ثانوية صديقي النوري – الجلفة | الموسم الدراسي: 2024–2025

اختبار الفصل الأول

في: مادة الرياضيات

المستوى: ثانية هندسية مدنية | الأستاذ: قويسم الخليل

يوم: 01 ديسمبر 2024 | المدة: ساعتان

التمرين 01 [05.00 نقطة]

علبة بها 10 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، مكتوب على كل منها سؤال واحد:

- خمس أسئلة في التحليل مرقمة بـ: 1، 2، 3، 4 و5
- ثلاث أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1، 2 و 3
- وسؤالين في الهندسة مرقمين بـ: 1 و 2

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من العلبة ونعتبر الحوادث التالية:

- A: "سحب سؤال في الهندسة"
- B: "سحب سؤال في الجبر"
- C: "سحب سؤال في التحليل يحمل رقما ليس أوليا"

[01.50] ❶ احسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ احتمال A ، B و C على الترتيب

[00.50] ❷ احسب $P(D)$ احتمال الحادثة: "سحب سؤال رقمه مختلف عن الـ 2"

❸ نعتبر المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها

[02.50] أ- عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي

[00.50] ب- استنتج قيمة $E(2012+5X)$

التمرين 02 [05.50 نقطة]

I) ليكن كثير الحدود $Q(x)$ حيث: $Q(x)=x^2-6x-7$

[01.00] ❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$

[01.00] ❷ استنتج حسب قيم x إشارة $Q(x)$ على $\mathbb{R}$

II) ليكن كثير الحدود $P_m(x)=2(m+2)x^2+2(m-1)x+2$، حيث m وسيط حقيقي

[01.00] ❶ عيّن قيم m حتى يكون $P_m(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية

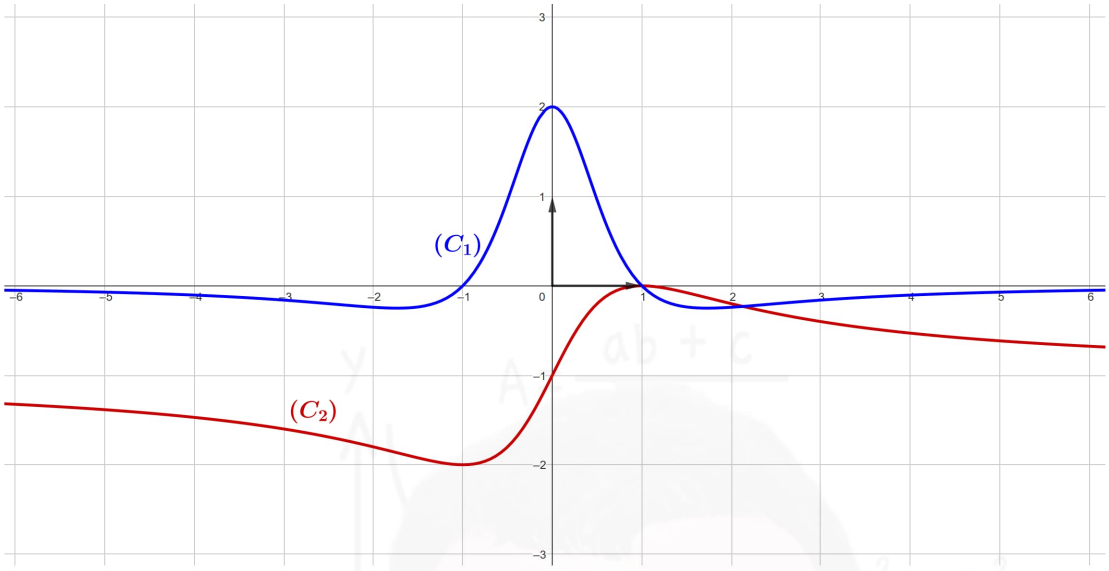
[01.00] ❷ تأكد أنّ مميز ثلاثي الحدود $P_m(x)$ هو $\Delta_{P_m}=4Q(m)$

[01.50] ❸ من أجل $m\in\,]-1;7[$، استنتج حسب قيم x إشارة $P_m(x)$ على $\mathbb{R}$

التمرين 03 [09.50 نقطة]

I) لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$، حيث a، b وc أعداد حقيقية، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

إليك في الشكل المقابل التمثيلين البيانيين (C_1) و (C_2) أحدهما يمثل التمثيل البياني للدالة f والآخر يمثل التمثيل البياني للدالة f'



❶ من بين التمثيلين، أيّهما يمثل الدالة f؟ (مع التبرير) [00.50]

❷ بقراءة بيانية

أ- عيّن كل من $f(0)$، $f'(0)$ و $f(1)$ [00.75]

ب- شكل جدول إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ [01.00]

❸ مما سبق أوجد الأعداد الحقيقية a، b و c [01.50]

II) نأخذ فيما يلي: $a=c=-1$ و $b=2$

❶ أ- بيّن أنّه من أجل كل x حقيقي: $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ [01.00]

ب- استنتج تغيرات الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها [00.50]

❷ بيّن أنّ النقطة $\Omega(0;-1)$ مركز تناظر لـ (C_f) [00.50]

❸ أ- اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند Ω [00.75]

ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (T) ، ماذا تستنتج؟ [01.00]

III) نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\varphi(x)=f(-x+1)$

❶ فكك الدالة φ إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما [01.00]

❷ بيّن أنّ الدالة φ متناقصة تماما على $]0;2[$ [01.00]

(الطريقة الوحيدة لدراسة الرياضيات هي ممارسة الرياضيات – بول هالموس)

