المذكرة رقم: 01

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر.	**المادة:** رياضيات
ميدان التعلم: تحليل	**السنة الدراسية:** 2026/2025
المحور : الدوال العددية.	**المدة:** 01 سا
المحتوى المعرفي : الدالة الأسية.	**ثانوية:** الاخوة عباس ـباتنة ـ

الكفاءات المستهدفة : التعرف على الدالة الأسية وخواصها .

– دراسة تغيرات الدالة الأسية .

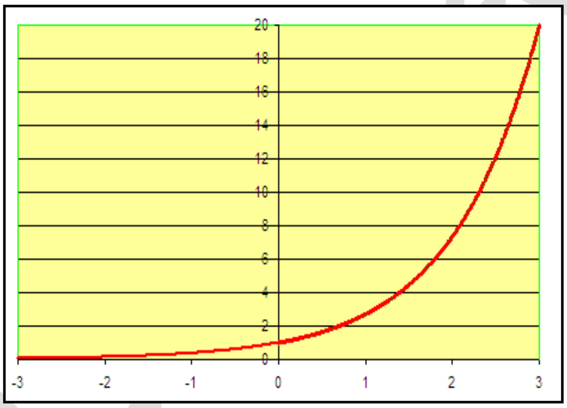
المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
	1. التهيئة النفسية :" 1 – 1	05 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
	مناقشة النشاط	15 د	

1) باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h = 0,005$ إنجاز جدول يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$ و إنشاء تمثيل تقريبي للدالة f :

نذكر أن $f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن $f' = f$ فإن $f(x_0+h) \approx f(x_0)(1+h)$

لدينا كذلك $f(x_0-h) \approx f(x_0)-hf'(x_0)$ و بما أن $f' = f$ فإن $f(x_0-h) \approx f(x_0)(1-h)$

h	x	f(x-h)=f(x)*(1-h)	x	f(x+h)=f(x)*(1+h)
0,005	0	1	0	1
	-0,01	0,995	0,01	1,005
	-0,01	0,990025	0,01	1,010025
	-0,02	0,985074875	0,02	1,015075125
	-0,02	0,980149501	0,02	1,020150501
	-0,03	0,975248753	0,03	1,025251253
	-0,03	0,970372509	0,03	1,030377509
	-0,04	0,965520647	0,04	1,035529397
	-0,04	0,960693044	0,04	1,040707044
	-0,05	0,955889578	0,05	1,045910579
	-0,05	0,95111013	0,05	1,051140132
	-0,06	0,94635458	0,06	1,056395833
	-0,06	0,941622807	0,06	1,061677812
	-0,07	0,936914693	0,07	1,066986201



2) تبيان أن الدالة h ثابتة على R :

الدالة h قابلة للاشتقاق على R و: $h'(x) = f'(x).f(-x) + f'(-x).f(x)$

ونعلم أن : $f'(-x) = f'[-x]\times(-x)' = -f(-x)$

و عليه : $h'(x) = f(x).f(-x) - f(-x).f(x)$ لان $f' = f$.وبالتالي

$h'(x) = 0$

و منه h ثابتة على R أي : $h(x) = c$.

استنتاج أنه من اجل كل x من R ، : $f(x).f(-x) = 1$

$h(0) = c$ و أيضا $h(0) = f(0)\times f(-0) = 1$ لأن $f(0) = 1$ فرضا

و منه $c = 1$ ، إذن : $f(x).f(-x) = 1.......(3)$

البرهان أنه من اجل كل x من R ، : $f(x) \neq 0$

نفرض بالخلف أنه يوجد عدد حقيقي a من R : $f(a)=0$ و منه $f(a).f(-a)=0$

وهذا تناقض لأن الدالة h ثابتة أي $h(x)=1$

و عليه من اجل كل x من R ، $f(x)\neq 0$..........(4) .

3) تبيان أن k دالة ثابتة على R :

نفرض أنه توجد دالة g حيث $g'=g$ و $g(0)=1$

$k(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ و $f(x)\neq 0$.

05 د

k دالة قابلة للاشتقاق على R و $k'(x)=\dfrac{g'(x).f(x)-f'(x).g(x)}{[f(x)]^2}$

و نعلم أن: $g'(x)=g(x)$ و $f'(x)=f(x)$ ومنه $k'(x)=\dfrac{g(x).f(x)-f(x).g(x)}{[f(x)]^2}$ و

عليه $k'(x)=0$

و منه k دالة ثابتة على R .

