المذكرة رقم: 01

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر.

ميدان التعلم: تحليل

المحور : الدوال العددية.

المحتوى المعرفي : الاشتقاقية والاستمرارية.

المادة: رياضيات

السنة الدراسية: 2026/2025

المدة: 01 سا

ثانوية: الاخوة عباس–باتنة -

الكفاءات المستهدفة : العدد المشتق - الدالة المشتقة - معادلة المماس -

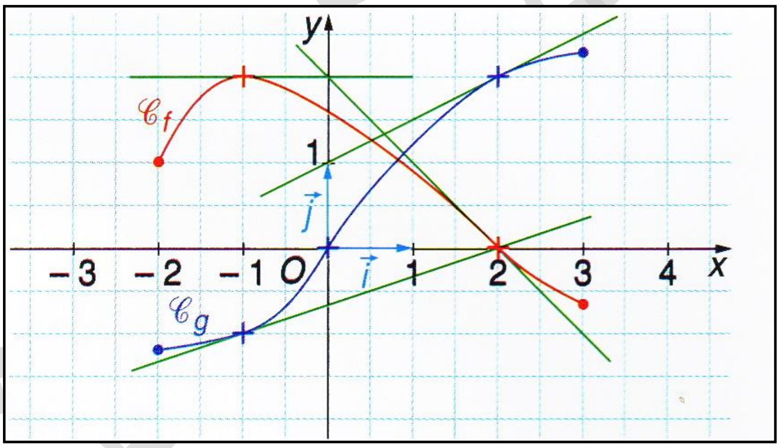
◈ استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة والمنحنى الممثل لها .

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف والتشخيص	(انظر أدناه)	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

التهيئة النفسية : لتذكير بحساب المشتقات وتطبيقاتها " ا – 1 "

مناقشة النشاط 01 ص 40

• I.1. حساب الأعداد المشتقة التالية: $(f)'(-1)$ * $(g)'(-1)$ * $(f)'(2)$ * $(g)'(2)$



• * لدينا المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-1) يوازي محور الفواصل وبالتالي معامل توجيهه معدوم إذن $(f)'(-1)=0$.

• $(g)'(-1)$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة $A(-1;-1)$ وبما أن النقطة $B(2;0)$ تنتمي الى هذا المماس فان : $(g)'(-1)=\dfrac{-1-0}{-1-2}=\dfrac{1}{3}$ *

* $(f)'(2)$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $B(2;0)$ وبما أن النقطة $C(0;2)$ تنتمي الى هذا المماس فان : $(f)'(2)=\dfrac{2-0}{0-2}=-1$ *

• $(g)'(2)$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة $B(2;2)$ وبما أن النقطة $E(0;1)$ تنتمي الى هذا المماس فان : $(g)'(2)=\dfrac{2-1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$

• * حساب كل من $(f+g)'(-1)$ * $(fg)'(2)$ * $\left(\dfrac{3}{f}\right)'(-1)$ * $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم

$$(f+g)'(-1)=(f)'(-1)+(g)'(-1)=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$(fg)'(2)=(f)'(2).(g)(2)+(g)'(2)(f)(2)=(-1)(2)+\left(\frac{1}{2}\right)(0)=-2$$

$$\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)=3\left(\frac{1}{f}\right)'(-1)=3\left(\frac{-(f)'(-1)}{f(-1)^2}\right)=0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{(f)'(2).(g)(2)-(g)'(2)(f)(2)}{g(2)^2}=\frac{(-1)(2)-\left(\frac{1}{2}\right)(0)}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

05 د

يشارك التلاميذ في صياغة التعريف

2. من أجل كل x من المجال $[0;2]$ نضع: $h(x)=f(2x-1)$

حساب $h'(0)$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)$.

