

سنة ثلاثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات

مسائل [22 مسألة]

في الدوال اللوغارitmية
lnx مرفقة بحلول مفصلة

المسائل:

فهرس المحتويات:

المسألة رقم 02 : المسألة الحل	المسألة رقم 01 : المسألة الحل
المسألة رقم 04 : المسألة الحل	المسألة رقم 03 : المسألة الحل
المسألة رقم 06 : المسألة الحل	المسألة رقم 05 : المسألة الحل
المسألة رقم 08 : المسألة الحل	المسألة رقم 07 : المسألة الحل
المسألة رقم 10 : المسألة الحل	المسألة رقم 09 : المسألة الحل
المسألة رقم 12 : المسألة الحل	المسألة رقم 11 : المسألة الحل
المسألة رقم 14 : المسألة الحل	المسألة رقم 13 : المسألة الحل
المسألة رقم 16 : المسألة الحل	المسألة رقم 15 : المسألة الحل
المسألة رقم 18 : المسألة الحل	المسألة رقم 17 : المسألة الحل
المسألة رقم 20 : المسألة الحل	المسألة رقم 19 : المسألة الحل
المسألة رقم 22 : المسألة الحل	المسألة رقم 21 : المسألة الحل

♥ بال توفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥



01

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $[-1, +\infty)$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

1 ادرس تغيرات الدالة g 2 احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1, +\infty)$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{J}; \vec{i})$

1

A احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياB احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 2 بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = y$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$ 3 ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) 4 بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[-1, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f 5 بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين إحداثياتها6 مثل بيانيا المنحنى (C_f)

02

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty)$ بـ:

$$g(x) = x \ln x - x - 1$$

1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2 بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً α في $[0; +\infty)$ حيث: $3.5 < \alpha < 3.6$

3 استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty)$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty)$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (\vec{J}, \vec{I})

1 احسب نهايات الدالة f ، ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسياً

2

أ/ بين أن إشارة $(x) f'$ من إشارة $(x) g$

ب/ استنتج تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3 اثبت أن $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$ ، ثم أعط حصراً $f(\alpha)$

4 اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5 مثل بيانياً كلاً من (T) و (C_f)

(III) نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة $y = mx + \frac{3}{2}$

1 بين أن المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة، يطلب تعين إحداثياتها

2 نقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = y_{(\Delta_m)}$$

(IV) لتكن الدالة h المعرفة على $[1; +\infty)$ كما يلي:

$$h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

1 تحقق أن $h(x) + 1 = f(x-1)$

2 استنتاج أن (C_f) هو صورة (C_h) بواسطة تحويل نقطي يطلب تعينه



03

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\{1; -\infty\} - \mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} + x & ; x \in \mathbb{R}_-^* - \{-1\} \\ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} & ; x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{j}; \vec{i}; 0)$.1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا.2 ادرس تغيرات الدالة f .

3

أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ - يطلب تعين معادلته.ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\{1; -\infty\} - \{-1\}$.4 حل المعادلة: $0 = f(x)$ في المجال $\{1; -\infty\} - \mathbb{R}_+^*$ ، ماذا تنسنح بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟5 بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $\left[-2; -\frac{3}{4}\right]$.6 مثل بيانيها (Δ) و المنحنى (C_f) .7 نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$f(x) = -(m^2 - e) \dots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد واشارة حلول المعادلة (E) .

04

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) دالة عدديّة معرفة على $[0; +\infty]$: بـ

$$g(x) = -x^2 - 2 + 2 \ln x$$

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

بـ/ علماً أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ، بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^n} \right) = 0$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3 احسب (1) g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty]$:

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty]$: بـ

$$f(x) = -x + 5 - 2 \frac{\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$

1

أ/ احسب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$

بـ/ ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2

أ/ برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 5$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

بـ/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f)

3

أ/ بيّن أن المعادلة $0 = f(x)$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $4.3 < \alpha < 4.4$

$$\ln \alpha = \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}$$

4 بيّن أنه يوجد مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ) ، ثم اكتب معادلة له

5 ارسم كل من (Δ) ، (T) و (C_f)

6 نقش بياني حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $(5 - m)x - 2 \ln x = 0$

05

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\{-1; 1\} \subset \mathbb{R}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	1	$\sqrt{3}$...
$f'(x)$...	0	0 +
$f(x)$		$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$				$+\infty$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتباين $(\vec{j}; \vec{i}; 0)$.

1) علماً أن الدالة f فردية:

أ) عين إشارة $(x)f'$ مع التبرير، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب) بين أن: $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$ وأن $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

ج) أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

2) نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.

• مثل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحنى (C_f) . نأخذ: $3 \approx f(\sqrt{3}) \approx 1.7$.

3) نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x) = ax + b + \ln\left(c + \frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: c, b, a أعداد حقيقة.

- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بين أن: $a = 1$ و $b = 0$ ، $a = 1$ و $b = 0$ ، $a = 1$ و $b = 0$.

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واثارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0 \dots (E)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $[1; +\infty)$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(f(x))$$

• ادرس تغيرات الدالة g

06

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ بـ:

$$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$$

1 احسب نهاية الدالة g عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.

2 ادرس تغيرات الدالة g على $[0; +\infty)$, ثم شكل جدول تغيراتها.

3

أ/ بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0; +\infty)$.

ب/ تحقق أن $0.46 < \alpha < 0.45$.

ج/ استنتج إشارة (x) g على $[0; +\infty)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty)$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{o}; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$, ثم فسر النتائج هندسياً.

2 ادرس اتجاه تغير الدالة f , ثم شكل جدول تغيراتها

3 بين أن $\alpha = \frac{1}{\alpha e^\alpha}$, ثم استنتج حسراً للعدد α

4 حل المعادلة $0 = f(x)$, ثم فسر النتيجة هندسياً

5 أنشئ المنحنى (C_f)

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $[0; +\infty)$ بـ:

$$h(x) = \frac{|3 + \ln x|}{e^x}$$

1 اكتب $(x) h$ دون رمز القيمة المطلقة

2 أنشئ (C_h) المنحنى الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق



07

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

2

- أ/ بيّن أن لكل x من المجال $[0; 1]$ $(x - 1) + \ln x \geq 0$ وأن لكل x من المجال $[1; +\infty)$ $(x - 1) + \ln x \leq 0$.
- ب/ بيّن أنه من أجل كل من المجال $[0; +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .3 ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $\frac{1}{2}x + y = 0$ والمنحنى (C_f) .4 عين احداثي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة المستقيم (T) .

5

أ/ بيّن أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty)$:

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين احداثييها.6 مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f) .7 نقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x) = x - 2m$$

08

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $[+∞; -1]$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$$

1 احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3

أ احسب $g(0)$.

ب/ بيّن أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 < \alpha < -0.71$.

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[+∞; -1]$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال: $D_f = [-1; 0] \cup [0; +∞]$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجلانس $(\vec{o}; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.

2

أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3 بيّن أن:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

ثم أعط حصر للعدد $f(\alpha)$ بالتدوير إلى 10^{-2} .

4 مثل بيانيا (C_f)

5 نقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد واتسارة حلول المعادلة (E) حيث: $m > 0$.

$$f(x) = \ln m \dots (E)$$

09

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[-1; +\infty)$ بـ:

$$g(x) = -1 + (x+1)e + 2 \ln(x+1)$$

1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $-0.34 < \alpha < -0.33$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $[-1; +\infty)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-1; +\infty)$ بـ:

$$f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\mathcal{J}, \mathcal{I}; O)$.

1

A بين أن $-\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين هندسياً.

B بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[-1; +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

C ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1; +\infty)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

D ارسم المحنى (C_f) . (نقبل أن $f(\alpha) \approx 3.16$).

2 نعتبر الدالة k المعرفة على $[-1; 1]$ بـ:

$$k(x) = f(-|x|)$$

(C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

A بين أن الدالة k زوجية.

B بين كيف يمكن استنتاج المحنى (C_k) انطلاقاً من المحنى (C_f) ، ثم ارسمه. (دون دراسة تغيرات الدالة k).

C نقاش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x) = m$.

10

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ بـ:

$$g(x) = \ln x + x - 3$$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 بين ان المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.21 < \alpha < 2.2$.

3 عين إشارة (g) على المجال $[0; +\infty)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{o}; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2

3 احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس اشارتها.

4 شكل جدول تغيرات الدالة f .

5 عين دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

6 بين أن:

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

حل في المجال $[0; +\infty)$ المعادلة $0 = f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

6 بأخذ: $f(\alpha) \cong -0.66$ ، مثل بيانيها (C_f) .

11

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $[0; +\infty)$ بـ:

$$g(x) = 2 \ln x - 1 - \frac{1}{x^2}$$

1) بيّن أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty)$.

2)

A) بيّن أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.89 < \alpha < 1.9$.

B) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $(g(x))$

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $[0; +\infty)$ بـ:

$$f(x) = -x - 2 + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (\vec{i}, \vec{j}) (وحدة الطول 2cm).

1)

A) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

B) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2)

A) بيّن أنه من أجل كل x من $[0; +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

B) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0; \frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right)$. ثم شكل جدول تغيرتها

3)

A) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)]$, ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

B) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4)

A) بيّن أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1

B) اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة A

5) ارسم (T) , (Δ) و (C_f) (نأخذ: $0.53 \approx \frac{1}{\alpha}$ و $0.73 \approx \frac{1}{\alpha^2}$).

(III) الدالة h معرفة على \mathbb{R}^* بـ:

$$h(x) = |x| + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{|x|}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) بيّن أن الدالة h زوجية.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty)$:

3) اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

12

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

- (I) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتباينس $(0; \bar{t}, \bar{j})$ نقطة من (C) فاصلتها m حيث m عدد حقيقي موجب تماماً A و (T_m) مماس لـ (C) في النقطة A

1

أ/ اثبت أن $y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$ معادلة المماس (T_m) .

ب/ تحقق أن المماس (T_e) للمنحنى (C) في النقطة $(e; 1)$ يمر بالنقطة 0 مبدأ المعلم لتكن الدالة g المعرفة على $[0; +\infty]$:

$$g(x) = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m - \ln x$$

ادرس تغيرات الدالة g , ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ استنتج إشارة (x)

3 استنتاج مما سبق أن (C) يقع تحت أي مماس له

(II)

1

أ/ استنتاج أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماماً m و x يكون:

$$\ln x \leq \ln m + \frac{x - m}{m}$$

ب/ استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً m يكون:

$$\ln(m + 1) - \ln m \leq \frac{1}{m}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty]$:

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

1

ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty]$.

ب/ استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً صحة المتباينة $\ln x \leq x - 1$.

2

أ/ اثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا: $\ln(t + 1) \leq t$

ب/ بوضع $x = \frac{1}{t+1}$, اثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا: $\frac{t}{1+t} \leq \ln(t + 1)$

ج/ استنتاج أنه من أجل $t > -1$ صحة المتباينة $\frac{t}{1+t} \leq \ln(t + 1) \leq t$

13

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ كما يلي:

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

3 استنتاج حسب قيم x إشارة (x) على المجال $[0; +\infty)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ كما يلي:

$$f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتتجانس $(\vec{o}; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 بين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ، ثم عين حسرا للعدد $f(\alpha)$.

4

A احسب $[f(x) + x]$ ، ثم استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعين معادلته.

B ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 اثبت أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يطلب تعينها.

6 مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) و (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين x_0 و x_1 حيث:

$$1.5 < x_1 < 1.6 \quad 0.1 < x_0 < 0.2$$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1; +\infty)$ كما يلي:

$$h(x) = -x + 1 + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1}$$

ونسمى (C_h) تمثيلها البياني في المستوى السابق

1

A بين أنه من أجل كل x من المجال D_h : $D_h = f(x + 1) + 2$:

B بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل -1 في جوار $+\infty$

2 بين أن المنحنى (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل بسيط يطلب تعينه، ثم أنشئه

3 وسيط حقيقي غير معروف، (T_m) مستقيم معادلته: $y = \ln(|m|)x + 1$

A برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعينها.

B نقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty]$ كما يلي:

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 حل المعادلة $g(x) = 0$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty]$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; 1] \cup [1; +\infty]$ كما يلي:

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 بين أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty] \setminus \{1\}$ يكون:

$$f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3 استنتاج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $[0; +\infty]$ كما يلي: $h(x) = (\ln x)^2 + 1$

ونسمى (C_h) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

1 ادرس تغيرات الدالة h .

2 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3 ادرس الوضع النسبي بين المحننلين (C_f) و (C_h) .

4 بين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف يُطلب احداثيتها.

5 اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

6 احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

7 مثل بيانيا في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

8 نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m(\ln x)^3 + e^m(\ln x) - \ln x - 2e^m = 0 \dots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

15

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$; $I =$

$$f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I , ثم شكل جدول تغيراتها.

3 عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازياً للمستقيم (d) ذي المعادلة $y =$

4

A أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = \ln(x + a) + b$$

حيث a و b عدوان حقيقيان يطلب تعبيئهما.

B استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقاً من (C) منحنى الدالة اللوغارitmية النسبية، ثم ارسم (C) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $x \mapsto g(x) = f(x) - x$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, ثم بين أن $-\infty =$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g على I , ثم شكل جدول تغيراتها.

3

A احسب $(1)g$, ثم بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلاً وحيداً α , ثم تحقق أن $3 < \alpha < 2$.

B ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق.

4 استنتاج إشارة $(x)g$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

5 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha; 1]$ فإن: $(x)g$ ينتمي إلى المجال $[\alpha; 1]$.

(III) نسمى (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي:

$$u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

1 عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

2 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

16

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty]$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{J}, \vec{I}; O)$.

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (C_f)$ مبين المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 عدد حقيقي موجب تماماً. ولتكن النقط A_m ذوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .

أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0; 0)$.

ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.

3 مثل بيانيا المستقيمات (T_m) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي:

$$g(x) = \frac{(\ln|x|)^2}{x}$$

1 بين أن الدالة g فردية.

2 بين أنه يمكن رسم (C_g) منحني الدالة g انطلاقاً من (C_f) ، ثم ارسمه.

(I) الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0; +\infty]$ بـ:

$$g(x) = -1 + x + 2 \ln x$$

1 ادرس اتجاه تغير الدالة.

2 احسب (1) , ثم استنتج إشارة $(g(x))$ حسب قيم x من المجال $[0; +\infty]$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty]$ بـ:

$$f(x) = \frac{-1 + (x - 2) \ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$

1

A احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

B احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2

A بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty]$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

B عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة: $\ln x \mapsto x$ على المجال $[0; +\infty]$.

A احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

B ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ) .

4 بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β , ثم تحقق أن:

$$2.9 < \beta < 0.5 < \alpha < 0.6$$

5 ارسم (Γ) ثم (C_f) .

18

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right)$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{i}, \vec{j}; o)$.

1

ا) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) بين أن:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$$

ج) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3

ا) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارب مائل (D) بجوار ∞ + يطلب تعريف معادلته.

ب) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحنى (C_f) .

