★ محور: الدالة اللوغاريتمية ★

ثانوية الشهيد مصطفى بن بولعيد - المعاضيد - المسيلة

يسرني أن أتقدم لكم بهذا العمل المتواضع والمتمثل في مذكرات مادة الرياضيات لسنة ثالثة ثانوي شعبة:

علوم تجريبية ⋆ رياضيات ⋆ تقني رياضي

يتضمن هذا العمل:

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبكم في الله الأستاذ: فراحتية المحفوظ

آخر تحديث: 25 / 10 / 2024

السنة الدراسية: 2025 / 2026

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسيةو اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

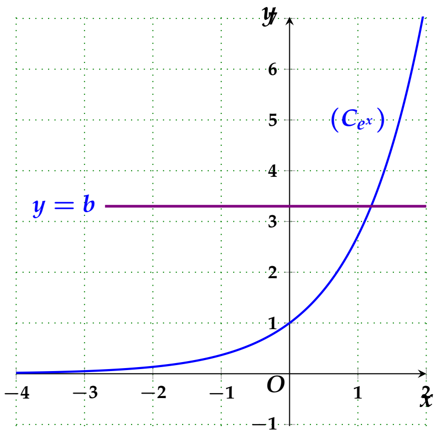
المكتسبات القبلية : خواص الـدوال الأسية
الكفاءات المستهدفة : حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم و الدوال الأسية و دوال القوى.
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت.

المراحل	عناصر المدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

مناقشة نشاط 02 صفحة 77

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
$exp(x)$	$-\infty$	b	$+\infty$



مرحلة بـنـاء مـعـارف

الدالة الأسية مستمرة و متزايدة تماما (رتيبة تماما)
على المجال $]-\infty;+\infty[$
ولدينا $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة و الرتابة ، من أجل كل عدد حقيقي
b من $]0;+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $\mathbb{R}$ بحيث $e^a = b$.
بوضع $a = \ln(b)$ نكون قد عرفنا دالة جديدة .

نعلم أن في حالة $b \leq 0$ المستقيم ذو المعادلة $y = b$ لا يقطع المنحنى (C_{e^x}) لأن $e^x > 0$
ومنه نستنتج حتى يكون للمعادلة $e^x = b$ حل يجب أن يكون $b > 0$ ، إذن نستنتج مجموعة تعريف الدالة ln
هي $]0;+\infty[$.

تعريف

تسمى هذه الدالة " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " و نرمز لها بالرمز "ln"

حساب بعض الصورة

لدينا : $e^a = b$ يعني $a = \ln(b)$
لدينا: $e^0 = 1$ يعني $\ln(1) = 0$
لدينا: $e^1 = e$ يعني $\ln(e) = 1$
لدينا: $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ يعني $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$
لدينا $e^2 = e^2$ يعني $\ln(e^2) = 2$
لدينا: $e^a = 2$ يعني $a = \ln(2) \approx 0,693$
إثبات أن $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$
نضع $a = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ومنه $e^a = \dfrac{1}{2}$ ونضع $b = -\ln(2)$ أي $-b = \ln(2)$ ومنه $e^{-b} = 2$
ومنه $e^a = \dfrac{1}{e^{-b}}$ إذن $e^a = e^b$ ومنه $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2) \approx -0,693$

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

اللوغاريتم النيبيري لعدد

تعريف ومبرهنة

✍ من أجل كل عدد حقيقي a من $]0,+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث : $e^b = a$ يسمى هذا العدد اللوغاريتم النيبيري للعدد a ونرمز له بالرمز $''lna''$

مــثال

العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 2$ هو $ln2$

تعريف الدالة $\ln$

تعريف

✍ نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز لها بالرمز $\ln$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln(x)$

نتـائج

✍ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، $x = e^y$ معناه $y = lnx$

