ثانوية الشهيد مصطفى بن بولعيد - المعاضيد - المسيلة

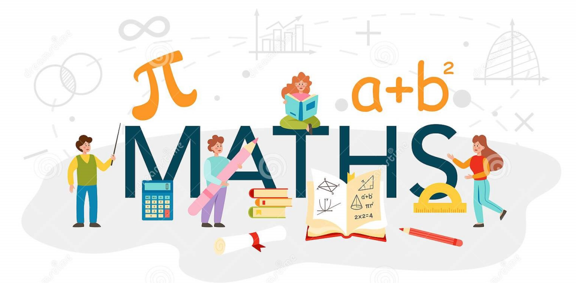
يسرني أن أتقدم لكم بهذا العمل المتواضع والمتمثل في مذكرات مادة الرياضيات لسنة ثالثة ثانوي شعبة:

علوم تجريبية ⋆ رياضيات ⋆ تقني رياضي

يتضمن هذه العمل:

- **مذكرة 24:** نهاية دالة عند مالانهاية.
- **مذكرة 25:** نهاية دالة عند عدد حقيقي.
- **مذكرة 26:** مبرهنات أولية على النهايات.
- **مذكرة 27:** السلوك التقاربي لمنحنى دالة.
- **مذكرة 28:** العمليات على النهايات.

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبكم في الله الأستاذ: فراحتية المحفوظ



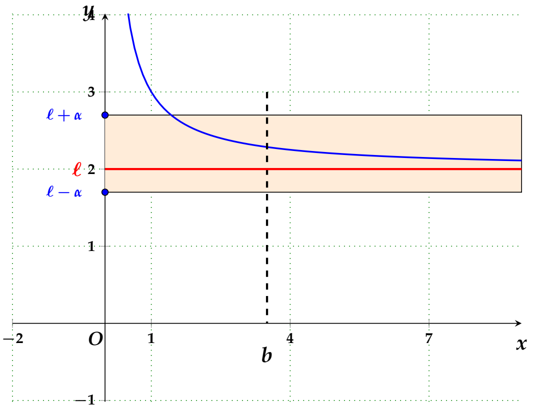
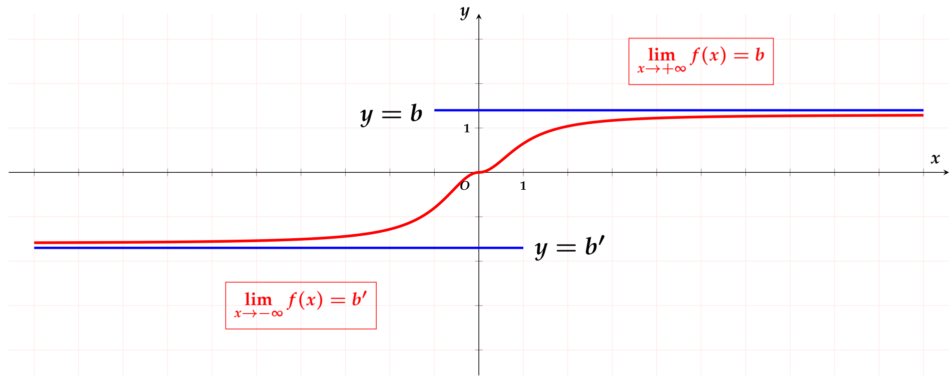
آخر تحديث: 09 / 11 / 2025

السنة الدراسية: 2025 / 2026

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : نهاية دالة عند مالانهاية.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الـدوال العددية،
الكفاءات المستهدفة : نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة ،و تفسير الهندسي لها
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق بنـــاء معـــارف	**نهاية منتهية عند مالانهاية** **تعريف** f دالة معرفة على $]x_0,+\infty[$ و l عدد حقيقي القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$  **مـلاحظة:** نحصل على نفس تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$. **مثال** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ **المستقيم المقارب الأفقي** **نتيـجة** إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ نقول أنّ المستقيم ذا المعادلة $y=\ell$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ 	