4) بين أن ω نقطة تقاطع مقارب المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

5) اكتب معادلة لللمسانس (T) عند المبدأ.

6) مثل بيانياً كلام من (D) ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي حيث: $m > 0$.

ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x - \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m} \right) = 0 \dots (E)$$

(I) g الدالة العددية المعرفة والمتوالية تماما على $[0; +\infty]$ بـ:

$$g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$$

• احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty]$.

(II) f الدالة المعرفة على $[0; +\infty]$ بـ:

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المرتبط إلى المعلم المتعامد المتباينس $(j; i, l)$.

1

A / احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $+\infty$ = $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

B / بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty]$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج / استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 اكتب معادلة للمماس (T) منحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3

A / بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α

ب / تحقق أن $0.7 < \alpha < 0.8$.

4 (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة $1 \mapsto x \mapsto \ln(x+1)$ على المجال $[0; +\infty]$.

A / احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب / ادرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (Γ) .

ج / ارسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f) .

5 وسيط حقيقي، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ حلين متمايزين.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2

أ/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty)$.

ب/ تحقق من أن $1.32 < \alpha < 1.34$.

3 استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $f(x)$.

3 شكل جدول تغيرات الدالة f .

4 بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

5 استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $[0; +\infty)$.

(III) نسمى (C_h) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ بـ:

$$h(x) = \ln x$$

ولتكن النقطة A ذات الاحاديثيات $(2; 0)$. و M نقطة من المنحنى (C_h) فاصلتها x_m .

1 بين أن المسافة AM ثُطعى بـ:

$$AM = \sqrt{f(x)}$$

2 نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $[0; +\infty)$ بـ:

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

أ/ برهن أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $[0; +\infty)$.

ب/ برهن أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) ، يُطلب تعين احداثياتها.

$$AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

3 هل المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (C_h) في النقطة B ؟ برو احابتك.

21

المأسأة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1; 0]$ بـ: $g(x) = 2 - x + \ln x$

1

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[1; 0]$.

ب/ بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث: $0.15 < \alpha < 0.16$.

2 استنتاج حسب قيم x إشارة (x) على المجال $[0; 1]$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[1; +\infty)$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - 2x + \ln x}{x - 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{J}; \vec{I}; \vec{O})$

1 احسب $f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$) ثم فسر النتيجتين بيانيا

2

أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x - 1)^2}$$

ب/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على $\left[1; \frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x$.

4 ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) ، (يُعطى $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx -1.8$).

5 عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $m = |f(x)|$ حلين متمايزين.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث: $D =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أن الدالة f فردية، ثم فسر ذلك بيانيا.

2) احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب.

3)

أ) بين أنه من أجل كل x من D :

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $0 = f(x)$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

4) بين أن المستقيم (Δ) ذات المعادلة $x = \frac{2}{3}y$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة له (Δ) .

5) انشء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6) وسيط حقيقي، ناقش بيانيًا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$(2 - 3|m|)x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

الحلول (المقترحة) :

فهرس المحتويات:

المسألة رقم 02 : المسألة الحل	المسألة رقم 01 : المسألة الحل
المسألة رقم 04 : المسألة الحل	المسألة رقم 03 : المسألة الحل
المسألة رقم 06 : المسألة الحل	المسألة رقم 05 : المسألة الحل
المسألة رقم 08 : المسألة الحل	المسألة رقم 07 : المسألة الحل
المسألة رقم 10 : المسألة الحل	المسألة رقم 09 : المسألة الحل
المسألة رقم 12 : المسألة الحل	المسألة رقم 11 : المسألة الحل
المسألة رقم 14 : المسألة الحل	المسألة رقم 13 : المسألة الحل
المسألة رقم 16 : المسألة الحل	المسألة رقم 15 : المسألة الحل
المسألة رقم 18 : المسألة الحل	المسألة رقم 17 : المسألة الحل
المسألة رقم 20 : المسألة الحل	المسألة رقم 19 : المسألة الحل
المسألة رقم 22 : المسألة الحل	المسألة رقم 21 : المسألة الحل

♥ بال توفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

٥ تبيين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \\
 &= \frac{\left(2x + 2 + \frac{1}{x+1}\right)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{\left(2(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)(x+1) - 2(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^3} \\
 &= \frac{2(x+1)^2 + 1 - 2x^2 + 4x + 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \\
 &= \frac{3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3}
 \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$\begin{aligned}
 3 - 2\ln(x+1) &= 0 \Rightarrow 2\ln(x+1) = 3 \\
 \Rightarrow \ln(x+1) &= \frac{3}{2} \\
 \Rightarrow x+1 &= e^{\frac{3}{2}} \\
 \Rightarrow x &= e^{\frac{3}{2}} - 1
 \end{aligned}$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير اشارتها، ومنه (C_f) يقبل نقطة

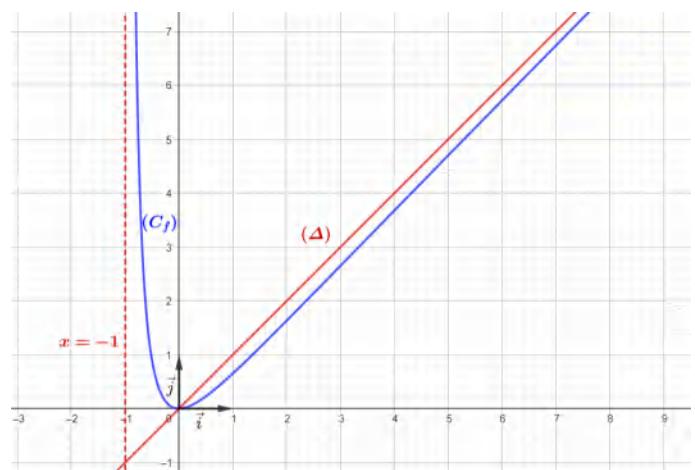
$$\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

٦ التمثيل البياني:

نرسم المستقيم المقارب العمودي :

نرسم المماس (T)

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



02

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

(١) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معدلته 0 $x = 0$ (١)

٢

أ/ تبيين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(f'(x))$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= -\frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x-1+x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f :

لدينا: $0 < x < +\infty$ على المجال

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(f'(x))$

جدول التغيرات:

x	٠	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	٠	+
$f(x)$	٠	$f(\alpha)$	١

٣ اثبات أن $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \ln \alpha - \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \ln \alpha = \alpha + 1$$

$$\Rightarrow \ln \alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1} \\ &= 1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 1} \\ &= 1 - \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

استنتاج حصراً $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$

١ دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\ln x - 1 - \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{x \ln x}_0 - x - 1 \right] = -1$$

- المشقة:

$$g'(x) = \ln x + \frac{1}{x} x - 1 = \ln x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول التغيرات:

x	٠	١	$+\infty$
$g'(x)$	-	٠	+
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

٢ تبيين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً:

لدينا الدالة مستمرة ورتيبة على المجال $[3.5; 3.6]$

ولدينا: $g(3.5) < 0 < g(3.6)$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = g(x)$

تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[3.5; 3.6]$

٣ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty]$:

x	٠	α	$+\infty$
$g(x)$	-	٠	+

٤

١ حساب نهايات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\frac{0}{\ln x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1$$

ومنه (١) يقبل مستقيم مقارب أفقى بجوار $+\infty$ معدلته

$y = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

المعادلة لا تقبل حلول	$m < -\frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلاً وحيداً	$m = -\frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلين	$-\frac{1}{2} < m < 0$	لما
المعادلة تقبل حلاً وحيداً	$m \geq 0$	لما

(IV)

1 التحقق أنّ $h(x) + 1 = f(x - 1)$

$$h(x) + 1 = 1 - \frac{\ln(x-1)}{x} = f(x-1)$$

2 استنتاج أن (C_f) هو صورة (C_h) :لدينا: $h(x) + 1 = f(x - 1)$ ومنه: $h(x) = f(x - 1) - 1$ إذن: (C_f) هو صورة (C_h) بانسحاب شعاعه \vec{u} حيث:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

لدينا: $3.5 < \alpha < 3.6$

$$\frac{1}{3.6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3.5}$$

$$-\frac{1}{3.5} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{3.6}$$

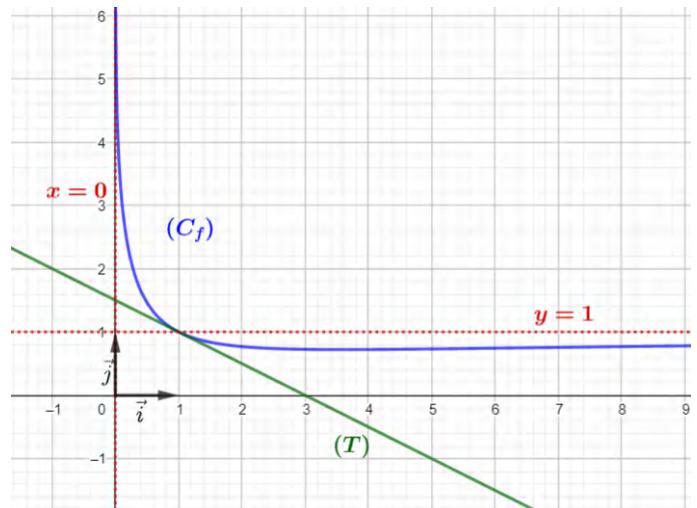
$$1 - \frac{1}{3.5} < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1 - \frac{1}{3.6}$$

$$0.71 < f(\alpha) < 0.72$$

إذن: 4 كتابة معادلة المماس (T):

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= -\frac{1}{2}(x-1) + 1 \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

5 التمثيل البياني:



(III)

3 تبيين أن المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة:

لدينا:

$$y_m = mx + \frac{3}{2}$$

$$y_0 = \frac{3}{2} \quad \text{نجد:} \quad m = 0 \quad \text{نأخذ}$$

إذن المستقيمات (Δ_m) تمر من الترتيبة $\frac{3}{2}$

$$y_1 = x + \frac{3}{2} \quad \text{نجد:} \quad m = 1 \quad \text{نأخذ}$$

لدينا:

$$y_1 = y_3 \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0$$

إذن المستقيمات (Δ_m) تمر من الفاصلة 0ومنه المستقيمات (Δ_m) تمر بنقطة ثابتة $A(0; \frac{3}{2})$ 4 المناقشة البيانية لحلول المعادلة: $f(x) = y_{(\Delta_m)}$

03

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] = 0$
 - التفسير الهندسي:
 - يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = -1$ بجوار $\pm\infty$
 - يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = 1$ بجوار $-\infty$
 - يقبل مستقيم مقارب أفقي $y = 0$ بجوار $+\infty$

- حساب $f'(x)$
لما: $x \in \mathbb{R}_+^* - \{-1\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2} + 1 \\ &= \frac{-1}{x(\ln(-x))^2} + 1 \end{aligned}$$

لاحظ أن $0 < x$ ومنه: $f'(x) > 0$

اذن:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	+		+

لما: $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right) - \left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right) \\ &= -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{1}{x(\ln x)^4} \\ &= \frac{-\ln x + 1}{x(\ln x)^3} \\ &= \frac{-\ln x + 1}{[x(\ln x)^2] \ln x} \end{aligned}$$

لدينا: $0 < x$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $\frac{-\ln x + 1}{\ln x}$

لدينا:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} -\ln x + 1 = 0 &\Rightarrow \ln x = 1 \\ &\Rightarrow x = e \end{aligned}$$

x	0	1	e	$+\infty$
$-\ln x + 1$	+	+	0	-
$\ln x$	-	+	+	
$f'(x)$	-	+	0	-

جدول التغيرات:

1 دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في 0 : $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\ln|x|} + x - 0}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \ln|x|} + \frac{x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \ln(-x)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{-x \ln(-x)} + 1 \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} [-x \ln(-x)] = 0^+$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليسار

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} - 0}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{2x(\ln x)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \ln x} \left(1 - \frac{1}{2 \ln x} \right) \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليمين

- التفسير الهندسي:

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنه (C_f) يقبل

مماس عمودي معادلته $x = 0$

2 دراسة تغيرات الدالة f :

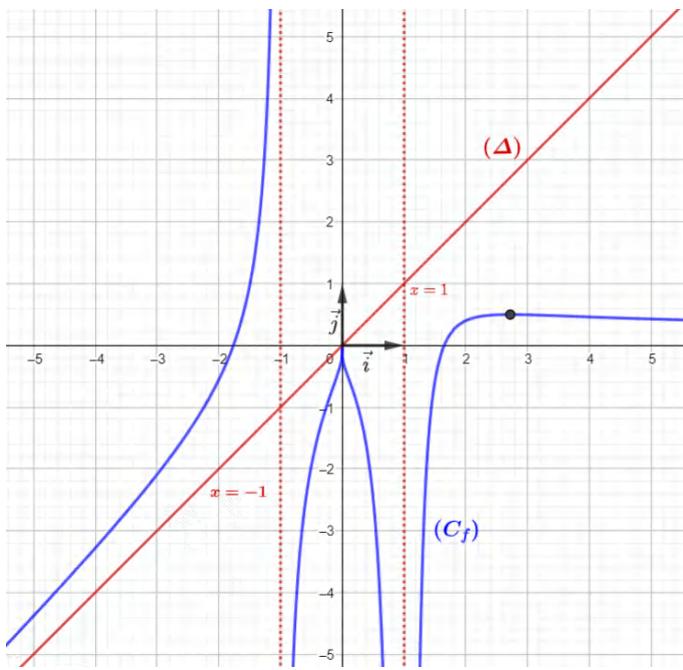
- حساب النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] = -\infty$

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعمد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = 0$ و $x = 1$ و $x = -1$.
- نعين نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ).
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f).



