة g، أعط العبارة الجبرية للدالة g.

التمرين 12: $(BEM\ 2016)$

f دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$ يشمل النقطتين $A(2\ ;5)$ و $B(-1\ ;-4)$.

1. بيّن أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية f هي: $f\ (x)\ =\ 3x-1$.
2. لتكن النقطة $C(4\ ;11)$ من المستوي، هل النقط A، B، C على استقامة واحدة.
3. أوجد العدد الذي صورته 29 بالدالة f.

الوضعية: انطلقت دراجة نارية من القرية في اتجاه المدينة على الساعة $8\ h$ بسرعة ثابتة قدرها $30\ km/h$.

وانطلقت سيارة من نفس القرية في اتجاه نفس المدينة على الساعة $10\ h$ بسرعة ثابتة قدرها $50\ km/h$.

المسافة بين القرية و المدينة هي $200\ km$. بعد مدّة t قطعت السيارة المسافة $f(t)$ وقطعت الدراجة النارية المسافة $g(t)$.

1. عبّر عن كل من $f(t)$ و $g(t)$ بدلالة t.
2. متى تلتحق السيارة بالدراجة النارية؟ حدّد عندئذ المسافة المقطوعة.

الوضعية الادماجية 01:

يعرض نادي رياضي على زبائنه عرضين للدفع كالآتي:

العرض الأول: دفع $100\ DA$ مقابل كل حصة.

العرض الثاني: دفع اشتراك شهري قدره $400\ DA$ ثم دفع $50\ DA$ مقابل كل حصة.

الجزء الأول:

1. يريد السيد أحمد المشاركة في 10 حصص في الشهر، كم سيدفع حسب كل عرض.
2. ليكن x عدد الحصص في الشهر.
- عبّر بدلالة x عن y_1 المبلغ المدفوع في العرض الأول و عن y_2 المبلغ المدفوع في العرض الثاني.

الجزء الثاني:

1. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
- ارسم المستقيمين (d_1) و (d_2) ممثلا الدالتين f و g حيث:

$f(x)=100x$ و $g(x)=50x+400$

(نأخذ: $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل حصة، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $100\ DA$).

2. حل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} y=100x \\ y=50x+400 \end{cases}$$

- ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذا الحل.

3. اشرح من البيان للسيد أحمد العرض الأفضل بالنسبة إليه على حسب عدد الحصص.

الوضعية الادماجية 02:

تقدم إحدى الشركات المتخصصة في خدمات الانترنت العروض الآتية:

العرض الأول: كل $1\ MO$ بـ $2\ DA$.

العرض الثاني: كل $1\ MO$ بـ $1\ DA$ مع اشتراك شهري بمبلغ غير مسترجع قدره $150\ DA$

الجزء الأول:

1. أكمل الجدول التالي بحساب المبلغ اللازم حسب كل عرض موضحا مراحل الحساب:

العروض \ السعة	تحميل شريط علمي سعته $100\ MO$	تحميل سور قرآنية سعتها $250\ MO$
العرض 1		
العرض 2		

2. ليكن x سعة الانترنت المستهلكة.
y_1 هو المبلغ حسب العرض الأول و
y_2 هو المبلغ حسب العرض الثاني.
- عبر عن y_1 و y_2 بدلالة x.

الجزء الثاني:

1. في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
مثّل بيانيا الدالتين: $f(x) = 2x$ و $g(x) = x + 150$
(نأخذ: $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $50\ MO$ ، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $50\ DA$).
2. حل جملة المعادلتين التالية:
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 150 \end{cases}$$
- أعط التفسير البياني لهذا لحل.
3. بقراءة بيانية، ماهو العرض المناسب لتحميل شريط أناشيد سعته $200\ MO$.

الجزء الثالث:

خلال شهر رمضان الكريم أعلنت نفس الشركة لزبائنها أنهم بإمكانهم الاستفادة من 20% سعة انترنت إضافية مجانا عند كل شراء.
ما هي سعة الانترنت الواجب شراؤها للحصول على سعة قدرها $4800\ MO$.

الوضعية الادماجية 03: $(BEM\ 2007)$

تقترح شركة لسيارات الأجرة التسعيريين التاليتين:
التسعيرة الأولى: $15\ DA$ للكيلومتر الواحد لغير المنخرطين.
التسعيرة الثانية: $12\ DA$ للكيلومتر الواحد مع مشاركة شهرية قدرها $900\ DA$.

1) انقل الجدول على ورقة الإجابة ثمّ أكمله:

المسافة (km)	60		
التسعيرة الأولى (DA)			5100
التسعيرة الثانية (DA)		3060	

2) ليكن: x هو عدد الكيلومترات للمسافات المقطوعة.

y_1 هو المبلغ حسب التسعيرة الأولى.
y_2 هو المبلغ حسب التسعيرة الثانية.
أ. عبّر عن y_1 و y_2 بدلالة x.
ب. حل المتراجحة: $15x > 12x + 900$

3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
أ. مثّل بيانيا الدالتين f و g حيث:
$f(x) = 15x$ و $g(x) = 12x + 900$
($1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $50\ km$، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $500\ DA$).
ب. استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة مع الشرح.

الوضعية الادماجية 04: $(BEM\ 2011)$

تقترح وكالة تجارية للاتصالات الهاتفية للتسديد الشهري الصيغ الثلاث الآتية:
الصيغة (أ): دفع 11 دينارا للدقيقة .
الصيغة (ب): دفع 600 دينار اشتراكا و 5 دنانير للدقيقة.
الصيغة (ج): دفع 1200 دينار اشتراكاً و 3 دنانير للدقيقة.

1) احسب تكلفة المكالمات التي مدتها 100 دقيقة في كل من الصيّغ الثلاث.
2) y يمثل الكلفة بالدنانير، x يمثل المدة بالدقائق.
اكتب y بدلالة x في كل من الصيغ الثلاث . وفي نفس المعلم، مثّل بيانيا الصيغ الثلاث واستنتج الفترة الزمنية التي تكون خلالها الصيّغة (ب) أقل تكلفة. (يمكنك اختيار المعلم بحيث $1\ cm$ تمثل 50 دقيقة على محور الفواصل و $1\ cm$ تمثل $200\ DA$ على محور التراتيب).

الوضعية الادماجية 05: $(BEM\ 2012)$

يقترح مدير صحيفة يومية على زبائنه صيغتين لاقتناء الجريدة.

الصيّغة الأولى: ثمن الجريدة $10\ DA$.
الصيّغة الثانية: ثمن الجريدة $8\ DA$ مع اشتراك سنوي قدره $500\ DA$.

1) انقل واتمم الجدول :

عدد الجرائد المشتراة	50		
مبلغ الصيّغة الأولى بـ DA		1000	
مبلغ الصيّغة الثانية بـ DA			3300

2) ليكن x عدد الجرائد المشتراة.
نسمي $f(x)$ الثمن المدفوع بالصيّغة الأولى و $g(x)$ الثمن المدفوع بالصيغة الثانية .
- عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x.

3) مثّل بيانيًا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث:
$2cm$ على محور الفواصل يمثّل 50 جريدة و $2cm$ على محور التراتيب يمثّل $500\ DA$.
4) حل المعادلة $f(x) = g(x)$ وماذا يمثّل الحل ؟
5) ماهي الصيغة الأفضل في الحالتين التاليتين:
- عند اقتناء 150 جريدة.
- عند اقتناء 270 جريدة.

الوضعية الادماجية 06: $(BEM\ 2013)$

لإقامة حفل زفاف قررت عائلة كراء سيارة فاخرة فاتصل الأب محمد بثلاث وكالات فقدّموا له عروضا حسب المعطيات المقابلة:
المعطيات:

عرض الوكالة الأولى: دفع مبلغ $4000\ DA$ لليوم الواحد.
عرض الوكالة الثانية: دفع مبلغ $3000\ DA$ لليوم الواحد يضاف إليه ضمان غير مسترجع قدره $1000\ DA$.
عرض الوكالة الثالثة: دفع مبلغ $16000\ DA$ لمدة لا تتعدى أسبوعا واحدا.

فاستنجد الأب محمد بابنه سمير الذي يدرس في السنة الرابعة متوسط لمساعدته في اختيار العرض الأنسب والأقل تكلفة.
لو كنت في مكان سمير ساعد الأب محمد في:
1) اختيار العرض الأنسب والأقل تكلفة لكراء سيارة لمدة 7 أيام .
2) x عدد الأيام التي يستغل فيها الأب محمد السيارة.
أ. عبّر، بدلالة x، عن العرض الأول بالدالة $f(x)$ وعن العرض الثاني بالدالة $g(x)$ وعن العرض الثالث بالدالة $h(x)$.
ب. مثّل بيانيا في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الدوال f، g و h.
(حيث كل $2\ cm$ من محور الفواصل يمثِّل يومًا واحدًا وكل $1\ cm$ من محور التراتيب يمثِّل $2000\ DA$).
3) اعتماداً على البيان املأ الجدول الآتي:

العروض \ الأيام	اليوم الأول	اليوم الرابع	اليوم الخامس
العرض 1			
العرض 2			
العرض 3			

4) أ. حلّ المعادلات الآتية لإيجاد x عدد الأيام المستغلة من طرف الأب محمد: $f(x) = g(x)$ ؛ $f(x) = h(x)$ ؛ $g(x) = h(x)$
ب. ماذا يمثل حل كل معادلة؟

الوضعية الادماجية 07: $(BEM\ 2014)$

بمناسبة عيد الأضحى قدمت مؤسسة للهاتف النّقال عرضين لمدّة أسبوع للتواصل وتبادل التّهاني بواسطة الرّسائل القصيرة (SMS).

العرض الأول: $3\ DA$ للرسالة الواحدة.
العرض الثاني: $1,5\ DA$ للرسالة الواحدة مع اقتطاع مبلغ جزافي قدره $30\ DA$ من الرّصيد.

انقل وأكمل الجدول:

عدد الرسائل (SMS)	10		
المبلغ حسب العرض الأول بـ DA		45	
المبلغ حسب العرض الأول بـ DA			90

1) x يعبّر عدد الرسائل المرسلة.
y_1 هو المبلغ حسب العرض الأول و y_1 هو المبلغ حسب العرض الثاني.
- عبّر عن y_1 و y_2 بدلالة x.

