الأستاذة: يحياوي

تجميعية تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

الشعبة: تسيير وإقتصاد

تمرين 1

باك 2025 م 1

❶ (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n $\quad u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5}$

(أ) احسب الحدين u_1 و u_2، ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(ب) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n < 4$.

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

❷ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$، ثم اكتب v_n بدلالة n.

(ب) استنتج كتابة u_n بدلالة n، ثم احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❸ نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

(أ) بيّن أن: $S_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 4n - 1$

تمرين 2

باك 2025 م 2

❶ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2}{5}x + 1$

(أ) حدّد اتجاه تغيّر الدالة f ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = x$

❷ (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$

(أ) احسب u_1 ثم عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{3}$.

❸ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{5}{3}$.

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$، ثم اكتب v_n بدلالة n.

(ب) استنتج كتابة u_n بدلالة n، ثم احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❹ نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

(أ) بيّن أن: $S_n = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{9}$.

تمرين 3

باك 2024 م 1

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3}$

❶ احسب u_1 و u_2.

❷ (أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 < u_n \leq 0$.

(ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

❸ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 2$

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ثم بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2.$$

(ج) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❹ من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

$$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

(أ) احسب S_n بدلالة n ثم استنتج T_n بدلالة n.

تمرين 4

باك 2024 م 2

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$.

❶ احسب u_1 و u_2.

❷ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$.

(ب) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

❸ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 2$.

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ثم بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$$

(ج) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❹ أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$
$$T_n = \frac{1}{2+u_0} + \frac{1}{2+u_1} + \frac{1}{2+u_2} + \cdots + \frac{1}{2+u_n}$$

تمرين 5

باك 2023 م 1

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5}$.

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -3$

❷ بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

❸ (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = u_n + 3$$

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$، يطلب تعيين حدها الأول v_0.

(ب) عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n، ثم استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3$.

(ج) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❹ نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

(أ) احسب S_n بدلالة n ثم بين أنه من إجل كل عدد طبيعي n:

$$T_n = \frac{19}{2} - 3n - \frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

.

تمرين 6

باك 2023 م 2

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 4$.

❷ بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

❸ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$.

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، يطلب تعيين حدها الأول v_0.

(ب) عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$.

(ج) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❹ نضع

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

(أ) احسب S_n بدلالة n ثم بيّن أن من أجل كل عدد طبيعي n:

$$T_n = 4n + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

تمرين 7

باك 2022 م 1

المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r حيث:

$$\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 21 \\ u_4 + u_5 = 20 \end{cases}$$

❶ (أ) بيّن أن $r = 2$ و $u_3 = 7$ ثم استنتج قيمة u_0.

(ب) اكتب u_n بدلالة n.

(ج) احسب، بدلالة n، المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

❷ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 \times 2^{2n}$

(أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$، ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n).

(ب) احسب، بدلالة n، المجموع

$$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

❸ نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = \frac{2}{3}v_n$

(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = 2^n u_n$.

(ب) احسب $p_n = w_0 \times w_1 \times \cdots \times w_{n-1}$.

تمرين 8

باك 2022 م 2

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -2$ و $u_{n+1} = 5u_n + 20$

❶ (أ) احسب u_1 و u_2.

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} + 5 = 5(u_n + 5)$.

❷ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -5$.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

❸ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 5$.

(أ) تحقق أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 5، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

❹ احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

تمرين 9

باك 2021 م 1

المتتالية العددية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$

❶ (أ) احسب الحدود u_0, u_1, u_2.

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

(ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

❷ من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$v_n = u_n - 1$$

(أ) احسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

(ب) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

❸ من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

(أ) احسب بدلالة n عبارة S_n.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S'_n = n + \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

تمرين 10

باك 2021 م 2

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 5$ و: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

❶ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

(ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(ج) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

❷ من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$v_n = u_n - 3.$$

(أ) احسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

(ب) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

❸ من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

(أ) احسب بدلالة n عبارة S_n.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S'_n = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

تمرين 11

باك 2020 م 1

يتقاضى موظف خلال 2019 راتباً شهرياً ثابتاً يقدر بـ $70\,000DA$ ، في شهر جانفي استهلك منه 80% وابتداءً من شهر فيفري قرر تخفيض مبلغ الإستهلاك شهرياً بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله.

❶ (أ) ما هو المبلغ المستهلك في شهر جانفي؟

(ب) حدّد المبلغ المستهلك في شهر فيفري.

❷ نضع u_n المبلغ المستهلك في الشهر الذي ترتيبه n حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

(أ) عبّر عن u_{n+1} بدلالة u_n واستنتج أن (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95.

❸ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

❹ (أ) احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019.

(ب) أوجد المبلغ المدّخر خلال هذه السنة.

تمرين 12

باك 2020 م 1

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2}$.

❶ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < \frac{9}{2}$.

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = u_n - \frac{9}{2}.$$

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$، مع حساب حدها الأول v_0.

(ب) عبّر عن v_n بدلالة n ثم احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❸ نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

(أ) أحسب S_n بدلالة n.

تمرين 13

باك 2020 م 2

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7}$$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 3$.

❷ ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

❸ المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 3$.

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n.

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2\left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$, و احسب نهاية (u_n).

❹ عيّن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n < \frac{7}{2}$.

تمرين 14

باك 2019 م 1

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:
$u_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n
$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

❶ (أ) احسب كلا من u_1 و u_2.

(ب) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n, $u_n < 8$.

❷ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، واستنتج أنها متقاربة.

❸ من أجل كل عدد طبيعي n، نضع:
$v_n = u_n - \alpha$، حيث α عدد حقيقي.

(أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$.

(ب) عيّن قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ويطلب تعيين حدها الأول v_0.

(ج) نضع $\alpha = 8$، عبّر عن v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.

❹ احسب المجموع S_n بدلالة n حيث:
$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

تمرين 15

باك 2019 م 2

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$

❶ احسب حدها الأول u_0 وأساسها r.

❷ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

❸ بيّن أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية ثم احسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث:

$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{1344}$
$S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{1344}$.

❖ استنتج حساب المجموع S_3 حيث:

$S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{1343}$.

❹ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{6-2u_n}$.

(أ) احسب المجموع:

$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}$.

تمرين 16

باك 2018 م 1

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي:
$u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$u_{n+1} = 0.7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$

❶ برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.7، واطلب تعيين حدها الأول v_0، وكتابة عبارة v_n بدلالة n.

❷ (أ) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n.

(ب) عيّن اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة، ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$.

❶ ما هو عدد المشتركين في سنة 2017؟ ثم في سنة 2018؟

❷ (أ) برّر العبارة:

$$u_{n+1} = 0.7u_n + 6.$$

(ب) ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك؟

تمرين 17

باك 2018 م 2

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:
$u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،
$2u_{n+1} = u_n + 6$

❶ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 6$.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = u_n - 6.$$

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ويطلب حساب حدها الأول v_0.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❸ احسب بدلالة n ما يلي:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$
$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$$

تمرين 18

باك 2017 م 1

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

❶ (أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 3$.

(ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

❷ (v_n) المتتالية المعرفة بـ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 3 - u_n$.

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$، ثم عيّن حدها الأول.

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. بيّن أن:

$$S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

تمرين 19

باك 2017 م 2

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل n:
$u_{n+1} = 3u_n - 2$.

❶ احسب u_1, u_2, u_3، ثم خمّن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

❷ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل n طبيعي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3، يطلب تعيين حدها الأول.

(ب) عيّن v_n بدلالة n، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

❸ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}.$$

(أ) احسب S_n بدلالة n.

تمرين 20

باك 2016 م 1

(V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $V_0 = 18$ والعلاقة:

$$V_0 + V_1 + V_2 = 38.$$

❶ بيّن أن أساس المتتالية (V_n) هو: $q = \frac{2}{3}$.

❷ (أ) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (V_n).

(ج) احسب نهاية (V_n).

❸ نضع: $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$.

(أ) احسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

(ب) جد العدد الطبيعي n بحيث:

$$S_n = \frac{3510}{81}.$$

تمرين 21

باك 2016 م 2

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$U_0 = 5, \qquad U_{n+1} = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7}.$$

❶ احسب الحدين U_1 و U_2.

❷ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > 1$.

(ب) بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

(ج) ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (U_n)؟

❸ لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - 1$.

(أ) بيّن أن (V_n) متتالية هندسية، وعيّن أساسها وحدها الأول.

(ب) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n.$$

(ج) احسب نهاية (U_n).

تمرين 22

باك 2015 م 1

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

❶ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام:

$$u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}.$$

(أ) $n = 31$

(ب) $n = 32$

(ج) $n = 33$

❷ (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4. قيمة n التي من أجلها يكون:

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2015.$$

(أ) (u_n) حسابية.

(ب) (u_n) هندسية.

(ج) (u_n) ليست هندسية ولا حسابية.

تمرين 23

باك 2015 م 2

بيّنت دراسة أن 5% من عمّال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنوياً، وبالمقابل يُوظّف 3000 عامل سنوياً. علماً أنّه في سنة 2012 كان عدد العمال 50000. نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$، أي: $u_0 = 50$.

❶ احسب u_1 و u_2.

❷ (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 0.95\,u_n + 3$.

(ب) بيّن أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

❷ من أجل كل عدد طبيعي n نضع

$$v_n = 60 - u_n.$$

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

(ج) قدّر عدد العمال في سنة 2017.

(د) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(ه) احسب نهاية المتتالية (u_n). هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

تمرين 24

باك 2014 م 2

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي:
$u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،
$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

❶ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -3$.

(ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

❷ لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و

$$\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18.$$

(أ) بيّن أن:

$$\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}.$$

(ب) احسب الأساس q ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = v_n - 3$، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

تمرين 25

باك 2013 م 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ:
$u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$ حيث a وسيط حقيقي.

❶ عين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

❷ نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية، ثم أحسب عندئذ u_n ومجموع n حداً الأولى من المتتالية.

❸ عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حداً الأولى منها.

❹ نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3^n + 2$

ثم بيّن أن:

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + 4n + 3\right).$$

تمرين 26

باك 2013 م 2

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي: $U_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،
$U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 6$

❶ (أ) احسب الحدود: U_4, U_3, U_2, U_1.

(ب) هل المتتالية (U_n) رتيبة على $\mathbb{N}$؟ برر إجابتك.

❷ (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(U_n - 4).$$

(ب) استنتج أن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - 4$ هندسية، وعيّن أساسها وحدها الأول.

(ج) اكتب V_n ثم U_n بدلالة n.

(د) بيّن أن (U_n) متقاربة.

❷ باستعمال عبارة U_n، تأكد ثانية من نتيجة السؤال (1-ب).

تمرين 27

باك 2012 م 1

لنكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}.$$

❶ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > \frac{2}{3}$.

(ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

❷ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية،يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل .

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right].$$

(ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

❸ احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

تمرين 28

باك 2012 م 2

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000 DA في صندوق التوفير والاحتياط. يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.
يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000 DA (بعد حساب الفوائد).
نرمز بـ (u_n) إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$.

❶ (أ) احسب كلا من u_0, u_1, u_2.

(ب) هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية ؟ برر إجابتك.

(ج) بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} = 1{,}05\, u_n - 5000.$$

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = u_n - 100000.$$

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية. حدد أساسها وحدّها الأول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n = -50000 \times (1{,}05)^n + 100000.$$

❸ (أ) ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

(ب) ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

تمرين 29

باك 2011 م 2

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$

❶ احسب u_1 و u_2.

❷ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n > \frac{1}{3}.$$

❸ بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

❹ لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

(ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n).

تمرين 30

باك 2010 م 1

❶ n عدد طبيعي، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = 1 + e + e^2 + \cdots + e^n$$

(S_n هو مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1 يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري.)

❷ لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$.

بيّن أن: $w_n = u_n + v_n$

حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية. يطلب تعيين الحد الأول والأساس لكل منهما.

❸ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$4+6+8+\cdots+(2n+4) = (n+1)(n+4).$$

❹ استنتج المجموع S بدلالة n حيث:

$$S = w_0 + w_1 + \cdots + w_n.$$

تمرين 31

باك 2010 م 2

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$$

❶ احسب الحدود u_1, u_2, u_3.

❷ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 2$.

(ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

❸ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$.

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية، وعيّن أساسها وحدها الأول.

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج أنّه من أجلكل عدد طبيعي n: $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

(ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

❹ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

واستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2.$$

تمرين 32

باك 2009 م 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1} = u_n + 4$

❶ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n \leq 2$.

(ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(ج) استنتج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = u_n - 2.$$

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

(ب) اكتب الحد العام v_n بدلالة n، ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n.

(ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❸ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

تمرين 33

باك 2009 م 2

(U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $U_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = 3U_n - 2$

❶ احسب U_1 و U_2.

❷ لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بـ:

$$V_n = U_n - 1.$$

(أ) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0.

(ب) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n.

❸ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_{n+1} - U_n = (-4) \times 3^n$$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n).

❹ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$U_0 + U_1 + \cdots + U_n = n - 79.$$

تمرين 34

باك 2008 م 1

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

❶ **برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.**

❷ **في كل ما يلي $\alpha = 2$، و نعرف المتتالية (v_n) كما يلي:** $v_n = u_n + \frac{8}{3}$.

(أ) **احسب** u_1, u_2.

(ب) **أثبت أن (v_n) متتالية هندسية. عيّن أساسها q وحدها الأول v_0.**

(ج) **اكتب عبارة u_n بدلالة n. واحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 35

باك 2008 م 2

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي:

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n - 1$$

❶ **احسب** u_3, u_2, u_1.

❷ (أ) **أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n \geq -2$.**

(ب) **جد اتجاه تغير المتتالية (u_n).ماذا تستنتج ؟**

❸ **(v_n) المتتاليةالعددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:**

$$v_n = u_n + 2$$

(أ) **بيّن أن (v_n) متتالية هندسية.**

(ب) **عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم** u_n.

(ج) **احسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❹ **أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :** $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$