7 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع

$$y_m = -(m^2 - e) \quad \text{المستقيمات ذات المعادلة}$$

$$-(m^2 - e) < 0 \quad \text{لما}$$

$$m^2 - e > 0 \quad \text{أي لما}$$

$$m^2 > e \quad \text{أي لما}$$

$$|m| > \sqrt{e} \quad \text{أي لما}$$

$$m \in]-\infty; -\sqrt{e}] \cup [\sqrt{e}; +\infty[\quad \text{أي لما}$$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.

$$-(m^2 - e) = 0 \quad \text{لما}$$

$$m^2 - e = 0 \quad \text{أي لما}$$

$$m^2 = e \quad \text{أي لما}$$

$$|m| = \sqrt{e} \quad \text{أي لما}$$

$$m \in \{-\sqrt{e}; \sqrt{e}\} \quad \text{أي لما}$$

المعادلة تقبل حل موجب وحل معادوم وحل سالب.

$$0 < -(m^2 - e) < \frac{1}{2} \quad \text{لما}$$

$$-\frac{1}{2} < m^2 - e < 0 \quad \text{أي لما}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	0

3

أ/ تبيين أن (C_f) يقبل (Δ) كمقارب مائل بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{1}{\ln(-x)} - x \right] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) على المجال

$$: \mathbb{R}_-^* - \{-1\}$$

ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y = \frac{1}{\ln(-x)}$$

لدينا:

$$\ln(-x) = 0 \Rightarrow -x = e^0$$

$$\Rightarrow -x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1	0
$f(x) - y$	+		-

. $x \in]-\infty; -1[$ (لما) فوق (C_f) •

. $x \in]-1; 0[$ (لما) تحت (C_f) •

4 حل المعادلة: $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ في المجال $f(x) = 0$

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x - 1}{2(\ln x)^2} = 0$$

لدينا: $2(\ln x)^2 > 0$ ومنه:

$$2 \ln x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{e}$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة \sqrt{e}

5 تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال

$$]-1.77; -1.76[$$

ولدينا: $f(-1.76) = 0.008$ و $f(-1.77) = -0.01$

$$\text{أي: } f(-1.77) < f(-1.76) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبلا حلا وحيدا في المجال $]-1.77; -1.76[$

$$m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}, \sqrt{e - \frac{1}{2}} \right[\quad \text{أي لما:}$$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب

$$\begin{aligned} e - \frac{1}{2} &< m^2 < e && \text{أي لما} \\ \sqrt{e - \frac{1}{2}} &< |m| < \sqrt{e} && \text{أي لما} \\ |m| &> \sqrt{e - \frac{1}{2}} \text{ و } |m| &< \sqrt{e} & \text{أي لما} \\ -\sqrt{e} &< m < \sqrt{e} && \text{أي لما} \\ m \in \left] -\infty; -\sqrt{e - \frac{1}{2}} \right[\cup \left] \sqrt{e - \frac{1}{2}}; +\infty \right[&& \text{أي لما:} \\ m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}, -\sqrt{e} \right[\cup \left] \sqrt{e}; \sqrt{e + \frac{1}{2}} \right[&& \text{أي لما:} \end{aligned}$$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

$$\begin{aligned} -(m^2 - e) &= \frac{1}{2} && \bullet \text{ لما:} \\ m^2 - e &= -\frac{1}{2} && \text{أي لما:} \\ |m| &= \sqrt{e - \frac{1}{2}} \quad \text{أي } m^2 = e - \frac{1}{2} && \text{أي لما:} \\ m &= -\sqrt{e - \frac{1}{2}} \text{ و } m = \sqrt{e - \frac{1}{2}} && \text{أي لما:} \end{aligned}$$

المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب

$$\begin{aligned} -(m^2 - e) &> \frac{1}{2} && \bullet \text{ لما:} \\ m^2 - e &< -\frac{1}{2} && \text{أي لما:} \\ m^2 &< e - \frac{1}{2} && \text{أي لما:} \\ |m| &< \sqrt{e - \frac{1}{2}} && \text{أي لما:} \\ -\sqrt{e - \frac{1}{2}} &< m < \sqrt{e - \frac{1}{2}} && \text{أي لما:} \end{aligned}$$

04

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - 2 \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$+\infty$	$\rightarrow \infty$

2

أ/ برهان أن (Δ) مقايرب مائل $L(C_f)$ بجوار $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 5] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 \frac{\ln x}{x} \right] = 0$$

لأن (Δ) مقايرب مائل $L(C_f)$ بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-2 \ln x}{x}$$

لدينا: $x > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$\begin{aligned} -2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \\ \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	0	—

$x \in]0; 1[$ فوقي (C_f) •

$A(1; 4)$ يقطع (Δ) لما $x = 1$ أي في النقطة (4) •

$x \in]1; +\infty[$ تحت (Δ) لما $x > 1$ •

3

أ/ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حالاً وحيداً

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $[4.3; 4.4]$

ولدينا: $f(4.3) \times f(4.4) < 0$

لأن: $f(4.4) \approx -0.07$ و $f(4.3) \approx 0.02$

• $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ (1)

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

ب/ تبيين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{2}{x^2} + 2 \frac{\ln x}{x^2} \right) \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة: g

لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x + \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2x^2 + 2}{x} \\ &= \frac{2(1 - x^2)}{x} \end{aligned}$$

لدينا: $x \in D_g$ إذن الإشارة من البسط

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

مرفوض لأن $x = -1$ خارج المجال D_g إذن:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	—
$g(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$

3 حساب (1), ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty[$

$$g(1) = -3$$

لدينا الدالة g تبلغ قيمة حدية عظيمة عند $(1; -3)$

إذن الدالة g سالبة تماماً على \mathbb{R}_+^*

II

1

أ/ حساب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x + 5 - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

6 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 (5-m)x - 2 \ln x = 0 &\Rightarrow -2 \ln x = -(5-m)x \\
 \Rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} &= -(5-m) \\
 \Rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} &= -5 + m \\
 \Rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} + 5 &= m \\
 \Rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} - x + 5 &= -x + m \\
 \Rightarrow f(x) &= -x + m
 \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

$$y_m = -x + m$$

• المعادلة لا تقبل حلول $m < 5 - 2e^{-1}$ لما

• المعادلة تقبل حل وحيد $m = 5 - 2e^{-1}$ لما

• المعادلة تقبل حلين $e < m < 5$ لما

• المعادلة تقبل حل وحيد $m \geq 5$ لما

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = f(x)$

تقبل حلاً وحيداً α حيث: $4.3 < \alpha < 4.4$

ب) تبرير أن $\ln \alpha = \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}$

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) = 0 &\Rightarrow -\alpha + 5 - 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0 \\
 \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} &= -\frac{\alpha - 5}{2} \\
 \Rightarrow \ln \alpha &= \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

4 تبيين أنه يوجد مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ) :

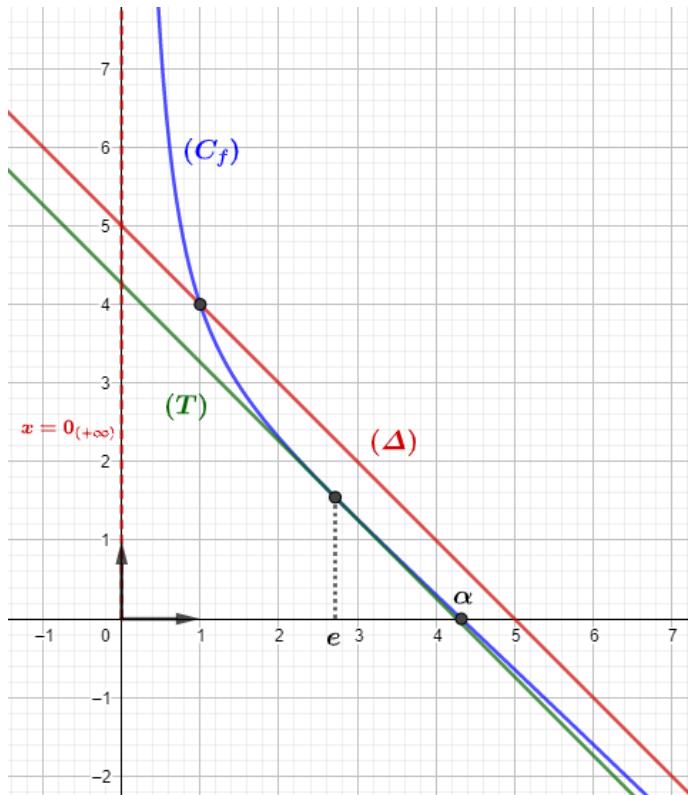
$f'(a) = -1$ يوجد مماس يوازي (Δ) معناه:

$$\begin{aligned}
 f'(a) = -1 &\Rightarrow \frac{-a^2 - 2 + 2 \ln a}{a^2} = -1 \\
 \Rightarrow -a^2 - 2 + 2 \ln a &= -a^2 \\
 \Rightarrow -2 + 2 \ln a &= 0 \\
 \Rightarrow \ln a &= 1 \\
 \Rightarrow a &= e
 \end{aligned}$$

- كتابة معادلة لـ (T)

$$\begin{aligned}
 y_{(T)} &= f'(e)(x - e) + f(e) \\
 &= -1(x - e) - e + 5 - \frac{2}{e} \\
 &= -x + 5 - 2e^{-1}
 \end{aligned}$$

5 ارسم كل من (Δ) ، (T) و (C_f)



05

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(-t)] \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-f(t)] \\
 &= -\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty}} [f(t)] \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

تبين أن: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} [f(x)] = +\infty$ -
بنفس الفكرة السابقة (نضع $-t = x$) نجد:

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} [f(x)] = +\infty$ -
 $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$ -
لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(-\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\
 f(-\sqrt{3}) &= -f(\sqrt{3}) \\
 \Rightarrow -f(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\
 \Rightarrow f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

ج) اكمال جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		-0	+
$f(x)$	$f(-\sqrt{3})$	$-\infty$	$-\infty$	$f(1)$	$+\infty$	$+\infty$

حيث:

$$\begin{aligned}
 f(-\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\
 f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

2 التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة لدينا:

$x = -1$ يقبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ - معادلته (C_f) •
 $x = 1$ يقبل مقارب عمودي بجوار $+\infty$ + معادلته (C_f) •

1

أ) تعين إشارة $f'(x)$ مع التبرير:
نضع γ, β, α حيث:

x	$-\infty$	α	β	1	$\sqrt{3}$	γ
$f'(x)$...	0	-		0	+

لدينا الدالة f فردية ، معناه:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$
لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$x \in]\alpha; \beta[$ لما $f'(x) < 0$ \Leftarrow

$-x \in]\alpha; \beta[$ لما $\underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0$ \Leftarrow

$x \in]-\beta; -\alpha[$ لما $f'(x) < 0$ \Leftarrow

ولدينا كذلك:

$x \in]\sqrt{3}; \gamma[$ لما $f'(x) > 0$

$-x \in]\sqrt{3}; \gamma[$ لما $\underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0$ \Leftarrow

$x \in]-\gamma; -\sqrt{3}[$ لما $f'(x) > 0$ \Leftarrow

$x = \sqrt{3}$ لما $f'(x) = 0$ ولدينا:

$-x = \sqrt{3}$ لما $f'(-x) = 0$ معناه

$x = -\sqrt{3}$ ومنه

$\gamma = +\infty$ و $\beta = -1$ و $\alpha = -\sqrt{3}$ منه:
اذن:

$x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$ لما $f'(x) > 0$

$x \in]-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}[$ لما $f'(x) < 0$

ب) تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$ -

لدينا من الجدول السابق: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$ +

نضع $x = -t$

(الدالة f فردية أي: $f(-t) = -f(t)$)

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{-t \rightarrow -\infty} [f(-t)]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} + \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0 \\
& \Rightarrow c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) = c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1) \\
& \Rightarrow c(4+2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} - 2 = c(4-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2 \\
& \Rightarrow c(4+2\sqrt{3}) - c(4-2\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} = 0 \\
& \Rightarrow c(4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \\
& \Rightarrow \boxed{c = 1}
\end{aligned}$$

نوعص قيمة c في (*) نجد:

$$\begin{aligned}
& a - \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \\
& \Rightarrow a = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} \\
& \Rightarrow \frac{2}{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2} \\
& \Rightarrow a = \frac{2}{4-2} \\
& \Rightarrow \boxed{a = 1}
\end{aligned}$$

ولدينا:

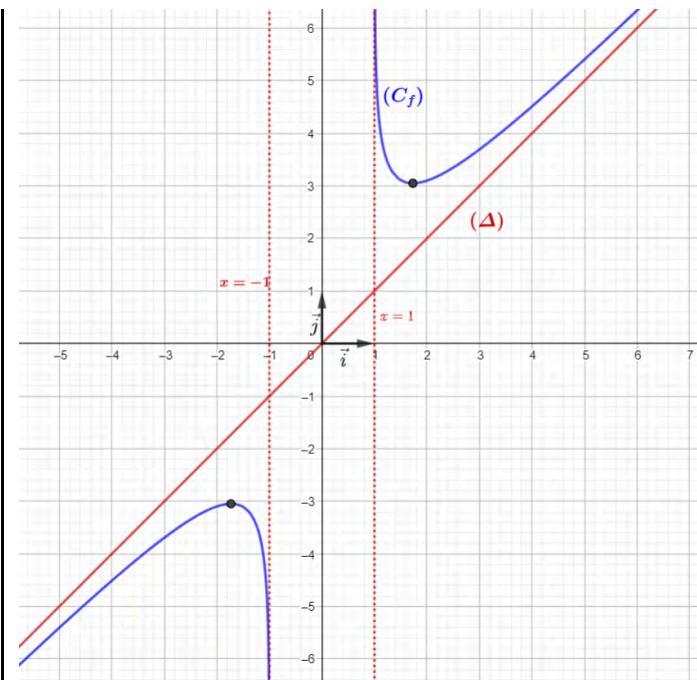
$$\begin{aligned}
f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) \\
&\Rightarrow \sqrt{3} + b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) \\
&\Rightarrow b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \ln(2 + \sqrt{3}) \\
&\Rightarrow b = \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$$



٣) تبيين أن $c = 1$ و $b = 1$ ، $a = 1$ لدينا:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a + \frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{c + \frac{2}{x-1}} \\
&= a - \frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{c(x-1)+2}{x-1}} \\
&= a - \frac{\frac{2}{x-1}}{c(x-1)+2} \\
&= a - \frac{2}{c(x-1)^2 + 2(x-1)}
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3}) = 0 \\ f'(-\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \\ a - \frac{2}{c(-\sqrt{3}-1)^2 + 2(-\sqrt{3}-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \dots (*) \\ a - \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0 \dots (**) \end{cases}$$

بطرح (*) من (**) نجد:

أي لـما: $m \in]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})[$
المعادلة لا تقبل حلول

لـما: $m = f(\sqrt{3})$ • للـمعادلة حل مضاعف هو

لـما: $x = \sqrt{3}$ للـمعادلة حل مضاعف هو

لـما: $m > f(\sqrt{3})$ • للـمعادلة حل مضاعف هو

أي لـما: $m \in]f(\sqrt{3}); +\infty[$ للـمعادلة حلان موجبان

دراسة تغيرات الدالة: g : (II)

$g(x) = \ln(f(x))$ لدينا:

$g(x) = k \circ f = k(f(x))$ نلاحظ أن:

$k(x) = \ln x$ حيث:

حساب النهايات: -

$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = +\infty$ لدينا:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$ و

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} [g(x)] = +\infty$ اذن:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$ ولـدينا:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$ و

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} [g(x)] = +\infty$ اذن:

دراسة $g'(x)$ -

$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

لـدينا: $x \in]1; +\infty[$ لـما $f(x) > 0$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

جدول تغيرات الدالة g -

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\sqrt{3})$	$+\infty$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

4 المناقشة البيانية:

لـدينا:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{xe^m - xe^x - e^m - e^x}{e^m - e^x} = 0$$

$$\Rightarrow xe^m - xe^x - e^m - e^x = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x - 1) - e^x(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x - 1) = e^x(x + 1)$$

$$\Rightarrow e^m = e^x \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

$$\Rightarrow m = \ln\left[e^x \times \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow m = \ln(e^x) + \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(\frac{x + 1 + 1 - 1}{x - 1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x - 1}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى

(C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$

ومنه:

لـما: $m < f(-\sqrt{3})$

أي لـما: $m \in]-\infty; f(-\sqrt{3})[$

للـمعادلة حلان سالبان

لـما: $m = f(-\sqrt{3})$

للـمعادلة حل مضاعف هو

$x = -\sqrt{3}$ لـما: $f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$ بجوار $-\infty$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة f , ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(3 + \ln x) + \frac{1}{x}e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right) \\ &= g(x)e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا: $0 < e^{-x}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