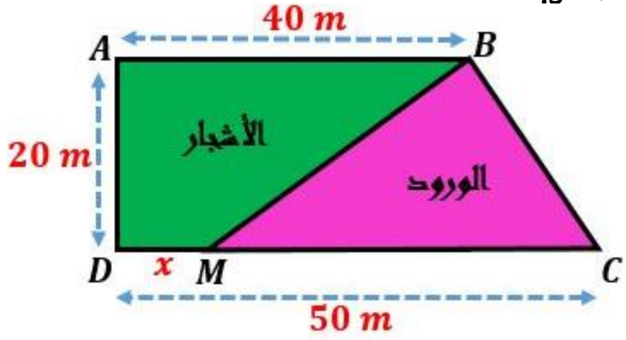
2) f و g دالتان حيث:
$f(x)=3x$ و $g(x)=1,5x+30$
مثل بيانيا الدالتين f و g في نفس المعلم المتعامد و المتجانس حيث:
($1\ cm$ على محور الفواصل يمثِّل 5 رسائل SMS و $1cm$ على محور التراتيب يمثِّل $10\ DA$).

4) يريد الأخوان زينب وكريم استغلال هذين العرضين لهذه المناسبة، في رصيد كريم $120\ DA$ ويريد تهنئة أكبر عدد من الأشخاص، أمّا زينب تريد تهنئة زميلاتها في الدّراسة وعددهن 15.
بقراءة بيانية، ما هو العرض المناسب لكل منهما ؟ (مع الشّرح)

الوضعية الادماجية 08:$(BEM\ 2015)$

I) لعمي أحمد قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها $1000\ m^2$، عرضها خمسي $\left(\frac{2}{5}\right)$ طولها.
- أوجد بُعدي هذه القطعة.

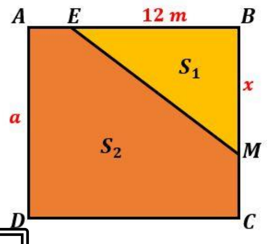
II) تنازل عمي أحمد لأخيه عن جزء من هذه القطعة مساحته $100\ m^2$ و خصص الجزء الباقي منها لاستغلاله مشتلة للورود والأشجار، لهذا الغرض قسّم هذا الجزء عشوائيا إلى قطعتين كما هو موضح في الشكل:



نضع $DM=x$ (M نقطة من $[DC]$ مع $0\le x\le 50$).
لتكن $f(x)$ مساحة المثلث BCM و $g(x)$ مساحة الرباعي $ABMD$.
1) أ- عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x .
ب- سَاعِد عَمِّي أحمد لإيجاد الطول DM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة.
2) أ- في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- مثّل بيانيا الدالتين: $f(x)=500-10x$ و $g(x)=10x+400$
نأخذ:
$1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $2\ m$
$1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $50\ m^2$
ب- فسّر بيانياً مساعدتك السابقة لعمي أحمد، مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة.

الوضعية الادماجية 09:$(BEM\ 2017)$

$ABCD$ قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها $324\ m^2$ ملك للأخوين أحمد وفاطمة ومجزأة حسب المخطط المقابل.



الجزء الأول:
1) احسب طول ضلع هذه القطعة a .
2) M نقطة متحركة على الضلع $[BC]$ حيث: $BM=x$.
E نقطة من $[BA]$ حيث: $BE=12\ m$.

الجزء EBM تملكه فاطمة والجزء $AEMCD$ يملكه أحمد .
أ. ليكن S_1 مساحة الجزء EBM و S_2 مساحة الجزء $AEMCD$
- اكتب بدلالة x كلا من المساحتين S_1 و S_2.
ب. ساعد الأخوين على تحديد موضع النقطة M بحيث مساحة قطعة أحمد ضعف مساحة قطعة فاطمة.

الجزء الثاني:
المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$.
1) مثل بيانيا الدالتين f و g حيث:
$f(x)=12x$ و $g(x)=-6x+324$
(نأخذ: $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $2\ m$ و $1\ cm$ على محور التراتيب يمثِّل $36m^2$).
2) بقراءة بيانية فسر مساعدتك السابقة للأخوين حول تحديد موضع النقط M مع ايجاد مساحة كل من القطعتين.

الوضعية الادماجية 10:$(BEM\ 2018)$

عبد الله ومحمد عاملان في مؤسسة لصناعة ألعاب الأطفال، راتبهما الشهري على النحو التالي:
عبد الله راتبه: $20000\ DA$ إضافة إلى $200\ DA$ لكل لعبة يتم صنعها.
محمد راتبه: $30000\ DA$ إضافة إلى $100\ DA$ لكل لعبة يتم صنعها.

الجزء الأول:
1) ماهو الراتب الشهري الذي يتقاضاه كل منهما إذا تمّ صنع 120 لعبة؟
2) ليكن x عدد اللعب المصنوعة في مدة شهر.
- عبّر بدلالة x عن y_1 راتب عبد الله وعن y_2 راتب محمد.

الجزء الثاني:
1) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- ارسم المستقيمين (D_1) و (D_2) ممثلا الدالتين g و h حيث:
$g(x)=200x+20000$ و $h(x)=100x+30000$
(نأخذ: $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل 50 لعبة، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $5000\ DA$).
2) حل جملة المعادلتين التالية:
$$\begin{cases} y=200x+20000 \\ y=100x+30000\end{cases}$$
- ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذا الحل.
- بقراءة بيانية متى يكون راتب عبد الله أكبر من راتب محمد؟

الوضعية الادماجية 11:$(BEM\ 2019)$

يقترح مدير المسبح البلدي على السباحين التسعيرتين الآتيتين:
التسعيرة الأولى: $100\ DA$ للحصة الواحدة لغير المنخرطين.
التسعيرة الثانية: $80\ DA$ للحصة الواحدة مع اشتراك شهري قدره $400\ DA$.
1. ماهو عدد الحصص التي يمكنك الحصول عليها في كل تسعيرة إذا دفعت مبلغ $2800\ DA$؟
2. باعتبار: x عدد الحصص في الشهر وبالاستعانة بتمثيل بياني، أعط أفضل التسعيرتين حسب عدد الحصص خلال شهر واحد.

يمكنك أخذ: ($1\ cm$ على محور الفواصل يمثّل 4 حصص، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثّل $400\ DA$).

بالتوفيق والنجاح

تذكـــير:

❖ **مركبتا شعاع:**

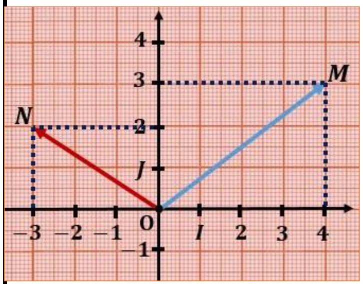
المستوي مُزود بمعلم $(O;I;J)$ مبدؤه النقطة O.

إذا كانت M نقطة من المستوي إحداثياها $(x.y)$، فإنّ مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما x و y نكتب $\overrightarrow{OM}\binom{x}{y}$.

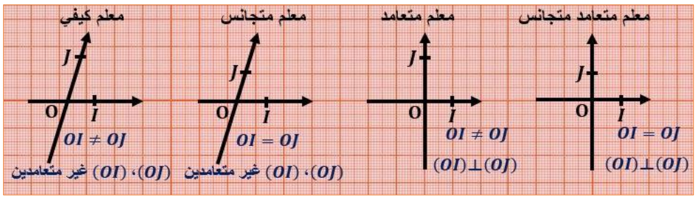
أمثلة:

• إحداثيا النقطة M هما 4 و 3
نكتب $M(4;3)$.
مركبتا الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما 4 و 3
نكتب $\overrightarrow{OM}\binom{4}{3}$.

• إحداثيا النقطة N هما -3 و 2
نكتب $N(-3;2)$.
مركبتا الشعاع $\overrightarrow{ON}$ هما -3 و 2
نكتب $\overrightarrow{ON}\binom{-3}{2}$.



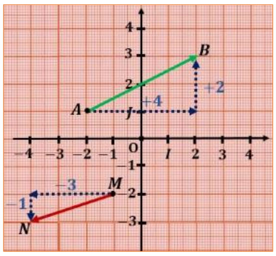
❖ **أنواع المعالم:**



❖ **مركبتا شعاع علمت إحداثيات مبدئه ونهايته:**

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;I;J)$، مبدؤه O.

📖 القراءة في تمثيل بياني:



• لقراءة مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$، ننتقل من النقطة A بالتوازي مع المستقيم (OI) في الاتجاه الموجب (نحو اليمين) بـ 4 وحدات ثم ننتقل بالتوازي مع المستقيم (OJ) في الاتجاه الموجب (نحو الأعلى) بـوحدتين للوصول إلى النقطة B.

ونقرأ: مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما 4 و 2.

ونكتب: $\overrightarrow{AB}\binom{4}{2}$.

• لقراءة مركبتي الشعاع $\overrightarrow{MN}$، ننتقل من النقطة M بالتوازي مع المستقيم (OI)في الاتجاه السالب (نحو اليسار) بـ 3 وحدات ثم ننتقل بالتوازي مع المستقيم (OJ) في الاتجاه السالب (نحو الأسفل) بـوحدة واحدة للوصول إلى النقطة N.

ونقرأ: مركبتي الشعاع $\overrightarrow{MN}$ هما -3 و -1.ونكتب: $\overrightarrow{MN}\binom{-3}{-1}$.

➢ تمثيل شعاع بمعرفة مركبتيه: لتمثيل شعاع بمعرفة مركبتيه نعين الإزاحتين الموافقتين لإشارتي المركبتين x و y لشعاع.

مثال:

$x>0$ و $y>0$ يوافق إزاحة نحو اليمين متبوعة بإزاحة نحو الأعلى.
$x<0$ و $y<0$ يوافق إزاحة نحو اليسار متبوعة بإزاحة نحو الأسفل.
$x>0$ و $y<0$ يوافق إزاحة نحو اليمين متبوعة بإزاحة نحو الأسفل.
$x<0$ و $y>0$ يوافق إزاحة نحو اليسار متبوعة بإزاحة نحو الأعلى.

📖 حساب مركبتي شعاع:

$A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتان من مستو مزود بمعلم.

فاصلة البداية — فاصلة النهاية

مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$ — ترتيب النهاية — ترتيب البداية

مثال: $A(-2;4)$ ؛ $B(1;3)$

حساب مركبتي $\overrightarrow{AB}$: لدينا: $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$ فإن: $\overrightarrow{AB}\binom{1-(-2)}{3-4}$

أي: $\overrightarrow{AB}\binom{1+2}{3-4}$ ومنه: $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-1}$.

نتيجة: في مستو منسوب إلى معلم مبدؤه O،إذا كانت M نقطة إحداثياها $(x;y)$ فإنّ مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما x و y. نكتب $\overrightarrow{OM}\binom{x}{y}$.