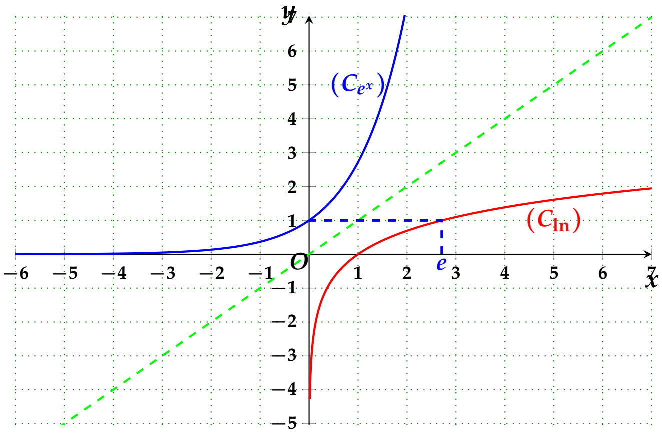
✍ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{lnx} = x$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $ln(e^x) = x$

✍ بما أن $e^0 = 1$ فإن $ln1 = 0$ ، وبما أن $e^1 = e$ فإن $lne = 1$

مــلاحظة: نعبر النتيجة 1 بالقول أن الدالة $''ln''$ هي الدالة العكسية لـ $''exp''$

متابعة مناقشة نشاط 02 صفحة 77

النقطتان $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ متناظرتان بالنسبة إلى المنصف الأول أي المستقيم الذي معادلته $y = x$
لتكن $M(a;b)$ تنتمي إلى (C) و هذا يعني أن $e^a = b$ إذن $\ln(b) = a$ فإن : $M'(b;a)$ تنتمي إلى (C') .
نستنتج أن المنحنين (C) و (C') متناضرين بالنسبة إلى المنصف الأول ذي المعادلة $y = x$



	✍ **وضع تخمينات** الدالة $\ln$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln(x)=-\infty$ **خاصية** ✍ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية واللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول). **تطبيق :** ليكن $(C_{\ln})$ التمثيل البياني للدالة $\ln$ في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ و ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f بين في كل حالة من الحالات التالية كيفية رسم (C_f) ، ثم أرسمه **1** $f(x)=-2+\ln(x)$ **2** $f(x)=-\ln(x)$ **3** $f(x)=\ln(x-2)$ **4** $f(x)=\|\ln(x)\|$ **تمارين منزلية** : تمرين 2 — 3 صفحة 102 **ملاحظات حول سير الدرس :**	التقويم

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
الوحدة التعلمية: الدوال اللوغاريتمية
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
ميدان التعلم: التحليل
المدة : 1 ساعة
موضوع الحصة : خواص الدالة اللوغاريتمية

المكتسبات القبلية : خواص الـدوال الأسية
الكفاءات المستهدفة : حل معادلات و المتراجحات بإستعمال خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق مرحلة بناء معارف	**التهيئة النفسية :** التذكير بالمكتسبات القبلية. **نشاط مقترح** من أجل a و b من $]0;+\infty[$ 1 قارن بين $e^{\ln(ab)}$ و $e^{\ln(a)+\ln(b)}$ ، ماذا تستنتج؟ 2 بين أن : $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$ 3 إستنتج $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ 4 بوضع $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$ ، إستنتج أن : $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)$ **مناقشة النشاط** 1 لدينا : $e^{\ln(ab)}=ab$ ولدينا $e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\ln(a)}\times e^{\ln(b)}=a$. ومنه $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ **الخاصية الأساسية** **خاصية** من أجل كل عددين حقيقين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ **مـلاحظة:** يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا: من أجل كل أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ,..., a_n من $]0;+\infty[$ $\ln(a_1\times a_2\times\cdots\times a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\cdots+\ln(a_n)$ **نتيجة** من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n : $\ln(a^n)=n\ln(a)$ **متابعة مناقشة النشاط** 2 $0=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=\ln(1)$ ومنه $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$ 3 $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$	

4 $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln(a)$ و $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$ إذن $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$ ومنه $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

ملاحظة: إذا كان x عدد حقيقي غير معدوم فإن $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$

اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية

خاصية

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

البرهان

a و b عددان حقيقيان كيفيان من $]0, +\infty[$ حيث $a < b$ ومنه $e^{lna} < e^{lnb}$ وبما أن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $lna < lnb$ ■