3 تبيين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^\alpha}$

لدينا: $g(\alpha) = 0$

ومنه: $-3 - \ln \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$

إذن: $\ln \alpha = -3 + \frac{1}{\alpha}$ ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= e^{-\alpha}(3 + \ln \alpha) \\ &= e^{-\alpha}\left(3 - 3 + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= e^{-\alpha} \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha e^\alpha} \end{aligned}$$

استنتاج حصراً للعدد $f(\alpha)$ -

لدينا: $0.45 < \alpha < 0.46$

ومنه: $1.57 < e^\alpha < 1.58$

ومنه: $0.63 < \frac{1}{e^\alpha} < 0.64 \dots (*)$

لدينا: $0.45 < \alpha < 0.46$

ومنه: $2.17 < \frac{1}{\alpha} < 2.22 \dots (**)$

بضرب (*) في (**) نجد:

$$1.38 < \frac{1}{\alpha e^\alpha} < 1.42$$

4 حل المعادلة $f(x) = 0$, وتفسير النتيجة هندسيا:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow e^{-x}(3 + \ln x) = 0 \\ &\Rightarrow 3 + \ln x = 0 \\ &\Rightarrow \ln x = -3 \\ &\Rightarrow x = e^{-3} \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة e^{-3}

1 حساب نهاية الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \end{cases} \text{ لأن:}$$

2 دراسة تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا: $g'(x) < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow -\infty$

3

أ/ تبيين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$:

الدالة g مستمرة ورتيبة على $+\infty; 0]$, وصورة هذا المجال

هي $[-\infty; +\infty]$, ومنه فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$

ب/ التتحقق أن $0.45 < \alpha < 0.46$

لدينا: $g(0.45) = 0.02$ و $g(0.46) = -0.05$

أي $g(0.45) \times g(0.46) < 0$

إذن $0.45 < \alpha < 0.46$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

II

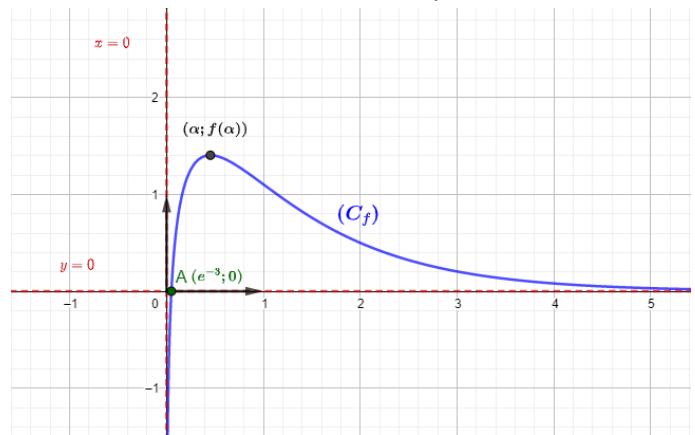
1 حساب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$, وتفسير النتائج هندسيا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

التفسير الهندسي:

٥ إنشاء المحنى (C_f) :



(III)

١ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

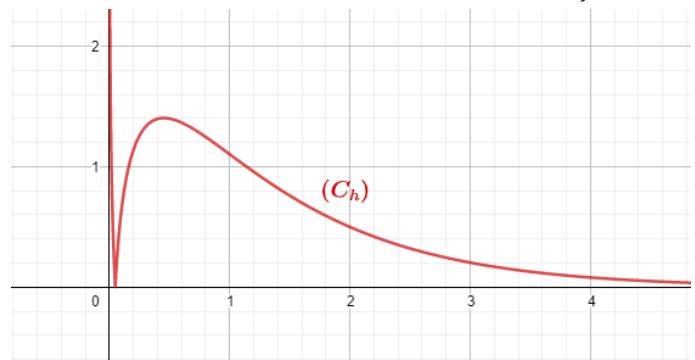
$$h(x) = \frac{|3 + \ln x|}{e^x}$$

$$= \begin{cases} \frac{3 + \ln x}{e^x} ; & x \geq e^{-3} \\ \frac{-(3 + \ln x)}{e^x} ; & x < e^{-3} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x) ; & x \geq e^{-3} \\ -f(x) ; & x < e^{-3} \end{cases}$$

٢ إنشاء (C_h) المحنى الممثل للدالة h :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq e^{-3}$
ويناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما $x < e^{-3}$



07

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

5 دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $y = f(x) - y$

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln x \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \frac{1}{2} \ln x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

ومنه:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$\frac{1}{2} \ln x - 1$	-	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	0

$x \in [0; 1] \cup [e^2; +\infty]$ لما: 6 فوق (C_f)

$A \left(1; \frac{3}{2} \right)$ يقطع (D) في نقطتين:

$$B \left(e^2; e^2 + \frac{1}{2} \right)$$

$x \in [1; e^2]$ لما: 7 تحت (C_f)

6 تعين احداثي النقطة ω :

المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$\begin{aligned} f'(a) = 1 &\Rightarrow \frac{a - 1 + \ln a}{a} = 1 \\ &\Rightarrow a - 1 + \ln a = a \\ &\Rightarrow \ln a = 1 \\ &\Rightarrow a = e \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(e)(x - e) + f(e) \\ &= x - e + e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة $\omega(e; e)$

3

أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{-\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{-\infty} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادله $x = 0$.

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x}_{+\infty} + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{+\infty} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

4

أ) التبيين:

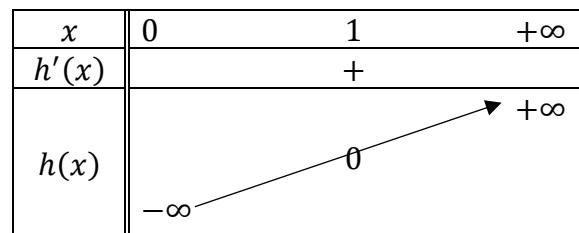
نضع: الدالة h المعرفة على $[0; +\infty)$ بـ:

$$h(x) = x - 1 + \ln x$$

لدينا:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

لدينا: $h(1) = 0$ ولدينا: $h'(x) > 0$ ومنه:



من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $[1; +\infty)$

$$(x - 1) + \ln x \leq 0$$

وأنّ لكل x من المجال $[1; +\infty)$

ب) تبيين أنه من أجل كل من $[0; +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \ln x \\ &= \frac{x-1+\ln x}{x} \end{aligned}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة

$$h(x)$$

9 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = x - 2m$

ومنه:

$m > 0$	$-2m < 0$ أي لما
	المعادلة لا تقبل حلول
$m = 0$	$-2m = 0$ أي لما
	المعادلة تقبل حل مضاعف
$-\frac{1}{4} < m < 0$	$0 < -2m < \frac{1}{2}$ أي لما
	المعادلة تقبل حلان
$m = -\frac{1}{4}$	$-2m = \frac{1}{2}$ أي لما
	المعادلة تقبل حلان أحدهما مضاعف
$m < -\frac{1}{4}$	$-2m > \frac{1}{2}$ أي
	المعادلة تقبل حلان

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty)$:

$$f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x - 1 + \ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف:
لدينا: $0 < x^2$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشاراتنا

$$2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2$$

$$\Rightarrow x = e^2$$

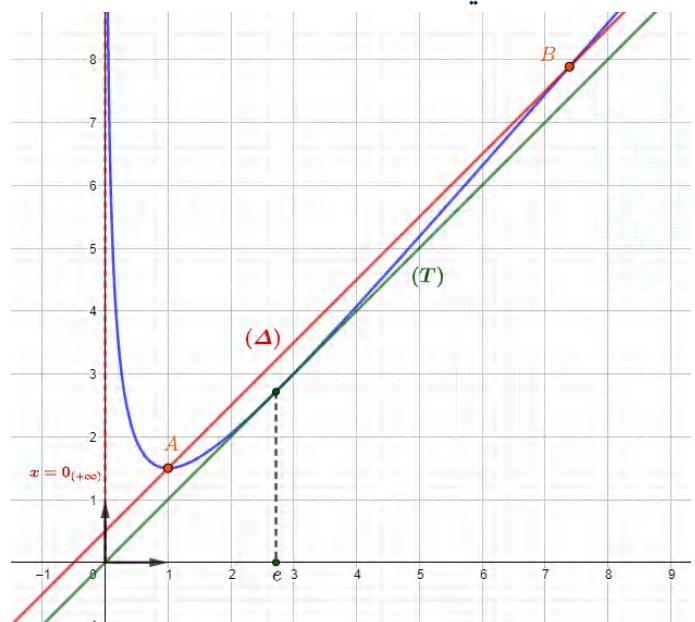
ومنه:

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

لدينا (x) $f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها، ومنه (C_f) يقبل نقطة

$$\text{انعطاف } B \left(e^2; e^2 + \frac{1}{2} \right)$$

8 التمثيل البياني:



08

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = g(x)$

تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[-0.72; -0.71]$

ج) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[1; +\infty)$

x	-1	α	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \right] = 1$$

نهاية شهيرة ويمكن اثباتها بالعدد المشتق

$$\text{نـصـعـ: } k(x) = \ln(x+1)$$

$$k'(x) = \frac{1}{x+1}$$

وـمـنـهـ:

لـدـيـنـاـ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1) - 0}{x - 0} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} \right] = k'(0) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيمة مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

(C_f) يقبل مستقيمة مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 0$

(C_f) يقبل مستقيمة مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

أ) تبيـنـ أـنـ مـنـ أـجـلـ كـلـ x مـنـ D_f :

1) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -1} [g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x}{x+1} \right] = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

لـأـنـ:

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- دراسة $g'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2 \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1-2x-2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

لـدـيـنـاـ: $(x+1)^2 > 0$ وـمـنـهـ إـشـارـةـ $(x+1)^2$ منـ إـشـارـةـ g' منـ إـشـارـةـ g

$$-(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

وـمـنـهـ:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$

3)

أ) حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

ب) تبيـنـ أـنـ المـعـادـلـةـ $0 = g(x)$ تـقـبـلـ حلـيـنـ:

$$h(0) = 0$$

اذن منـحنـيـ الدـالـةـ g يـقـطـعـ محـورـ الفـواـصـلـ فيـ المـبـداـ

ولـدـيـنـاـ الدـالـةـ g مـسـتـمـرـةـ وـرـتـيـبـةـ عـلـىـ المـجـالـ

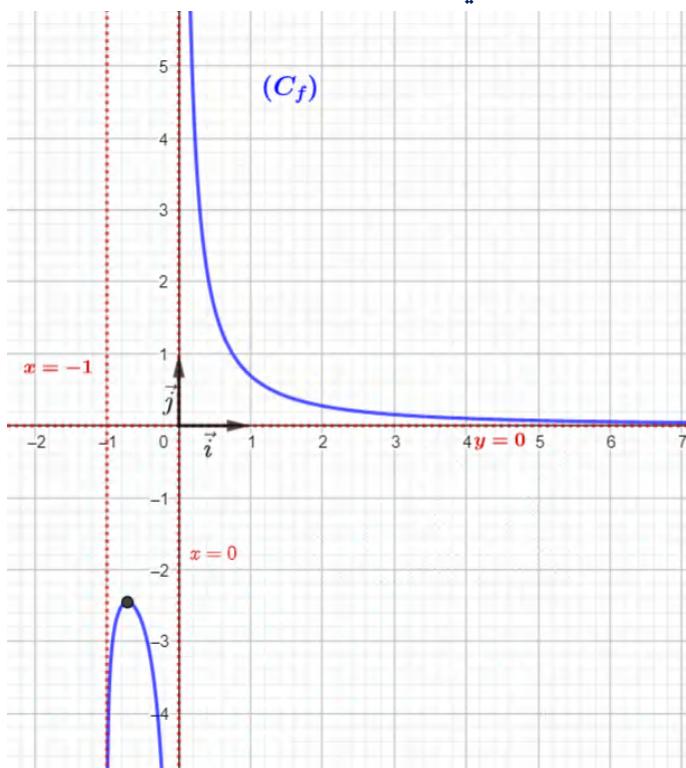
$$[-0.72; -0.71]$$

$$\text{ولـدـيـنـاـ } g(-0.72) < g(-0.71) \times g(-0.71) < 0$$

$$\text{لـأـنـ: } g(-0.72) = -0.02 \text{ وـ } g(-0.71) = 0.02$$

$$-2.56 < f(\alpha) < -2.43$$

3 التمثيل البياني:



4 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فوائل نقط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = \ln m$ وهي:

• $m < e^{f(\alpha)}$ أي لما: $\ln m < f(\alpha)$ للمعادلة حلان سالبان

• $m = e^{f(\alpha)}$ أي لما: $\ln m = f(\alpha)$ للمعادلة حل مضاعف

• $e^{f(\alpha)} < m < 1$ أي لما: $f(\alpha) < \ln m < 0$ للمعادلة لا تقبل حلول

• $m > 1$ أي لما: $\ln m > 0$ للمعادلة حل وحيد موجب

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1}x^2 - 2x \ln(x+1)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x+1}x - 2 \ln(x+1)}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة: f

x	-1	α	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0
x^3	-	-	-	+
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$+\infty$
				0

2 تبيين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2 \ln(\alpha+1) \\ &\Rightarrow 2 \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1} \\ &\Rightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2} \\ &= \frac{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha}{2\alpha^2(\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} \end{aligned}$$

3 حصر $f(\alpha)$ -

لدينا:

$$\begin{aligned} -0.72 < \alpha < -0.71 \\ 0.28 < \alpha+1 < 0.29 \dots (*) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$-1.44 < 2\alpha < -1.42 \dots (**)$$

بضرب (*) في (**) نجد:

$$-0.41 < 2\alpha(\alpha+1) < -0.39$$

$$-2.56 < \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} < -2.43$$

اذن:

09

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقى بجوار $+\infty$ معادلته

$$y = 0$$

بـ/ تبيـن أـنـه مـنـ أـجـلـ كـلـ عـدـدـ حـقـيـقـيـ x مـنـ $[-1; +\infty)$

$$: f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \\ &= -\frac{e}{(x+1)^2} \\ &+ \frac{1}{x+1} \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) \ln(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-e(x+1)^2 + (x+1) - 2(x+1) \ln(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-e(x+1) + 1 - 2 \ln(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= -\frac{e(x+1) - 1 + 2 \ln(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{-g(x)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

جـ/ درـاسـةـ اـتجـاهـ تـغـيـرـ الدـالـةـ

إـشـارـةـ $f'(x)$ مـنـ إـشـارـةـ $[-g(x)]$

لـماـ: $x \in D_f$ لأنـ: $(x+1)^3 > 0$

وـمـنـهـ:

ـ جـدولـ تـغـيـرـاتـ الدـالـةـ f ـ

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	3.16	0

ـ دـرـسـ رـسـمـ المـنـحـنـىـ (C_f) ـ

ـ نـرـسـ رـسـمـ المـسـتـقـيمـ المـقـارـبـ الأـفـقـيـ ذـوـ المـعـادـلـةـ $y = 0$ ـ