يشارك التلاميذ في صياغة التعريف

استنتاج انه من أجل كل x من R ،: $g(x)=f(x)$

05 د

$k(0)=\dfrac{g(0)}{f(0)}=1$ و منه $k(x)=1$ لأن k ثابتة على R و منه $\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$ بالتالي : $g(x)=f(x)$

ادن توجد دالة وحيدة تحقق : $f'=f$ و $f(0)=1$

4) تبيان أن i دالة ثابتة على R و انه من أجل كل x من R ،: $i(x)=f(y)$

$i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$ ، $i'(x)=0$ و منه i دالة ثابتة على R

$i(x)=i(0)=\dfrac{f(y)}{1}$ و عليه : $i(x)=f(y)$

استنتاج انه من أجل كل x من R ،و أنه من اجل كل y من R ،: $f(x+y)=f(x).f(y)$

05 د

لدينا : $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$ و لكن $i(x)=f(y)$ ، ادن $f(y)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

و عليه: $f(x+y)=f(x).f(y)$.......(5)

استنتاج أنه من أجل كل x من R و من اجل كل y من R ، $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

$f(x-y)=f(x+(-y))=f(x).f(-y)$

و رأينا من الخاصية(3) أن : $f(-y)=\dfrac{1}{f(y)}$

و منه : $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$.........(6)

5) تعيين الدالة المشتقة للدالة j :

05 د

$j(x)=\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}$ ، n عدد صحيح نسبي،

$$j'(x)=\frac{[f(nx)]'[f(x)]^n-\left([f(x)]^n\right)'.f(nx)}{[f(x)]^{2n}}=\frac{nf'(nx).[f(x)]^n-nf'(x)[f(x)]^{n-1}.f(nx)}{[f(x)]^{2n}}$$

$f'(nx)=f(nx)$ و $f'(x)=f(x)$ و منه $j'(x)=0$

ادن j دالة ثابتة من اجل كل x من R.

استنتاج أنه من أجل كل x من R، $f(nx)=[f(x)]^n$

$j(0)=\dfrac{f(0)}{[f(0)]^n}=1$ ادن $j(x)=1$ من اجل كل x من R لأن j ثابتة على R.

ادن $\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}=1$ و عليه : $f(nx)=[f(x)]^n......(7)$

1- الدالة الاسية

عموميات :

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على R. بحيث $f'=f$ $f(0)=1$
نرمز إلى هذه الدالة بالرمز" $\exp$ " و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

نتائج:
* $\exp(0)=1$.
* من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp'(x)=\exp(x)$.

. خواص جبرية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

(1) $\exp(x)\neq 0$ (2) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ (3) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

(4) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. (5) $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$.

البرهان:

3. العدد e و الترميز e^x .

- العدد e هوصورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$. تعطينا الحاسبة

$e\approx 2,718281828$.

- من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=[\exp(1)]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$ تقرأ e^x: " أسية x ".

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x، y ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- $e^0=1$ - $\exp'(x)=e^x$ - $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^xe^y$ - $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ - $e^{nx}=(e^x)^n$

مثال: بسط العبارات التالية:

$a=(e^x)^3.e^{-5x}.e^{2x}$ ، $b=\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x}.e^2}$ ، $c=\dfrac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}}$

تمرين تطبيقي 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

1.بين أن الدالة f فردية.

2.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(2x)=\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

الحل: 1.من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$. إذن الدالة f دالة فردية.

.2 $\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{(e^x+1)^2}{(e^{2x}+1)}$

و منه $\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^{2x}+1)}=\frac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}=f(2x)$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(2x)=\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$.

تطبيق02: f الدالة المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

•بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(-x)=1-f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.

لديناّ: $f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}}=\frac{1}{\frac{1}{e^{-x}}+1}=\frac{1}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$

إذن: $f(-x)=1-f(x)$ و هو المطلوب.

تفسير النتيجة هندسيا:

تذكير: النقطة $\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لمنحى دالة إذا و فقط إذا كان:

$f(2\alpha-x)=2\beta-f(x)$ أو $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$

نتيجة: نستنتج أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

حل تمارين 2 و 3 ص 102

2- اتجاه تغير الدالة الاسية

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x=e^{2\times\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$

و بما أن $e^x\neq 0$ فإن من أجل كل x من R، $e^x>0$

نتيجة : الدالة الأسية متزايدة تماما على R .