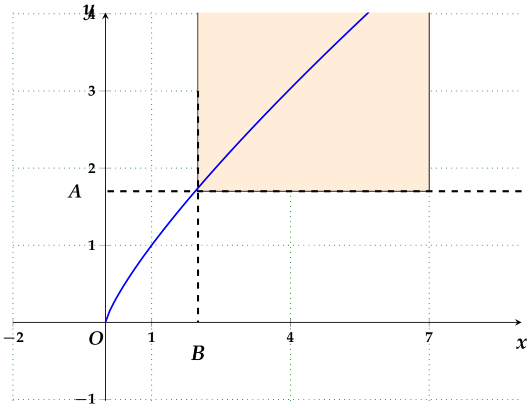
بنـــاء معـــارف

تطبيق :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$

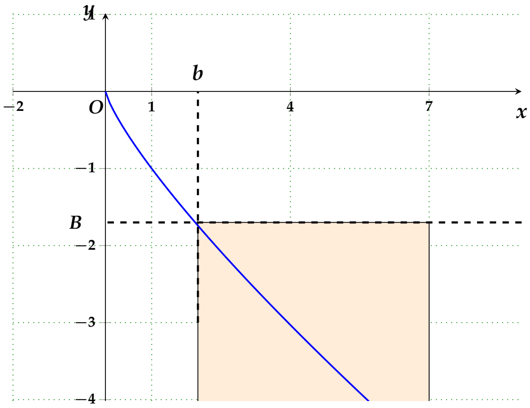
✍ أثبت بإستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$



تعريف

✍ f دالة معرفة على $]x_0,+\infty[$ القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال $]A,+\infty[$ و $A\in\mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



تعريف

✍ f دالة معرفة على $]x_0,+\infty[$ القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال $]-\infty;B]$ و $B\in\mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي من ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

التقويم

مـلاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$

مثال

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

تطبيق :

f دالة معرفة على $[3;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x-6}$

✍ أثبت بإستعمال التعريف أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تطبيق :

نعتبر الدالة h المعرفة على على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=-3+\dfrac{4x-1}{2x+2}$، وليكن (C_g) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

✍ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : نهاية دالة عند عدد

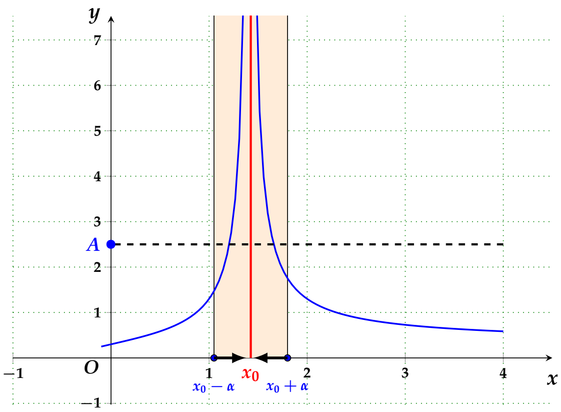
المكتسبات القبليـة : مفاهيم أولية حول الـدوال العددية،
الكفاءات المستهدفة : حساب نهاية عند عدد
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق بناء معارف	التهيئة النفسية : التذكير بالمكتسبات القبلية. **نشاط مقترح** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 3$ نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2 1 ضع تخمينا لسلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2 . 2 في أي مجال يجب إختيار x بحيث $f(x)$ تنتمي إلى $]6,99;7,01[$ ؟ 3 α عدد حقيقي حيث : $0 < \alpha < 1$ • في أي مجال يجب إختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]7-\alpha;7+\alpha[$. • علما أننا نختار α صغير بالقدر الذي نريد، ماذا تستنتج ؟ **نهاية منتهية عند عدد حقيقي** **تعريف** x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0 نقول أن نهاية الدالة f هي ℓ لما x يؤول إلى x_0 إذا كان من اجل كل عدد حقيقي موجب A ، يوجد عدد حقيقي B ، بحيث إذا كان : $\|x - x_0\| < B$ فإن : $\|f(x) - \ell\| < A$ أي يمكن جعل $f(x)$ أقرب من أي عدد حقيقي إلى ℓ إذا كان x قريبا بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ **مـثال** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 3$ بإستعمال التعريف أثبت أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$	

نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

تعريف

x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0)
نقول أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما x يؤول إلى x_0 إذا كان من أجل كل عدد حقيقي A ، المجال $]A,+\infty[$ يضم كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ونكتب عند ئذ:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

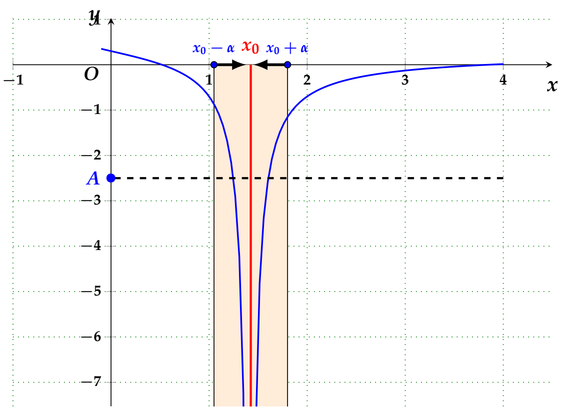


مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
عندما يقترب x من 0 بالقدر الكافي ، تأخذ $f(x)$ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد ، عندئذ يكون لدينا : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

تعريف

x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0)
نقول أن نهاية الدالة f هي $-\infty$ لما x يؤول إلى x_0 إذا كان من أجل كل عدد حقيقي A ، المجال $]-\infty,A[$ يضم كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ونكتب عند ئذ:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



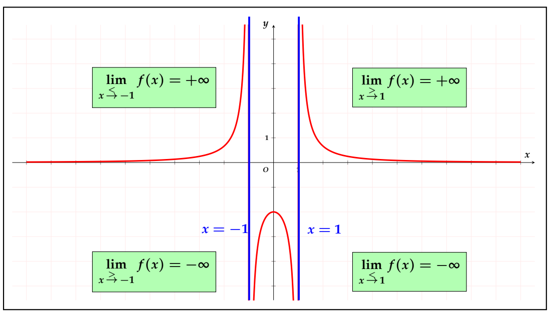
المستقيم المقارب العمودي

نتيـجة

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $x = a$
القول أنّ المستقيم (Δ) مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) يعني أن نهاية الدالة f عند a (من اليمين أو من اليسار) هي $+\infty$ أو $-\infty$

مثال

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني



لدينا:
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$
إذن لـ (C_f) مستقيمين مقاربين ذا المعادلتين $x = 1$ و $x = -1$

تقـويم

تطبيق :

1 بإستعمال التعريف أثبت أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x^2}=+\infty$

2 أحسب في كل حالة النهايات التالية و فسر النتيجة هندسيا

❶ $\lim\limits_{\substack{x \to 4\\ <}}\dfrac{2x-9}{x-4}$ ❷ $\lim\limits_{\substack{x \to 4\\ <}}\dfrac{2x-9}{(x-4)^2}$ ❸ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-9}{x^2-4}$ ❹ $\lim\limits_{\substack{x \to 3\\ <}}\dfrac{\sqrt{3-x}}{3-x}$

تمارين منزلية : تمرين 16 – 14 – 13 صفحة 27

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد — المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : مبرهنات أولية على النهايات

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية، العمليات على الدوال المشتقة
الكفاءات المستهدفة : عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيّن.
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		

ملاحظـــات

- يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف.
- إذاكانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x \mapsto sinx$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

بناء معارف

مبرهنات أولية على النهايات

f و g دالتان و α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و L ، L' أعداد حقيقية.

نهاية مجموع دالتين

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)]$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	$L \succ 0$	$L \succ 0$	$L \prec 0$	$L \prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)\times g(x)]$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	$L' \succ 0$	$L' \succ 0$	$L' \prec 0$	$L' \prec 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

مـلاحظة:

- تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : " عدم التعيين (ح ع ت)"
- توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $+\infty - \infty ; 0 \times \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}$

بنـــاء معارف

نهايات بعض الدوال الشهيرة

✍ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{1}{x}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0^+$

✍ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0^+$ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{a-x}}=+\infty$

✍ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ (لما n زوجي)

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ (لما n فردي)

إزالة حالات عدم التعيين

✍ لإزالة حالات عدم التعيين عند وجودها نتبع مايلي :

☜ بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة .

• أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}=3x^2-2x+3$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3+4x+6$

☜ بالنسبة لدوال ناطقة عندماx يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط و المقام .

• أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+x-x^2}{x^3-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2+2x}{x^3-+6}$

☜ بالنسبة لدوال الجذرية عندماx يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب و نقسم في المرافق .

• أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}-3x+2$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+2x-2$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+x-2$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

التقويم

☜ بالنسبة لحالات عدم التعيين عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك أو العدد المشتق

• أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{\sqrt{x}}$ 3) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{x^2-1}{x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\frac{x}{5}-1}$

تمارين منزلية : تمرين 24 − 19 − 18 صفحة 26

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد — المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 سـاعـة
الوحدة التعلمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : السلوك التقاربي لمنحنى دالة

المكتسبات القبليـة : دراسة الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة : تبرير ان مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب ، البحث عن مستقيم مقارب مائل .
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** التذكير بالمكتسبات القبلية. **نشاط مقترح** لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x-3+\frac{1}{x}$ وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-3$ ولتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و P نقطة من المستقيم (Δ) فاصلتها x 1 أحسب المسافة MP 2 أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$ 3 ارسم المنحنى (C_f) و (Δ) في نفس المعلم، ماذا تلاحظ.	
بنـــاء معـــارف	**خـــاصية** ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ حيث $a\neq 0$). القول ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$) **مـــثال** نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x)=2x+4+\frac{2}{x+2}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. وليكن في نفس المعلم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+4$. بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+4+\frac{2}{x+2}-(2x+4)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+4+\frac{2}{x+2}-(2x+4)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x+2}=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=2x+4$ مستقيم مقارب لمحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$	

التقويم

ملاحظة:

إذاكانت f دالة بحيث $f(x) = (ax+b)+g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$. (نفس الملاحظة عند $(-\infty)$).

تطبيق :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+4}{x-1}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

① احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

② عين الأعداد الحقيقية a , b و c بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

③ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

بنــاء معــارف

البحث عن المستقيم المقارب المائل

مبرهنة

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ حيث $(a \neq 0)$. يكون المستقيم (Δ) هو مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$ على الترتيب)،

إذا وفقط إذا تحقق مايلي: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-ax] = b$

(على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-ax] = b$)

الإثبــات :

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ حيث $(a \neq 0)$. نفرض ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

① نفرض ان (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$، ومنه حسب التعريف

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$$

نضع $g(x) = f(x)-(ax+b)$

ومنه $f(x) = g(x)+ax+b$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{g(x)+ax+b}{x} = \dfrac{1}{x}\times g(x)+a+\dfrac{b}{x}$

بماان : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\times g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a}$

لدينا من جهة ثانية $f(x)-ax = g(x)+b$ و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ فإن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-ax] = b}$

② نفرض ان $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-ax] = b$

من الواضح أن $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$ ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$

التقويم

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على : $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ وعند $-\infty$ يطلب تحديد معادلته.

الحل

مستقيم مقارب معادلته من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+3}{x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+3}{x+2} - x \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

إذ المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل

طريقة

f دالة عددية و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وليكن في نفس المعلم المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) ذو المعادلة $y = ax + b$. لمعرفة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل نقوم بحساب الفرق $f(x) - (ax + b)$ ثم ندرس إشارته بحيث:

- إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل
- إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل
- إذا كان $f(x) - (ax + b) = 0$ فإن (C_f) و المستقيم المقارب المائل يتقاطعان (حذاري فواصل نقط التقاطع يجب أن تكون في D_f)

ملاحظة: f و g دالتان معرفتان بجوار $\pm\infty$، نضع (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين لهما على الترتيب.

إذا كانت : $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ فإن المنحنيان (C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm\infty$.