ـ نـرـسـ رـسـمـ المـسـتـقـيمـ المـقـارـبـ الـعـمـودـيـ ذـوـ المـعـادـلـةـ $x = -1$ ـ

ـ نـعـيـنـ رـسـمـ النـقـطـةـ α ـ

ـ باـسـتـعـالـ جـدولـ تـغـيـرـاتـ الدـالـةـ f نـكـمـلـ رـسـمـ (C_f) ـ

ـ 1 درـاسـةـ تـغـيـرـاتـ الدـالـةـ g ، ثـمـ تـشكـيلـ جـدولـ تـغـيـرـاتـهاـ

ـ تعـيـنـ النـهـاـيـاتـ

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

ـ درـاسـةـ $g'(x)$ ـ

$$\begin{aligned} g'(x) &= e + \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{ex + e + 2}{x+1} > 0 \end{aligned}$$

ـ وـمـنـهـ:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ـ 2 تـبـيـنـ أـنـ $g(x) = 0$ تـقـبـلـ حـلـاـ وـحـيدـاـ α حـيـثـ:

$$-0.34 < \alpha < -0.33$$

ـ لـدـيـنـاـ الدـالـةـ g مـسـتـمـرـةـ وـمـتـزـاـيدـةـ تـمـاـمـاـ عـلـىـ الـمـجـالـ $[-1; +\infty)$

$$g(-0.34) < g(-0.33)$$

$$g(-0.33) \approx 0.02 \quad g(-0.34) \approx -0.04$$

ـ وـمـنـهـ حـسـبـ مـبـرـهـنـةـ الـقـيـمـ الـمـتـوـسـطـةـ الـمـعـادـلـةـ $0 = g(x)$

$$-0.34 < \alpha < -0.33$$

ـ 3 اـسـتـنـتـاجـ إـشـارـةـ $(g(x))$ ـ

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

ـ II

ـ 1

ـ أـ تـبـيـنـ أـنـ $-\infty = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{x+1} \left(e + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ـ وـمـنـهـ (C_f) يـقـبـلـ مـقـارـبـ عـمـودـيـ بـجـوارـ $-\infty$ مـعـادـلـتـهـ $1 = x$

ـ حـسـابـ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ـ

ج) المناقشة البيانية:

$$k(x) = m$$

حلول المعادلة هي فوائل نقطة تقاطع (C_k) مع المستقيمات

$$\text{ذات المعادلة } y_m = m$$

$$\text{لدينا: } k(0) = f(0) = e$$

ومنه المناقشة:

المعادلة تقبل حلين متمايزين $m < e$ لما

المعادلة تقبل ثلاثة حلول: حل معدوم $m = e$ لما

وحل موجب وآخر سالب

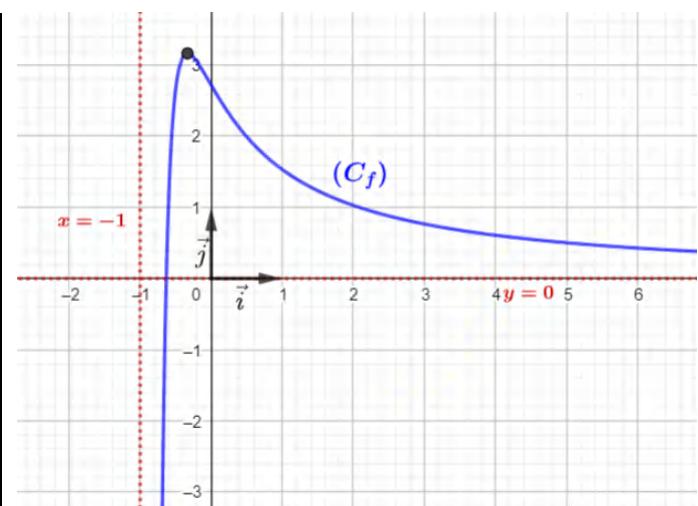
لما $e < m < f(\alpha)$ المعادلة أربع حلول: حلين موجبين

وآخرين سالبين

المعادلة تقبل حلين مضاعفين أحدهما $m = f(\alpha)$ لما

موجب والآخر سالب

المعادلة لا تقبل حلول $m > f(\alpha)$ لما



2

أ) تبيين أن الدالة k زوجية:

$$k(-x) = f(-|-x|)$$

$$= f(-|x|)$$

$$= k(x)$$

ومنه k دالة زوجية.

ب) تبيين كيف يمكن استنتاج (C_k) انطلاقاً من (C_f) :

لدينا:

$$k(x) = f(-|x|)$$

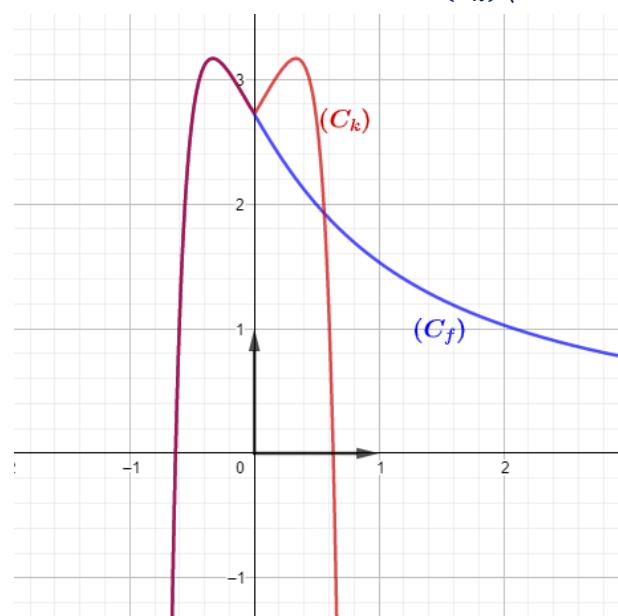
$$= \begin{cases} f(-x) & ; x \in [0; 1[\\ f(-(-x)) & ; x \in]-1; 0[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(-x) & ; x \in [0; 1[\\ f(x) & ; x \in]-1; 0[\end{cases}$$

ومنه (C_k) ينطبق على (C_f) في المجال $[0; 1]$

وبما أن الدالة k زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

- رسم (C_k) :

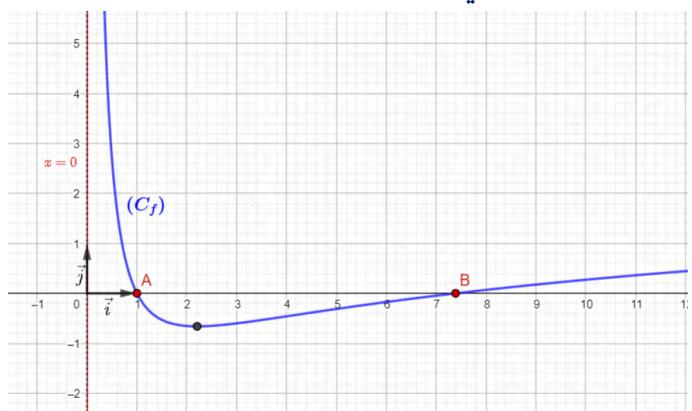


$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

- التفسير الهندسي:

يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين: $A(1; 0)$ و $B(e^2; 0)$.

6 التمثيل البياني:



11

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

$$= \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{\frac{1}{x^2}} - 1 + 2 \ln \frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ب/ تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; \frac{1}{\alpha}]$

ومناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{\alpha}; +\infty]$

لدينا: $0 < \frac{1}{x^2} < +\infty$ لما

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

ومنه:

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$		

③

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 + \ln x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

$$y_{(\Delta)} = -x - 2$$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{3 + \ln x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow 3 + \ln x = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = -3$$

$$\Rightarrow x = e^{-3}$$

ومنه:

x	0	e^{-3}	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-	0	+

$x \in [0; e^{-3}]$ تحت (Δ) لـ (C_f) •

$B(e^{-3}; -e^{-3} - 2)$ يقطع (Δ) في النقطة (C_f) •

١ تبيين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty]$:

$$g'(x) = 2 \frac{1}{x} - \left(-\frac{2}{x^3} \right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 + 2}{x^3} > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R}_+^*

٢

أ/ تبيين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلا وحيدا

لدينا الدالة g مستمرة ورتبة على المجال $[0; +\infty]$

$$g(1.9) \times g(1.89) < 0$$

$$g(-1.9) \approx -0.01 \quad g(1.9) \approx 0.01$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = g(x)$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty]$

ب/ استنتاج إشارة $(g(x))$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

٢

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، وتفصير النتيجة هندسيا:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} (-x^2 - 2x + 3 + 2 \ln x) \right) = -\infty$$

التفصير الهندسي:

(C_f) قبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x - 2 + \frac{3}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

٢

أ/ تبيين أنه $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = -1 + \frac{2 \frac{1}{x} x - 3 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$= -1 + \frac{-1 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 1 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} (-x^2 - 1 - 2 \ln x)$$

(III)

١ تبيين أن الدالة h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= |-x| + 2 - \frac{3 + \ln((-x)^2)}{|-x|} \\ &= |x| + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{|x|} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

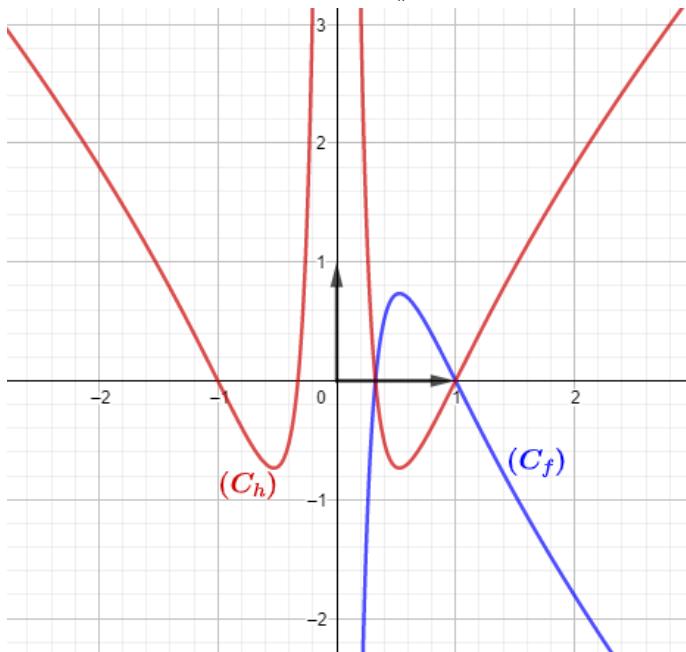
٢ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$$: h(x) = -f(x) :]0; +\infty[$$

$$\begin{aligned} h(x) &= |x| + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{|x|} \\ &= \begin{cases} x + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{x} ; x > 0 \\ -x + 2 - \frac{3 + \ln((-x)^2)}{-x} ; x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\left(-x - 2 + \frac{3 + 2 \ln(x)}{x}\right) ; x > 0 \\ -x + 2 + \frac{3 + 2 \ln(-x)}{x} ; x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -f(x) ; x > 0 \\ -x + 2 + \frac{3 + 2 \ln(-x)}{x} ; x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

٣ شرح كيفية رسم (C_f) انطلاقاً من (C_h) :

$$: x \in \mathbb{R}_+^*$$

(يُناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصلوبما أن الدالة h زوجية فهي متناهية بالنسبة لمحور التراتيب• $x \in]e^{-3}; +\infty[$ لما (Δ) فوق (C_f)

٤

أ/ تبيين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1 لدينا:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 1 - 2 \ln x}{x^2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(-2x - 2 \frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(-x^2 - 1 - 2 \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{-2x^3 + 2x + 2x^3 + 2x + 4x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{4x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{4 \ln x}{x^3} \end{aligned}$$

لدينا: $x \in \mathbb{R}_+^*$ لما $x^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة

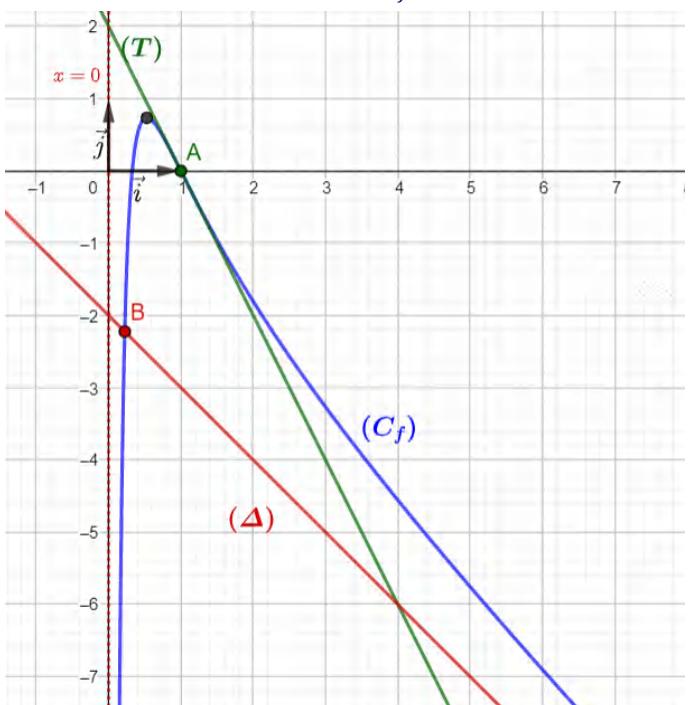
$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 1ب/ كتابة معادلة مماس لـ (C_f) عند A :

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= -2(x - 1) \\ &= -2x + 2 \end{aligned}$$

٥ رسم (C_f) ، (Δ) و (T) 

12

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

x	0	m	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنها تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة 0

وعليه فالدالة g موجبة على $[0; +\infty]$

3/ استنتاج مما سبق أن (C) يقع تحت أي مماس له:

ندرس الوضعيّة بين (C) و (T_m)

$$\begin{aligned} y_{(C)} - y_{(T)} &= \ln x - \left(\frac{1}{m}x - 1 + \ln m \right) \\ &= \ln x - \frac{1}{m}x + 1 - \ln m \\ &= - \left(-\ln x + \frac{1}{m}x - 1 + \ln m \right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

إشارة الفرق عكس إشارة $g(x)$

وعليه فإن (C) يقع تحت أي مماس له

(II)

1

أ/ استنتاج أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين

$$\ln x \leq \ln m + \frac{x-m}{m}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) \geq 0 &\Rightarrow \frac{1}{m}x - 1 + \ln m - \ln x \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{m}x - 1 + \ln m \geq \ln x \\ &\Rightarrow \frac{x-m}{m} + \ln m \geq \ln x \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً

$$\ln(m+1) - \ln m \leq \frac{1}{m}$$

يكون:

(III)

1

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty]$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$$

1/ اثبات أن $y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$ معادلة L (لدينا: $f(x) = \ln x$ ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ y_{(T_m)} &= f'(m)(x-m) + f(m) \\ &= \frac{1}{m}(x-m) + \ln m \\ &= \frac{1}{m}x - 1 + \ln m \end{aligned}$$

ب/ التحقق أن المماس (T_e) للمنحنى (C) في النقطة $B(e; 1)$ يمر بالنقطة $O(0; 0)$ مبدأ المعلم:

لدينا:

$$y_{(T_e)} = \frac{1}{e}x - 1 + \ln e = \frac{1}{e}x$$

نعرض النقطة $O(0; 0)$ في معادلة المستقيم (T_e) نجد:

$$0 = \frac{1}{e}(0) \Rightarrow 0 = 0$$

إذن (T_e) يمر بمبأ المعلم

2

أ/ دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{x} + \frac{\ln m}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) \right)$$

$$= +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

- دراسة إشارة $g'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{m} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-m}{mx} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x-m}{mx} = 0 \\ &\Rightarrow x - m = 0 \\ &\Rightarrow x = m \end{aligned}$$

لدينا سابقاً:
لدينا: $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$

$$x - 1 \geq \ln x$$

بوضع: $x = \frac{1}{1+t}$
نجد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t} - 1 &\geq \ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \\ \Rightarrow \frac{1-1-t}{1+t} &\geq -\ln(1+t) \\ \Rightarrow \frac{-t}{1+t} &\geq -\ln(1+t) \\ \Rightarrow \frac{t}{1+t} &\leq \ln(1+t) \end{aligned}$$

لدينا سابقاً:
لدينا: $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \dots (*)$$

لدينا أيضاً:

لدينا أيضاً:
لدينا: $\ln(t+1) \leq t$

من (*) و (**) نجد أن:

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$$

لدينا: $x \in]0; +\infty[$ لما $f'(x) > 0$

ومنه فالدالة f متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$

لدينا: $\ln x \leq x - 1$

لدينا مما سبق:

$$\frac{x-m}{m} + \ln m \geq \ln x$$

بأخذ $m = 1$ نجد:

$$x - 1 \geq \ln x$$

2

أ/ اثبات أن: $\ln(t+1) \leq t$

يكفي أن ثبت أن: $\ln(t+1) - t \leq 0$

نضع: $h(t) = \ln(t+1) - t$

$$h'(t) = \frac{1}{t+1} - 1 = \frac{-t}{t+1}$$

لدينا: $h'(t) < 0$ لـ $t > -1$ ومنه إشارة $h'(t)$ من إشارة $(-t)$

$$-t = 0 \Rightarrow t = 0$$

ومنه الدالة h متناقصة تماماً لـ $t > -1$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	\nearrow	0	\searrow

من جدول تغيرات الدالة h نلاحظ أنها تبلغ قيمة حدية كبيرة قيمتها 0

وعليه فالدالة h سالبة على $]-1; +\infty[$

ومنه: $\ln(t+1) - t \leq 0$

وعليه: $\ln(t+1) \leq t$

13

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0$

تبين أنه من أجل كل x من D_f : ②

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{\frac{1}{x}x - (2 + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - 1 - \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{x^2 + 1 + \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

تبين أن: ③

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 0 \Rightarrow \alpha^2 + 1 + \ln \alpha = 0 \\ &\Rightarrow \ln \alpha = -(\alpha^2 + 1) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} \\ &= \frac{-\alpha^2 + 2 - (\alpha^2 + 1)}{\alpha} \\ &= \frac{-2\alpha^2 + 1}{\alpha} \\ &= 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) \end{aligned}$$

حصر $f(\alpha)$

لدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33$$

$$-0.33 < -\alpha < -0.32 \dots (1)$$

ولدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33$$

$$0.64 < 2\alpha < 0.66$$

$$\frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{0.64}$$

دراسة تغيرات الدالة: ①

حساب النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$

دراسة $g'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 1}{x} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

جدول تغيرات $g(x)$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(0.32) = -0.03$ $g(0.33) = 0.0002$

أي: $g(0.33) \times g(0.32) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$

استنتاج حسب قيم x إشارة $f(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ — معادلته:

$$x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] = -\infty$$

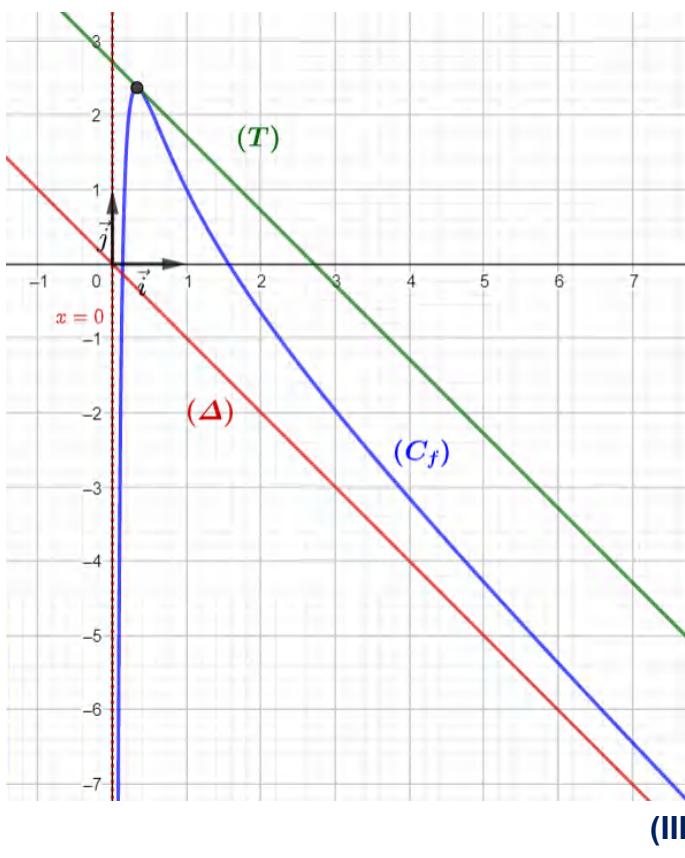
$$= -x + e^{-1} - e^{-1} + \frac{2 + \ln e^{-1}}{e^{-1}}$$

$$= -x + e$$

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $x = 0$
- نعين x_0 و x_1 نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل: (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



أ/ تبيين أن $h(x) = f(x + 1) + 2$:

$$\begin{aligned} f(x + 1) + 2 &= \\ &= -(x + 1) + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} + 2 \\ &= -x - 1 + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} + 2 \\ &= -x + 1 + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ب/ تبيين أن (D) مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

$$1.51 < \frac{1}{2\alpha} < 1.66 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18 < \frac{1}{2\alpha} - \alpha < 1.34$$

$$2.18 < 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) < 2.34$$

إذن:

$$2.18 < f(\alpha) < 2.34$$

4

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} + x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيمي مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{2 + \ln x}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$\begin{aligned} 2 + \ln x &= 0 \Rightarrow \ln x = -2 \\ \Rightarrow x &= e^{-2} \end{aligned}$$

ومنه:

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+

• $x \in]0; e^{-2}[$ لما تحت (Δ) (لما (C_f))

• (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .

• $x \in]e^{-2}; +\infty[$ لما فوق (Δ) (لما (C_f))

5 اثبات أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) :

$$f'(a) = -1 \quad (\Delta) \text{ معناه:}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(a) = -1 &\Rightarrow -\frac{a^2 + 1 + \ln a}{a^2} = -1 \\ &\Rightarrow a^2 + 1 + \ln a = a^2 \\ &\Rightarrow 1 + \ln a = 0 \\ &\Rightarrow \ln a = -1 \\ &\Rightarrow a = e^{-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

③

أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة
يُطلب تعينها:
نفرض أن النقطة $A(x_1; y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m)
ونبرهن أنها ثابتة:
لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناه:

$$y_1 = \ln(|m|) x_1 + 1$$

$$\Rightarrow \ln(|m|) x_1 - y_1 + 1 = 0 \dots (3)$$
 المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا
انعدمت جميع معاملاته
أي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0; 1)$

ب/ المناقشة البيانية:
حلول المعادلة (E) هي فوائل نقط تقاطع (C_h) مع
المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = \ln(|m|) x + 1$$

ومنه:

• $|m| = e^{-1}$ أي لما $\ln|m| = -1$
 $m \in \{-e^{-1}; e^{-1}\}$
 المعادلة تقبل حلاً وحيداً

• $|m| < e^{-1}$ أي لما $\ln|m| < -1$
 $-e^{-1} < m < e^{-1}$
 المعادلة تقبل حلاً وحيداً

• $|m| > e^{-1}$ أي لما $\ln|m| > -1$
 $m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$
 المعادلة تقبل حلاً

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (-x + 1)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 1 + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} - (-x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x + 1} + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ $+\infty$ في جوار (C_h)

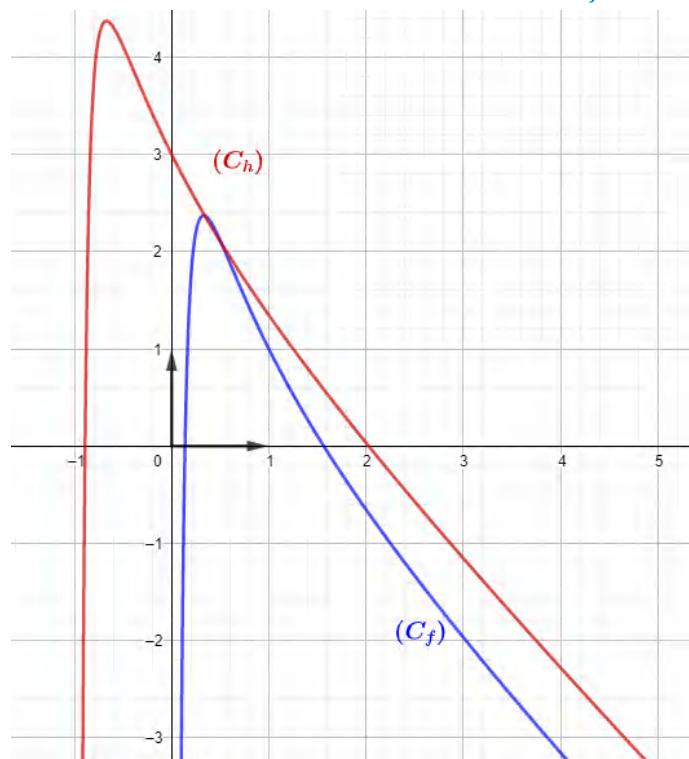
②

أ/ تبيين أن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f)
بتحويل بسيط يُطلب تعينه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x + 1) + 2 \\ &= f(x - (-1)) + 2 \end{aligned}$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1; 2)$
ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :

تمثيل (C_f) و (C_h) :



14

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

$$: f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2} \quad ②$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{1}{x} \ln x - \left(\frac{-2}{(\ln x)^2} \right) \\ &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2} \\ &= 2 \left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2} \right] \\ &= \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

③ استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$	$+\infty$

(III)

① دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [h(x)] = +\infty$$

- دراسة $h'(x)$

$$h'(x) = \frac{2}{x} \ln x$$

لدينا $0 < \frac{2}{x} < \frac{2}{1}$ ومنه:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

② حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] =$$

١ دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] = -\infty$$

- دراسة $g'(x)$

$$g'(x) = 3 \frac{1}{x} (\ln x)^2$$

لدينا: $0 < g'(x) < +\infty$ ومنه

جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

٢ حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $0 = g(x)$ هي:

٣ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty]$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

١ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = -\frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+0$ معادلته

$$x = 0$$

- الاستنتاج:
(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

7 التمثيل البياني:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 0$ و $x = 1$

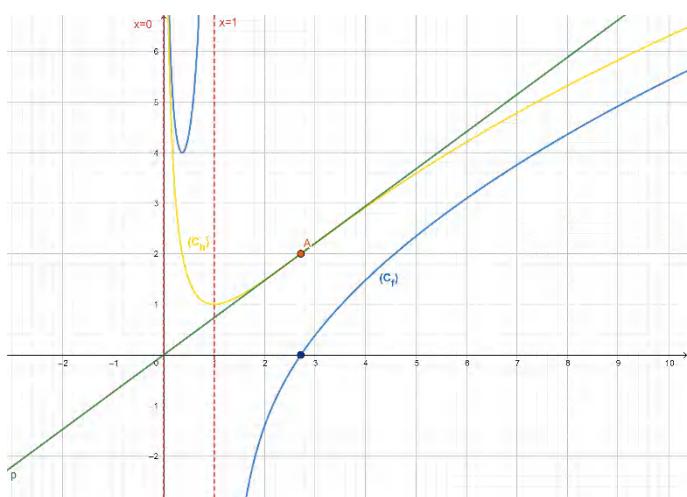
نرسم المماس (T)

نعين A نقطة انعطاف المنحني (C_h)

باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)

نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل

ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



8 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$e^m(\ln x)^3 + e^m \ln x - \ln x - 2e^m = 0$$

$$\Rightarrow e^m[(\ln x)^3 + \ln x - 2] = \ln x$$

$$\Rightarrow e^m \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = 1$$

$$\Rightarrow e^m [f(x)] = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-m}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحني

(C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة

$y_m = e^{-m}$ أي لما: $e^{-m} < 4$

لما: $-m < \ln 4$ أي لما: $e^{-m} < 4$

المعادلة تقبل حل وحيد

$-m = \ln 4$ أي لما: $e^{-m} = 4$

أي لما: $m = -\ln 4$

المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف

لما: $-m > \ln 4$ أي لما: $e^{-m} > 4$

أي لما: $m < -\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} - (\ln x)^2 - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{\ln x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) و (C_h) متقاربان بجوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h):

ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - h(x)$	+	-	

• $x \in]0; 1[$ لما فوق (C_f)

• $x \in]1; +\infty[$ لما تحت (C_f)

4 تبيين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف:

لدينا:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{-2}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2 \ln x + 2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2} (1 - \ln x) \end{aligned}$$

لدينا $0 < \frac{2}{x^2}$ ومنه الإشارة من (C_h)

$$\begin{aligned} 1 - \ln x &= 0 \Rightarrow \ln x = 1 \\ &\Rightarrow x = e \end{aligned}$$

x	0	e	$+\infty$
$h''(x)$	+	0	-

لدينا (x) $h''(x)$ انعدمت وغيرت اشارتها ومنه المنحني (C_h)

يقبل نقطة انعطاف احداثيها ($A(e; 2)$)

5 كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A

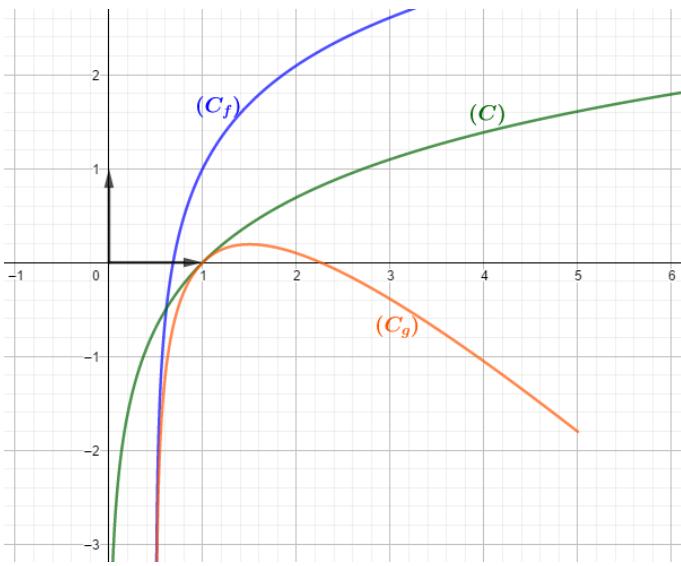
$$(T): y = h'(e)(x - e) + h(e)$$

$$= \frac{2}{e} \ln e (x - e) + (\ln e)^2 + 1$$

$$= \frac{2}{e} x$$

6 حساب $f(e)$

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$



4 استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I :