البرهان: من أجل كل x من R ، $\exp'(x)=e^x$ ومنه من أجل كل x من R ، $\exp'(x)>0$

1- النهايات

خواص: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ (1) . $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ (2) .

البرهان :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=e^x-1$.

و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $e^x\geq 1$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$.

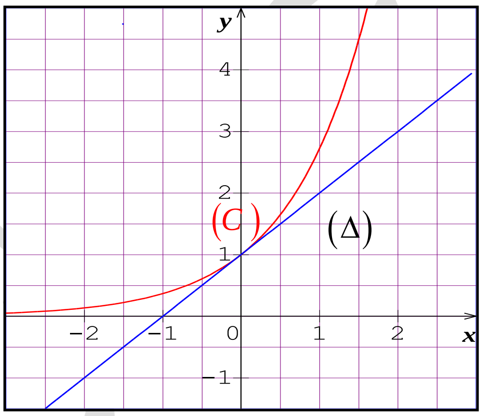
إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f(x)\geq 0$ أي $e^x\geq x$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

1- جدول تغيرات

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
e^x	$0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$

التمثيل البياني للدالة الأسية :



- المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محورالفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.

كتابة معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها 0 :

- لدينا $\exp'(0)=1$ و $e^0=1$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسه $(\Delta):y=x+1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{exp(0+x)-\exp(0)}{x}=\exp'(0)=1$ إذن

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

نتيجة: الدالة $x \mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0.
أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x \approx 1+x$.

تطبيق: أدرس اتجاه تغير الدالة f في كل حالة :

1) $f(x)=x+1+e^x$ ، $I=\Re$.

2) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ ، $I=\Re-\{0\}$.

3) $f(x)=(2x-3)e^x$ ، $I=\Re$.

الحـــــل :

1) $f(x)=x+1+e^x$ ، $I=\Re$.

الدالة f قابلة للشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=e^x+1$

إشارة المشتقة : لدينا من اجل كل x من I : $f'(x)\succ 0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على I .

2) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ ، $I=\Re-\{0\}$

الدالة f قابلة للشتقاق على Iودالتها المشتقة : $f'(x)=\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

إشارة المشتقة : لدينا من اجل كل x من I : $f'(x)\prec 0$

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على I .

3) $f(x)=(2x-3)e^x$ ، $I=\Re$

الدالة f قابلة للشتقاق على Iودالتها المشتقة : $f'(x)=(2x-1)e^x$

إشارة المشتقة : لدينا من اجل كل x من I : $e^x\succ 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $2x-1$

لدينا $2x-1=0$ أي $x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\nearrow$

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

حل معادلات و متراجحات :

تمرين: حل في R المعادلات و المتراجحات التالية:

$e^{2x}+3=0$ (1) $\quad e^{-2x+1}-1=0$ (2) $\quad e^{-2x-1}-e^{x}<0$ (3) $\quad e^{2x}>2-e^{x}$ (4)

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)}$ تعني $u(x)\geq v(x)$.

الحـــــــــل:

(1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في R لأن من أجل كل x من R ، $e^{2x}>0$

إذن $S=\phi$.

(2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^{0}$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S=\{0,5\}$

(3) تعني $e^{-2x-1}<e^{x}$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\dfrac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x}+e^{x}-2\leq 0$. بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود $X^{2}+X-2$ هما -2 و 1 ومنه $X^{2}+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^{x}<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathfrak{R}$.

$X>1$ تعني $e^{x}>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

تطبيق01:

- أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

$f(x)=e^{2x}-e^{x}$ ، $f(x)=e^{x}+e^{-x}$ ، $f(x)=1+e^{x}+e^{2x}$ ، $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$

تطبيق 02: ادرس اتجاه تغير الدالة f في كل حالة :

(1 $f(x)=x+1+e^{x}$ على R

(2 $f(x)=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ على كل من المجالين $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

(3 $f(x)=(2x-3)e^{x}$ على R

تطبيق 03: f دالة معرفة على R بـ $f(x)=e^{-x}-x-2$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. بين أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.
4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث $-0,45<\alpha<-0,44$.
5. استنتج إشارة $f(x)$ على R.