ملاحظة: لتعيين ممثلا للشعاع $\overrightarrow{OM}$ يكفي تعليم النقطة M.

📖 الشعاعان المتساويان:

$\vec{V}\binom{x'}{y'}$ و $\vec{U}\binom{x}{y}$ شعاعان من مستوي مزود بمعلم.

$\vec{U}=\vec{V}$ معناه $x=x'$ و $y=y'$.

📖 حساب إحداثيتي منتصف قطعة:

A و B نقطتان من مستو مزود بمعلم
بحيث $A(x_A;y_A)$ ؛ $B(x_B;y_B)$. إحداثيا M منتصف $[AB]$ هما:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

مثال:

$A(1;-2)$ ؛ $B(3;0)$ نقطتان من المستوي.
M منتصف القطعة $[AB]$.
لدينا $(x_M;y_M)$ إحداثيا النقطة M:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-2+0}{2}=-\frac{2}{2}=-1$$

إذن: $M(2;-1)$.

ملاحظة: هناك حالات لحساب إحداثيتي منتصف قطعة منها مركز تناظر متوازي أضلاع ومركز دائرة المحيطة بمثلث قائم ونظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة.

📖 حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ومتجانس:

في معلم متعامد ومتجانس، إذا كانت: $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$.
فإنّ المسافة بين النقطتين A و B هي

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

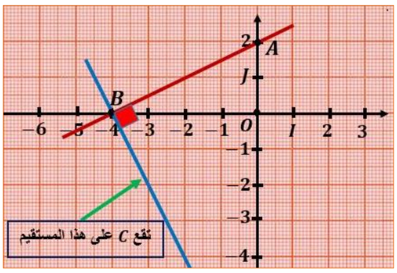
مثال: $A(3;-1)$ ؛ $B(0;2)$ نقطتان من المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس ، لدينا:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$AB=\sqrt{(0-3)^2+(2-(-1))^2}$$
$$AB=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}$$
$$AB=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

إذا كان:$OI=OJ=1$، فإن: $AB=3\sqrt{2}$

➢ حساب مسافات: المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس، مبدؤه O. (الوحدة $1\,cm$)

$A(0;2)$ ، $B(-4;0)$ ، $C(-2;y)$ ثلاث نقط.



• تعيين y حتى يكون المستقيمان (AB) و (BC) متعامدين

يكون المستقيمان (AB) و (BC) متعامدين إذا كان المثلث ABC قائم في B. إذن يكفي تعيين y بحيث يكون ABC قائم في B.

أي نعيّن y بحيث يكون: $AB^2+BC^2=AC^2$.

لدينا: $\overrightarrow{AB}\binom{-4}{-2}$ ، $\overrightarrow{AC}\binom{-2}{y-2}$ ، $\overrightarrow{BC}\binom{2}{y}$.

إذن: $AB^2=20$ ، $AC^2=4+(y-2)^2$ ، $BC^2=4+y^2$

بما أن $AB^2+BC^2=AC^2$ وبالتعويض نجد:

$20+4+y^2=4+(y-2)^2$. ومنه ينتج $y=-4$.

تماريـــــــــــن – وضعيـــات

التمرين 01: المستوي مُزود بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه النقطة O. (الوحدة $1\ cm$)

1. A و B نقطتان حيث $A(1;3)$ و $B(-2;-3)$ علّم النقطتين A و B.
2. عيّن النقط C، D، E، F بحيث:

- C نظير A بالنسبة لـ O.
- D نظير B بالنسبة لمحور التراتيب.
- E نظير D بالنسبة لمحور التراتيب.
- $\overrightarrow{FB}\binom{1}{0}$

التمرين 02: المستوي مُزود بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه النقطة O. (الوحدة $1\ cm$)

1. علّم النقط: $A(-2;-5)$ ، $B(5;-3)$ ، $C(3;4)$.
2. احسب الأطوال: AB ، BC ، AC.
3. عين مركبتي كل شعاع من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}$.
4. بيّن أنّ المثلث ABC قائم في B.
5. اوجد إحداثيتي النقطة K مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين 03:

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول هي السنتيمتر.
علّم النقط: $A(1;-1)$ ، $B(3;1)$ ، $C(-3;3)$.

1. احسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ثم الطول AB.
2. أوجد إحداثيتي النقطة E منتصف $[BC]$.
3. أوجد إحداثيتي النقطة D حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

التمرين 04:

في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{O},\vec{OI},\vec{OJ})$ بحيث $OI = OJ = 1\ cm$.

1. علّم النقط: $A(-4;2)$ ، $B(5;0)$ ، $C(4;4)$.
2. بين نوع المثلث ABC.
3. أنشئ النقطة M بحيث $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
4. ما نوع الرباعي $ACBM$؟
5. احسب إحداثيتي M.
6. احسب مساحة الرباعي $ACBM$.
7. أنشئ النقطة N صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ثم احسب إحداثيتي N.
8. احسب مساحة الرباعي $ACNM$.

التمرين 05: $(BEM\ 2010)$

$(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي.
علّم النقط: $A(0;2)$ ، $B(1;0)$ ، $C(-1;0)$.

1. نوع المثلث ABC؟ علّل.
2. عين إحداثيا النقطة D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته 180^0 ثم استنتج نوع الرباعي $ABDC$.

التمرين 06: $(BEM\ 2011)$

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. علّم النقط: $A(-1;2)$ ، $B(3;2)$ ، $M(1;-1)$.
2. بين أنّ B هي صورة A بالدوران الذي مركزه M وزاويته $\widehat{AMB}$.

التمرين 07: $(BEM\ 2012)$

$(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

1. علّم النقط: $A(2;-1)$ ، $B(-2;3)$ ، $C(-4;-3)$.
2. احسب الطول AC و استنتج نوع المثلث ABC علمًا أنّ $BC = 2\sqrt{10}$.
3. احسب إحداثيتي النقطة D حتى يكون $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$.
4. بيّن أنّ $(AB)\perp(CD)$.

التمرين 08: $(BEM\ 2013)$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. علّم النقط: $A(2;0)$ ، $B(-4;3)$ ، $C(5;3)$.
2. احسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ثم الطول AB.
3. عين النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ثم احسب إحداثيتي النقطة D.
4. اوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC).

التمرين 09: $(BEM\ 2014)$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. علّم النقط: $A(-2;-3)$ ، $B(4;1)$ ، $C(2;4)$.
2. أ. أعط القيمة المضبوطة للطول AB.
ب. علما أن: $AC = \sqrt{65}$ و $BC = \sqrt{13}$، بيّن أنّ المثلث ABC قائم.
3. أنشئ النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$. أثبت أنّ $ABCE$ مستطيل.

التمرين 10: $(BEM\ 2017)$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$.

1. علّم النقط: $A(0;4)$ ، $B(-3;1)$ ، $C(5;-1)$.
2. احسب إحداثيتي النقطة E منتصف $[BC]$.
3. أنشئ النقطة D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه E وزاويته 180^0 ثم استنتج إحداثيتي D.
4. بين طبيعة الرباعي $ABCD$ مستطيل.

التمرين 11: $(BEM\ 2019)$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. علّم النقط: $A(-1;5)$ ، $B(2;2)$ ، $C(-1;-1)$.
2. احسب الطولين AB و BC.
3. F منتصف $[AC]$، عين النقطة D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه F وزاويته 180^0. استنتج من الشكل إحداثيتي النقطة D.
4. بين طبيعة الرباعي $ABCD$.

الوضعية 01:

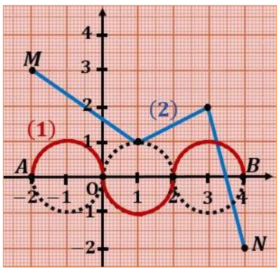
يملك مستثمر قطعة أرض مستطيلة الشكل خصصها لتربية الدواجن حيث أن النقط A، B، C، D حدود القطعة الأرضية.

1. علم على مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقط:
$A(0;2)$ ، $B(4;2)$ ، $C(4;-1)$ ، $D(0;-1)$ ، $E(1,5;2)$
2. يريد المستثمر إنشاء باب في منتصف الجدار $[DE]$.
- ساعده في تحديد إحداثيات النقطة موقع الباب.
3. بداخل المدجنة أراد المستثمر وضع حنفية في نقطة G بحيث $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AE}$.
- جد إحداثيات النقطة G.

الوضعية 02:

يتدرّب عدّاءان استعدادا لمنافسة دُولية على مسارين مُمثّلين بالمنحنيين (1) و (2) في الشكل المقابل.

- حدّد أقصر المسارين (1) و (2).



بالتوفيق والنجاح

تذكــير:

❖ **سلسلة إحصائية:**
نسمي سلسلة إحصائية مجموعة معطيات أو معلومات ناتجة عن دراسة.

❖ **الميزة الإحصائية:**
الميزة الإحصائية هي كل خاصية مدروسة على أفراد مجتمع.

- تكون الميزة نوعية عندما لا يمكن قياسها (لا تأخذ قيما عددية).

مثلا: اللون، الجنسية،...

- تكون الميزة كمية عندما يمكن قياسها (تأخذ قيما عددية).

مثلا: العمر، القامة،...

❖ **التكرار:**
تكرار قيمة في سلسلة إحصائية هو عدد مرات ظهور هذه القيمة.

❖ **التكرار النسبي (التواتر):**
هو حاصل قسمة التكرار على مجموع التكرارات.

❖ **التكرار المجمّع الصاعد، التكرار النسبي (التواتر) المجمّع الصاعد:**
في سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا:

1. التكرار المجمّع الصاعد (المتزايد): لقيمة (أو لفئة)هو مجموع تكرار هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) الأصغر منها.
2. التكرار النسبي (التواتر) المجمّع الصاعد: يمكن حسابه بطريقتين:

الطريقة الأولى: قسمة التكرار المجمّع الصاعد لكل قيمة أو فئة على التكرار الكلي.

الطريقة الثانية: مجموع التواتر لكل قيمة (أو فئة) مع التواتر للقيم (أو الفئات) الأصغر منها.