لدينا: $\begin{cases} g(1) = 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$ ومنه:

x	$\frac{1}{2}$	α	1	$+\infty$
$g(x)$	–	0	+	0

- تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = f(x) - x = g(x)$$

إذن:

$x \in \left[\frac{1}{2}; \alpha \right]$ تحت (Δ) لما (C_f) •

$x = \{\alpha; 1\}$ يقطع (C_f) •

$x \in [\alpha; 1]$ فوق (C_f) •

5 برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha; 1]$

فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[\alpha; 1]$:

لدينا الدالة f متزايدة على $[\alpha; 1]$:

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha$$

وبما أن: $g(\alpha) = 0$

$$0 = f(\alpha) - \alpha$$

فإن: $f(\alpha) = \alpha$

$$f(1) = 1$$

ولدينا:

ومنه:

$$f(x) \in [1; \alpha] \quad \text{يكون: } x \in [1; \alpha] \quad \text{لما:}$$

(III)

1 تعين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2 \Rightarrow f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{2}{2x-1} - 1 \\ &= \frac{2-2x+1}{2x-1} \\ &= \frac{-2x+3}{2x-1} \end{aligned}$$

لدينا: $(2x-1) > 0$ على المجال I

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

$$-2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 & \quad : x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right] \\ g'(x) < 0 & \quad : x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty \right] \end{aligned}$$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$

3

أ/ حساب $g(1)$:

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

- تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال

حلًا وحيدًا: $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right]$

لدينا: الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = g(x)$

تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right]$ حلًا وحيدًا α

- التحقق أن $3 < \alpha < 2$

لدينا: $0 < g(2) \times g(3)$

$$g(3) \approx -0.39 \quad \text{و} \quad g(2) \approx 0.1$$

لأن $g(2) \times g(3) < 0$ ومنه $3 < \alpha < 2$ محققة

ب/ رسم (C_g)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln \left(2 \left(1 + \frac{1}{2n} \right) - 1 \right) \\
&= \ln 3^2 - \ln 2^3 \\
&\Rightarrow \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln \left(\frac{9}{8} \right) \\
&\Rightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{9}{8} \\
&\Rightarrow 8n + 8 - 9n = 0 \\
&\Rightarrow -n = -8 \\
&\Rightarrow n = 8
\end{aligned}$$

2 : S_n تعين

لدينا:

$$\begin{aligned}
u_n &= f \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \\
&= 1 + \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= 1 + \ln \left(\frac{1+1}{1} \right) + 1 + \ln \left(\frac{2+1}{2} \right) + \cdots + 1 \\
&\quad + \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \\
&= 1(n-1+1) + \ln \left(\frac{2}{1} \right) + \ln \left(\frac{3}{2} \right) + \cdots \\
&\quad + \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \\
&= n + \ln \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \cdots \times \frac{(n+1)}{n} \right) \\
&= n + \ln \left(\frac{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n \times (n+1)}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n} \right) \\
&= n + \ln(n+1)
\end{aligned}$$

16

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

2

أ/ كتابة معادلة المماس (T_m):

$$\begin{aligned} y_{(T_m)} &= f'(m)(x - m) + f(m) \\ &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (x - m) + \frac{(\ln m)^2}{m} \\ &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x - \frac{(2 - \ln m) \ln m}{m} + \frac{(\ln m)^2}{m} \\ &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2(\ln m)^2 - 2 \ln m}{m} \\ &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} \end{aligned}$$

ب/ تعين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ: (يشمل المبدأ معناه: (T_m))

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (0) + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} \\ &\Rightarrow \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} = 0 \\ &\Rightarrow 2 \ln m (\ln m - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2 \ln m = 0 \\ \ln m - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \ln m = 0 \\ \ln m = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = e \end{cases} \end{aligned}$$

ج/ كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليهما:

$$(T_1): y = 0x + 0 \\ = 0$$

$$(T_e): y = \left(\frac{(2 - 1) \times 1}{e^2} \right) x + \frac{2(1 - 1)}{e} \\ = \frac{1}{e^2} x \\ = e^{-2} x$$

3 التمثيل البياني:

1

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = +\infty$$

- تبيين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right]$$

نجد: $t = \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^2}{e^t} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^n}{e^t} \right] = 0 \text{ لأن: } t^n$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته:

$$x = 0$$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته:

$$y = 0$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة:

- دراسة $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(2 \frac{1}{x} \ln x \right) (x) - (\ln x)^2}{x^2} \\ &= \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} \\ &= \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $0 < x^2$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

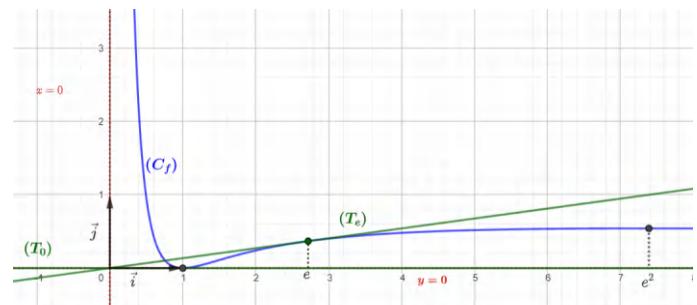
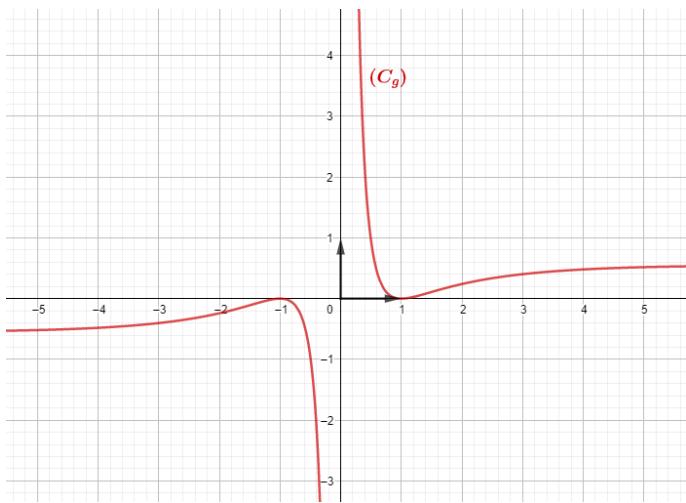
$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

ولدينا: ومنه:

- جدول تغيرات الدالة:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$2 - \ln x$	+	+	0	-
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	0



(II)

١ تبيين أن الدالة g فردية:

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(\ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(\ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

٢ تبيين أنه يمكن رسم (C_g) انطلاقاً من (C_f) :

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \frac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\frac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$ (C_f) ينطبق على (C_g) :

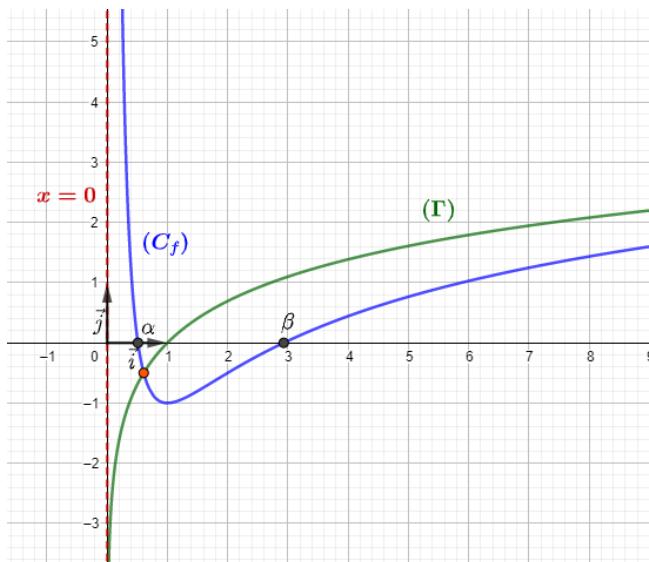
ولما $x < 0$ (C_f) يناظر (C_g) بالنسبة للمبدأ

تمثيل (C_g) -

ومستمرة ومتزايدة على $[1; +\infty[$
 وتقبل قيمة حدية دنيا سالبة هي -1
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 إذن: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين
 - التتحقق أن: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$

- لدينا: $0 < f(0.5) \times f(0.6)$
 لأن: $f(0.5) \approx -0.47$ و $f(0.6) \approx -0.08$
 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = f(x)$
 تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0.5; 0.6]$
- لدينا: $0 < f(3) \times f(2.9)$
 لأن: $f(3) \approx 0.03$ و $f(2.9) \approx -0.01$
 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = f(x)$
 تقبل حلاً وحيداً β في المجال $[2.9; 3]$

5 رسم (Γ) و (C_f) :



18

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

$$= \frac{e^x(2e^{2x} + 8e^x - 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)}$$

لدينا:

$$\begin{cases} e^x > 0 \\ (e^x + 2)(2e^{2x} + 1) > 0 \end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $f'(x)$

$$2e^{2x} + 8e^x - 1 = 0$$

$$x = \ln t \text{ أي } e^x = t$$

فنجد:

$$2t^2 + 8t - 1 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = 64 - 4(2)(-1) = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

ومنه $\Delta > 0$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-8 + 6\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ t_2 = \frac{-8 - 6\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ln t_1 = \ln \left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right) \\ x_2 = \ln t_2 \text{ (مـرفـوض)} \end{cases}$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$-\ln 2$	y_0	$+\infty$

حيث:

$$x_0 = \ln \left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right) ; y_0 = f \left(\ln \left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right) \right)$$

3

أ/ تـبيـنـ أـنـ (C_f) يـقـبـلـ مـسـتـقـيمـ مـقـارـبـ مـائـلـ (D) لـدـيـنـا:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$$

$$= y + \varphi(x)$$

حيث:

1 أ/ حـسابـ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2$$

التفسـيرـ الـهـنـدـسـيـ: (C_f) يـقـبـلـ مـسـتـقـيمـ مـقـارـبـ أـفـقـيـ بـجـوارـ

ـعـادـلـتـهـ: $y = -\ln 2$

ب/ تـبـيـنـ أـنـ: $f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$

$$f(x) = \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{2e^{2x} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-2x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{2e^{2x}}{e^x} \right) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + \frac{2}{e^x}} \right)$$

$$= \ln(2e^x) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$$

$$= \ln 2 + x + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$$

ج/ استـنـتـاجـ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln 2 + x + \underbrace{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)}_0 \right] = +\infty$$

2 درـاسـةـ اـتـجـاهـ تـغـيـرـ الدـالـةـ f وـتـشـكـيلـ جـدولـ تـغـيـرـاتـها:

درـاسـةـ $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1) \right)}{(e^x + 2)^2} \\ &= \frac{\left(2e^{2x} + 1 \right)}{(e^x + 2)} \\ &= \frac{4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \\ &= \frac{4e^{3x} + 8e^{2x} - 2e^{3x} - e^x}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \end{aligned}$$

ومنه لما $f(x) - y < 0 : x > -\ln 4$
بنفس الطريقة نجد: لما لما $f(x) - y > 0 : x < -\ln 4$
ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

$x \in]-\infty; -\ln 4[$ لما (C_f) فوق

(C_f) يقطع في النقطة ذات الاعداديات:

$(-\ln 4; -\ln 2)$

$x \in]-\ln 4; +\infty[$ لما (C_f) تحت

٤ تبيين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى

(C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

نحدد أولاً نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو

المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو

المعادلة $y = -\ln 2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي

$\omega(-\ln 4; -\ln 2)$

ولدينا: $f(-\ln 4) = -\ln 2$

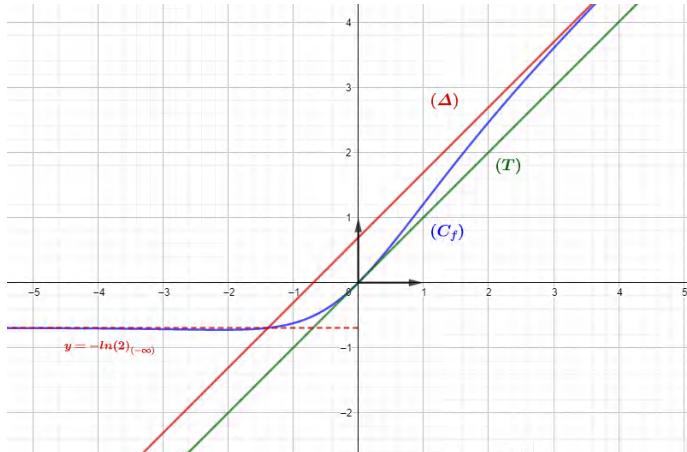
ومنه: $\omega \in (C_f)$

٥ كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = y$ مماس لـ (C_f) عند المبدأ.