تطبيق: حل في $\mathfrak{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

(1 $e^{2x}=1$ **(2** $e^{x}=e^{-2x}$ **(3** $e^{-x^{2}}=\dfrac{1}{e}$ **(4** $e^{x+3}=e^{\frac{4}{x}}$ **(5** $e^{3x}<1$

(6 $e^{x+1}>e^{-\frac{2}{x}}$ **(7** $e^{2x}>2e^{x}-1$ **(8** $e^{x}>2-e^{x}$ **(9** $e^{7x}+5=0$

	تمرين منزلي: ليكن (C) منحنى ممثل للدالة $x \mapsto e^x$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ و لتكن النقطة $M(m;e^m)$ نقطة من (C)، و ليكن T مماس للمنحنى (C) في النقطة M • أحسب ميل المماس في النقطة M، ثم أكتب معادلته • لتكن الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x)=e^x-e^m(x-m+1)$ • ادرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها • استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\Re$ $g(x)>0$ • استنتج الوضع النسبي بين (C) و جميع مماساته **تمارين منزلية:**2 و 3 صفحة 102. تمارين منزلية تمرين : 5 ، 7 ، 9 صفحة 102 . من 29 إلى 36 صفحة 103:		
الوسائل التعليمية	**الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.**		
المراجع	**الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.**		

المذكرة رقم: 02

مذكرة رقم 01

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر.
المادة: رياضيات
ميدان التعلم: تحليل
السنة الدراسية: 2026/2025
المحور: الدالتان الأسية واللوغاريتمية.
المدة: 01سا
المحتوى المعرفي : الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$
ثانوية: الاخوة عباس ـباتنة ـ

الكفاءات المستهدفة : دراسة الدوال من الشكل $x \to e^{-\lambda x}$ ، $x \to e^{-\lambda x^2}$

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
	1. التهيئة النفسية التذكير بقواعد الدالة الأسية : ـ ا "":	05 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
	1. حلول المعادلة $f' = kf$ **مبرهنة:** ليكن k عددا حقيقيا. توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$ بحيث $f' = kf$ و $f(0)=1$. f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$. **البرهان:** **الوجود:** لتكن f الدالة المعرفة على $\mathfrak{R}$ بِـ $f(x)=e^{kx}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathfrak{R}$، $f'(x)=ke^{kx}=kf(x)$ كما أن $f(0)=e^0=1$. و بالتالي الدالة f تحقق $f'=kf$ و $f(0)=1$. **الوحدانية:** نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$ بحيث $g'=kg$ و $g(0)=1$. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathfrak{R}$ بِـ $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$. الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathfrak{R}$، $h'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{[f(x)]^2}=\dfrac{kg(x)f(x)-kf(x)g(x)}{[f(x)]^2}=0$. إذن h ثابتة على $\mathfrak{R}$ مع $h(0)=\dfrac{g(0)}{e^0}=1$ و منه من أجل كل x من $\mathfrak{R}$، $h(x)=1$. إذن من أجل كل x من $\mathfrak{R}$، $g(x)=f(x)$. **أمثلة :** 1- حلول المعادلة التفاضلية $f' = -2f$ مع $f(0)=1$ هي الدالة f المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ : $f(x)=e^{-2x}$. 2- نعتبر المعادلة التفاضلية $y' - \sqrt{3}y = 0$ حيث $y(0)=1$. لدينا $y' - \sqrt{3}y = 0$ تكافئ $y' = -\sqrt{3}y$. الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية مع $y(0)=1$ هي الدالة f المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ : $f(x)=e^{\sqrt{3}x}$.	15 د	

2. دوال تحول المجموع إلى جداء

مبرهنة: الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على ℝ بحيث:
من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=f(x)f(y)$
هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

حل تمرين رقم 15 ص 102:

1- أ . اثبات أن : $f(0)=1$.

لدينا : من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=f(x)f(y)$

$$f(0)=f(0+0)=f(0)\times f(0)=1\times 1=1$$

بـ : اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)\times f(-x)=1$.

لدينا $f(x)f(-x)=f(x-x)=f(0)=1$.

2- أ. اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$

لدينا : من أجل كل عددين حقيقيين x ، $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)$.

بـ . استنتاج إشارة الدالة f .

لدينا $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\succ 0$.

وعليه الدالة f موجبة تماما على $\mathfrak{R}$.