مثال: إليك السلسلة الإحصائية التالية (أرقام القيمة المقربة لـ $\sqrt{2}$):
2، 6، 5، 3، 1، 2، 4، 1، 4، 1نقوم بإعطاء الجدول الممثل للتكرارات والتكرارات المجمّعة الصاعدة والتواترات المجمّعة الصاعدة:

الأرقام	1	2	3	4	5	6	م
التكرارات	3	2	1	2	1	1	10
التكرارات المجمّعة الصاعدة	3	5	6	8	9	10	
التواترات المجمّعة الصاعدة	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1	

❖ **التكرار المجمّع النازل، التكرار النسبي (التواتر) المجمّع النازل:**
في سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا:

1. التكرار المجمّع النازل (المتناقص): لقيمة (أو لفئة)هو مجموع تكرار هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) الأكبر منها.
2. التكرار النسبي (التواتر) المجمّع النازل: يمكن حسابه بطريقتين:

الطريقة الأولى: قسمة التكرار المجمّع النازل لكل قيمة أو فئة على التكرار الكلي.

الطريقة الثانية: مجموع التواتر لكل قيمة (أو فئة) مع التواتر للقيم (أو الفئات) الأكبر منها.

مثال: إليك السلسلة الإحصائية التالية (أرقام القيمة المقربة لـ$\sqrt{3}$):
7، 0، 8، 0، 5، 0، 2، 3، 7، 1نقوم بإعطاء الجدول الممثل للتكرارات والتكرارات المجمّعة النازلة والتواترات المجمّعة النازلة:

الأرقام	0	1	2	3	5	7	8	م
التكرارات	3	1	1	1	1	2	1	10
التكرارات المجمّعة النازلة	10	7	6	5	4	3	1	
التواترات المجمّعة النازلة	1	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,1	

ملاحظات:

- يكون التكرار النسبي (التواتر) محصور بين 0 و 1.
- مجموع التواترات يساوي1.

❖ **سلسلة إحصائية معطاة على شكل قيم:**

1. متوسط سلسلة احصائية:
هو مجموع جداءات قيمها بتكراراتها على مجموع التكرارات.
2. مدى سلسلة احصائية: هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لها.
3. الوسيط Med: لسلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا(أو تنازلنا)هو القيمة النصفية التي تجعل عدد القيم الأكبر من تلك القيمة مساويا لعدد القيم الأصغر منها.

- إذا كان N عدد قيم السلسلة (التكرار الكلي) هو عدد فردي فإن الوسيط هو القيمة المركزية لهذه القيم ورتبته هي $\frac{N+1}{2}$.
- إذا كان N عدد قيم السلسلة (التكرار الكلي) هو عدد زوجي فإن الوسيط هو نصف مجموع القيميتين اللتين رتبتيهما في السلسلة $\frac{N}{2}+1$ و $\frac{N}{2}$.

مثال 01: لتكن السلسلة الإحصائية التالية: 2، 8، 7، 5، 1، 3، 6

متوسط هذه سلسلة: $\frac{1+2+3+5+6+7+8}{1+1+1+1+1+1+1}=\frac{32}{7}\approx 4,57$

مدى هذه السلسلة : $8-1=7$

الوسيط Med:

$\underbrace{1 ، 2 ، 3}_{3 \text{ قيم}} ، \underbrace{5}_{\text{هو الوسيط}} ، \underbrace{6 ، 7 ، 8}_{3 \text{ قيم}}$ عدد قيم السلسلة هو 7،

إذن رتبة الوسيط هي $4=\frac{8}{2}=\frac{7+1}{2}$، ومنه $Med=5$.

مثال 02: يوضح الجدول التالي أعمار تلاميذ قسم السنة الرابعة متوسط.

الاعمار A	14	15	16	17	م
عدد التلاميذ	12	8	14	6	40
التكرار المجمّع الصاعد	12	20	34	40	

متوسط هذه السلسلة:

$$\overline{A}=\frac{14\times12+15\times8+16\times14+17\times6}{12+8+14+6}=\frac{614}{40}=15,35$$

مدى هذه السلسلة: $17-14=3$

الوسيط Med: مجموع التكرارات هو 40 إذن القيمة الوسيطية هو نصف مجموع القيمتين التي رتبتيهما $\frac{40}{2}=20$ و $\frac{40}{2}+1=21$

(ننظر إلى التكرار المجمّع الصاعد).

وعليه القيمة التي رتبتها 20 هي 15 و القيمة التي رتبتها 21 هي 16

ومنه: $Med=\frac{15+16}{2}=15,5$

❖ **سلسلة إحصائية معطاة على شكل فئات:**

1. متوسط سلسلة إحصائية مجمعة في فئات:
هو مجموع جداءات مراكز كل فئة بتكرارها على مجموع التكرارات.
2. مدى سلسلة احصائية مجمعة في فئات: هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في الفئات.
3. مدى الفئة: هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في الفئة.
4. مركز الفئة: هو نصف مجموع أكبر قيمة وأصغر قيمة في الفئة.
5. الوسيط Med:
نبحث عن الفئة الوسيطية التي تنتمي إليها القيمة الوسيطية.

- إذا كان N التكرار الكلي هو عدد فردي فإن الوسيط هو القيمة المركزية التي رتبتها $\frac{N+1}{2}$ والذي ينتمي للفئة الوسيطية.
- إذا كان N التكرار الكلي هو عدد زوجي فإن الوسيط هو نصف مجموع القيميتين اللتين رتبتيهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$ والذي ينتمي للفئة الوسيطية.

مثال: أوزان 20 شخصيا موضحة في الجدول التالي:

الأوزان P (Kg)	$50\leq P<60$	$60\leq P<70$	$70\leq P<80$
التكرار	11	2	7
التكرار المجمّع الصاعد	11	13	20
مراكز الفئات	$\frac{50+60}{2}=55$	$\frac{60+70}{2}=65$	$\frac{70+80}{2}=75$

متوسط هذه سلسلة:

$$\overline{P}=\frac{11\times55+2\times65+7\times75}{11+2+7}=\frac{1260}{20}=63$$

مدى هذه السلسلة: $80-50=30$

الفئة الوسيطية: مجموع التكرارات هو20 إذن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين المركزيتين التي رتبتهما $10=\frac{20}{2}$ و $\frac{20}{2}+1=11$ (ننظر إلى التكرار المجمّع الصاعد) كلاهما تنتميان الى الفئة $50 \le P < 60$ وهي الفئة الوسيطية.

ملاحظات:

- إذا رمزنا للميزة المدروسة بالرمز X، فإن الوسط الحسابي لهذه الميزة، يرمز له بالرمز: $\overline{X}$.
- يمكن كتابة الفئة $10 \le X < 20$ بشكل اخر $[10;20[$.

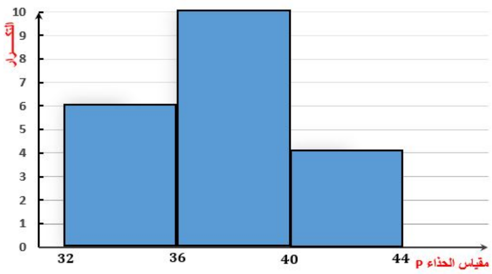
❖ تمثيل معطيات إحصائية:

مثال 01:

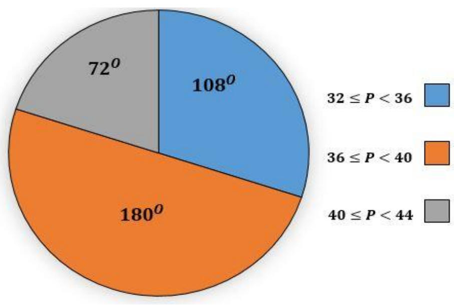
أخذ بائع للأحذية 20 زوج حذاء، فكانت مقاسات الأحذية كالتالي:

قياس الحذاء P	$32 \le P < 36$	$36 \le P < 40$	$40 \le P < 44$
التكرار	6	10	4
النسبة المئوية %	$\frac{6\times100}{20}=30\%$	$\frac{10\times100}{20}=50\%$	$\frac{4\times100}{20}=20\%$
قيس الزاوية في مخطط دائري	$\frac{6\times360^0}{20}=108^0$	$\frac{10\times360^0}{20}=180^0$	$\frac{4\times360^0}{20}=72^0$
قيس الزاوية في مخطط نصف دائري	$\frac{6\times180^0}{20}=54^0$	$\frac{10\times180^0}{20}=90^0$	$\frac{4\times180^0}{20}=36^0$

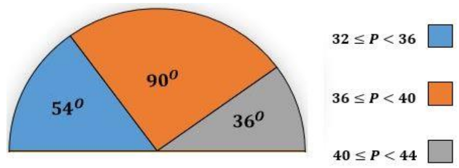
1. تمثيل هذه المعطيات بمدرّج تكراري:



2. تمثيل هذه المعطيات بمخطط دائري:



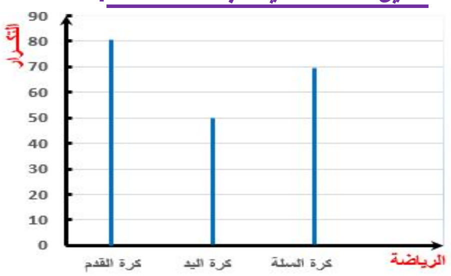
3. تمثيل هذه المعطيات بمخطط نصف دائري:



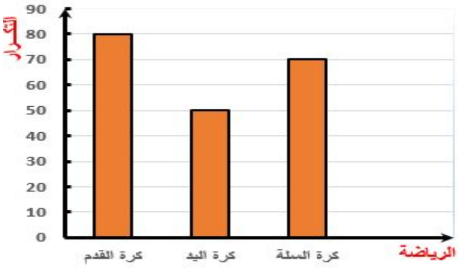
مثال 02: الجدول التالي يبيّن الرياضات التي تمارَس في أقسام السنة الرابعة من متوسطة، علما أن كل تلميذ يمارس رياضة واحدة.

م	كرة السلة	كرة اليد	كرة القدم	الرياضة
200	70	50	80	التكرار
100%	$\frac{70\times100}{200}=35\%$	$\frac{50\times100}{200}=25\%$	$\frac{80\times100}{200}=40\%$	النسبة المئوية %

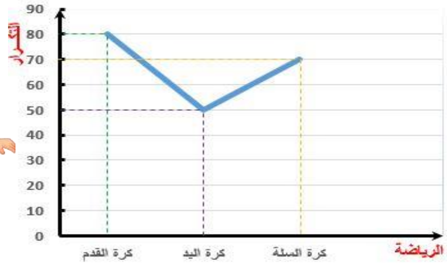
1. تمثيل هذه المعطيات بمخطط أعمدة:



2. تمثيل هذه المعطيات بمخطط مستطيلات:



3. تمثيل هذه المعطيات بمنحنى بياني:



تمارين – وضعيات

التمرين 01:

إليك السلسلة الإحصائية التالية:

2، 10، 5، 6، 6، 9، 8، 7، 2، 4، 2، 3، 2، 1

1. ماهو تكرار القيم الأكبر تماما من القيمة 6؟
2. ماهو تكرار القيم الأصغر من 5 أو تساويها؟
3. أعط الجدول الممثل للتكرارات والتكرارات المجمّعة الصاعدة و التكرارات النسبية المجمّعة الصاعدة.
4. احسب مدى، وسيط ومتوسط هذه السلسلة.
5. عيّن منوال هذه السلسلة (هو القيمة التي توافق أكبر تكرار).

