

المستوى: ٣٤ + ٣٦ + ٣٧ ريا .

السنة الدراسية: 2025/2026

المدة: 05 سا

ثانوية: الاخوة عباس باتنة -

میدان التعلم: تحلیل

النهايات : المحوّر .

المحتوى المعرفي: النهايات.

الكفاءات المستهدفة: هي حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.

- ## حساب نهاية باستعمال الميرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتي.

المرحل الاستكشاف والاتساع	الأنشطة المراقبة لكل مرحلة	المرا حل
ملاحظا ت و توجيهات	المدة	الأنشطة المراقبة لكل مرحلة
		<p>تعريف: دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty]$ و l عدد حقيقي.</p> <p>القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم (x) من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ وتقرا $f(x)$ يقول الى l لما x يقول الى $+\infty$</p> <p>تطبيق: دالة معرفة على المجال $[2; +\infty]$ بـ $f(x) = \frac{1}{x-2}$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$</p> <p>نتيجة: إذا كانت l نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$</p> <p>ملاحظة: نحصل على نفس تعريف ونتيجة مماثلين عند $-\infty$</p> <p>2. نهاية غيرمنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$</p> <p>تعريف 1: دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty]$. القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty]$ يشمل كل القيم (x) من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وتقرا $f(x)$ يقول الى $+\infty$ لما x يقول الى $+\infty$</p>
د 15	د 05	<p>1. التهيئة النفسية</p> <p>1. نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$</p> <p>تعريف: دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty]$ و l عدد حقيقي.</p> <p>القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم (x) من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ وتقرا $f(x)$ يقول الى l لما x يقول الى $+\infty$</p> <p>تطبيق: دالة معرفة على المجال $[2; +\infty]$ بـ $f(x) = \frac{1}{x-2}$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$</p> <p>نتيجة: إذا كانت l نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$</p> <p>ملاحظة: نحصل على نفس تعريف ونتيجة مماثلين عند $-\infty$</p> <p>2. نهاية غيرمنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$</p> <p>تعريف 1: دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty]$. القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty]$ يشمل كل القيم (x) من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وتقرا $f(x)$ يقول الى $+\infty$ لما x يقول الى $+\infty$</p>

د 05



د 05



د 05



د 05



تعريف 2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty]$. القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي ∞ يعني أن كل مجال من الشكل $[B; +\infty]$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى ∞ لما x يؤول إلى ∞

مثال تطبيقي: f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty]$ بـ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$

نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

1. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $[a; x_0] \cup [x_0; b]$ يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد a يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . ونكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما x يؤول إلى x_0

مثال تطبيقي: f دالة معرفة على المجال R بـ

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

2. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $[a; x_0] \cup [x_0; b]$.

القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty]$ يشمل كل

القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

تطبيق: f دالة معرفة على المجال $[1; +\infty]$ بـ

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

2. المستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب :

تعريف: ل يكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ل يكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $x = a$. القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يعني أن نهاية الدالة f عند $x = a$ (من اليسار أو من اليمين) هي $+\infty$ أو $-\infty$

مثال: ت رقم 82 ص 33

3. المستقيم المقارب المائل:

تعريف: ل يكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ل يكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة:

القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

يعني أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحي الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$.

تمرين محلول 3: لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty)$ بـ $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. بين أن المستقيم $y = x - 1$ مستقيم مقارب للمنحي (C_f) عند $+\infty$.
2. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .
3. مثل (C_f) و (D) في معلم

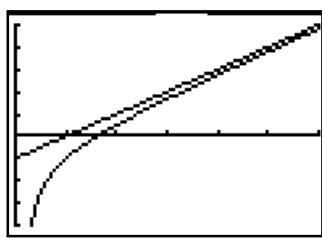
الحل:

1. لدينا $y = x - 1$ و منه المستقيم 1 (D) مستقيم $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ مقارب للمنحي (C_f) عند $+\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = -\frac{1}{x}$ و منه من أجل كل x من $[0; +\infty)$,

$[f(x) - (x - 1)] < 0$. إذن المنحي (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) .

3. تمثيل (C_f) و (D)



المنحنيات المتقاربة :

C_f و C_g منحني الدالتين f و g على الترتيب. نقول ان C_f و C_g متقاربين عند $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0$ و اذا كانت $+\infty$ -

تتمات على النهايات.

١. بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty & * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty & * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty & * \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty & * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty & * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty & * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty & * \\ \lim_{x \xrightarrow{\leftarrow} 0} \frac{1}{x} = -\infty & * & \lim_{x \xrightarrow{\rightarrow} 0} \frac{1}{x} = +\infty & * & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 & * & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 & * \end{array}$$

٢. العمليات على النهايات

f و g دالتن. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

• نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	جع	$-\infty$

•

٠. نهاية حداه دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

٠. نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات

"عدم التعيين" (ح ع ت)

تطبيق: في كل حالة من الحالات ادرس نهاية الدالة f ،

$f(x) = 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$ ، عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1

$f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x-3}$ ، عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 2 ، عند 3

$f(x) = 2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}$ ، عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1 ، عند 3

٣. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

قواعد إجرائية ° النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ - دالة كثير حدود هي نهاية حدتها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

° النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ - دالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ ،

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

٣. إزالة حالات عدم التعيين

١. وضعية الانطلاق: - من يذكرنا بمحظوظ حالات عدم التعيين المعروفة.

٢. نشاط (مقترن) الهدف: إزالة حالات عدم التعيين بتحليل وتبسيط عبارة دالة.

