المستوى: 02 ع تـ 02	الموسم الدراسي: 2023/2022	ثانوية: راشدي محمد -سيدي معروف

الواجب المنزلي رقم 01 في مادة الرياضيات

سلم يوم : 2022/10/18 — يعاد يوم : 2022/10/23 — يناقش يوم: 2021/10/25

التمرين الأول:

I) لتكن الدالة f المعرفة على مجموعة D من $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}}$

① بين أن $D=]-\infty;-3]\cup]-2;+\infty[$.

② بين أن $f=g\circ h$ حيث g هي الدالة جذر تربيعي، و h دالة يطلب تعيينها ثم تعيين مجموعة تعريفها D_h.

③ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ فإن $h(x)=1+\dfrac{1}{x+2}$.

④ فكك الدالة h إلى دالتين بسيطتين يطلب تعيينهما. ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة h على المجالين $]-2;+\infty[$ و $]-\infty;-2[$.

⑤ ليكن (C_h) التمثيل البياني للدالة h في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

إشرح كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يُطلب تعيينها، ثم أنشئه.

⑥ بين أن النقطة $\Omega(-2;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_h) بطريقتين مختلفتين.

⑦ عين إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty;-3]$ و $]-2;+\infty[$

II) نعتبر الدالتين h_1 و h_2 حيث $h_1=-|h(x)|$ و $h_2(x)=h(-|x|)$.

① إشرح كيفية إنشاء (C_{h_1}) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

② عين D_{h_2} ، ثم أثبت أن الدالة h_2 دالة زوجية.

③ أُكتب $h_2(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة، ثم استنتج كيفية إنشاء (C_{h_2}) منحنى الدالة h_2 إنطلاقا من (C_h) ، وأنشئه.

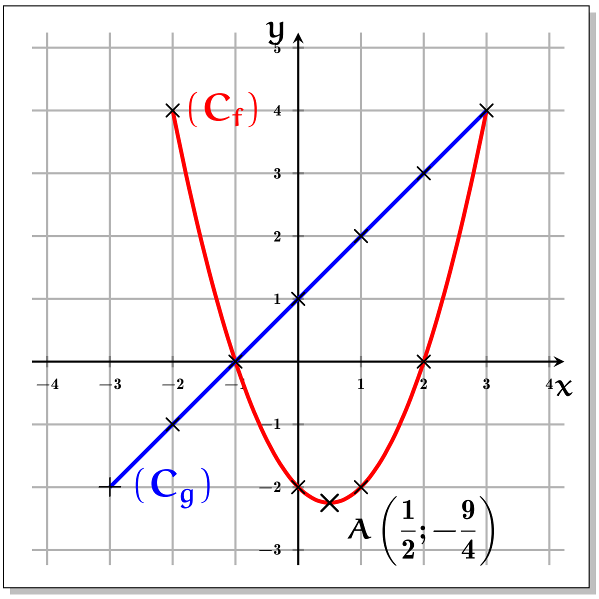
التمرين الثاني:

I) نعتبر الدالتين h و k المعرفتين على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$h(x)=-1+\sqrt{x+1}$ و $k(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}$.

• بين أن: $h=k$.

II) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g كما هو موضح في البيان المقابل. بقراءة بيانية:



① عين كل من D_f و D_g ثم جِد $D_{f\circ g}$.

② عين كل من $f(0)$ ، $f(1)$ ، $g(-2)$ ، $g(0)$ ، $g(1)$ ، $(f+g)(1)$ ، $(4f-3g)(0)$ ، $(g\circ f)(0)$ ، $(f\circ g)(0)$

③ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(f\circ g)(x)=0$.

④ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $(f\circ g)(x)<0$.

الإجابة النموذجية للواجب المنزلي رقم 01 في مادة الرياضيات مع سلم التنقيط

التمرين الأول :

1 تبيان أن $D =]-\infty; -3] \cup]-2; +\infty[$:

$D = \left\{ x \,/\, \dfrac{x+3}{x+2} \geq 0 \quad \text{و} \quad x \neq -2 \right\}$ إذن نقوم بدراسة إشارة $\dfrac{x+3}{x+2}$

نقوم بحل المعادلة $\dfrac{x+3}{x+2} = 0$ تكافئ $x+3=0$ و $x+2 \neq 0$ أي $x=-3$ و $x \neq -2$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+3}{x+2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

و عليه

$$\boxed{D =]-\infty; -3] \cup]-2; +\infty[}$$

2 تبيان أن $f = g \circ h$ حيث g هي الدالة جذر تربيعي و h دالة يطلب تعيينها :

حسب مخطط التركيب نجد :

$$x \xrightarrow{h} \frac{x+3}{x+2} \xrightarrow{g} \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$$

$$f = g \circ h$$

إذن f مركب دالتين حيث $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

- و لدينا:

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

$D_h = \mathbb{R} - \{-2\}$

3 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من أجل كل D_h فإن $h(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$:

طريقة 01 :

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} -x-2 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

إذن من أجل كل $x \in D_h$ فإن : $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x+2}$

طريقة 02 : أجل كل عدد حقيقي x من أجل كل D_h فإن :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x+2} &= \frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{x+3}{x+2} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

4 تفكيك الدالة h إلى مركب دالتين بسيطتين:

حسب مخطط التركيب نجد :

$$x \xrightarrow{u} x+2 \xrightarrow{v} 1 + \frac{1}{x+2}$$

$$h = v \circ u$$

إذن h مركب دالتين حيث $u(x) = x+2$ و $v(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

- استنتاج إتجاه تغير الدالة h على المجالين:

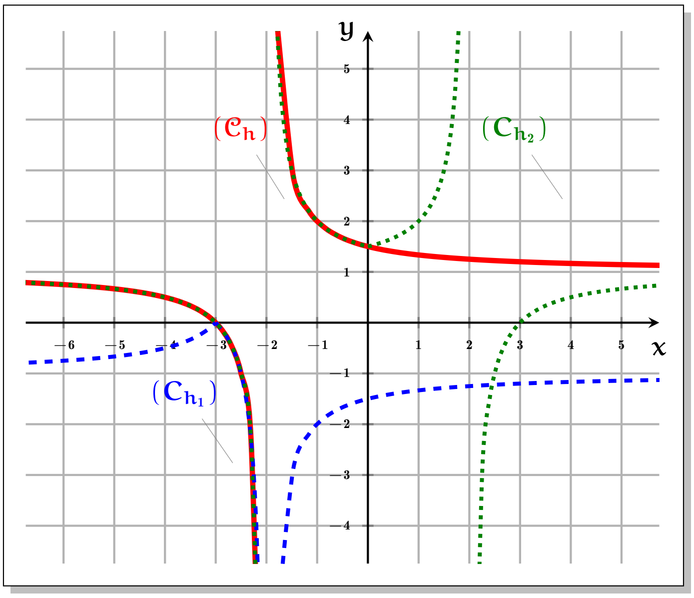
$]-\infty; -2[$

على هذا المجال الدالة u متزايدة تماما، ولدينا: $u(]-\infty;-2[) =]-\infty;0[$
وعلى المجال $]-\infty;0[$ الدالة v متناقصة تماما.
إذن الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2[$.

$]-2; +\infty[$

على هذا المجال الدالة u متزايدة تماما، ولدينا: $u(]-2;+\infty[) =]0;+\infty[$
وعلى المجال $]0;+\infty[$ الدالة v متناقصة تماما.
إذن الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-2;+\infty[$.

5 كيفية إنشاء المنحنى (C_h) :



(C_h) صورة منحنى الدالة مقلوب
$x \longmapsto \frac{1}{x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه
$\vec{u} = -2\vec{i} + 1\vec{j}$

6 إثبات أن النقطة $\Omega(-2;1)$ مركز تناظر المنحنى (C_h):

طريقة 1 لتكن $M(x, y)$ نقطة من (C_h) ، حيث $y = 1 + \frac{1}{x+2}$ هي معادلة (C_h) بالنسبة للمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
و لتكن (X, Y) إحداثياتها بالنسبة للمعلم $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$

باستخدام دساتير تغيير المعلم يكون لدينا: $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 1 \end{cases}$ بتعويض قيمة x و y في معادلة منحنى الدالة h نجد

$Y + 1 = 1 + \frac{1}{X - 2 + 2}$ اي $Y = \frac{1}{X}$ و هي معادلة منحنى الدالة h في المعلم $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن الدالة H حيث $H(X) = \frac{1}{X}$

نعلم أن الدالة H فردية (الدالة مقلوب)

و عليه النقطة $\Omega(-2;1)$ مركز تناظر (C_h).

طريقة 2 نثبت أنه من أجل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن $h(2\alpha - x) + h(x) = 2\beta$ حيث $\Omega(-2;1)$

إثبات ان $-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

من أجل $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ معناه $x \neq -2$ أي $-x \neq 2$ أي $-4 - x \neq -2$ و منه $-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ و لدينا

$$\begin{aligned} h(-4-x) + h(x) &= 1 + \frac{1}{-4-x+2} + 1 + \frac{1}{x+2} \\ &= 1 + \frac{1}{-x-2} + 1 + \frac{1}{x+2} \\ &= 1 + \frac{1}{-(x+2)} + 1 + \frac{1}{x+2} \\ &= 1 - \frac{1}{x+2} + 1 + \frac{1}{x+2} \\ &= 2 = 2(1) \end{aligned}$$

إذن النقطة $\Omega(-2;1)$ مركز تناظر (C_h).