التمرين 02:

إليك السلسلة الإحصائية التالية:

13، 12، 11، 10، 9، 8، 7، 5، 4، 3، 1

1. احسب متوسط هذه السلسلة.
2. اوجد الوسيط لهذه السلسلة.
3. قارن بين المتوسط لهذه السلسلة ووسيطها، ماذا تستنتج؟

التمرين 03:

السلسلة الإحصائية الموالية مرتبة ترتيبا تصاعديا:

Y، 8، 8، 6، 6، 5، 4، X إذا علمت أن متوسط هذه السلسلة هو 6 و مداها هو 5.

- احسب العددين X و Y.

التمرين 04:

إليك السلسلة الإحصائية التالية:

5،7، 2، 4، 6، 8، 3، 1

1. رتبها.
2. اوجد وسيطها.
3. هل الوسيط هو إحدى قيم السلسلة؟
4. هل الوسيط هو دائما قيمة من قيم السلسلة الإحصائية؟

التمرين 05:

معدل سلسلة علامات قسم في اختبار هو $11,5$ ووسيطها 11.

1. حذفت أصغر علامة وهي 4 التي تحصّل عليها تلميذ واحد و أكبر

علامة وهي 19 التي تحصل عليها كذلك تلميذ واحد.

- ماهو معدل العلامات ووسيطها بعد هذا الحذف؟

2. حذفت فقط أكبر علامة وهي 19 التي تحصّل عليها تلميذ واحد و أصبح معدل العلامات $11,25$.

- ماهو عدد تلاميذ هذا القسم؟

التمرين 06:

تمثل القائمة التالية الاستهلاك السّنوي للكهرباء (MW) بمجمع سكني يضم 50 عائلة.

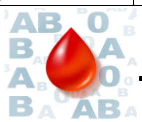
1	0,7	0,6	1,4	0,9	0,5	2,4	1,3	2	1,8
0,5	1,8	2,2	1	2,4	1,7	0,8	1,1	1,2	0,5
1,3	1,1	1,7	1,3	2	0,5	1,8	1,4	2,4	1,3
1,8	0,5	1,2	1,4	0,9	1,1	0,6	1,7	2,2	0,9
2,4	0,9	0,7	1,7	2	1,8	1,2	0,5	0,8	0,6

1. اجمع هذه المعطيات في فئات متساويات المدى الذي يساوي $0,5$ وعيّن تكرارات هذه الفئات في جدول.
2. احسب المتوسط لهذه السلسلة الإحصائية.
3. عين الفئة الوسيطية لهذه السلسلة الإحصائية.

الوضعية 01:

يبيّن الجدول التالي فصائل دم تلاميذ في قسم السنة الرابعة متوسط.

فصيلة الدّم	A	B	AB	O	المجموع
التكرار	12	5	9	4	
التكرار النسبي					
النسبة المئوية لتكرار %					
قيس الزاوية في مخطط دائري					



1. انقل ثم اتمم هذا الجدول.
2. مثّل معطيات الجدول بمخطط نصف دائري.

الوضعية 02:

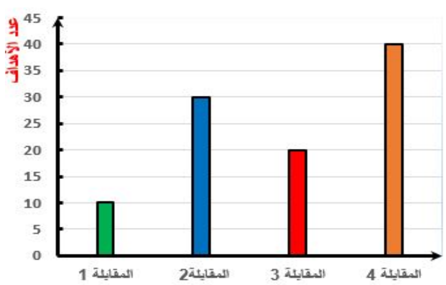
سجل الطبيب المدرسي في الجدول الآتي قامات تلاميذ قسم السنة الرابعة متوسط في فئات متساوية المدى:

طول القامة $(cm)T$	$160 \le T < 165$	$165 \le T < 170$	$170 \le T < 175$
عدد التلاميذ	15	10	7

1. احسب معدل أطوال القامات لهذا القسم.
2. ماهو عدد التلاميذ الذين تقل قاماتهم عن: $165\ cm$، $175\ cm$؟
3. ماهو عدد التلاميذ الذين تفوق قاماتهم عن: $160\ cm$، $170\ cm$؟
4. عين الفئة الوسيطية لهذه السلسلة الإحصائية.
5. عين الفئة المنوالية لهذه السلسلة الإحصائية (هي الفئة التي توافق أكبر تكرار).
6. مثّل معطيات الجدول بمدرج تكراري.

الوضعية 03:

يمثل مخطط الأعمدة التالي عدد الأهداف المسجلة لفريق كرة السّلة.



1. نظم معطيات المخطط في جدول.
2. ماهو معدل الأهداف المسجلة؟
3. ماهي النسبة المئوية لعدد الأهداف المسجلة في المقابلة الثالثة؟

الوضعية 04:

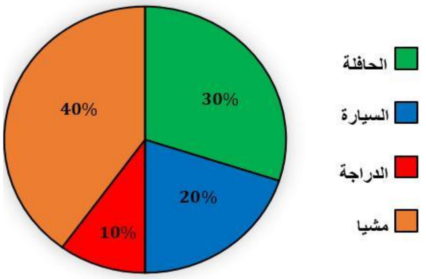
إليك علامات أحد اختبارات مادة الرياضيات لقسم السنة الرابعة متوسط.

12	7	5	10	12	14	16	18
10	12	14	16	14	5	10	12
5	12	5	12	16	14	12	18

1. نظم هذه معطيات في الجدول.
2. ماهو عدد تلاميذ هذا القسم؟
3. احسب معدل القسم.
4. ماهي نسبة التلاميذ الذين نقاطهم تساوي أو تقل عن: 10، 14؟
5. ماهي نسبة التلاميذ الذين نقاطهم تساوي أو تفوق عن: 7، 12؟
6. اوجد النقطة الوسيطية لنقاط القسم.
7. احسب مدى نقاط القسم.
8. مثّل معطيات الجدول بمخطط مستطيلات.

الوضعية 05:

تم استجواب 200 تلميذ حول الوسيلة المستعملة للتنقل إلى المتوسطة. لخصت النتائج في المخطط التالي:



1. نظم معطيات المخطط في جدول يدرس الوسيلة المستعملة من طرف التلاميذ للالتحاق بالمدرسة، ثم احسب تكراراتها النسبية لكل وسيلة يستغلها التلاميذ.
2. ماهي الوسيلة الأكثر استعمالا؟
3. مثّل هذه المعطيات بمنحنى بياني.

الوضعية 06:

نصب رادار للدرك الوطني لمراقبة سرعة مجموعة من السيارات على الطريق السيار، الجدول التالي يبين سرعات 200 سيارة.

السرعة V (km/h)	$[50;80[$	$[80;110[$	$[110;140[$
عدد السيارات	110	60	30

1. ماذا نقصد بجدول متساوي المدى؟
2. احسب القيمة المتوسطة لسرعة السيارات.
3. عين الفئة الوسيطية لهذه السلسلة.
4. مثّل معطيات الجدول بمخطط دائري.

بالتوفيق والنجاح

تذكـــير:

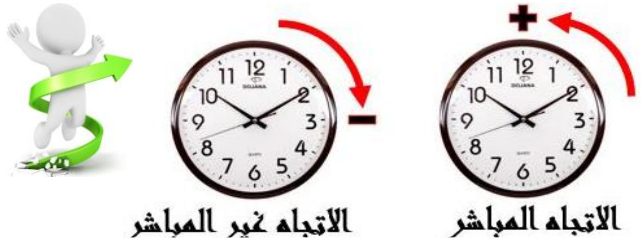
❖ الدوران:

📖 **تعريف:** تحويل شكل بالدوران هو تدويره بزاوية معيّنة حول نقطة ثابتة وفي اتجاه معيّن.

ملاحظة: يتميّز الدوران بزاوية واتجاه ومركز هو النقطة التي دوّرنا حولها.

📖 **اصطلاح:** يُسمى الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة **الاتجاه المباشر** أو الاتجاه الموجب.

كما يُسمّى الاتجاه الآخر **الاتجاه غير المباشر** أو الاتجاه السالب.



ملاحظة: نأخذ، عامة، الاتجاه الموجب كاتجاه للدوران مالم يذكر عكس ذلك.

❖ صورة نقطة بدوران علم مركزه وقيس زاويته:

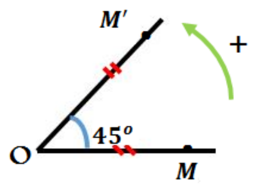
O نقطة معلومة و α زاوية.

صورة نقطة M تختلف عن O بالدوران الذي مركزه O وزاويته α في اتجاه معيّن هي النقطة M' حيث: $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = \alpha$.

مثال01:

النقطة M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 45^o، و اتجاهه هو الاتجاه **الموجب**.

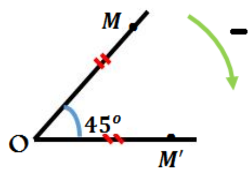
$OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = 45^o$



مثال 02:

النقطة M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 45^o، و اتجاهه هو الاتجاه **السالب**.

$OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = 45^o$



حالة خاصة:

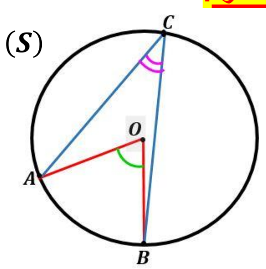
الدّوران ذو المركز O والزاوية180^o هو تناظر مركزي مركزه O.

❖ صورة شكل بدوران - خواص الدوران:

- لإنشاء صورة شكل بدوران، ننشئ صورة كل نقطة من نقاطه.
- الدوران يحافظ على طبيعة الأشكال أي أن صورة شكل بدوران هي شكل يطابقه وله نفس الخصائص.
- الدوران يحافظ على المسافات وعلى استقامية النقط وعلى أقياس الزوايا.

❖ الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في دائرة:

لتكن (S) الدائرة ذات المركز O.