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كمايلي : $f(x) = x + 1 + \frac{5}{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف .
2. أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$
3. أدرس وظعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ ، ثم إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.
2. بيّن أنّ: $[f(x) + 2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$
3. بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$ ، ثم إستنتج إشارة $[f(x) + 2x]$ وفسر النتائج بيانيا .
4. نقبل أنّ الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، أرسم (C_f) و مستقيمه المقارب المائل.

ملاحظات حول سير الدرس :

....

بنـــاء معـــارف

التقويم

البحث عن المستقيم المقارب المائل

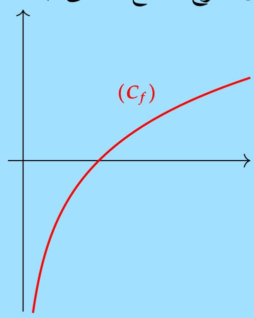
إذا كانت: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$

ثم نحسب $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

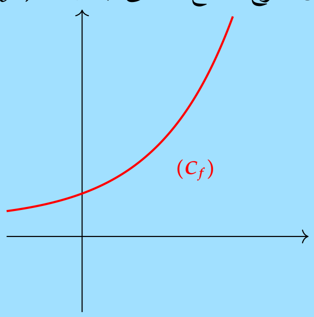
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه (xx')



$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه (yy')

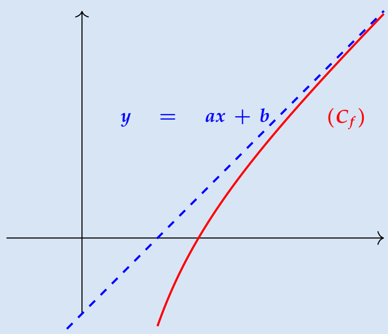


$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$
$(a \neq 0)$

ثم نحسب $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$

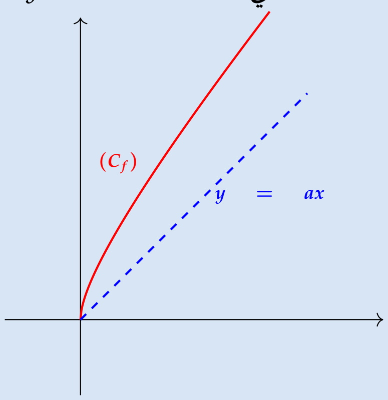
$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار ∞



$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$

(C_f) يقبل فرع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y = ax$



ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 2 سـاعة

الوحدة التعلمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : العمليات على النهايات

المكتسبات القبليـة : عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيّن.
الكفاءات المستهدفة : حساب النهايات بإستعمال المقارنة أو الحصر و مركب دالتين.
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأأنترنت.

المراحل	عناصر الـمدرس	المـدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** التذكير بالمكتسبات القبلية. تذكير بطرائق إزالة حالة عد التعين.	
بنـــاء معـــارف	## نهاية مركب دالتين **مبرهنــة** نعتبر f, v, u ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ ، ولتكن a ، b و c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ فإن: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$. **مــثال** أحسب النهايات التالية : ❶ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x-1}{x}}$ ❷ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2)^2$ ❸ $\lim\limits_{x \to 0} \cos(\pi - 2x)$ ## النهايات بالمقارنة **مبرهنــة** f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$. إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و $f(x) \geq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **مــثال** أثبت أنه من أجل كل عدد حيقيقي x أن : $x + \cos(x) \geq x - 1$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x)$ **مبرهنــة** f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$. إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ و $f(x) \leq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **مــثال** أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $-x - \cos(x) \leq 1 - x$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} -x - \cos(x)$	

التقويم

مبرهنــة

✍ f ، g و h دوال معرفة على D من $\mathbb{R}$ و ليكن a و ℓ عددان حقيقيان إما منتهيان أو $+\infty$ أو $-\infty$
إذا كان : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ حيث : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

مــثال

f دالة معرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x+\sin(x)}{2x+1}$

✍ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\frac{1}{2}$ فإن: $\dfrac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{2x+1}$

✍ إستنتج: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

تطبيق :