نتائج

من أجل كل عددين حقيقين a و b من $]0, +\infty[$

- $lna = lnb$ يعني $a = b$ • $lna < lnb$ يعني $a < b$
- $\ln(x) > 0$ يعني $x > 1$ • $\ln(x) < 0$ يعني $0 < x < 1$

تطبيق :

بسط العبارات التالية

1 $\ln(16) - \ln(4)$

2 $\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

3 $\ln(10000) + \ln(0,01)$

4 $e^{\ln(4)} + e^{-\ln(2)}$

تطبيق :

أحسب بدلالة n المجموع

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

تمارين منزلية : تمرين 60 صفحة 106

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

التقويم

مـذكـرة رقـم 19

الأستاذ : فراحتية المحفوظ

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حل معادلات و متراجحات

المكتسبات القبلية : خواص الـدوال الأسية و الوغاريتم
الكفاءات المستهدفة : حل معادلات و المتراجحات بإستعمال خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** التذكير بالمكتسبات القبلية. تذكير بخواص الدالة اللوغاريتم	
مرحلة بـــاء معـــارف	**حل المعادلات و المتراجحات** **طريقة:** لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)] = a$ (متراجحة من الشكل $ln[u(x)] < a$) نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة). نحل في D المعادلة $u(x) = e^a$ (المتراجحة $u(x) < e^a$). **تطبيق :** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية : $\ln(x) = 3$ ، $\ln(2x-3) = 1$ ، $\ln(\lvert 1-x\rvert) - 1 = 0$ $\ln(x) + \ln(4) > 0$ ، $\ln(-x^2+2x) < 0$ **طريقة:** لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)] = ln[v(x)]$ (متراجحة من الشكل $ln[u(x)] < ln[v(x)]$) نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة). نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$ (المتراجحة $u(x) < v(x)$).	
تقويم	**تطبيق :** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية : $\ln^2(x) - 1 = 0$ ، $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$ ، $\ln(\lvert 1-x\rvert) - \ln(3x) = 0$ ، $\ln(x) + \ln(4) = 0$ $\ln(-x^2+2x) > \ln(2x)$ ، $x\ln(x) - \ln(x) < 0$ **تمارين منزلية :** تمرين 68 – 67 صفحة 107 **ملاحظات حول سير الدرس :**	

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة
الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : دراسة الدالة اللوغاريتمية

المكتسبات القبلية : خواص الدالة الأسية
الكفاءات المستهدفة : دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** التذكير بالمكتسبات القبلية. تذكير بقواعد الحساب في الدالة الأسية	
مرحلة بناء معارف	## النهايات ### نشاط مقترح 1 1 بوضع $x = e^X$ إستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ 2 بوضع $x = e^X$ إستنتج أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty$ ### مناقشة النشاط 1 لما x يؤول إلى $+\infty$ فإن X يؤول إلى $+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(e^X) = \lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty$ 2 لما x يؤول إلى 0^+ فإن X يؤول إلى $-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} \ln(e^X) = \lim\limits_{X\to-\infty} X = -\infty$ **خواص** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty$ ## الإشتقاقية و الإستمرارية **خاصية** الدالة ln مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ ### نشاط مقترح 2 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = e^{\ln(x)}$ 1 أحسب $f'(x)$ بإستعمال مشتق مركب دالتين 2 إستنتج $\ln'(x)$ ### مناقشة النشاط 1 الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة f' حيث $f'(x) = \ln'(x)e^{ln(x)}$	

مرحلة بناء المعارف

2 نعلم أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=x$ أي $f'(x)=1$ ومنه $\ln'(x)e^{\ln(x)}=1$

