تمارين شاملة في القراءة البيانية

التمرين 01

✍ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ، (C_f) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f).

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f).

المستقيم (T) مماس لـ (C_f) عند النقطة ω.

I) بقراءة بيانية :

❶ عين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

❷ عين كل من : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-1}{h}$ ، $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-1}{h}$ ، $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(-2+h)+1}{h}$ ، $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+1}{x-3}$ ، $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)^{2025}-1}{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{f(x^2)+1}{x^2-3}$ ، $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{2x+4}$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لكل نتيجة.

❸ هل الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ ؟ برر إجابتك.

❹ شكل جدول تغيرات الدالة f.

❺ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\in]-\infty,0[$ و $\beta\in]1,+\infty[$ ثم تحقق أن $-2<\alpha<0$ و $2<\beta<3$.

❻ استنتج اشارة $f(x)$.

❼ احسب كل من : $\lim\limits_{x\to 4} f\left(\sqrt{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(2\cos 3x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-2x+3)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(|x|)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

❽ اكتب معادلة المماس (T).

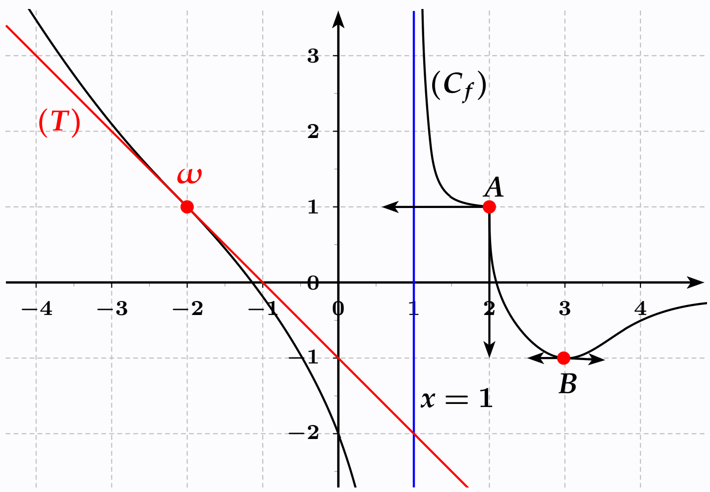
❾ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=f(|x|)$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني.

◄ بين كيف يمكن رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*-\{1\}$ كما يلي : $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ و ليكن (C_h) تمثيلها البياني.

◄ ادرس تغيرات الدالة h دون حساب عبارة $h'(x)$.



الحل

I) بقراءة بيانية :

❶ تعيين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$

❷ تعيين كل من :

▲ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-2+h)-1}{h}=?$: نأخذ نقطتين من المماس $\omega(-2,1)$ و $C(0,-1)$ نحسب معامل توجيهه و بالتالي :

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-2+h)-1}{h}=f'(-2)=\dfrac{y_\omega-y_C}{x_\omega-x_C}=\dfrac{1-(-1)}{-2-0}=-1$.

▲ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}h}\dfrac{f(2+h)-1}{h}=0$ لأن (C_f) يقبل نصف مماس أفقي من أجل $x<2$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}h}\dfrac{f(2+h)-1}{h}=-\infty$ لأن (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل من أجل $x>2$.

(C_f) يقبل نصفي مماسين $(T_0):y=1$ و $(T_1):x=2$ عند نقطة زاوية $A(2,1)$.

▲ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)+1}{x-3}=0$ مماس أفقي معادلته $y=-1$.

▲ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f^{2025}(x)-1}{x+2}=\left[f^{2025}(-2)\right]'=2025\times\underbrace{f'(-2)}_{-1}\times\underbrace{f(-2)^{2024}}_{1}=-2025$

▲ $\lim\limits_{x\to\sqrt3}\dfrac{f(x^2)+1}{x^2-3}=2\sqrt3.\underbrace{f'\left(\left(\sqrt3\right)^2\right)}_{0}=0$ لاحظ أن : $\left[f(x^2)\right]'=2x.f'(x^2)$.

▲ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{2x+4}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{2}\times\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\dfrac{1}{2}\times f'(-2)=-\dfrac{1}{2}$

❸ الدالة f لا تقبل الإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ لأنها غير قابلة للإشتقاق عند $x_0=2$.

❹ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘			-1	↗	0

❺ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\in]-\infty,0[$ و $\beta\in]1,+\infty[$:

▲ بما أن f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0[$ و $\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}_{+\infty}\times\underbrace{f(0)}_{-2}<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α.