1 أحسب النهايات :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ ❷ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2 + x\cos(\frac{1}{x})\right)$ ❸ $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 3\sin(x)$ ❺ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

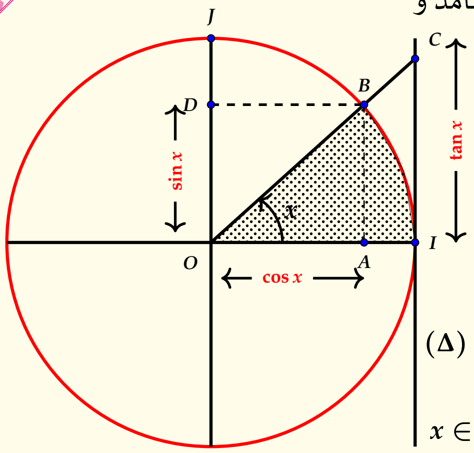
تطبيق :

في هذا الرسم، B نقطة من الدائرة المثلثية المرفقة بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، A و D المسقطان العموديان للنقطة B على محوري المعلم.
C نقطة تقاطع المستقيم (OB) مع المماس (Δ) للدائرة في النقطة $I(1;0)$
نعلم أن مساحة القرص هي : πr^2 ، إذن ماهي مساحة جزء من القرص زاويته x (الجزء المضلل)

$\begin{cases} 2\pi \to \pi r^2 \\ x \to S_x \end{cases}$ ومنه $S_x = \dfrac{x\pi r^2}{2\pi} = \dfrac{1}{2}xr^2$

نعلم أن $r = 1$ ومنه $S_x = \dfrac{x}{2}$

واضح من الشكل أن $S_{OAB} \leq S_x \leq S_{OCI}$ من أجل $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$



1 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

2 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$: $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

3 إستنتج : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(x)}{x}$

4 أثبت أن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)-1}{x} = 0$

5 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ أن : الدالة المشتقة للدالة $x :\to \cos(x)$ هي الدالة $x :\to -sin(x)$ و الدالة المشتقة للدالة $x :\to \sin(x)$ هي الدالة $x :\to \cos(x)$

التقويم

الحل

1 لدينا : $S_{OAB} = \dfrac{OA \times AB}{2} = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{2}$ ، $S_x = \dfrac{x}{2}$ ، $S_{OIC} = \dfrac{IC \times OI}{2} = \dfrac{\tan(x)}{2}$

إذن $S_{OAB} \leq S_x \leq S_{OCI}$ تكافئ $\dfrac{\sin(x)\cos(x)}{2} \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\tan(x)}{2}$ تكافئ $\sin(x)\cos(x) \leq x \leq \tan(x)$

تكافئ $\cos(x) \leq \dfrac{x}{\sin(x)} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$ تكافئ $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

2 من أجل $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$ فإن: $-x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\cos(-x) \leq \dfrac{\sin(-x)}{-x} \leq \dfrac{1}{\cos(-x)}$ تكافئ

$\cos(x) \leq \dfrac{-\sin(x)}{-x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$ أي $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

3 إستنتاج أن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

لدينا: $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) \leq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos(x)}$ تكافئ

$1 \leq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \leq 1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

4 إثبات أن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} \times \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{x} \times \frac{1}{\cos(x)+1} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x)+1} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{x} \times \frac{\sin(x)}{\cos(x)+1} \\
&= -1 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

5 إثبات أن مشتق الدالة $x :\to \cos(x)$ هي الدالة $x :\to -\sin(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\left(\cos(h)-1\right)-\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right] \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

- إثبات أن مشتق الدالة $x :\to \sin(x)$ هي الدالة $x :\to \cos(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\left(\cos(h)-1\right)+\cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right] \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

التقويم

النهايات المثلثية

❶ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ ❷ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(x)}{x}=1$ ❸ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ ❹ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\alpha x)}{\tan(\beta x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

❺ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$ ❻ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

تطبيق :

أحسب النهايات التالية :

❶ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)}{x}$ ❷ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x\cos(x)}$ ❸ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin(x)}{\tan(x)}$ ❹ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}$

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....