أي $\ln'(x)=\dfrac{1}{e^{\ln(x)}}=\dfrac{1}{x}$

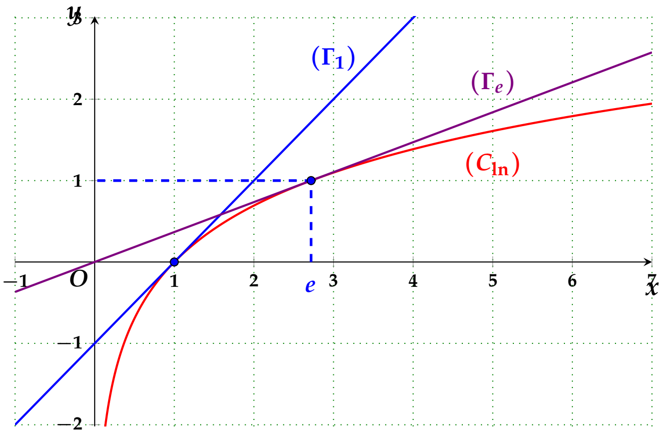
خاصية

الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+		
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗ 0	↗ 1	↗ $+\infty$

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية



التقويم

ملاحظة:

المنحنى الممثل للدالة $\ln$ يقبل حامل محور التراتيب كمستقيم مقارب

المنحنى الممثل للدالة $\ln$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته $y=x-1$

بإستعمال مفهوم العدد المشتق نجد: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$ أو $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(h+1)}{h}=1$

نتيجة

الدالة $x\mapsto x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto\ln(x+1)$ بجوار 0

أي : من أجل x قريب من 0 لدينا : $\ln(x+1)\approx x$

تطبيق :

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1-(\ln(x))^2$

أحسب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$

أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن α و β حيث : $0<\alpha<1$ و $2<\beta<3$

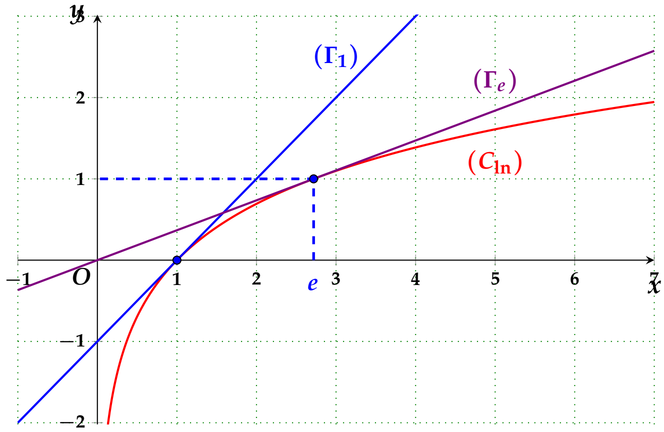
أرسم التمثيل البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

تـمريـــن منـــــزلي 1 :

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x)$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
A نقطة من (C_f) فاصلتها m حيث m عدد حقيقي موجب تماما . و (Γ_m) مماس لـ (C_f) في النقطة A .

1 أ) أثبت أن $y = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m)$ معادلة للمماس (Γ_m)

ب) تحقق أنّ المماس (Γ_e) للمنحنى (C_f) في النقطة $B\,(e;1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



2 لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m) - \ln(x)$

أ) أثبت أنّ الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و أحسب $g'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 إستنتج مماسبق أنّ المنحنى (C_f) يقع تحت أي مماس له .

4 أ) إستنتج من الجزء (I) أنه من أجل كل عددين حقيقين موجبين تماما m و x يكون $\ln(x) \leq ln(m) + \dfrac{x-m}{m}$

ب) إستنتج من (أ) أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون $\ln(m+1) - \ln(m) \leq \dfrac{1}{m}$

5 أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ المعرفة بـ $f(x) = \ln(x) + x - 1$ و إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x صحة المتباينة
$\ln(x) \leq x - 1$

6 أ) أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\ln(t+1) \leq t$

ب) بوضع : $x = \dfrac{1}{1+t}$ ، أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$

ج) إستنتج من أجل $t > -1$ صحة المتباينة : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

تـمريـــن منـــــزلي 2 :

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x)$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
A نقطة من (C_f) فاصلتها m حيث m عدد حقيقي موجب تماما . و (Γ_m) مماس لـ (C_f) في النقطة A .