📖 نقول عن الزاوية $\widehat{ACB}$ أنها زاوية محيطية في الدائرة (S)، إذا كان رأسها C ينتمي إلى الدائرة (S)و $[CB]$ و $[CA]$ وتراه لهذه الدائرة.

📖 نقول عن الزاوية أنها مركزية في الدائرة (S)، إذا كان رأسها هو مركز هذه الدائرة.

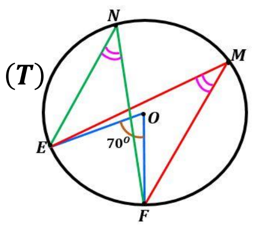
خاصية 01: قيس زاوية محيطية في دائرة (S) هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها. $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

خاصية 02: كل الزوايا المحيطية في دائرة التي تحصر نفس القوس متقايسة.

مثال:

الزاويتان $\widehat{EMF}$ و $\widehat{ENF}$ محيطيتان تحصران نفس القوس $\widehat{EF}$، أما الزاوية $\widehat{EOF}$ مركزية، فإن:

$$\widehat{ENF} = \widehat{EMF} = \frac{\widehat{EOF}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$$



❖ المضلعات المنتظمة:

نقول عن مضلّع أنه منتظم، إذا كانت كل زواياه متقايسة وكل أضلاعه لها نفس الطول.

خاصية 01: توجد دائرة تشمل كل رؤوس المضلّع.

- نقول عن هذه الدائرة أنها دائرة محيطية بالمضلّع المنتظم.
- مركز هذه الدائرة هو مركز المضلّع المنتظم.

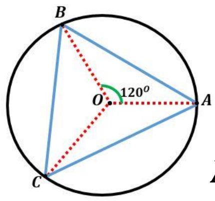
خاصية 02: يبقى المضلّع المنتظم ثابتا، بالدّوران الذي مركزه O مركز المضلّع، والذي زاويته $\widehat{AOB}$ (في أي اتجاه كان)، حيث A و B هما رأسان متتاليان للمضلّع المنتظم.

خاصية 03: الزوايا المركزية في مضلّع منتظم متقايسة، وقيس كل واحدة منها $\frac{360^o}{n}$ حيث n هو عدد أضلاع هذا المضلع المنتظم.

مثال 01:

المثلث متقايس الأضلاع:

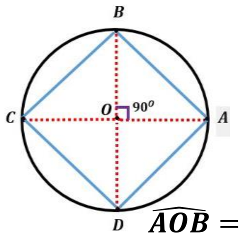
$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \frac{360^o}{3} = 120^o$$



مثال 02:

المربع:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = \frac{360^o}{4} = 90^o$$



❖ إنشاء مضلع منتظم عُلم طول ضلعه:

انطلاقا من القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $AB = 3\ cm$، أنشئ الخماسي المنتظم $ABCDE$ الذي مركزه O وضلعه $[AB]$.

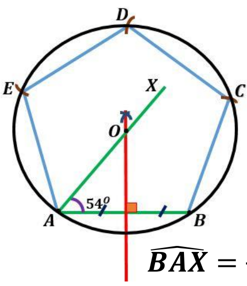
الطريقة: ننشئ القطعة $[AB]$ بحيث: $AB = 3\ cm$

ننشئ محور القطعة $[AB]$ و نصف المستقيم $[AX)$ بحيث $\widehat{BAX} = 54^o$ لأن: قيس الزاوية المركزية في خماسي منتظم هو:

$$\widehat{AOB} = \cdots = \widehat{EOA} = \frac{360^o}{5} = 72^o$$

وبما أن $\widehat{BAX}$ هي زاوية القاعدية في المثلث المتقايس الساقينAOB، فإنه:

$$\widehat{BAX} = \frac{180^o - \widehat{AOB}}{2} = \frac{180^o - 72^o}{2} = 54^o$$



نسمي O نقطة تقاطع محور القطعة $[AB]$ و $[AX)$.O هي مركز الخماسي المنتظم. نرسم الدائرة ذات المركز O ونصف القطر OA.

نستعمل المدور لإنشاء الرؤوس الأخرى C، D، E بحيث يكون: $AB = BC = CD = DE = EA$ نصل بين النقاط A، B، C، D، E فنحصل على الخماسي المنتظم $ABCDE$ الذي ضلعه $[AB]$.

❖ حساب طول ضلع مضلع منتظم عُلم نصف قطر الدّائرة المحيطة به:

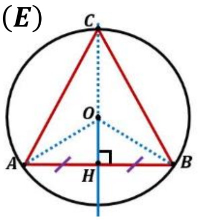
ABC مثلث متقايس الأضلاع و(E) الدّائرة المحيطة به، مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{3}$. الوحدة هي السنتيمتر.

- حساب القيمة المضبوطة لطول ضلع هذا المثلث.

في المثلث ABC، الارتفاع (OH) هو أيضا منصّف الزاوية $\widehat{AOB}$ و محور القطعة $[AB]$.

لدينا: $\widehat{ACB} = 60^o$ إذن: $\widehat{AOB} = 120^o$

ومنه: $\widehat{HOA} = 60^o$.



في المثلث OAH القائم في H، لدينا$\widehat{OAH} = 90^o - 60^o = 30^o$.

لدينا: $\frac{AH}{\sqrt{3}} = \frac{AH}{OA} = \cos\widehat{OAH}$ أي: $\cos 30^o = \frac{AH}{\sqrt{3}}$ أي:

$AH = \sqrt{3} \times \cos 30^o$ ونستنتج أن: $AH = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا:$AB = 2 \times AH = 3$ إذن: $AB = 3\ cm$.

.... تماريـــــــــــــــن – وضعيـــــات ....

التمرين 01: A و B نقطتان من المستوي.

1. أنشئ النقطة E صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته 30^{o} و اتجاهه غير مباشر.
2. أنشئ النقطة F صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته 60^{o}. • ما طبيعة المثلث AEF؟

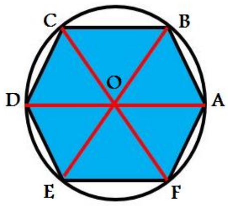
التمرين 02:
ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين بحيث: $AB = 4\ cm$.

1. ماهي صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته 90^{o} (عكس عقارب الساعة)؟
2. أنشئ النقطة E صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته 45^{o} باتجاه عقارب الساعة دون استخدام المنقلة.

التمرين 03:
ليكن المثلث ABC قائم في A بحيث: $AB = 3\ cm$ و $AC = 4\ cm$

1. أنشئ المثلث $AB'C'$ صورة المثلث ABC بالدوران الذي مركزه A، وزاويته 180^{o}.
2. أنشئ الدائرة (M) المحيط بالمثلث ABC.
3. أنشئ الدائرة (M') صورة الدائرة (M) بدوران الذي مركزه C، وزاويته 90^{o}، في الاتجاه السالب.

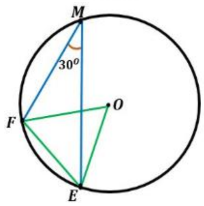
التمرين 04: $ABCDEF$ سداسي منتظم مركزه O.



ماهي صورة المثلث OAB بـ :

1. التناظر المحوري بالنسبة إلى (DA).
2. التناظر المركزي ذي المركز O.
3. الدوران ذي المركز B، والزاوية 60^{o} في الاتجاه السالب.

التمرين 05:



لتكن الدائرة ذات المركز O.
ولتكن E، F، M نقاطا من هذه الدائرة بحيث:
$F\widehat{M}E = 30^{o}$.
• برهن أن المثلث FOE متقايس الأضلاع.

التمرين 06: $(BEM\ 2009)$
$[AB]$ قطعة مستقيم طولها $6cm$.

1. أنشئ النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وقيس زاويته 90^{o} في اتجاه عكس عقارب الساعة.

2. ما نوع المثلث ABC؟ (برّر إجابتك)
3. اوجد الطول BC.

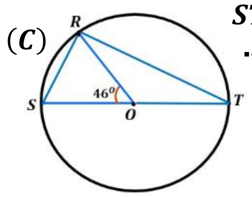
التمرين 07: $(BEM\ 2010)$
$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

1. علّم النقط: $A(0;2)$, $B(1;0)$, $C(-1;0)$
2. ما نوع المثلث ABC؟ علّل.
3. عين إحداثيا النقطة D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاويته 180^{o}، ثم استنتج نوع الرباعي $ABDC$.

التمرين 08: $(BEM\ 2011)$
المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. علّم النقط : $A(-1;2)$, $B(3;2)$, $M(1;-1)$
2. بيّن أن B هي صورة A بالدوران الذي مركزه M وزاويته $\widehat{AMB}$.

التمرين 09: $(BEM\ 2015)$
في الشّكل المقابل الأطوال وأقياس الزوايا غير حقيقية.



(C) دائرة مركزها O وقطرها $ST = 9\ cm$
R نقطة من هذه الدائرة حيث $\widehat{SOR} = 46^{o}$.

1. بيّن أن: $\widehat{STR} = 23^{o}$.
2. المثلث SRT قائم في R، علّل.
3. احسب RS بالتّدوير إلى $0,01$.

التمرين 10: $(BEM\ 2017)$
المستوي منسوب إلى بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. علّم النقط: $A(0;4)$, $B(-3;1)$, $C(5;-1)$
2. احسب إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة $[BC]$.
3. أنشئ النقطة D صورة A بالدوران الذي مركزه E و زاويته 180^{o}، ثم استنتج إحداثيتي D.
4. بيّن أن الرباعي $ABDC$ مستطيل.

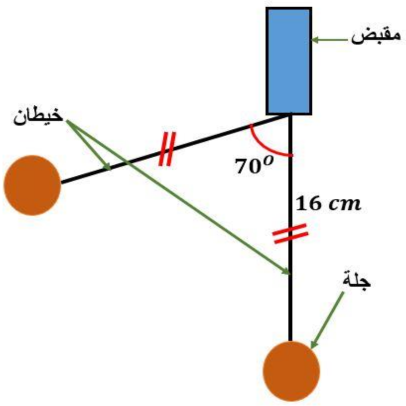
التمرين 11: $(BEM\ 2019)$
المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1. علّم النقط: $A(-1;5)$, $B(2;2)$, $C(-1;-1)$
2. احسب الطولين AB و BC.
3. F منتصف $[AC]$، عين النقطة D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه F وزاويته 180^{o}.
   استنتج من الشكل إحداثيتي النقطة D.
4. بين طبيعة الرباعي $ABCD$.

