التمرين الأول:

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) أدرس تغيرات الدالة g.
2) بيّن أن المعادلة $g(\alpha) = 0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]2,3[\ ; \ ]2,1$
3) عيّن إشارة $g(x)$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1 \ ; \ 1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

1) أحسب نهايات الدالة f.
2) بيّن أنه من اجل $x \in \mathbb{R} - \{-1 \ ; \ 1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
3) عيّن تغيرات الدالة f ،ثم شكّل جدول تغيراتها.
4) بيّن أن: $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$.
5) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).
ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).
6) بيّن أن : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha + 2$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
7) أنشئ (Δ) و (C_f) ، ثم ناقش عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = |m|$

التمرين الثاني:

1) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = |-2x + 6| - \frac{5}{x+1}$$

أ) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 3$ من اليسار ومن اليمين ، ماذا تستنتج ؟
ج) فسّر النتائج هندسيا.
د) اكتب معادلتي نصفي المماسين.

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = |-x^2 - 4x - 4|$$

أ) أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x = -2$ من اليسار ومن اليمين ، ماذا تستنتج ؟
ج) فسّر النتائج هندسيا.

3) h دالة معرفة على $]-\infty \ ; \ -2]$ بـ:

$$h(x) = \sqrt{-4x - 8} - 3$$

أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h على يسار القيمة $x = -2$ ، ماذا تستنتج ؟
ب) أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

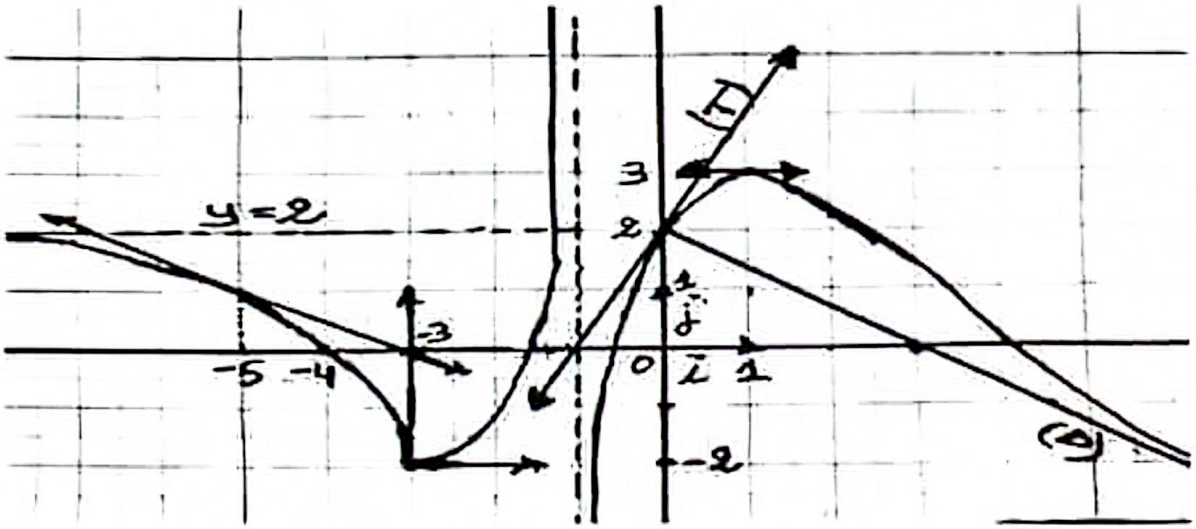
4) k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$k(x) \begin{cases} = \frac{1 - \sqrt{x^2+1}}{x} & ; x > 0 \\ = \frac{1 - x^2}{x - 2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h على يسار وعلى يمين العدد $x = 0$ ، ماذا تستنتج ؟
ب) فسّر هندسيا النتائج.

التمرين الثالث:

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل :



بقراءة بيانية:

1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) عيّن: $f'(1);\ f'(0);\ f(-4);\ f(0);\ f(1);\ f(-3)$

$$\lim_{\substack{>\\ h\to 0}} \frac{f(-3+h)+2}{h} \quad ; \quad \lim_{\substack{<\\ x\to -3}} \frac{f(x)+2}{x+3} \quad ; \quad \lim_{x\to -5} \frac{f(x)-1}{x+5}$$

3) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند $x_0 = 0$.

4) اكتب معادلة المستقيم (Δ).

5) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ ؟ علّل.

6) هل الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار العدد -3 ؟علّل.

7) هل الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين العدد -3 ؟ علّل.

8) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = -3$ ؟ علّل.