7 تعيين إتجاه تغير الدالة f:

على المجال $]-\infty; -3]$

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2[$ فهي متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -3]$ حيث من أجل كل $x \in]-\infty; -3]$ فإن $h(x) \in [0; 1[$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -3]$

على المجال $]-2;+\infty[$

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-2;+\infty[$ حيث من أجل كل $x \in]-2;+\infty[$ فإن $h(x) > 1$ أي $h(x) \in]1;+\infty[$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-2;+\infty[$

II) نعتبر الدالتين h_1 و h_2 حيث $h_1(x) = -|h(x)|$ و $h_2(x) = h(-|x|)$.

1 كيفية إنشاء (C_{h_1}):

$$h_1(x) = \begin{cases} -h(x) \ ; \ h(x) \geq 0 \\ -(-h(x)) \ ; \ h(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad h_1(x) = \begin{cases} -h(x) \ ; \ x \in]-\infty;-3] \cup]-2;+\infty[\\ h(x) \ ; \ x \in [-3;-2[\end{cases}$$

من أجل $x \in [-3;-2[$: (C_{h_1}) ينطبق على (C_h)

من أجل $x \in]-\infty;-3] \cup]-2;+\infty[$: (C_{h_1}) نظير (C_h) بالنسبة لحامل محور الفواصل.

2 تعيين D_{h_2} :

$$D_{h_2} = \{x \in \mathbb{R} / -|x| + 2 \neq 0\}$$
$$D_{h_2} = \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq 2\}$$
$$D_{h_2} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \quad \text{و} \quad x \neq -2\}$$
$$D_{h_2} = \mathbb{R} - \{-2;2\}$$

● إثبات أن الدالة h_2 دالة زوجية:

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-2;2\}$ معناه $x \neq 2$ و $x \neq -2$ و عليه $-x \neq -2$ و $x \neq 2$ و منه $-x \in \mathbb{R} - \{-2;2\}$

و لدينا $h_2(-x) = h(-|-x|) = h(-|x|) = h_2(x)$ و منه g دالة زوجية

3 كتابة $h_2(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

$$h_2(x) = h(-|x|) \begin{cases} h(-x) \ ; \ x \geq 0 \quad \text{و} \quad x \neq 2 \\ h(x) \ ; \ x \leq 0 \quad \text{و} \quad x \neq -2 \end{cases}$$

● كيفية إنشاء (C_{h_2}) :

من أجل $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ فإن (C_{h_2}) ينطبق على (C_h)

من أجل $x \in [0.2[\cup]2;+\infty[$ فإن (C_{h_2}) نظير (C_h) بالنسبة لحامل محور التراتيب (لانها دالة زوجية).

التمرين الثاني :

(I) تبيان أن $h = k$:

لدينا: الدالتان h و k معرفتان على نفس المجال: $]-1;+\infty[$ ، ولدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$\begin{aligned} h(x) &= -1 + \sqrt{x+1} \\ &= \frac{\left(-1+\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - (1)^2}{1+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+1)-1}{1+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} \\ &= k(x) \end{aligned}$$

إذن: $h = k$.

(II)

1 تعيين D_f و D_g : من التمثيل البياني نجد: $D_g=[-3;3]$ و $D_f=[-2;3]$

● تعيين D_{gof} :

$$D_{fog}=\{x \ / \ x\in D_g \ \text{و} \ g(x)\in D_f\}$$
$$D_{fog}=\{x \ / \ x\in[-3;3] \ \text{و} \ g(x)\in[-2;3]\}$$
$$D_{fog}=\{x \ / \ x\in[-3;3] \ \text{و} \ x\in[-3;2]\}$$
$$D_{fog}=[-3;2]$$

2 تعيين الصور:

$f(0)=-2$ ، $f(1)=-2$ ، $g(-2)=-1$ ، $g(0)=1$ ، $g(1)=2$

$(f+g)(1)=f(1)+g(1)=-2+2=0$ ، $(4f-3g)(0)=4f(0)-3g(0)=4\times(-2)-3\times1=-11$

$(g\circ f)(0)=g\left(f(0)\right)=g(-2)=-1$ ، $(f\circ g)(0)=f\left(g(0)\right)=f(1)=-2$

3 حل المعادلة بيانيا

$(f\circ g)(x)=0$ أي $f\left(g(x)\right)=0$

بوضع $X=g(x)$ المعادلة تصبح $f(X)=0$ و منه للمعادلة حلين هما $X=-1$ أو $X=2$

لما $X=-1$ نجد $g(x)=-1$ ومنه $S_1=\{-2\}$

لما $X=2$ نجد $g(x)=2$ ومنه $S_2=\{1\}$

و عليه حلول المعادلة هي $\boxed{S=\{-2;1\}}$

4 حل المتراجحة بيانيا

$(f\circ g)(x)<0$ أي $f\left(g(x)\right)<0$

بوضع $g(x)=X$ المتراجحة تصبح $f(X)<0$ حيث من البيان نجد $X\in]-1;2[$

و منه $g(x)\in]-1;2[$ ومنه $x\in]-2;1[$

و عليه حلول المتراجحة هي $\boxed{S=]-2;1[}$