الوضعية 01:
يخرج إبراهيم يوميا من بيته على الساعة السابعة والنصف قاصدا المتوسطة، وفي الطريق نظر إلى ساعته فوجد أنه مشي ربع ساعة، فتساءل كم هي الزاوية التي دار بها عقرب الدقائق؟

• ساعده في معرفة زاوية الدوران و استنتج اتجاهه.

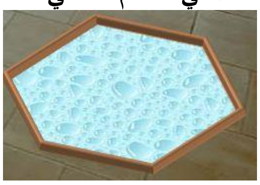
الوضعية 02:
صنع عمي أحمد النجار جلتين من الخشب، ليصنع ابنه لعبة مستعملا خيطا كما في الشكل التالي:



بعد الانتهاء من الصنع أخذ يلعب بها ماسكا المقبض و حركه مرة واحدة فابتعدت الجلتين عن بعضها بزاوية قدرها 70^{o}.

1. ما طبيعة التحويل الناتج؟
2. اذكر مميزاته وخواصه؟

الوضعية 03:
أراد يوسف إنجاز مخطط لقاعدة المسبح شكله سداسي منتظم كما في الشكل المقابل:



• ساعده في إنجاز الشكل بحيث طول ضلعه في الواقع $3\ m$ و طوله في المخطط $3cm$.

بالتوفيق والنجاح

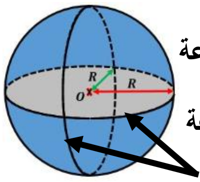
تذكـــير:

❖ الكرة والجُلّة:

O نقطة من الفضاء وR عدد موجب تماما.

• الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R هي مجموعة من النقطة M من الفضاء بحيث: $OM = R$.

• الجُلّة التي مركزها O ونصف قطرها R هي مجموعة من النقطة M من الفضاء بحيث: $OM \leq R$.



❖ مساحة الكرة وحجم الجُلّة:

• مساحة الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R هي A حيث: $A = 4\pi R^2$

• حجم الجُلّة التي مركزها O ونصف قطرها R هو V حيث: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

مثال 01: حساب بدلالة π مساحة كرة نصف قطرها $5\ cm$:

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi\ cm^2$$

مثال 02: حساب بدلالة π حجم جُلّة نصف قطرها $3\ cm$:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi\ cm^3$$

ملاحظات:

• لا تنس مراعاة الوحدات للمساحة والحجم.

• تولّد الكرة من دوران دائرة حول أحد أقطارها.

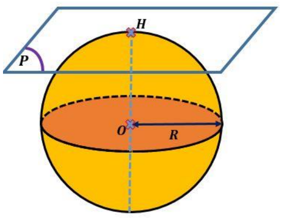
❖ المقاطع المستوية لمجسمات مألوفة:

1. مقطع كُرة بمستو:

• الحالة 01: $OH = R$.

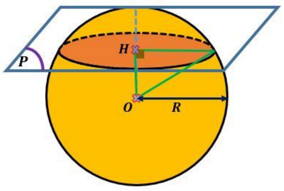
مقطع الكرة بالمستوي (P) هو النقطة H.

نسمي المستوي (P): مستويا مماساً للكرة. نسمي النقطة H: نقطة تماس الكرة بالمستوي (P).



• الحالة 02: $0 < OH < R$.

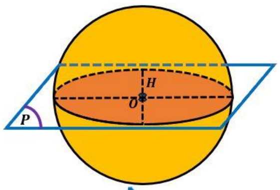
مقطع الكرة بالمستوي (P) هو دائرة نصف قطرها $\sqrt{R^2 - OH^2}$.



• الحالة 03: $OH = 0$

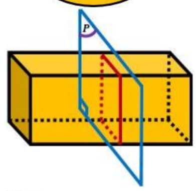
أي أن O و H متطابقان، وهذا يعني أن المستوي (P) يمر من مركز الكرة.

مقطع كرة بمستو يمر بمركزها هو دائرة كبرى.

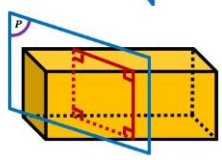


2. مقطع بلاطة قائمة بمستو:

• مقطع بلاطة قائمة بمستو مُواز لأحد أوجهها هو مستطيل له نفس بُعدي الوجه الموازي له.

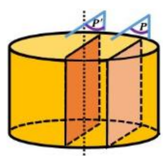


• مقطع بلاطة قائمة بمستو مُواز لأحد أحرفه هو مستطيل طوله أو عرضه يُساوي طول ذلك الحرف.

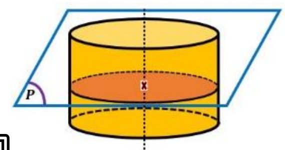


3. المقاطع المستوية لأسطوانة الدوران:

• مقطع أسطوانة بمستو مُواز لمحورها هو مستطيل، طوله أو عرضه يساوي ارتفاع الأسطوانة.

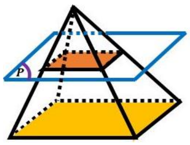


• مقطع أسطوانة بمستو مُواز لقاعدتها هو قرص مطابق لقاعدتها.

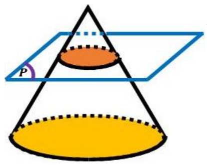


4. المقاطع المستوية لهرم ولمخروط:

• مقطع هرم بمستو مُواز لقاعدته هو سطح له نفس طبيعة القاعدة وبأبعاد مصغرة.



• مقطع مخروط دوراني بمستو مُواز لقاعدته هو قرص مصغر لقاعدته.



❖ التكبير - التصغير:

إذا ضربنا كل أبعاد مجسم بعدد موجب k نكون قد قمنا بتكبيره إذا كان $k > 1$ وبتصغيره إذا كان $0 < k < 1$.

يسمى العدد k معامل أو سلم التكبير (التصغير).

خواص:

• التكبير والتصغير لا يغيران طبيعة المجسمات.

• التكبير والتصغير يحافظان على الزوايا.

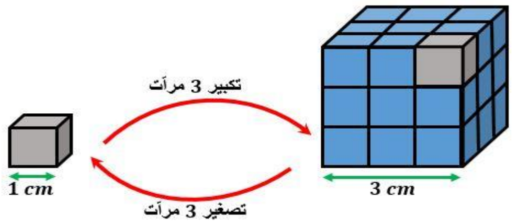
• إذا كبّرنا أو صغرنا مجسّما بالسلم k، فإنّ:

✓ أبعاده تضرب في العدد k.

✓ مساحته تضرب في العدد k^2.

✓ حجمه يضرب في العدد k^3.

مثال 01:



حرفه:	$3\ cm$	حرفه:	$1\ cm$
مساحة وجهه:	$3^2\ cm^2$	مساحة وجهه:	$1\ cm^2$
حجمه:	$3^3\ cm^3$	حجمه:	$1\ cm^3$

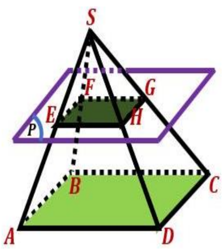
مثال 02:

في الشكل $SABCD$ هرم قاعدته مربع.

مقطع مستو لهذا الهرم هو المربع $EFGH$، طول ضلعه تصغير لطول ضلع مربع قاعدة الهرم.

لدينا: $(DC)//(GH)$ و $(AB)//(EF)$ و $(BC)//(FG)$ و $(AD)//(EH)$.

و الشكل $SEFGH$ هو تصغير للهرم $SABCD$ بالنسبة $K = \frac{SE}{SA} = \frac{SH}{SD} = \cdots \frac{EH}{AD}$



تماريـــــــن – وضعيـــات

التمرين 01: ليكن المثلث ABC الذي مساحته $12,5\ m^2$.

• ماهي مساحة المثلث المكبر MNE بالمعامل 4 للمثلث ABC؟

التمرين 02: مساحة شكل هندسي $18,6\ cm^2$. قمنا بتحويل له، فأصبحت مساحته $142,29\ cm^2$.

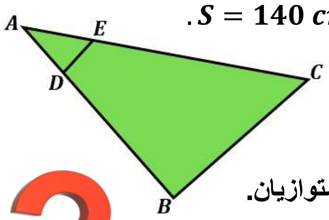
• هل هذا التحويل تصغير أو تكبير للشكل؟ ماهو معامله؟

التمرين 03: مثلث ABC مساحته $S = 140\ cm^2$.

D نقطة من $[AB]$ حيث: $AD = 0,2 \times AB$

E نقطة من $[AC]$ حيث: $AE = 0,2 \times AC$.

بين أن المستقيمين (DE) و (BC) متوازيان.

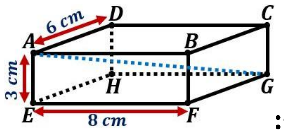


المثلث ADE تصغير للمثلث ABC. ماهو سلم التصغير؟

• احسب مساحة المثلث ADF.

التمرين 04: يكبّر نصف قطر كرة بنسبة 20%.
1. بأي نسبة مئوية تكبّر مساحتها؟
2. بأي نسبة مئوية يكبّر حجم الجلة المحدّدة بهذه الكرة؟

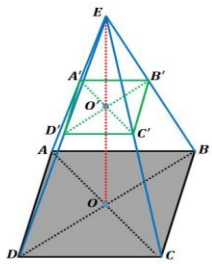
التمرين 05: قاعة على شكل متوازي مستطيلات، ارتفاعها $3\ cm$ و أرضيتها المستطيلة $EFGH$ حيث: $EF = 8\ cm$ ،$EH = 6\ cm$.



1. ما نوع المثلث ACG؟
2. أنشئ المثلث ACG (نأخذ $1\ cm$ لكل $1\ m$). احسب AG.
3. M نقطة من قطعة المستقيم $[AG]$ بحيث: $\frac{GM}{GA} = \frac{1}{3}$. المستقيم الموازي لـ (CG) والمار من النقطة M يقطع (AC) في النقطة N. احسب CN.

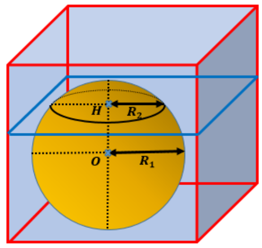
التمرين 06: أصبح حجم مخروط دوران $4,5\ \pi\ cm^2$ بتصغير معامله k.
1. ما معامل التصغير علما بأن حجم المخروط الأصلي $36\ \pi\ cm^3$؟
2. جد ارتفاع المخروط قبل التصغير إذا علمت أن مساحة قاعدته تساوي $9\pi\ cm^2$ وطول المولد $5\ cm$.
3. جد ارتفاع المخروط بعد التصغير واحسب مساحة قاعدته بطريقتين.