1 أ) أثبت أن $y = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m)$ معادلة للمماس (Γ_m)

ب) تحقق أنّ المماس (Γ_e) للمنحنى (C_f) في النقطة $B\,(e;1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

2 لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m) - \ln(x)$

أ) أثبت أنّ الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و أحسب $g'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 إستنتج مماسبق أنّ المنحنى (C_f) يقع تحت أي مماس له .

4

أ) إستنتج مما سبق أنه من أجل كل عددين حقيقين موجبين تماما m و x يكون $\ln(x) \leq ln(m) + \dfrac{x-m}{m}$

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون $\ln(m+1) - \ln(m) \leq \dfrac{1}{m}$

5 أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ المعرفة بـ $f(x) = \ln(x) + x - 1$ و إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x صحة المتباينة $\ln(x) \leq x - 1$

6

أ) أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\ln(t+1) \leq t$

ب) بوضع : $x = \dfrac{1}{1+t}$ ، أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$

ج) إستنتج من أجل $t > -1$ صحة المتباينة : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

تمرين منزلي 3 :

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x)$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$
A نقطة من (C_f) فاصلتها m حيث m عدد حقيقي موجب تماما . و (Γ_m) مماس لـ (C_f) في النقطة A .

1 أ) أثبت أن $y = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m)$ معادلة للمماس (Γ_m)

ب) تحقق أنّ المماس (Γ_e) للمنحنى (C_f) في النقطة $B\,(e;1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

2 لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m) - \ln(x)$

أ) أثبت أنّ الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و أحسب $g'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 إستنتج مماسبق أنّ المنحنى (C_f) يقع تحت أي مماس له .

4 أ) إستنتج مما سبق أنه من أجل كل عددين حقيقين موجبين تماما m و x يكون $\ln(x) \leq ln(m) + \dfrac{x-m}{m}$

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون $\ln(m+1) - \ln(m) \leq \dfrac{1}{m}$

5 أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ المعرفة بـ $f(x) = \ln(x) + x - 1$ و إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x صحة المتباينة $\ln(x) \leq x - 1$

6 أ) أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\ln(t+1) \leq t$

ب) بوضع : $x = \dfrac{1}{1+t}$ ، أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$

ج) إستنتج من أجل $t > -1$ صحة المتباينة : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

تمارين منزلية : تمرين ...... صفحة ......

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

المكتسبات القبلية : خواص الدالة الأسية
الكفاءات المستهدفة : حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$
المراجع : الكتاب المدرسي، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** التذكير بالمكتسبات القبلية. التذكير بأهمية المعادلات التفاضلية **تمهيد** المعادلة التفاضلية هي معادلة المجهول فيها دالة نرمز إليها غالبا بالرمز y ، z ، ... كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى . حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق : $f'(x) = af(x) + b$	
مرحلة بناء معارف	**نشاط مقترح** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = Ce^{ax}$ مع c عدد حقيقي ثابت . • أحسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية : $y' = ay$ **المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay$ مع $a \neq 0$** **مبرهنة** a عدد حقيقي غير معدوم حلول المعادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $c \mapsto ce^{ax}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت . **مثال** لتكن الدالة العددية f المعرفةعلى لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y' + 2y = 0$ لدينا : $y' + 2y = 0$ معناه $y' = -2y$ ومنه حلول هذه المعادلة هي الدوال : $x \mapsto ce^{2x}$ حيث c عدد حقيقي ثابت **المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$** **مبرهنة** a عدد حقيقي غير معدوم حلول المعادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $c \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .	

التقويم

مــثال

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y' = -3y + 2$

حلول هذه المعادلة هي الدوال $x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$

خاصية

✍ من أجل كل ثنائية الأعداد حقيقية $(x_0; y_0)$ ، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تقبل حلا وحيدا يحقق : $f(x_0) = y_0$

تطبيق :

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E) \cdots 2y' + y = 1$

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E)
2. عيّن الحل الخاص للمعادلة (E) بحيث $f(-1) = 2$
3. أدرس تغيرات الدالة f ، ثم أرسم تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

تمارين منزلية : تمرين $106 - 105 - 102$ صفحة $110 - 109$

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 سـاعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : دالة اللوغاريتم العشري

المكتسبات القبليـة : خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري
الكفاءات المستهدفة : خواص الدالة اللوغاريتم العشري و تطبيقاتها
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التهيئة النفسية : التذكير بالمكتسبات القبلية.

نشاط مقترح

تعريف

نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي يرمز إليها بالرمز log والمعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

مرحلة بـــناء معـــارف

1 أحسب $log(1)$ ، $log(10)$

2 أثبت من أجل كل عددين حقيقين a و b من $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح n

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \qquad \log(a^n) = n\log(a)$$

3 (إعتماد على دالة ln) أدرس إتجاه تغير الدالة log ، ثم أشرح كيف يمكن إنشاء منحناها البياني

مناقشة النشاط

1 $\log(1) = \dfrac{\ln(1}{\ln(10)} = 0$ ، $\log(10) = \dfrac{\ln(10}{\ln(10)} = 1$

2 $\log(ab) = \dfrac{\ln(ab)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)} + \dfrac{\ln(b)}{\ln(10)} = \log(a) + \log(b)$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln(10)} = \frac{\ln(a)-\ln(b)}{\ln(10)} = \frac{\ln(a)}{\ln(10)} - \frac{\ln(b)}{\ln(10)} = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln(10)} = \frac{n\ln(a)}{\ln(10)} = n\log(a)$$

3 **إتجاه تغير**

لدينا : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

$10 > 1$ و منه $\ln(10) > 0$ إذن $\dfrac{1}{\ln(10)} > 0$

لدينا الدالة ln متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ومنه الدالة $\dfrac{\ln}{10}$ متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

إذن الدالة log متزايدة تاما على $]0; +\infty[$ (تترك للتلميذ بإستعمال المشتق)

النهايات

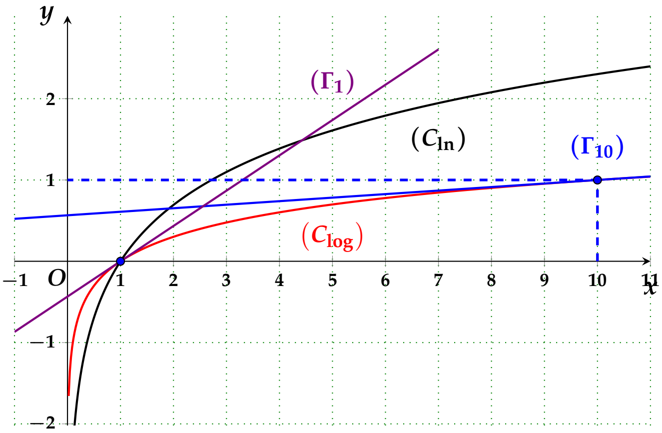
$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = +\infty \qquad \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \log(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة اللوغاريتم العشري

x	0	1	10	$+\infty$
$\log'(x)$		$+$		
$\log(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتم العشري ln

نضرب ترتيبة النقطة من $(C_{\ln})$ فاصلتها x في العدد $\dfrac{1}{\ln(10)}$



بعض إستعمالات اللوغاريتم العشري

في الكيمياء:

تقاس درجة حموضة محلول بالـ PH الذي يساوي $PH = -\log\left[H_3O^+\right]$ حيث $\left[H_3O^+\right]$ هو تركيز شوارد H_3O^+ في المحلول مقاسة بواحد مول في اللير .

1 ماهي قيمة PH علما أن المحلول يحتوي على 5×10^{-8} من شوارد H_3O^+ في اللتر الواحد .

