عمل منزلي رقم (1) للثالثة ثانوي

من إقتراح : خالد بخاخشة

التمرين:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^3-3x^2+7x+3$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيرّاتها .

2) أ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.37<\alpha<-0.36$.

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{(x-1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

2) أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : من أجل كل $x\neq1$ ، $f(x)=x+a+\dfrac{bx}{(x-1)^2}$.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

جـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أ- بيّن أنه من أجل كل $x\neq1$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$.

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها، ثم شكّل جدول تغيرّاتها .

4) بيّن أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له .

5) أكتب معادلة المماس (T') للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

6) أ- بيّن أن : $f(\alpha)=1-\dfrac{8}{\alpha-1}-\dfrac{12}{(\alpha-1)^2}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب- عيّن دون حساب : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$. فسر النتيجة بيانيا .

7) عيّن فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .

8) أنشئ كلا من (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)\approx0.4$)

9) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=-f\left(-|x|\right)$ ، و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أ- أدرس قابلية إشتقاق الدالة h عند 0 .

ب- بيّن أن الدالة h زوجية ، ثم أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

" The only way to learn mathematics is to do mathematics "

تصحيح العمل المنزلي

I) 1) أ) حساب :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

نحسب المشتقة : $g'(x)=3x^2-6x+7>0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) أ) بيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على $[-0.37,-0.36]$.

و $\underbrace{g(-0.36)}_{\approx 0.004}\times\underbrace{g(-0.37)}_{\approx -0.05}<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد α.

ب) اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2-3x}{(x-1)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2-3x}{(x-1)^2}=+\infty$$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x^3-2x^2-3x}^{-4}}{\underbrace{(x-1)^2}_{0^+}}=-\infty$$

2) أ) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$$f(x)=x+a+\frac{bx}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^3+(a-2)x^2+(1-2a+b)x}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد : $a-2=-2$ و $1-2a+b=-3$

ومنه : $a=0$ و $b=-4$.

اذن : $\boxed{f(x)=x-\frac{4x}{(x-1)^2}}$

ب) استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) :

بما أن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-4x}{(x-1)^2}=0$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

ج) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس اشارة الفرق : $f(x)-x=\frac{-4x}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-4x$		$+$	0	$+$		$-$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $O(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	

3) أ) بيان أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-4x-3)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-2x^2-3x)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)(x^3-3x^2+7x+3)}{(x-1)^4}=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^3$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين : $]-\infty,\alpha]$ و $]1,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال : $[\alpha,1[$.

▲ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

④ بيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

$(\Delta)//(T)$ معناه لهما نفس معامل التوجيه

نحل المعادلة : $f'(x)=1$

أي : $\frac{x^3-3x^2+7x+3}{(x-1)^3}=1$ أي : $\frac{4x+4}{(x-1)^3}=0$

ومنه : $x=-1$

نكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة -1 :

$$y_{(T)}=f'(-1)(x+1)+f(-1)=x+1$$

⑤ كتابة معادلة المماس (T') عند الفاصلة 0 :

$$y_{(T')}=f'(0)(x-0)+f(0)=-3x$$

⑥ ⓐ بيان أن : $f(\alpha)=1-\frac{8}{\alpha-1}-\frac{12}{(\alpha-1)^2}$

$$f(\alpha)-1-\frac{8}{\alpha-1}-\frac{12}{(\alpha-1)^2}=\frac{\overbrace{g(\alpha)}^{0}}{(\alpha-1)^2}=0$$

▲ حصر $f(\alpha)$:

$$(1)....6.84<1-\frac{8}{\alpha-1}<6.88$$

$$(2)....-6.46<-\frac{12}{(\alpha-1)^2}<-6.39$$

نجمع $(1)+(2)$ نجد : $0.38<f(\alpha)<0.49$

ⓑ تعيين دون حساب : $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=0$$

♣ التفسير الهندسي : (C_f) يقبل عند النقطة $(\alpha,f(\alpha))$ مماسا أفقي يوازي حامل محور الفواصل.

⑦ فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

نحل المعادلة : $f(x)=0$ أي : $\frac{x^3-2x^2-3x}{(x-1)^2}=0$

أي : $x^3-2x^2-3x=0$ أي : $x(x^2-2x-3)=0$

ومنه : $x=-1$ أو $x=0$ أو $x=3$.

⑨ المناقشة البيانية :

♣ $f(x)=m$

قيم m	عدد و إشارة حلول المعادلة
$m<0$	حلين موجبين و حل سالب
$m=0$	حل معدوم و حلين مختلفين في الإشارة
$0<m<f(\alpha)$	حلين سالبين و حل موجب
$m=f(\alpha)$	حلين مختلفين في الإشارة
$m>f(\alpha)$	حل وحيد موجب

♣ $f(x)=x+m$

قيم m	عدد و إشارة حلول المعادلة
$m<0$	حلين موجبين
$m=0$	حل معدوم
$0<m<1$	حلين سالبين
$m=1$	حل وحيد سالب
$m>1$	لا يوجد حلول

♣ $f(x)=mx$: النقطة الثابتة هي المبدأ $O(0,0)$.

قيم m	عدد و إشارة حلول المعادلة
$m\geqslant 1$	حل معدوم
$-3<m<1$	حل معدوم و حلين مختلفين في الإشارة
$m\leqslant -3$	حل معدوم و حل موجب

III $h(x)=\frac{|x|^3+2x^2-3|x|}{(|x|+1)^2}$

ⓐ دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة 0 :

◄ من اليسار :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-x^3+2x^2+3x}{x(-x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-x^2+2x+3}{(-x+1)^2}=3$$

h تقبل الإشتقاق على يسار 0 و منه : $h'_g(0)=3$.

◄ من اليمين :

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^3+2x^2-3x}{x(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=-3$$

h تقبل الإشتقاق على يمين 0 و منه : $g'_d(0)=-3$

▲ بما أن $h'_d(0)\neq h'_g(0)$ فإن الدالة h لا تقبل الإشتقاق عند القيمة 0 و المنحنى (C_h) يقبل نقطة زاوية عند النقطة $O(0,0)$.

ⓑ بيان أن الدالة h زوجية :

من أجل كل x و $-x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا :

$$h(-x)=\frac{|-x|^3-2(-x)^2-3|-x|}{(|-x|-1)^2}$$

$$=\frac{|x|^3-2x^2-3|x|}{(|x|-1)^2}=h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية.

IV

(أ) حساب $K'(x)$:

$$K'(x) = 2f'(x).f(x)$$

♣ اشارة $K'(x)$:

x	$-\infty$		-1		α		0		1		3		$+\infty$
$2f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	||	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$K'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

(أ) جدول تغيرات الدالة K :

x	$-\infty$		-1		α		0		1		3		$+\infty$
$K'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$K(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

رسم (T) ، (Δ) ، (C_f) و (C_h) :