1- دراسة الدالة $x \to e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$:

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ، نعتبر الدوال f_λ المعرفة على المجال $\mathfrak{R}$ كما يلي: $f_\lambda(x)=e^{-\lambda x}$

نرمز بِـ (C_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال f_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_λ) و $(C_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0<\lambda<\lambda'$

2- دراسة الدالة $x \to e^{-\lambda x^2}$ حيث $\lambda > 0$:

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال $\mathfrak{R}$ كما يلي: $g_\lambda(x)=e^{-\lambda x^2}$

نرمز بِـ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).

5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0<\lambda<\lambda'$.

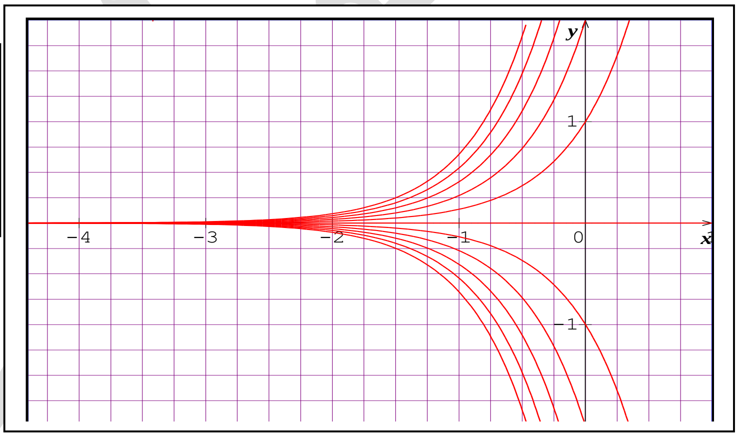
ملاحظة: تسمى المنحنيات (Γ_λ) بمنحنيات غوص $(Gauss)$ و يتم استعمالها في الاحتمالات و الإحصاء و لعل أكثرها استعمالا هو المنحني $(\Gamma_{0,5})$ ذو المعادلة $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ و الذي يأخذ شكلا ناقوسيا.

تطبيق : عين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x)-2f(x)=0$.

من بين الدوال f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ عين تلك التي منحناها البياني يمر من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$.

الحل :

$f'(x)-2f(x)=0$ تعني $f'(x)=2f(x)$ و منه $f'=kf$ مع $k=2$. الدوال f هي إذن الدوال المعرفة على $\Re$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$ حيث C عدد حقيقي ثابت.



التمثيلات المقابلة هي لدوال f معرفة على $\Re$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$

نبحث إذن عن الدالة f حيث $f(x)=Ce^{2x}$ مع $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$ و بما أن

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=Ce^{2\left(\frac{1}{2}\right)}=C\times e$$

يكون لدينا $C\times e=e^2$ أي $C=e$. و منه $f(x)=e\times e^{2x}=e^{2x+1}$.

إذن الدالة الوحيدة f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ و التي يمر منحناها البياني من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$ هي الدالة: $x\mapsto e^{2x+1}$

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة -		

المذكرة رقم: 03

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر.

المادة: ريـاضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2026/2025

المـــــــــحور : الدوال العددية.

المـدة: 01 سا

المـــــحتوى المعـرفي : دراسة الدالة $exp\circ u$.

ثانوية: الاخوة عباس–باتنة -

الكفاءات المستهـدفة : دراسة تغيرات الدالة $exp\circ u$

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات

- **التهيئة النفسية** :" 1 – ا

05 د

لتذكير بقواعد وخواص الدالة الأسية

يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

15 د

لنهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال01:

نعتبر الدالة f المعرفة على R : بـ : $f(x)=e^{-x+2}$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

مثال02:

نعتبر الدالة f المعرفة على R : $f(x)=e^{x^2+2x-1}$

. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

لبرهان:

نعلم أن الدالة " exp " متزايدة تماما على $\mathfrak{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال01:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ $u(x)=x^2-1$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

مثال02 :

عين اتجاه تغير الدالة f المعرفة على R : $f(x) = e^{x^2}$

. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

منأجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال01:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ: $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

مثال02 : احسب الدالة المشتقة f' للدالة f المعرفة على R

$f(x)=e^{2x+3}$ ، $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{2+\ln x}$

أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

الحـــــــل:

- لدينا: $\lim_{x\to 0}(2+\ln x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و بما أن $\lim_{X\to-\infty} e^X=0$

فإن $\lim_{x\to 0} e^{2+\ln x}=0$ و بالتالي $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

- لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(2+\ln x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ و بما أن

$\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} e^{2+\ln x}=+\infty$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ملاحـــظة:

يمكن ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=e^{2+\ln x}=e^2e^{\ln x}=e^2x$

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1.أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2.عين نقط المنحنى (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذوالمعادلة $y=\frac{x}{3}$

الحـــــل:

1. من أجل كل x من $\mathfrak{R}$، $f'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

بما أن $e^{2x}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathfrak{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathfrak{R}$.