بعد نهاية الاختبار، امسح لمشاهدة الحل النموذجي

التمرين الأول [ن 05,00]

1) $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$P(B) = \frac{3}{10}$

$P(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

2) $P(D) = \frac{7}{10}$

3) /P

$X(\Omega) = \{1;2;3;4;5\}$

لدينا:

حيث:

$P(X=1) = \frac{3}{10}$

$P(X=2) = \frac{3}{10}$

$P(X=3) = \frac{2}{10}$

$P(X=4) = \frac{1}{10}$

$P(X=5) = \frac{1}{10}$

وعليه:

$X = x_i$	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P(X=x_i)$

$= \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

ب/

$E(2012+5X) = 5E(X) + 2012$

$= 2024$

التمرين الثاني [ن 05,50]

I) 1) لدينا: $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-7)$

$= 64 > 0$

ومنه المعادلة تقبل حلين هما:

$x = \frac{-(-6)+8}{2} = 7$ و $x = \frac{-(-6)-8}{2} = -1$

$S_{Q(x)=0} = \{-1;7\}$

2)

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

II) 1) $P_m(x)$ كثير حدود من الدرجة 2 معناه:

معناه: $2(m+2) \neq 0$

ومنه: $m+2 \neq 0$

ومنه: $m \neq -2$

اذن $m \in \mathbb{R} - \{-2\}$

2) $\Delta_{P_m} = [2(m-1)]^2 - 4[2(m+2)] \cdot 2$

$= 4(m-1)^2 - 4(m+2)4$

$= 4[m^2 + 1 - 2m - 4m - 8]$

$= 4[m^2 - 6m - 7]$

$= 4Q(m)$

اذن $\Delta_{P_m} = 4Q(m)$

3)

m	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
Δ_{P_m}		$+$	0	$-$	0	$+$	

لدينا:

■ إذا كان $m \in]-1;7[$: لدينا $\Delta_{P_m} < 0$

اذن المعادلة $P_m(x) = 0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

■ لدينا: $-1 < m < 7$

ومنه $2 < 2(m+2) < 18$

اذن $P_m(x) < 0$ لما $m \in]-1;7[$

التمرين الثالث [09,50 ن]

I/ ①

لدينا :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$y_{(C_1)}$	$-$	ϕ $+$	ϕ	$-$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$y_{(C_2)}$	↘	-2 ↗	0	↘

إذن (C_1) التمثيل البياني للدالة f'

(C_2) التمثيل البياني للدالة f

② / أ

$f(0) = -1$

$f'(0) = 2$

$f(1) = 0$

ب)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	ϕ	$-$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ϕ $+$	ϕ	$-$

③

■ لدينا : $f(0) = -1$

ومنه : $\boxed{c = -1}$

■ ولدينا :

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x^2+1) - 2x(ax^2+bx+c)}{(x^2+1)^2}$$

ولدينا : $f'(0) = 2$

ومنه : $\frac{b}{1} = 2$

إذن $\boxed{b = 2}$

■ ولدينا : $f(1) = 0$

ومنه : $\frac{a+b+c}{2} = 0$

ومنه $\boxed{a = -b - c = -1}$

II/ ① / أ

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x) = \frac{(-2x+2)(x^2+1) - 2x(-x^2+2x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2\left[-x^3 - x + x^2 + 1 + x^3 - 2x^2 + x\right]}{(x^2+1)^2}$$

$$= \boxed{\frac{2\left[1 - x^2\right]}{(x^2+1)^2}}$$

ب/ لدينا : $\frac{2}{(x^2+1)^2} > 0$

■ ولدينا : $1 - x^2 = 0$

كما أن : $x^2 = 1$

ومنه $x = 1$ أو $x = -1$

■ وعليه :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ϕ $+$	ϕ	$-$

■ إذن f متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $]-1;1[$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ϕ $+$	ϕ	$-$
$f(x)$	↘	-2 ↗	0	↘

②

■ لدينا $D_f = \mathbb{R}$

ومنه $(-x) \in D_f$.

■ ولدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) + f(x) = \frac{-(-x)^2 + 2(-x) - 1}{(-x)^2 + 1} + \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x - 1 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{-2(x^2+1)}{x^2+1} = -1$$

إذن $\Omega(0,-1)$ مركز تناظر لـ (C_f).

3) أ/ ؟

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$= \boxed{2x - 1}$

ب/ من أجل كل x حقيقي لدينا:

$f(x) - y_{(T)} = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+1} - 2x + 1$

$= \frac{-x^2+2x-1-2x^3-2x+x^2+1}{x^2+1}$

$= \boxed{\frac{-2x^3}{x^2+1}}$

لدينا: $x^2+1 > 0$

و لدينا: $-2x^3 = -2x \cdot x^2$

ومنه: $(x^2 \geq 0)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y_{(T)}$	$+$	ϕ	$+$	0	$-$

- (C_f) فوق (T) لما: $x < 0$
- (C_f) تحت (T) لما: $x > 0$
- (C_f) يخترق (T) في A

لا نستنتج أن A نقطة انعطاف لـ (C_f):
لأن (T) يخترق (C_f).

III

1) $\varphi(x) = f(-x+1)$

$= (f \circ g)(x)$

حيث $g(x) = -x+1$

2) لدينا:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$	$+$	ϕ	$+$	0	$-$	ϕ	$-$

- لدينا g متناقصة تماماً على $I =]0;2[$
- ولدينا f متزايدة تماماً على $g(I) =]-1;1[$

إذن: $\varphi = f \circ g$

متناقصة تماماً على $I =]0;2[$