التمرين 07: $ABCDE$ هرم قاعدته مربع رأسه E و ارتفاعه $[EO]$ حيث $OE = 5\ cm$، قطع هذا الهرم بمستوي يوازي قاعدته حيث $O'E = 2,6\ cm$.



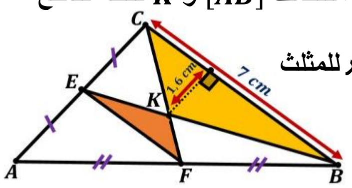
1. عين معامل تصغير الهرم المصغر الناتج.
2. احسب مساحة قاعدة الهرم المصغّر بدلالة مساحة قاعدة الهرم الأصلي وحجم الهرم المصغر بدلالة حجم الهرم الأصلي.

التمرين 08:



تُغمر كرة جزئيا كما هو موضح في الشكل.
نصف قطر الكرة $R_1 = 5\ cm$.
نصف قطر الدائرة الظاهرة جرّاء تقاطع سطح الماء بالكرة: $R_2 = 4\ cm$.
- أوجد ارتفاع الجزء المغمور من الكرة.

التمرين 09:
ABC مثلث. E منتصف $[AC]$ و F منتصف $[AB]$ و K نقطة تقاطع (EB) و (FC).

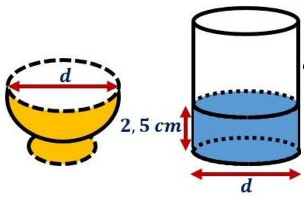


1. بيّن أنّ المثلث EFK هو تصغير للمثلث BCK. حدّد نسبة التصغير.
2. احسب مساحة المثلث EFK.

الوضعية 01:

تغطي البحار والمحيطات حوالي $70\ \%$ من مساحة سطح الكرة الأرضية.
إذا اعتبرنا أن الأرض كروية الشكل نصف قطرها $6730\ km$.
- احسب المساحة التي تغطيها القارات بالكيلو متر المربع (مدورة إلى الوحدة).

الوضعية 02:
إناء نصف كروية الشكل مملوء بالماء، عندما نسكب هذا الماء في الوعاء أسطواني الشكل، يرتفع الماء بـ $2,5\ cm$.



1. احسب قطر الوعاء.
2. احسب بالسنتيلتر كمية الماء المُحتوى في الإناء.

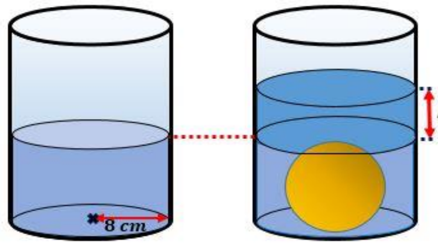
الوضعية 03:
قطر كرة القدم $24\ cm$.

- احسب مساحة وحجم الكرة بدلالة π .

الوضعية 04:

هرم خفرع بمصر هو هرم منتظم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $215\ m$ وارتفاعه $143\ m$.
- احسب حجم الهرم (أعط الناتج بالتقريب إلى $0,1$).

الوضعية 05:
نضع كرية من حديد نصف قطرها $6\ cm$ في حوض مائي اسطواني الشكل كما هو موضح في الشكل:



- أوجد ارتفاع الماء المزاح h إذا علمت أن الكرية غُمرت كليا.

الوضعية 06:

جلّة قطرها $10\ cm$، كتلتها $150\ g$.
- ماهي كتلة جُلّة مصنوعة من نفس المادة والتي نصف قطرها $15\ cm$؟

الوضعية الادماجية: $(BEM\ 2009)$
تم بناء خزّان للماء على شكل أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها $5\ m$ و ارتفاعها $4\ m$ لتزويد مسبح على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته $20\ m$ و $6\ m$ و ارتفاعه $2\ m$.
1. احسب سعة كل من الخزان و المسبح (نأخذ $\pi = 3,14$).
2. إذا علمت أن الخزان مملوء تماما والمسبح فارغ تماما وتدفق الماء في المسبح هو $(12\ m^3/h)$ أي $12\ m^3$ في الساعة، احسب كمية الماء المتدفقة في المسبح و كمية الماء المتبقية في الخزان بعد مرور ثلاث ساعات.
3. نفرض أن الخزان مملوء(سعته $314\ m^3$) و المسبح فارغ نسمي $f(x)$ كمية الماء المتبقية في الخزان و$g(x)$ كمية الماء المتدفقة في المسبح بالمتر المكعب بعد مرور x ساعة.
   - اوجد العبارة $g(x)$ ثم استنتج العبارة $f(x)$ بدلالة x.
4. نعتبر الدالتين f و g حيث:

$$f(x) = 314 - 12x$$
$$g(x) = 12x$$

أ. أرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (يؤخذ: $1cm$ يمثل $4h$على محور الفواصل و$1cm$ يمثل $50\ m^3$ على محور التراتيب)
ب. أوجد الوقت المستغرق لملء المسبح.
ج. حل المعادلة $f(x) = g(x)$.
- ماذا يمثّل حل هذه المعادلة؟

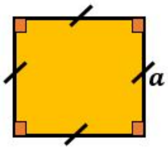
بالتوفيق والنجاح

المستوى: الرابعة متوسط

محيط، مساحة، حجم الأشكال الهندسية

الموسم الدراسي: 2019 - 2020

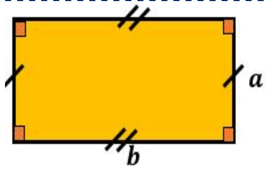
محيط ومساحة المربع:



$P = a \times 4$

$S = a \times a = a^2$

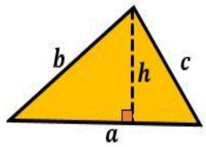
محيط ومساحة المستطيل:



$P = (a + b) \times 2$

$S = a \times b$

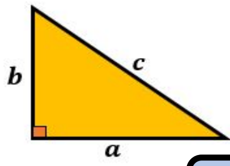
محيط ومساحة المثلث:



$P = a + b + c$

$S = \dfrac{a \times h}{2}$

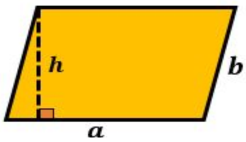
محيط ومساحة المثلث القائم:



$P = a + b + c$

$S = \dfrac{a \times b}{2}$

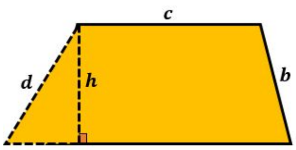
محيط ومساحة متوازي الأضلاع:



$P = (a + b) \times 2$

$S = a \times h$

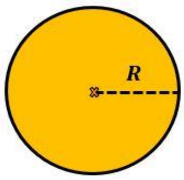
محيط ومساحة شبه المنحرف:



$P = a + b + c + d$

$S = \dfrac{(a + c) \times h}{2}$

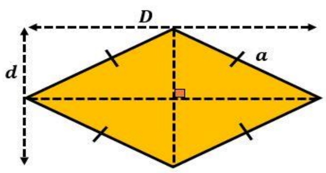
محيط الدائرة، مساحة القرص:



$P = 2\pi R$

$S = \pi \times R^2$

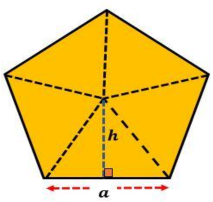
محيط ومساحة المعين:



$P = a \times 4$

$S = \dfrac{D \times d}{2}$

محيط ومساحة المضلع المنتظم:

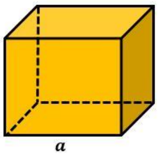


$P = a \times n$

n: هو عدد الأضلاع.

$S = n \times \left(\dfrac{a \times h}{2}\right)$

مساحة وحجم المكعب:



شكل القاعدة: مربع

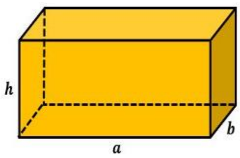
مساحة القاعدة B: $B = a \times a = a^2$

المساحة الجانبية A: $A = B \times 4$

المساحة الكلية S: $S = B \times 6$

الحجم V: $V = a \times a \times a = a^3$

مساحة وحجم متوازي المستطيلات:



شكل القاعدة: مستطيل

مساحة القاعدة B: $B = a \times b$

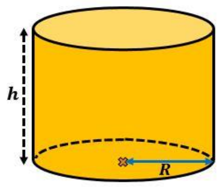
المساحة الجانبية A: $A = P \times h$

P: هو محيط المستطيل.

المساحة الكلية S: $S = A + 2B$

الحجم V: $V = B \times h$

مساحة وحجم أسطوانة الدوران:



شكل القاعدة: قرص

مساحة القاعدة B: $B = \pi \times R^2$

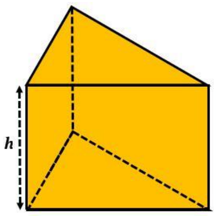
المساحة الجانبية A: $A = P \times h$

P: هو محيط الدائرة.

المساحة الكلية S: $S = A + 2B$

الحجم V: $V = B \times h$

مساحة وحجم الموشور القائم:



شكل القاعدة: مضلع (مثلث، مربع،...)

مساحة القاعدة B: حسب شكل القاعدة.

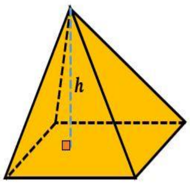
المساحة الجانبية A: $A = P \times h$

P: هو محيط القاعدة.

المساحة الكلية S: $S = A + 2B$

الحجم V: $V = B \times h$

مساحة وحجم الهرم:



شكل القاعدة: مضلع (مثلث، مربع،...)

مساحة القاعدة B: حسب شكل القاعدة.

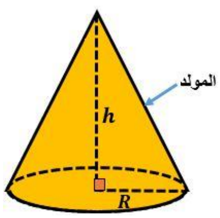
المساحة الجانبية A: $A = \text{مساحة وجه} \times n$

n: هو عدد أوجه الهرم.

المساحة الكلية S: $S = A + B$

الحجم V: $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$

مساحة وحجم المخروط الدوراني:



شكل القاعدة: قرص

مساحة القاعدة B: $B = \pi \times R^2$

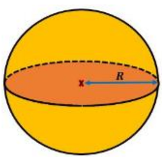
المساحة الجانبية A: $A = \dfrac{P \times \text{المولد}}{2}$

P: هو محيط الدائرة.

المساحة الكلية S: $S = A + B$

الحجم V: $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$

مساحة الكرة، حجم الجُلّة:



المساحة الكلية S: $S = 4\pi \times R^2$

الحجم V: $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times R^3$