9) عيّن: $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) + \frac{2}{3}x - 1\right]$

10) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

11) عيّن حلول المتراجحتين: $f'(x) \leq 0$; $f'(x) \geq 0$

Enseignement de Langues
تدريس تعليم اللغات
18100-2273537 / 22
YACINE ACADEMY
Tiaret - Jijel

حل التمرين الأول:

I

1 - دراسة تغيرات الدالة g:

- نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x - 4 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x - 4 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

- اتجاه تغير الدالة g:

- حساب $g'(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 3x^2 - 3$$

ومنه: $3x^2 - 3 = 0$ أي $3x^2 = 3$

$$x^2 = 1$$

إذن: إما $x = 1$ أو $x = -1$

- $g'(x)\leqslant 0$ لما $x\in[-1;1]$ وعليه $g(x)$ متناقصة تماما على المجال $[-1;1]$.

- $g'(x)\geqslant 0$ لما $x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال.

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

$g(-1) = -2$ $\quad$ $g(1) = -6$

ه - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2,1 ; 2,3[$:

أ- الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$
ومنه الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]2,1;2,3[$

ب- $g(2,1) \simeq -1,03 < 0$

$g(2,3) \simeq 1,26 > 0$

ولدينا $k=0$ محصور بين $g(2,1)$ و $g(2,3)$

من ① و ② وحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;+\infty[$ حيث $2,1 < \alpha < 2,3$.

- إشارة $g(x)$:

- من جدول التغيرات نجد:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

02

1- حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x<\to-1} f(x) = \lim_{x<\to-1} \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} = +\infty \quad (1 \text{ و } 0^+)$$

$$\lim_{x>\to-1} f(x) = \lim_{x>\to-1} \frac{x^3+2x}{x^2-1} = -\infty \quad (1 \text{ و } 0^+)$$

- ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور التراتيب.

$$\lim_{x<\to1} f(x) = \lim_{x<\to1} \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} = -\infty \quad (3 \text{ و } 0^-)$$

$$\lim_{x>\to1} f(x) = \lim_{x>\to1} \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} = +\infty \quad (3 \text{ و } 0^+)$$

- ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يوازي حامل محور التراتيب.

2 - نبين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x) = \frac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f حيث:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1) - (2x)(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-2x^4-4x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2-1)^2}$$

وهو المطلوب :

3 - اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	‖	$-$	$-$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالات

$]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$ و $[\alpha;+\infty[$

ومتناقصة تماما على كل من المجالين $[0;1[$

و $]1;\alpha]$.

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4- بين أن: $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$:

- باستعمال القسمة الإقليدية:

$x^3 + 2x^2$ | $x^2 - 1$

$-x^3 \pm x$ | $x + 2$

$0 + 2x^2 + x$

$-2x^2 \pm 2$

$0 + x + 2$

ومنه: $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ ، ومنه:

$$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$$ ومنه:

5- أ- بين أن المستقيم ذو المعادلة $(\Delta): y = x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f):

$$f(x) - (x+2) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1} - (x+2)$$

$$f(x) - (x+2) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x^2-1}\right) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- لدينا $\lim \left[f(x) - (x+2)\right] = 0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $(\Delta): y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

05

ب - الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) :

- ندرس إشارة الفرق : $\frac{x+2}{x^2-1}$

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$		$+$	$-$	$+$
$\frac{x+2}{x^2-1}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في $(-2;0)$	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع فوق المستقيم Δ

ج - نبين أن : $f(x) = \frac{3}{2}x + 2$:

بالتعويض في $f(x)$ نجد :

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$$

$$\frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - \left(\frac{3}{2}x+2\right) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - \frac{3x+4}{2}$$

$$= \frac{2(x^3+2x^2) - [(3x+4)(x^2-1)]}{2(x^2-1)}$$

$$= \frac{2x^3+4x^2-[3x^3-3x+4x^2-4]}{2(x^2-1)}$$

06

OPPO Reno8

$$\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}-\left(\frac{3}{2}x+2\right)=\frac{2x^3+4x^2-3x^3+3x-4x^2+4}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{-x^3+3x+4}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{-(x^3-3x-4)}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{-g(x)}{2(x^2-1)}=0$$

: ومنه $g(x)=0$ إذن

(لأن الوقت ينفد معنا) $\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\frac{3}{2}x+2$

$f(x)=\frac{3}{2}x+2$ إذن

07

- حصر $f(2)$:

نعلم $\vec{u}$: $f(2) = \frac{3}{2}2 + 2$

$2,1 < 2 < 2,3$ ومنه

$2,1 \times \frac{3}{2} < \frac{3}{2}2 < 2,3 \times \frac{3}{2}$

$3,15 < \frac{3}{2}2 < 3,45$

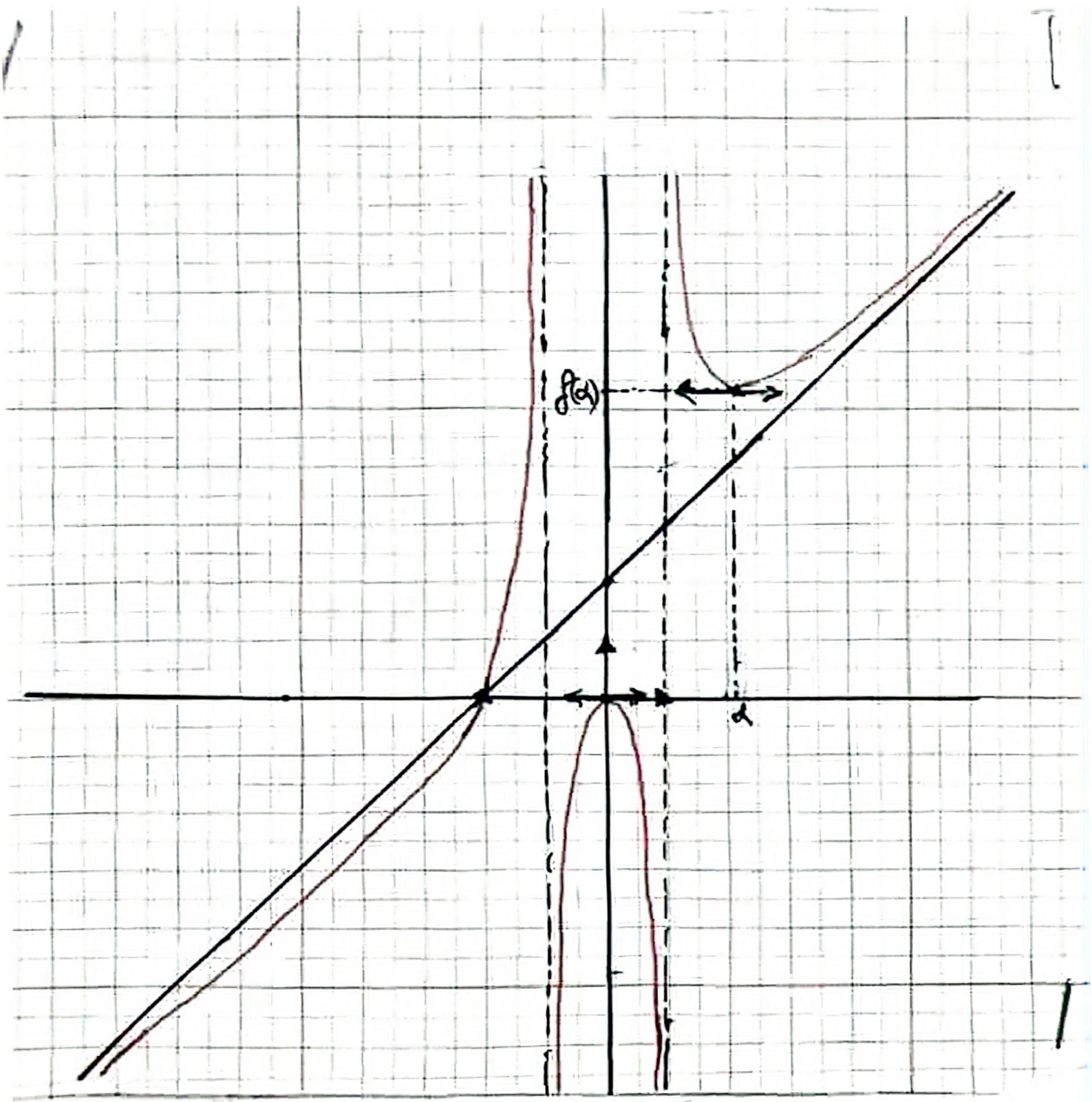
$3,15 + 2 < \frac{3}{2}2 + 2 < 3,45 + 2$

$5,15 < \frac{3}{2}2 + 2 < 5,45$

$$5,15 < f(2) < 5,45$$

08

OPPO Reno8


f(a)
a

- نناقش بيانيا عدد واشارة حلول المعادلة : $f(x) = |m|$

- حلول المعادلة $f(x) = |m|$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y = |m|$ والموازي لحامل محور الفواصل.

(لاحظ أن $|m| \geq 0$ نناقش فوق محور الفواصل)

- إذا كان : $|m| = 0$ أي $m = 0$ المعادلة حلا نا (حل مضاعف وحل سالب)

- إذا كان : $|m| \in]0; f(\alpha)[$ أو $m \in]-f(\alpha); 0[\cup]0; f(\alpha)[$ المعادلة حل وحيد سالب

- إذا كان : $|m| = f(\alpha)$ أي $m = -f(\alpha)$ أو $m = f(\alpha)$ المعادلة حلا نا (حل موجب وحل سالب)

- إذا كان $|m| \in]f(\alpha); +\infty[$ أي $m \in]-\infty; -f(\alpha)[\cup]f(\alpha); +\infty[$ المعادلة تقبل حلول (حلا نا موجبان وحل سالب)

حل التمرين الثالث :

1- تعيين النهايات :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$

2- تعيين الصور :

$f(1) = 3$ ، $f(-3) = -2$

$f(-4) = 0$ ، $f(0) = 2$

حساب $f'(0)$ ، $f'(0)$ يمثل معامل توجيه المماس (T) لـ (γ) عند $x_0 = 0$ ، وبما أن المماس (T) مائل ويشمل النقطتين $A(0,2)$ $B(-1,0)$ فإنا

$$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$f'(0) = \frac{0-2}{-1-0} = \frac{-2}{-1}$$

$$f'(0) = 2$$

01

حساب $f'(1)$:

$f'(1) = 0$ لأن المماس (T) للمنحنى (γ) عند $x_0 = 1$ يوازي حامل محور الفواصل (أفقي)

حساب : $\lim_{x \to -5} \frac{f(x)-1}{x+5}$

لدينا $f(-5) = 1$ ومنه

$$\lim_{x \to -5} \frac{f(x)-1}{x+5} = \lim_{x \to -5} \frac{f(x)-f(-5)}{x-(-5)}$$

$$= f'(-5)$$

ولدينا $f'(-5)$ يمثل معامل توجيه المماس لـ (g) عند $x=-5$ والمماس عند $x=-5$ مائل ويشمل النقطتين $(-5;1)$ $(-3;0)$

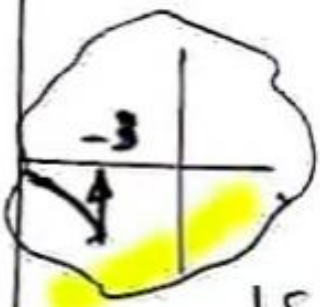
$$f'(-5) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{-3-(-5)} = -\frac{1}{2}$$

إذن

$$\lim_{x \to -5} \frac{f(x)-1}{x+5} = -\frac{1}{2}$$

حساب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -3} \frac{f(x)+2}{x+3}$ لدينا : $f(-3)=-2$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -3} \frac{f(x)+2}{x+3} = \lim_{x \xrightarrow{<} -3} \frac{f(x)-(-2)}{x-(-3)}$$



$$= \lim_{x \xrightarrow{<} -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = f'_G(-3) = -\infty$$

لأن نصف المماس على يسار 3- عمودي
والدالة f منتاقصة تماما على يسار 3- .

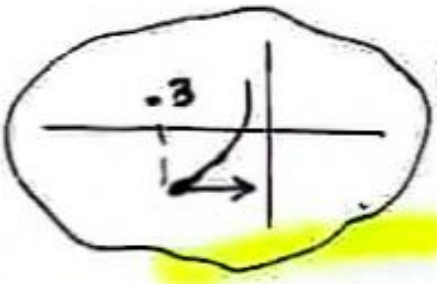
حساب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} \frac{f(x)+2}{x+3}$ لدينا : $f(-3)=-2$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -3} \frac{f(x)+2}{x+3} = \lim_{x \xrightarrow{>} -3} \frac{f(x)-(-2)}{x-(-3)}$$

02

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = f'_D(-3) = 0$$

لأن نصف المماس على يمين 3- يوازي
حامل محور الفواصل أفقي



3- كتابة معادلة المماس لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $x_0 = 0$

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

لدينا: $f(0) = 2$ و $f'(0) = 2$ إذن:

$$\boxed{(T): y = 2x + 2}$$

4- معادلة المستقيم (Δ): $(\Delta): y = ax + b$

حساب a: المستقيم (Δ) يشمل النقطتين $(0,2)$ $(3,0)$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$$ إذن: $\boxed{a = -\frac{2}{3}}$

$$(\Delta): y = -\frac{2}{3}x + b$$

تعيين b: نعوض بإحدى النقطتين؛ 03

$$(0;2) \in (\Delta) \Rightarrow 2 = -\frac{2}{3}(0) + b$$

وعليه $\boxed{b = 2}$ إذن: $\boxed{(\Delta): y = -\frac{2}{3}x + 2}$

- الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

التعليل: لأن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ مماس ميله 2