▲ بما أن f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1,3]$ و $\underbrace{\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)}_{+\infty}\times\underbrace{f(3)}_{-1}<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد β.

❻ استنتاج اشارة $f(x)$

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

❼ حساب كل من :

♦ $\lim\limits_{x\to 4} f\left(\underbrace{\sqrt{x}}_{2}\right) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$ ♦ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} f\left(2\cos 3x\right) = \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$

♦ $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\underbrace{-2x+3}_{-\infty}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ ♦ $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(|x|\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\underbrace{-x}_{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

♦ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ ♦ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

❽ معادلة المماس (T) :

$$(T) : y = \underbrace{f'(-2)}_{-1}(x+2) + \underbrace{f(-2)}_{1} = -x - 1$$

❾ قيم الوسيط الحقيقي m :

$m < -2$: المعادلة تقبل حلين موجبين.

$m = -2$: المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر موجب.

$m > -2$: المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

II ◄ (C_g) يطابق (C_f) من أجل $x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$ و (C_g) نظير (C_f) من أجل $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0]$

III ◄ دراسة تغيرات الدالة h :

◄ نحسب النهايات :

$$\lim_{x\to -\infty} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right) = f(0) = -2 \qquad \lim_{x\to +\infty} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right) = f(0) = -2$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{1^-}\right) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{1^+}\right) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

◄ دراسة اتجاه التغير :

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

■ $h'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \times f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

▲ نعلم أن : $f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ من أجل $\frac{1}{x} = 3$ أي $\boxed{x = \frac{1}{3}}$.

● على ورقة المحاولة نكتب الجدول الآتي :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3 ↘	2 ↘	1 ↘	0

نستنتج الجدول الآتي :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$	$-$	‖	$+$ 0 $-$	‖ $-$	‖ $-$	

اذن جدول اشارة $h'(x)$ هو :

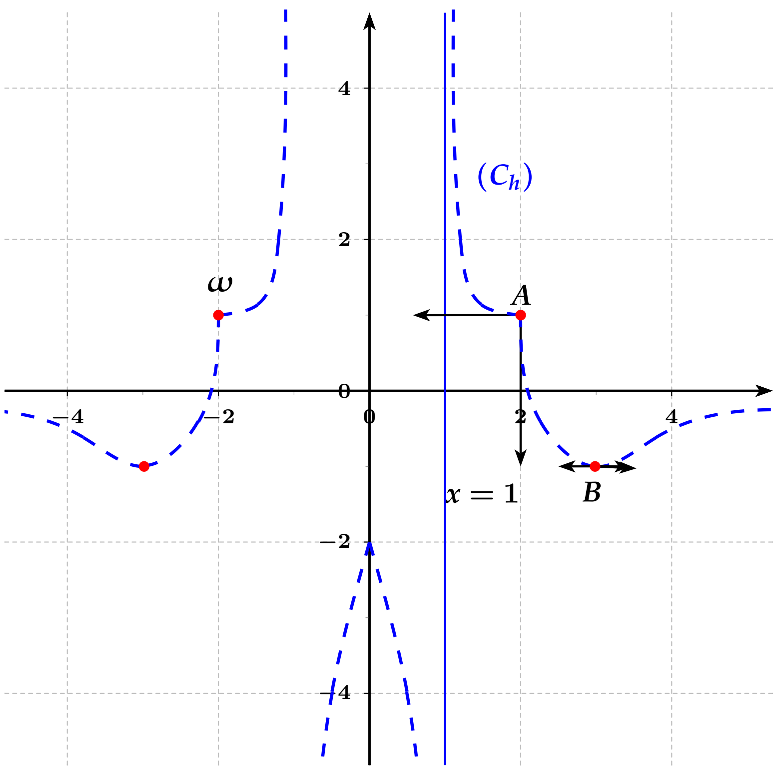
x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\frac{-1}{x^2}$	$-$	‖	$-$ | $-$	| $-$	| $-$	
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$	$-$	‖	$+$ 0 $-$	‖ $-$	‖ $-$	
$h'(x)$	$+$	‖	$-$ 0 $+$	‖ $+$	‖ $+$	

◄ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$-$ 0 $+$	‖ $+$	‖ $+$	
$g(x)$	$-2 \nearrow +\infty$	‖ 0	$\searrow -1 \nearrow$	$+\infty$	‖ $-\infty \nearrow$	-2

$$h\left(\frac{1}{3}\right) = f(3) = -1$$

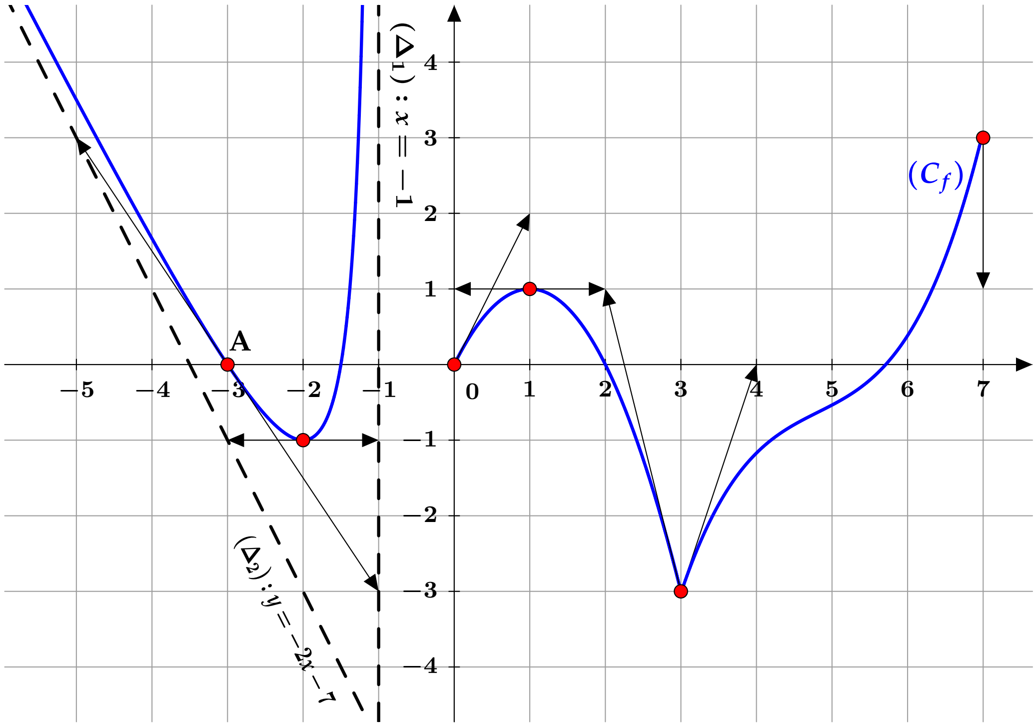
الرسم



التمرين 02

✍ لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty,-1[\cup[0,7]$

(C_f) تمثيلها البياني يقبل مستقيمان مقاربان (Δ_1) و (Δ_2) كما هو مبين في الشكل :



I) بقراءة بيانية عين :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x+7$.

❷ $f'(-2)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 7\\ <}}\dfrac{f(x)-3}{x-7}$.

❸ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\left(\dfrac{f(x)+3}{x-3}\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\left(\dfrac{f(x)+3}{x-3}\right)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

❹ بين أن : $\dfrac{1}{4}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)}{x^2-9}$.

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{-2x^2-9x-9}{x+1}$

◄ بين أن : $g'(x)=\dfrac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$ ثم ادرس تغيرات الدالة g.

III) لتكن الدالة h المعرفة كما يلي : $h(x)=\begin{cases} g\left(\dfrac{1}{x}\right); x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\\ \sqrt{x^2+4x}-2; x\geqslant 0\end{cases}$ و ليكن (C_h) تمثيلها البياني.

❶ من أجل كل x من $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ و باستعمال مشتقة دالة مركبة استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ ادرس قابلية اشتقاق الدالة h على يمين العدد 0 ثم فسر النتيجة هندسيا.

❸ من أجل كل $x\geqslant 0$ بين أن المستقيم $(D): y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_h).

الحل

Ⅰ تعيين :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x+7=0$

❷ $f'(-2)=0$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=2$ ، $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-1}{h}=0$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}7}\frac{f(x)-3}{x-7}=+\infty$.

❸ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}3}\left(\frac{f(x)+3}{x-3}\right)=-4$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\left(\frac{f(x)+3}{x-3}\right)=3$

♣ التفسير : f تقبل الاشتقاق على يمين العدد 3 و تقبل الاشتقاق على يسار العدد 3 لكن لاتقبل الاشتقاق عند العدد 3 ومنه توجد نقطة زاوية $E(3,-3)$.

❹ تبيين أن : $\lim\limits_{x\to-3}\frac{f(x)}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{f(x)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-3}\underbrace{\frac{1}{(x-3)}}_{-\frac16}\times\underbrace{\frac{f(x)}{(x+3)}}_{f'(-3)=-\frac32}=\frac14$.

Ⅱ ◄ تبيين أن :

$$g'(x)=\frac{(-4x-9)(x+1)-\left(-2x^2-9x-9\right)}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

◄ دراسة تغيرات الدالة g :

● جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$

Ⅲ ❶ استنتاج اتجاه تغير الدالة h :

لدينا : $h'(x)=-\frac{1}{x^2}\times g'\left(\frac1x\right)$.

♣ نعلم أن : $g'\left(\frac1x\right)=0$ من أجل $\frac1x=-2$ أي $x=-\frac12$

♣ $g'\left(\frac1x\right)<0$ من أجل : $\frac1x\leqslant-2$ أي $x\geqslant-\frac12$.

♣ $g'\left(\frac1x\right)>0$ من أجل : $-2\leqslant\frac1x<-1$ أو $\frac1x>-1$ أي $-1<x\leqslant-\frac12$ أو $x<-1$.

نلخص النتائج في جدول الاشارة :

x	$-\infty$		-1		$-\frac12$		0
$-\frac{1}{x^2}$		$-$	‖	$-$		$-$	‖
$g'\left(\frac1x\right)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖

● النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} g\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right) = \lim_{x\to 0} g(x) = -9$$ ،

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} h(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} g\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{(-1)^+}\right) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} h(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} g\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{(-1)^-}\right) = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} g(x) = +\infty$$ ، $$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} g\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

● جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0
$h'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||
$h(x)$	-9	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ ||

❷ دراسة قابلية اشتقاق الدالة h على يمين العدد 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{x^2+4x}-2-(-2)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}\right)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{1+\frac{4}{x}} = +\infty$$

♣ التفسير : الدالة h لا تقبل الاشتقاق على يمين العدد 0 ، المنحنى (C_h) يقبل نصف مماس موجه نحو الأعلى معادلته : $x=0$.

❸ تبيان أن المستقيم $y=x$: (D) مقارب للمنحنى (C_h) :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x}-2-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+(x+2)\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x}+(x+2)\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\underbrace{\left(\sqrt{x^2+4x}+(x+2)\right)}_{+\infty}} = 0$$

التمرين 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، (C_f) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

(I) بقراءة بيانية :

❶ عين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ جد معادلة المستقيم (Δ) ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$.

❸ عين : $f'(-3)$ ، $f'(-1)$ ، $f'_d(-4)$.

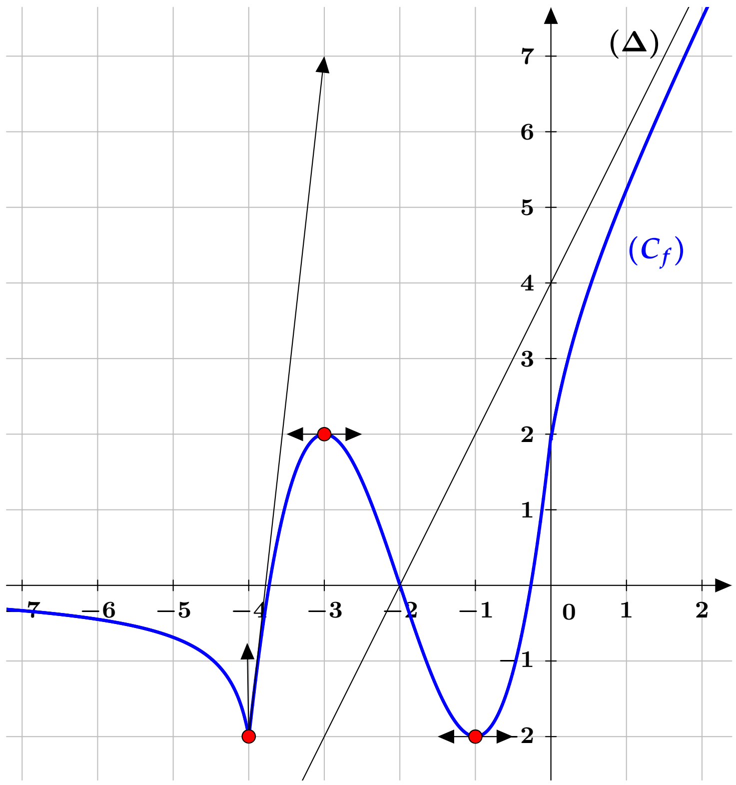
❹ هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار -4 ؟ برر اجابتك.

❺ عين : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -4} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}$.

(II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^2f(x)$

❶ بين أن : $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=4$.

❷ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g في النقطة ذات الفاصلة -1.



الحل

I تعيين :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

❷ معادلة المستقيم (Δ) : نضع $(\Delta): y=ax+b$ ، نأخذ نقطتين من المستقيم $A(-2,0)$ و $B(0,4)$

نحسب معامل توجيهه $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{4-0}{0-(-2)}=2$

و بما أن (Δ) يقطع حامل محور التراتيب فإن $b=4$ اذن معادلة المستقيم

$(\Delta): y=2x+4$.

■ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x)]$: (Δ) مستقيم مقارب معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+4)]=0$ أي

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x-4=0]$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=4$.

❸ تعيين : $f'(-3)=0$ $\qquad$ $f'(-1)=0$

$f'_d(-4)=?$ نختار نقطتين من المماس $C(-4,-2)$ و $D(-3,7)$ نحسب معامل توجيهه و بالتالي :

$$f'_d(-4)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-7}{-4-(-3)}=9$$

❹ الدالة f لا تقبل الاشتقاق على يسار -4 لأن (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى.

❺ تعيين $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -4} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}$:

بما أن نصف المماس موجه نحو الأعلى و الدالة متناقصة تماما من أجل $x\leqslant -4$ فإن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -4} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}=-\infty$

II ❶ تبيان أن $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=4$:

بما أن الدالة $x\mapsto x^2$ تقبل الاشتقاق عند القيمة -1 و الدالة f كذلك فإن g تقبل الاشتقاق عند القيمة -1.

لدينا : $g'(x)=2x.f(x)+f'(x).x^2$ ومنه $g'(-1)=2(-1).\underbrace{f(-1)}_{-2}+\underbrace{f'(-1)}_{0}.(-1)^2=4$.

❷ معادلة المماس (T) :

لدينا : $g(-1)=(-1)^2.f(-1)=-2$ ومنه $y_{(T)}=\underbrace{g'(-1)}_{4}(x+1)+\underbrace{g(-1)}_{-2}$ اذن : $(T): y=4x+2$.

التمرين 04

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ، (C_f) تمثيلها البياني يقبل مستقيمين مقاربين معادلتهما : $y=x-1$ و $y=-2$.

I) بقراءة بيانية :

❶ عين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-\sqrt{x}-1\right]$.

❷ هل الدالة f مستمرة عند القيمة -5 ؟ برر إجابتك.

❸ عين : $f'_d(-5)$ ، $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{f(x)-1}{x+3}$ ، $f'_d(-3)$ ، $f'(-2)$ ، $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-6}{x}$ ، $f'(2)$ ، $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{f(x)-3}{x-3}$ ، $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{f(x)-3}{x-3}$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لكل نتيجة.

❹ عين : $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}$ ، $\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}$.

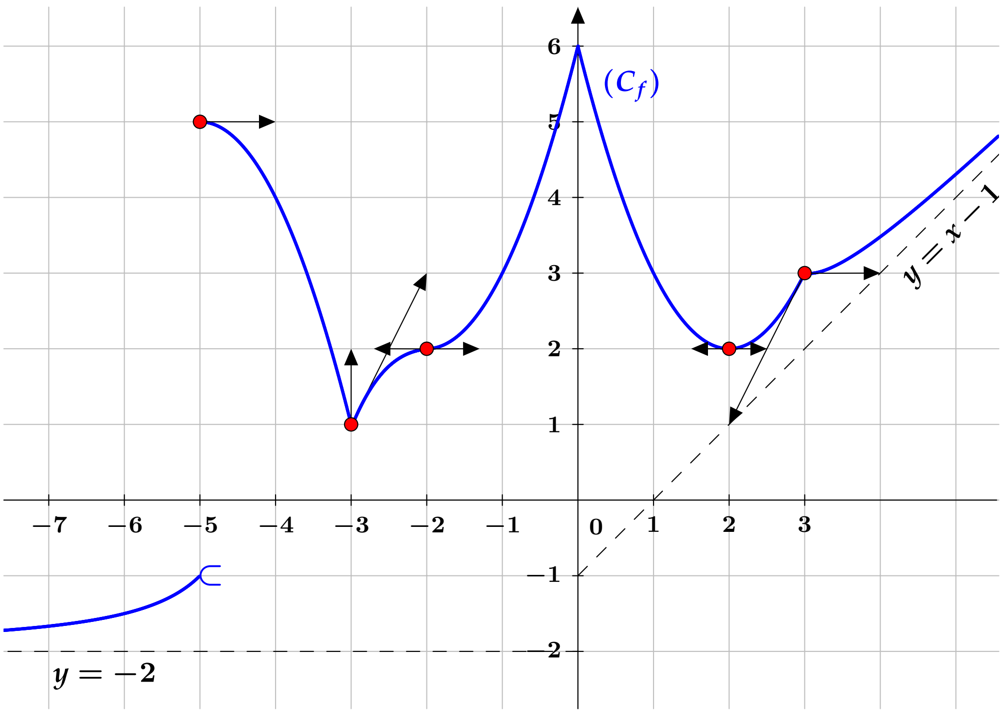
❺ شكل جدول تغيرات الدالة f.

❻ حدد نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

II) لتكن الدالة g عبارتها كما يلي : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)-1}}$

❶ عين مجموعة تعريف الدالة g.

❷ شكل جدول تغيرات الدالة g.



الحل

Ⅰ بقراءة بيانية :

❶ تعيين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a=1$ معامل توجيه المستقيم $y=[1]x+1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-1$ نفس فكرة التمرين الثالث السؤال الثاني.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\sqrt{x}-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\left[\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{1}-\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right]=+\infty$ ، لاحظ أن $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$.

❷ الدالة f غير مستمرة عند القيمة -5 لأن $\lim\limits_{x\to(-5)^-} f(x)=-1$ لا تساوي $\lim\limits_{x\to(-5)^+} f(x)=5$.

❸ تعيين : $f'_d(-5)=0$ نصف مماس أفقي.

$\lim\limits_{x\to(-3)^-}\frac{f(x)-1}{x+3}=-\infty$ نصف مماس موجه نحو الأعلى و الدالة متناقصة تماما.

$f'_d(-3)=?$ نختار نقطتين $A(-3,1)$ و $B(-2,3)$ ومنه $f'_d(-3)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{-2-(-3)}=2$.

$f'(-2)=0$ ، $f'(2)=0$ ، مماس أفقي.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-6}{x}=?$ لا توجد لأن $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-6}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-6}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to3^-}\frac{f(x)-3}{x-3}=?$ نختار نقطتين $C(3,3)$ و $D(2,1)$ ومنه

$\lim\limits_{x\to3^-}\frac{f(x)-3}{x-3}=f'_g(3)=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{1-3}{2-3}=2$.

$\lim\limits_{x\to3^+}\frac{f(x)-3}{x-3}=0$ مماس أفقي.

❹ تعيين :

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{(x+3)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{f(x)-1}{(x+3)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to(-3)^-}\underbrace{\frac{f(x)-1}{x+3}}_{-\infty}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{f(x)}+1}}_{\frac{1}{2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-3)^+}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^+}\underbrace{\frac{f(x)-1}{x+3}}_{2}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{f(x)}+1}}_{\frac{1}{2}}=1$$

❺ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-5		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-2	↗	5	↘	1	↗		↗	6	↘	2	↗		↗	$+\infty$

❻ بما أن المماس يغير وضعيته مع (C_f) عند نقطة التماس $I(-2,2)$ فهي انعطاف للمنحنى (C_f).

II ❶ مجموعة تعريف الدالة g : $D_g=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)-1>0\}$ المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق المستقيم $y=1$

و بالتالي : $D_g=[-5,+\infty[-\{-3\}$.

❷ جدول تغيرات الدالة g:

◄ نحسب النهايات : $\lim\limits_{x\to(-5)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to(-5)^+}\dfrac{1}{\sqrt{f(x)-1}}=\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to(-3)^\pm} g(x)=\lim_{x\to(-3)^\pm}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{f(x)-1}}_{0^+}}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{f(x)-1}}_{+\infty}}=0.$$

◄ ندرس اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x)=\frac{-\left(\sqrt{f(x)-1}\right)'}{\left(\sqrt{f(x)-1}\right)^2}=-\frac{\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-1}}}{f(x)-1}=\frac{-f'(x)}{2\left(f(x)-1\right)\sqrt{f(x)-1}}=\frac{-f'(x)}{2\sqrt{\left(f(x)-1\right)^3}}.$$

جدول التغيرات :

x	-5		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	↗	1	↘		↘	0