2. يكون المماس عند نقطة من (C) فاصلتها x موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x)=\frac{1}{3}$

يكون لدينا إذن $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{1}{3}$ أي $6e^{2x}=e^{2x}+1$ و هذا يعني $e^{2x}=\frac{1}{5}$ أي $2x=-\ln 5$ و منه $x=-\frac{\ln 5}{2}$

و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C) فاصلتها $x=-\frac{\ln 5}{2}$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

حل تمرين 49 صفحة 105:

1- دراسة تغيرات الدالة f :

$D_F=\left]-\infty\,;+\infty\right[$ ، $f(x)=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

f تقبل الاشتقاق على R و: $f'(x)=\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$

من أجل كل x من R : $f'(x)\succ 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ معناه يوجد مستقيم مقارب معادلته : $y=0$ للمنحنى (C) بجوار $-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ معناه يوجد مستقيم مقارب معادلته : $y=1$ للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

2- برهان أن النقطة $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C) .

لدينا : $f(-x)+f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=1$.

و منه النقطة $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C) .

3- معادلة (T) عند النقطة: $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$. $(T): y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

4- أ- إثبات أنه من أجل كل x من R : $g'(x)=\frac{(e^{x}-1)^2}{4(1+e^{x})^2}$.

$$g'(x)=\frac{1}{4}-f'(x)=\frac{(e^{x}-1)^2}{4(1+e^{x})^2}$$

بـ- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗			$+\infty$

جـ - استنتاج إشارة g(x) على R :

$g(x)<0 \quad , \quad x\in\left]-\infty;0\right[$

$g(x)>0 \quad , \quad x\in\left]0;+\infty\right[$

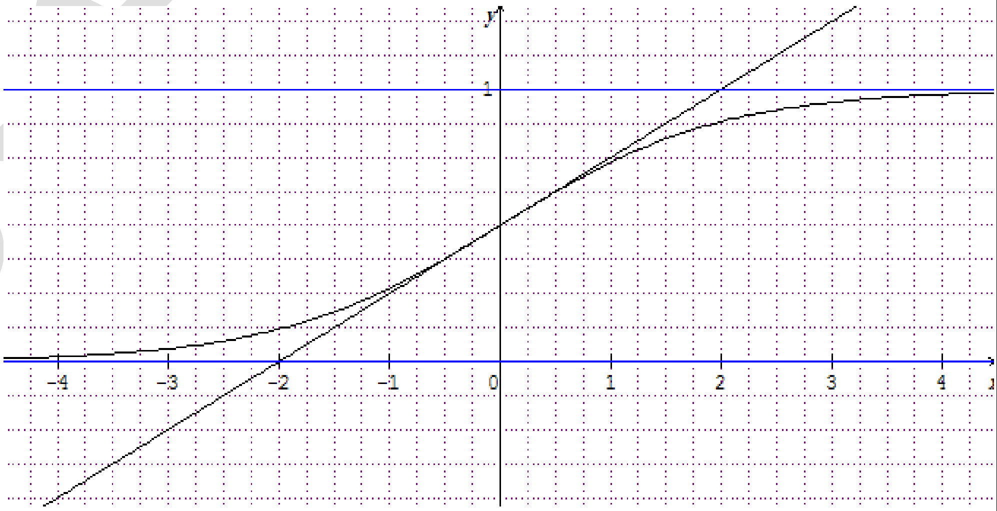
$g(0)=0$

د- استنتاج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم (T) .

لدينا : $f(x)-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)=-g(x)$.

في المجال $\left]-\infty;0\right[$ ، (T) تحت (C) و في المجال $\left]0;+\infty\right[$ ، (T) فوق (C)

5- رسم (T) و (C):



تمارين 37 ، 38 و 39 ص 104 واجب منزلي

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة .		