مذكرة : رقم 01

ثانوية: أول نوفمبر 1954
المستوى: 3 ع ت – 3 تق – 3

المحور: الدالة اللوغاريتمية
الموضوع: الدالة اللوغاريتمية .

الأستاذة: يماني ليلى
المدة: ساعة واحدة.

الكفاءات المستهدفة :- الدالة اللوغاريتمية : تعريف وخواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات
الإشتقاق طريقة أولر التفاضل	**نشاط :** إنطلاقا من بيان الدالة $x \mapsto e^x$ وليكن (C) في مستوي معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. 1) أنشئ نظير البيان (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$. وليكن (C') بيان الدالة f . 2) خمن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 3) شكل جدول تغيرات الدالة f 5) إنطلاقا من البيان عين إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ 4) عين صورة العدد 1 بالدالة f وكذلك العدد e مدخل: الدالة الأسية $x \mapsto e^x$ مستمرة و متزايدة على $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$ و لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة $e^x = b$ حيث $b \in]0;+\infty[$ حل وحيد a من $\mathbb{R}$ أي: $e^a = b$ نضع: $a = \ln(b)$ و يسمى **اللوغاريتم النيبيري** للعدد a 1) اللوغاريتم النيبيري لعدد : مبرهنة وتعريف : من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$ يسمى هذا العدد اللوغاريتم النيبيري للعدد a و نرمز له بـ $\ln a$ **مثال :** - العدد الحقيقي x الذي يحقق $e^x = 6$ هو $x = \ln 6$ - العدد الحقيقي x الذي يحقق $e^x = \frac{1}{2}$ هو $x = \ln\frac{1}{2}$ 2) تعريف الدالة $\ln$:	45 د 10 د 10 د 10 د	استعمال الآلة الحاسبة لإستخراج قيمة تقريبية للعدد e

تعريف :

نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\ln$ " والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$

10د

نتائج :

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$: $x = e^{y}$ يعني $y = \ln x$

2) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $e^{\ln x} = x$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\ln\left(e^{x}\right) = x$

4) بما أن $e^{0} = 1$ معناه $\ln 1 = 0$

و بما أن $e^{1} = 1$ معناه $\ln e = 1$

10 د

ملاحظة :

نقول أن دالة اللوغارتم النيبيري " $\ln$ " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " $\exp$ "

2) الخواص الجبرية للدالة $x \mapsto \ln x$:

نشاط :

15 د

باستعمال الألة الحاسبة العلمية قارن بين :

(1 $\ln(2) + \ln(3)$ و $\ln(6)$

(2 $2\ln(3)$ و $\ln(9)$

(3 $\ln(2) - \ln(3)$ و $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

10 د

(4 $-\ln(3)$ و $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

الخاصية الأساسية:

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y لدينا :

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

البرهان :

ليكن x و y عددان حقيقيان من $]0;+\infty[$:

نضع $a = \ln(x \times y)$ يكافيء $x \times y = e^{a}$

$b = \ln x + \ln y$ يكافيء

$e^{b} = e^{\ln x + \ln y}$

$e^{b} = e^{\ln x} \times e^{\ln y}$

$e^{b} = x \times y$

$e^{b} = e^{a}$

إذن: $a = b$ أي: $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

مثال:

$\ln(5 \times 7) = \ln 5 + \ln 7$

$\ln(30) = \ln 3 + \ln 10$

الأستاذة: يماني ليلى

ملاحظة :

يمكن تعميم هذه الخاصية من أجل عدة أعداد حقيقية من $]0;+\infty[$: x و y و z:

$$\ln(x\times y\times z)=\ln x+\ln y+\ln z$$

نتائج :

x و y عددان حقيقيان من $]0;+\infty[$ و n عدد صحيح نسبي :

1) $\ln(x\times y)=\ln x+\ln y$

2) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

3) $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$

4) $\ln(x^n)=n\ln x$

5) $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln x$

البرهان: (باستعمال الخاصية الأساسية)

أمثلة:

تبسيط A و B مع :

$$A=\ln(2)+\ln(8e)-\ln\left(4e^2\right)$$

$$B=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)$$

3) دراسة الدالة $x\mapsto\ln x$:

أ- النهايات :

خواص :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$

ب- الإستمرارية و الإشتقاقية :

خواص :

الدالة "ln" مستمرة و قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ **ولدينا :**

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

البرهان :

- نقبل بدون برهان أن الدالة " ln " قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$
- من أجل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $x=e^{\ln x}$.

نضع : $f(x)=e^{\ln x}$ و منه : $f'(x)=(\ln x)'e^{\ln(x)}$

من جهة أخرى : $f(x)=x$ إذن : $f'(x)=1$

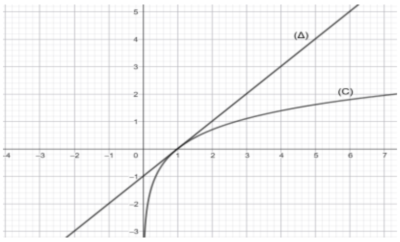
ومنه : $1=(\ln x)'e^{\ln(x)}$ أي : $1=(\ln x)'x$

أي : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

-نلاحظ أن إشارة $(\ln x)'$ موجبة تماما على $]0;+\infty[$ وعليه الدالة " ln " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

جـ - جدول التغيرات والمنحنى البياني :

دالة اللوغارتم النيبيري متزايدة تماما على $]0;+\infty[$



x	0		1		$+\infty$
$(\ln x)'$		+		+	
$\ln x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

(C) منحنى الدالة " ln " يقبل مماس (Δ) عند النقطة $A(1;0)$ معادلته : $y = x - 1$

(C) يقبل محور التراتيب ، مستقيم مقارب له.

ملاحظات ونتائج :

1) منحنى الدالة اللوغاريتم يناظر منحنى الدالة الأسية بالنسبة للمنصف الأول.

2) من تعريف العدد المشتق :

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\frac{1}{1}$$

أي: $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

3) أحسن تقريب تآلفي للعدد $\ln(x+1)$ بجوار 0 هو x أي:
:

$\ln(x+1) \approx x$; x قريب جدا إلى 0

4) من أجل كل عددين حقيقيين x و y من $]0;+\infty[$ لدينا :

$\ln x = \ln y$ معناه $x = y$

$\ln x < \ln y$ معناه $x < y$

5) إشارة $\ln x$:

x	0		1		+∞
lnx		-		+	

تمرين :

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$.

(C) تمثيلها البياني في مستوي معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب نهايات الدالة f .

2- أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارتها ، مستنتجا إتجاه تغير الدالة f.

		3- حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم فسر النتائج هندسيا. 4- أرسم (C)	
			الوسائل المستعملة

الأستاذة: يماني ليلى

مذكرة : رقم 02

ثانوية: أول نوفمبر 1954
المستوى: 3 ع ت – 3 تر – 3 ر

المحور: الدالة اللوغاريتمية
الموضوع: حل معادلات ومتراجحات باستعمال خواص الدالة اللوغاريتمية .

الأستاذة: يماني ليلى
المدة: ساعتان.

الكفاءات المستهدفة :- حل معادلات ومتراجحات باستعمال خواص الدالة اللوغارتمية النيبيرية
- حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتميات .

ملاحظات	المدة	سير الدرس	الكفاءات القبلية
تنبيه التلاميذ للمجموعة المرجعية	10 د 45 د 45 د 20 د	**نشاط 1 :** حل على المجال $]2;+\infty[$ المعادلة التالية : $\ln(x+2)=\ln(4x-8)$. **نشاط 2 :** حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلات التالية : 1) $\ln(x-1)=-2$. 2) $\ln(x^2+x+1)=\ln(-2x+5)$. 3) $\ln(x+2)+\ln(3x+2)=\ln 32$. 4) $2\ln(x)-3=0$ **تنبيه :** يجب تعيين المجموعة المرجعية أولا . **نشاط 3:** 1) حل في المجال $]1;+\infty[$ المتراجحتين التاليتين : $\ln(x-1)<1$ $\ln(x^2-1)\geq\ln(x)$ 2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين التاليتين التالية : $\ln(x^2+x+1)\geq 0$ $2\ln(x+2)\geq 2\ln(x)$ **تطبيق :** $p(x)$ كثير حدود للمتغير الحقيقي x مع : $p(x)=x^3+4x^2+x-6$. 1) بين أن العدد 1 جذر لـ $p(x)$. 2) عين كثير الحدود $g(x)$ حتى يكون: $p(x)=(x-1)g(x)$ 3) استنتج حلول المعادلة $p(x)=0$ في $\mathbb{R}$ 4) عين حلول المعادلة التالية على المجال $]0;+\infty[$: $(\ln x)^3+4(\ln x)^2+(\ln x)-6=0$	الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتمية

5) استنتج حلول التالية على المجال $]1;+\infty[$:

$$(\ln x)^3+4(\ln x)^2+(\ln x)-6\geq 0$$

<u>نتيجة :</u>

a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$.

لدراسة إشارة ثنائي الحد $a\ln x+b$ على المجال $]0;+\infty[$ نتبع ما يلي:

1) نقوم بحل المعادلة $a\ln x+b=0$.

2) نستعمل جدول الإشارة بالنحو التالي:

x	0		$e^{-b\backslash a}$		$+\infty$
alnx+b	||	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

الوسائل المستعملة

الأستاذة: يماني ليلى

مذكرة : رقم 03

ثانوية: أول نوفمبر 1954 المستوى: 3 ع ت – 3 تر– 3 ر	المحور: الدالة اللوغاريتمية الموضوع: دراسة الدالة $\ln of$	الأستاذة: يماني ليلى المدة: ساعة واحدة

الكفاءات المستهدفة :- دراسة الدالة $\ln of$

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات
خواص الدالة الوغارتمية مشتق دالة مركبة	**نشاط :** نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;2[$ بـ : $g(x)=\ln(2-x)$. 1)أكتب الدالة g على الشكل : $g=hof$ حيث h هي الدالة الوغارتمية و f دالة يطلب تحديدها. 2) باستعمال نهاية دالة مركبة أحسب نهايات الدالة g. 3) باستعمال مشتقة دالة مركبة عين بدلالة x عبارة $g'(x)$ ، ثم أدرس إشارتها. 4) بإعتبار f قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ ، خمن عبارة g' حيث: $g=\ln of$ ، **1) النهايات :** لدراسة نهاية الدالة $\ln of$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة. **أمثلة:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+1);\ \lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+1);\ \lim\limits_{x\to 3}\ln(6x-2)$ **2) المشتقة وإتجاه التغير:** **خاصية 1 :** إذا كانت f دالة قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على مجال I، فإن الدالة $\ln of$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I ، $(\ln of)'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ **البرهان :**..... **خاصية 2 :** إذا كانت f دالة قابلة وموجبة تماما على مجال I فإن للدالتين f و $\ln of$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I . **مثال 1 :** أوجد مشتقة الدالة g، ثم عين اتجاه تغيرها على المجال I في الحالتين التاليتين:	15 د 5د 20 د	

	20 د	$1)\ g(x) = \ln(2x - 4); I =]2;+\infty[$ $2)\ g(x) = \ln(e^x + 2); I = \mathbb{R}$ **<u>تطبيق :</u>** f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^* - \{0\}$ بـ: $f(x) = \ln\left\|\frac{x-1}{x}\right\|$ 1/ أدرس تغيرات الدالة f 2/ بين أن (C_f) منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها. 3/ أرسم (C_f)	
		وسائل الإنشاء، ورقة ميليمترية	الوسائل المستعملة

الأستاذة: يماني ليلى

مذكرة : رقم 04

ثانوية: أول نوفمبر 1954 المستوى: 3 ع ت – 3 تر– 3 ر	المحور: الدالة اللوغاريتمية الموضوع: تعريف اللوغارتم العشري	الأستاذة: يماني ليلى المدة: ساعة واحدة

الكفاءات المستهدفة :- تعريف اللوغارتم العشري

الكفاءات القبلية	سير الدرس	المدة	ملاحظات
خواص الدالة الوغارتمية	**نشاط :** **تعريف :** نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز لها بـ:"$\log$" و المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ **1) أ- أحسب** $\log 1$ ، $\log 10$ **ب- أثبت أنه من أجل كل عددين** x **و** y **من** $]0;+\infty[$ **:** $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ و $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$ **ج - أثبت أن :** $\log(10^n) = n$ **مع** $n \in \mathbb{Z}$. **2) أ- أدرس تغيرات الدالة** $\log$. **ب- أنشئ** (C) **منحنى الدالة** $\log$ **في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس .** **ج- أثبت أنه إذا كان** x **عددا حقيقيا يحقق :** $10^n \le x \le 10^{n+1}$ **فإن** $n \le \log x \le n+1$ ، **ملاحظة:** **للدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة وهامة في مختلف المواد وبصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء والجغرافيا.**		
الوسائل المستعملة	وسائل الإنشاء، ورقة ميليمترية		

الأستاذة: يماني ليلى