٦ التمثيل البياني:



١ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x - \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{m} \frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right)$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) \\ y = x + \ln 2 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ $+\infty$. (C_f)

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}e^{-2x} = 1 + 2e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} = 4$$

$$\Rightarrow -x = \ln 4$$

$$\Rightarrow x = -\ln 4$$

لدينا:

$$x > -\ln 4$$

$$\Rightarrow -x < \ln 4$$

$$\Rightarrow e^{-x} < 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2\right) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} + 1 < 2e^{-x} + 1$$

لدينا: $0 > 2e^{-x} + 1$ إذن يمكن القسمة عليه

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} < 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{1}{2}e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1}\right) < 0$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{m}\right) + \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right)$$

$$\Rightarrow x = -\ln m + f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \ln m$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

$$y_m = x + \ln m$$

وهي:

- $m < 1$ أي $\ln m < 0$ لما

المعادلة لا تقبل حلول

- $m = 1$ أي لما $\ln m = 0$ لما

للمعادلة حل مضاعف

- $1 < m < 2$ أي لما $0 < \ln m < \ln 2$ لما

للمعادلة حلان

- $m = 2$ أي لما $\ln m = \ln 2$ لما

للمعادلة حل مضاعف

- $m > 2$ أي لما $\ln m > \ln 2$ لما

للمعادلة حل وحيد

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

كتابة معادلة (T) ②

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= \frac{1+e}{2}(x - 1) + \ln 2 \\ &= \frac{1+e}{2}x - \frac{1+e-2\ln 2}{2} \end{aligned}$$

③

أ/ تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة :

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على \mathbb{R}_+ وغيرت من إشارتها

إذن حتما تقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة

ب/ التتحقق أن $0.8 < \alpha < 0.7$:

لدينا: $f(0.8) \times f(0.7) < 0$

لأن: $f(0.7) \approx -0.04$ و $f(0.8) \approx 0.25$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة 0

تقبل حالا وحيدا α في المجال $[0; +\infty)$

④

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e \ln x}{x+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (Γ) :

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x+1) = 0 &\Rightarrow \frac{e \ln x}{x+1} = 0 \\ &\Rightarrow e \ln x = 0 \end{aligned}$$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ -

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$ -

استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty)$ -

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0; +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e > 0$ و

إذن الدالة g موجبة تماما على $[0; +\infty)$

(II) ①

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

تبيين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x+1) + \frac{e \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

ب/ تبيين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty)$ من

$$\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{e}{x}(x+1) - e \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1 + \frac{e}{x}(x+1) - \frac{e(x \ln x)}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x(x+1)}{x} + \frac{e}{x}(x+1) - \frac{e(x \ln x)}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x+1) + e(x+1) - e(x \ln x)}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x+e) - e(x \ln x)}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $x \in [0; +\infty)$ لما $x(x+1)^2 > 0$

5 تعريف قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) =$

حلين متمايزين: $\frac{1+e}{2}x - m$

حلول المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ هي فوائل نقط

تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = \frac{1+e}{2}x - m$ ، ومنه:

$$-m < -\frac{1+e-2\ln 2}{2} \quad \text{لما:}$$

$$m > \frac{1+e-2\ln 2}{2} \quad \text{أي لـما:}$$

المعادلة تقبل حللين متمايزين

$$\Rightarrow \ln x = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

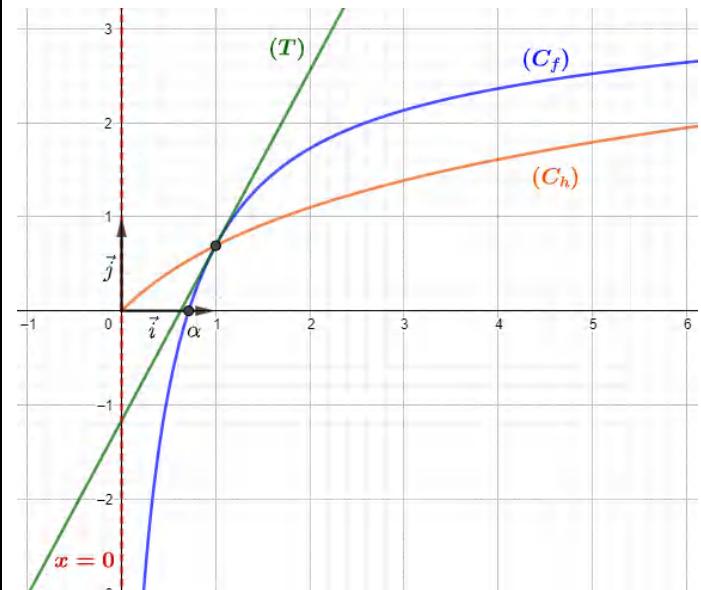
x	0	1	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	-	0	+

$x \in]0; 1[$ لما (C_f) فوق (Γ) •

$x = 1$ لما (C_f) يقطع (Γ) •

$x \in]1; +\infty[$ لما (C_f) تحت (Γ) •

ـ رسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_h) ـ



٢٠٢ تبيين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x) \\ &= 2x - \frac{2(2 - \ln x)}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x} \\ &= \frac{2}{x}g(x) \end{aligned}$$

لدينا $0 < \frac{2}{x}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

٣٠٣ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

٤٠٤ تبيين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0 \\ &\Rightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2 \\ &= \alpha^2 + (2 - 2 - \alpha^2)^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha^4 \\ &= \alpha^2(1 + \alpha^2) \end{aligned}$$

٥٠٥ استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال: $[0; +\infty]$

لدينا $0 < f(\alpha)$ ومنه نجد:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	+	

(III)

١٠١ تبيين أن المسافة AM تعطى بـ $AM = \sqrt{f(x)}$:

لدينا M نقطة من (C_h) فاصلتها x_m أي تكتب على الشكل: $M(x; \ln x)$ ومنه المسافة $AM(x; h(x))$ أي:

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x - 0)^2 + (\ln x - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (-2 - \ln x)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2} \\ &= \sqrt{f(x)} \end{aligned}$$

٢

١٠١ دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] = -\infty$

دراسة $g'(x)$:

لدينا: الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ومنه:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 1}{x} \end{aligned}$$

لدينا $0 < x < 2x^2 + 1 > 0$ ومنه:

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

٢

أ/ تبيين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $[0; +\infty]$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] < 0 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0; +\infty]$:

ب/ التتحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$:

لدينا: $g(1.32) = 0.02$ و $g(1.31) = -0.13$

ولدينا: $1.31 < \alpha < 1.32$ ، اذن $g(1.31) < 0 < g(1.32)$

٣٠٣ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty]$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

١٠١ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$

أ/ برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير:

نلاحظ أن:

$$k(x) = (u \circ f)(x)$$

حيث:

$$u(x) = \sqrt{x}$$

لدينا الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty]$

والدالة f موجبة تماما على $[0; +\infty]$

اذن $(u \circ f)$ متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty]$

ومنه للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $[0; +\infty]$

ب/ برهان أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h)

بما أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير في المجال $[0; +\infty]$

فإن الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x = \alpha$

ومنه المسافة أصغرية لما $x = \alpha$

إذن:

$$B(\alpha; \ln \alpha) \Leftrightarrow B(\alpha; 2 - \alpha^2)$$

ج/ برهان أن:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} \\ &= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} \\ &= |\alpha| \sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= \alpha \sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

٣ تبرير أن (AB) عمودي على المستقيم المماس لـ (C_h)

في النقطة B :

لدينا:

ميل المستقيم المماس لـ (C_h) في النقطة B هو:

$$h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AB) هو :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0} \\ &= -\frac{\alpha^2}{\alpha} \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

تذكر أنه:

◀ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ▶

لدينا:

$$-\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$$

ومنه المستقيم (AB) عمودي على مماس المنحنى (C_h) في النقطة B .

21

حل المسألة رقم:

مشاهـدة المسـألـة

$$= \frac{2 - \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

ب/ تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على $\left[1; \frac{1}{\alpha}\right]$

: $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$ ومتناقصة تماما على

لدينا: $x \in]1; +\infty[$ لما $(x-1)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا:

x	0	α	1
$g(x)$	-	0	+

$x = \alpha$ أي:

لدينا: $g(x) = 0$

ومنه:

$x = \frac{1}{\alpha}$ أي: $\frac{1}{x} = \alpha$ أي: $g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$1 < x < \frac{1}{\alpha}$ أي: $\alpha < \frac{1}{x} < 1$ أي: $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

$\frac{1}{\alpha} < x < 0$ أي: $0 < \frac{1}{x} < \alpha$ أي: $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

ومنه:

x	1	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$-\infty$	-2

3 دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x + \ln x}{x-1} - (-2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 2x + \ln x + 2(x-1)}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + \ln x + 2(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + \ln x + 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + \ln x = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = e$$

x	1	e	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-	0	+

(I)

1

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; 1]$:

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$$

لدينا: $x \in]0; 1[$ لما $g'(x) > 0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على $[0; 1]$

ب/ تبيين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلا وحيدا

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0; 1]$

ولدينا: $g(0.15) < 0$ و $g(0.16) > 0$

لأن $g(0.16) \approx 0.01$ و $g(0.15) \approx -0.05$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $0 = g(x)$

تقبل حلا وحيدا في المجال $[0; 1]$

2 استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $[0; 1]$:

x	0	α	1
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x = 1$ يقبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته: 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} - 2 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) \\ &= -\frac{2}{1} = -2 \end{aligned}$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$y = -2$ يقبل مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته: 2

2

أ/ تبيين أنه $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(-2 + \frac{1}{x}\right)(x-1) - (1 - 2x + \ln x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-2x + 2 + 1 - \frac{1}{x} - 1 + 2x - \ln x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

• طريقة أخرى:

لدينا: $|f(x)| = m$ يعني: $f(x) \geq 0$

وهذا يعني $0 \leq f(x) \leq m$

ولدينا:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ -f(x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل

إذن: $|f(x)| = -f(x)$

ومنه:

$$|f(x)| = m \Rightarrow -f(x) = m$$

$$\Rightarrow f(x) = -m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

$$y_m = -m$$

إذن: قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) =$

– حلين متمايزين هي:

$$-m \in \left] f\left(\frac{1}{\alpha}\right); -2 \right[$$

أي:

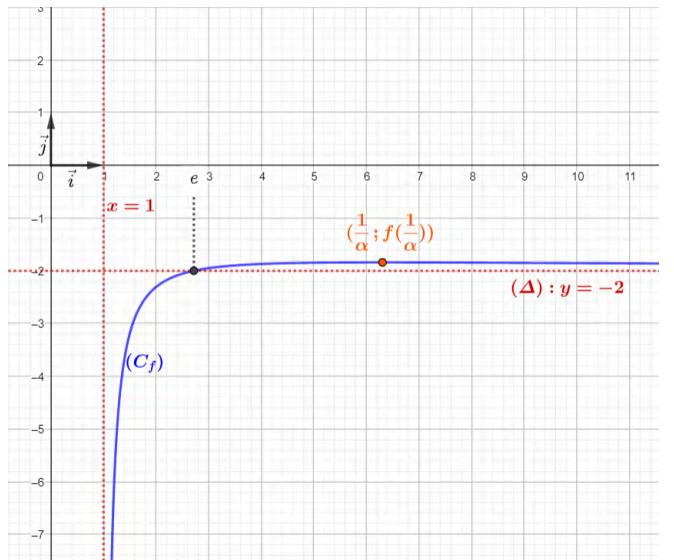
$$m \in \left] 2; -f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right[$$

$x \in]1; e[$ لما (C_f) تحت (Δ)

$x = e$ لما (C_f) يقطع (Δ)

$x \in]e; +\infty[$ لما (C_f) فوق (Δ)

• رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) :



• تعريف ببيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل

المعادلة $|f(x)| = m$ حللين متمايزين:

$$h(x) = |f(x)|$$

ومنه:

$$|f(x)| = m \Rightarrow h(x) = m$$

حلول المعادلة هي فوصل نقط تقاطع (C_h) مع

$$y_m = m$$

(C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

نرسم أولاً (C_h) ثم نعين قيم الوسيط الحقيقي m حتى

تقبل المعادلة $h(x) = m$ حللين متمايزين هي:

$$-f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < m < 2$$

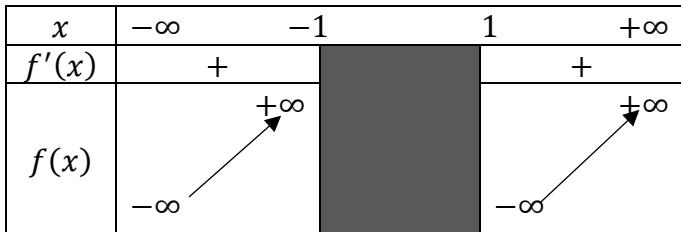
أي:

$$m \in \left] 2; -f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right[$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 + 2$ وبما أن $x^2 > 0$ فـ $f'(x) > 0$ عليه:



ج/ تبيين أن المعادلة $0 = f(x)$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث:

$$1.8 < \alpha < 1.9$$

لدينا: الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال D

$$f(1.8) \times f(1.9) < 0$$

لأن: $f(1.9) \approx 0.1$ و $f(1.8) \approx -0.05$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = f(x)$

تقبل حلًا وحيدًا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

٤ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بالمنتهى \leftarrow دراسة وضعية (Δ) :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y_{(\Delta)}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\pm\infty$ دراسة وضعية (Δ) بالنسبة \leftarrow :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

لدينا:

$$: x \in]1; +\infty[\quad \bullet$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \Rightarrow x-1 > x+1 \\ \Rightarrow -2 > 0$$

وهذا مستحيل، وعليه $1 < \frac{x-1}{x+1} < 0$ في المجال $[1; +\infty[$

ومنه (C_f) يقع تحت $y = \frac{2}{3}x$ لما $x \in]1; +\infty[$ \bullet

$$: x \in]-\infty; -1[\quad \bullet$$

١ تبيين أن الدالة f فردية:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2}{3}(-x) + \ln \left(\frac{-x-1}{-x+1} \right) \\ &= -\frac{2}{3}x + \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \\ &= -\frac{2}{3}x - \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \\ &= -\left(\frac{2}{3}x + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

- التفسير البياني:

(C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ

٢ حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{3}x + \ln \left(\frac{x-1}{2} \right) \right) = -\infty$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادله $x = 1$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-\frac{2}{3}x + \ln \left(\frac{-2}{x+1} \right) \right) = +\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^-$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادله $x = -1$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

٣

أ/ تبيين أن: $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$

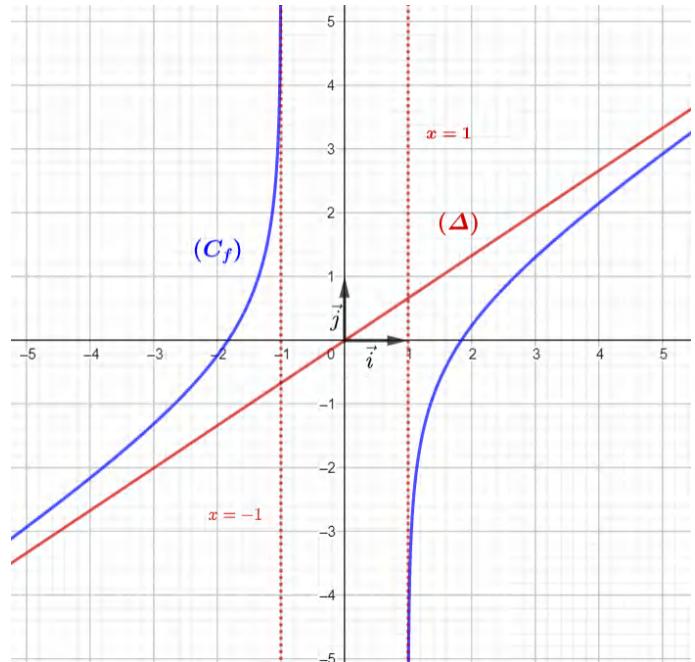
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \right)}{\left(\frac{x-1}{x+1} \right)} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} \\ &= \frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)} \\ &= \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} \end{aligned}$$

بالتفوق والنجاح في شهادة البكالوريا
 لا ننسونا من صالح دعائكم

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \Rightarrow x-1 < x+1 \\ \Rightarrow -2 < 0$$

وهذا صحيح، وعليه $\frac{x-1}{x+1} > 1$ في المجال $[-\infty; -1)$ ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$. $x \in]-\infty; -1]$

5 انشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



6 المناقشة البيانية :

$$(2 - 3|m|)x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3|m|x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 3|m|x$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = 3|m|x$$

$$\Rightarrow 3f(x) = 3|m|x$$

$$\Rightarrow f(x) = |m|x$$

حلول المعادلة هي فوائل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات

ذات المعادلة $: y_m = |m|x$

• لما $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$ أي لما $|m| < \frac{2}{3}$

أي لما $m \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$

المعادلة تقبل حلين متباينين

• لما $m \leq -\frac{2}{3}$ أو $m \geq \frac{2}{3}$ أي لما $|m| \geq \frac{2}{3}$

أي لما $m \in \left[-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$

المعادلة لا تقبل حلول