2 ماهو التركيز المولي بشوارد H_3O^+ لمحلول معتدل $(PH = 1)$ ؟

في علم الزلزال:

يشير المقدار I_0 إلى شدة قاعدية مرجعية ، و عندها نقول إن درجة زلزال شدته I تساوي M. إذا علمت أن $M = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ ، فما درجة الزلزال الذي وقع في لوس انجلوس عام 1971 إذا علمت أن $I = 50,01 \times 10^6 I_0$

في علم الصوتيات:

تعطى الشدة $\mathcal{I}$ مقاسة بالدسيبل لصوت إستطاعته $\mathcal{P}$ بالصيغة $10\log\left(\dfrac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}\right)$ حيث تمثل $\mathcal{P}_0$. حدّ الصوت المسموع به ، الذي لا يسمع أي صوت إستطاعته أدنى منه .

معرفة عدد الأرقام في الكتابة العشرية:

نعتبر العدد الطبيعي n حيث : $n = 2^{1234}$

1 عيّن بإستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log(n)$.

2 إستنتج الحصر التالي : $10^{371} \leq n < 10^{372}$.

3 حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n .

التقويم

تطبيق :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

1 $\log(x) = 4$

2 $\log(x) = -3$

3 $\log(x) = 0,01$

4 $\log(x) < -10$

5 $\log(x) < \log(1-x)$

تطبيق :

1 أحسب المجموع التالي :

$$S = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) + \log\left(\frac{4}{5}\right) + \log\left(\frac{5}{6}\right) + \log\left(\frac{6}{7}\right) + \log\left(\frac{7}{8}\right) + \log\left(\frac{8}{9}\right) + \log\left(\frac{9}{10}\right)$$

2 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\log\left(\frac{x+3}{x-4}\right) - 1 < 0$

3 حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية :

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$$

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد

المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : دراسة الدالة $\ln \circ u$

المكتسبات القبلية : النهايات، الاشتقاقية ،اتجاه التغير،خواص الدالة اللوغاريتمية

الكفاءات المستهدفة : دراسة الدالة $\ln \circ u$

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق مرحلة بــنـاء مـعـــارف	انظر أدناه	

التهيئة النفسية : التذكير بالمكتسبات القبلية. تذكير بنهاية و مشتق مركب دالتين

النهايات

مبرهنة

a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

نعتبر الدوال التالية u ، $\ln x$ و f حيث $f = \ln \circ u$ و u معرفة وموجبة على مجال I

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} \ln x = c$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

مـــثال

f دالة عددية معرفة على $]4; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x-4)$

لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} (x-4) = 0^+$ وبما أن $\lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0} \ln(X) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \ln(x-4) = -\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-4) = +\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

تطبيق :

احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)]$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

إتجاه التغير

مبرهنة

إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس إتجاه التغير على المجال I

البـرهـان

بماأن الدالة $\ln$ متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

فإن للدالتين $\ln \circ u$ و u نفس إتجاه التغير على I (حسب المبرهنة الخاصة بإتجاه تغير دالة مركب) ■

مرحلة بناء المعارف

مثال

f دالة عددية معرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$

لدينا $x\mapsto -\frac{1}{x}$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

مشتقة $\ln\circ u$

خاصية

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln\circ u$ قابلة للإشتقاق على I

ولدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

البـرهـان

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على I و موجبة تماما من أجل كل x من I

لدينا : الدالة $\ln$ قابلى للإشتقاق على $]0;+\infty[$ إذن $\ln\circ u$ قابلة للإشتقاق على I

من أجل كل x من I $(\ln\circ u)'(x)=u'(x)(\ln'\circ u)(x)=u'(x)\ln'((u(x))$ ولدينا: $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

أي $\ln'(u(x))=\frac{1}{u(x)}$ ومنه $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ■

مـلاحظة: إذا كانت u سالبة على المجال I فإن

$$(\ln\circ(-u))'(x)=\frac{-u'(x)}{-u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

نتيجة : $(\ln\circ|u|)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

التقويم

مثال

عيّن مشتقة الدالة f في كل حالة

1 $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad I=]1;+\infty[$

2 $f(x)=\ln|2x-1|$ $\quad I=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$

3 $f(x)=\ln(x^2-3x)$ $\quad I=]3;+\infty[$

تطبيق :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln|x^2-x-2|$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أدرس تغيرات الدالة f

2 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$

3 أنشئ (T) و (C_f).

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....