نعتبر الدالة f المعرفة بالشكل:

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ، هل يمكن حساب نهاية الدالة f عند -2 ؟

2) حلل البسط والمقام إلى جداء عاملين وفق العامل $x+2$. ثم أختزل عبارة الدالة f

3) أحسب نهايات الدالة f عند كل من -2 و 1 .

2. طريقة التحليل والاختراع في إزالة حالات عدم المعرفة (10د)

2. طريقة الاختراع في إزالة حالات عدم المعرفة (10د)

2. طريقة التحليل في إزالة حالات عدم المعرفة (10د)

2. طريقة المرافق في إزالة حالات عدم المعرفة (10د)

1. بالاختزال:

إزالة حالات عدم المعرفة لدالة ناطقة يمكن أن:

1. حل بسط ومقام الدالة وفق نفس العامل المشترك.
2. نختزل عبارة الدالة.
3. نحسب النهايات وفق الدالة الجديدة.

تطبيق 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{أحسب .}$$

الحل: لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ح للت من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2 \quad \text{ازالتها :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2} \quad * \quad \text{أحسب}$$

2. باستعمال التحليل:

تطبيق 2: أحسب نهاية الدوال الموالية عند $+\infty$:

$$f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2} \quad |1$$

$$g(x) = x + 2 - \sqrt{x} \quad |2$$

الحل:

$$D_f = [1; +\infty[\quad \text{حيث} \quad f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2} \quad /1$$

حساب نهاية f عند $+\infty$ فنجد ح للت من الشكل $+\infty - \infty$

$$f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= 2x + 1 - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= x \left(2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}\right)$$

$$\text{إزالة ح للت:} \quad f(x) = x + 2 - \sqrt{x} \quad /2$$

حساب نهاية g عند $+\infty$ فنجد ح للت من الشكل $+\infty - \infty$

$$g(x) = x + 2 - \sqrt{\frac{x^2}{x}}$$

$$= x + 2 - |x| \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$= x \left(1 + \frac{2}{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$$

3. باستعمال المرافق:

تطبيق 2: أحسب نهايات الدوال الموالية عند حدود مجموعة تعريفها:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x} \quad |1$$

$$f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 + x} \quad |2$$

الحل:

$$D_h = [2; +\infty[\quad \text{معرفة على:} \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x} \quad |3$$

حساب نهاية h عند $+\infty$ فنجد ح للت من الشكل $+\infty - \infty$

ازالة ح ع ت:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{x^2-2x})^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}} = \frac{x^2+1-x^2+2x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}} \\
&= \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+2\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + |x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+2\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} \\
&\text{ومنه}
\end{aligned}$$

4. باستعمال العدد المشتق:

1- باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $y = \cos x$ أحسب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \quad \text{ومنه } f(x) = \cos x$$

لدينا الدالة قابلة للاشتغال ودالتها المشتقة : $f'(x) = -\sin x$ و $f'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \text{وبالتالي}$$

2- درس النهاية عند 0 للدالة:

تمرين 1:

(1) لتكن f دالة معرفة بالعبارة: $f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x^2 - 3x + 2}$

أ. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

2) لتكن $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$ دالة معرفة بالعبارة

أ. أحسب.

نهاية دالة مركبة-النهايات بالمقارنة

1. نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a, b, c تمثل أعداداً حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، u و f دوال حيث $f = v \circ u$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ و إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال \mathbb{R}^* بـ $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$ و نريد حساب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث

($f = v \circ u$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} v(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{بما أن}$$

تطبيق : باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

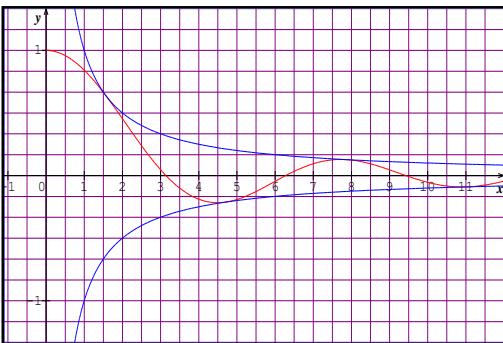
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x-4}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (4) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - x + 3} \quad (3)$$

2. النهايات بالمقارنة

مبرهنة 1: f ، g و l دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ عدد حقيقي.

و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فإن $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

من أجل كل x من $[0; +\infty)$ ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

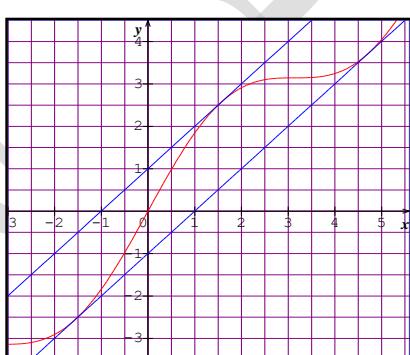
مبرهنة 2: f ، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و إذا كان من أجل

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $f(x) \geq g(x)$ كلما كان من أجل x كبير بالقدر الكافي

مبرهنة 3: f ، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و إذا كان من أجل

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ فإن $f(x) \leq g(x)$ كلما كان من أجل x كبير بالقدر الكافي

ملاحظة: المبرهنات السابقة تبقى صحيحة عندما يؤول ∞ أو $-\infty$ إلى عدد حقيقي.



مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ

$$f(x) = x + \sin x$$

من أجل كل x من R ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$$

تطبيق :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

ملاحظة هامة : بالنسبة لمحور النهايات يقدم كتذكير للمكتسبات المدرستة في السنة الثانية

ثانوي والتركيز فقط على ما هو أهم ومام يدرس من قبل

الكتاب المدرسي - السبورة - المسطرة - كوس - أقلام - أنترنيت.

الوسائل التعليمية

المراجع