لدينا $h(x)=f(2x-1)$. نلاحظ ان الدالة هي مركب الدالة $x\to 2x-1$ متبوعة بالدالة f

إذن من أجل كل من المجال $[0;2]$

$h'(x)=2f'(2x-1)$ ومنه

$$h'(0)=2f'(2\times 0-1)$$
$$h'(0)=2f'(-1)$$
$$h'(0)=0$$

05 د

$$h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'\left(2\times\frac{3}{2}-1\right)$$
$$h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'(2)$$
$$h'\left(\frac{3}{2}\right)=2(-1)$$
$$h'\left(\frac{3}{2}\right)=-2$$

05 د

↵ الاشتقاقية

1. العدد المشتق – الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbf{R}$. x_0 و x_0+h عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا قبلت النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

لدينا إذن: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ أو $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ و ذلك بوضع $x=x_0+h$

05 د

مثـــال : أدرس قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ عند 1 مفسرا بيانيا النتيجة المحصل عليها: $f(x)=x^2+3$

طريقة: لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a ندرس نهاية النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى **0**.

الحل: تبيان أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 .

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2+3-4}{h}=\frac{h(h+2)}{h}$$ ومنه

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+2)=2$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1)=2$.

2/ الدالة المشتقة :

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

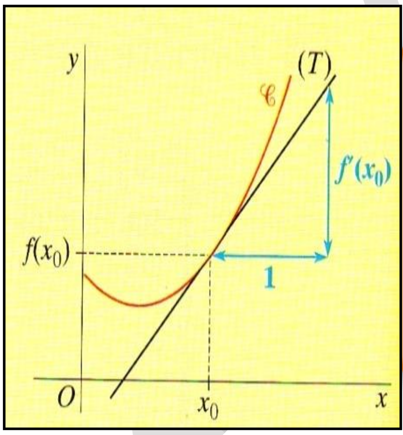
3/ مماس منحني دالة

التفسير البياني

تعريف و خاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\Re$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$



حل تمرين 3 ص 58 :

لدينا $(f)'(-1)=2$ و (C_f) يمر بالنقطة $A(-1;-3)$

كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(-1;-3)$.

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$y=f'(1)(x+1)+f(-1)$$
$$y=2(x+1)-3$$
$$y=2x-1$$

4/ العدد المشتق من اليمين العدد المشتق من اليسار

f دالة معرفة على مجال I من $\boldsymbol{R}$

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند x_0 من اليمين إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية محدودة لما يؤول x إلى x_0 بقيم أكبر أي $f'_d(x_0)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

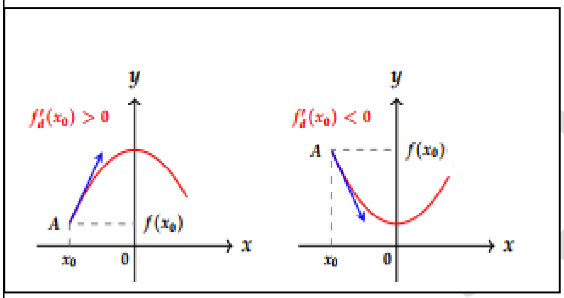
نقول أن f تقبل الاشتقاق عند x_0 من اليسار إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية محدودة لما يؤول x إلى x_0 بقيم أصغر أي $f'_g(x_0)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

نتـــائج :

1) تكون f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كان عددها المشتق من اليمين وعددها المشتق من اليسار متساويان أي $f'(x_0)=f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$

2) إذا كانت $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$ فان f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 .

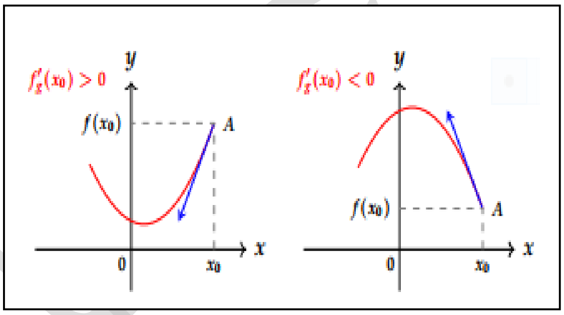
التفسير البياني :



- إذا قبلت الدالة f الاستقاق عند x_0 من اليمين فإن تمثيلها البياني يقبل نصف مماس من اليمين و هومعرف كما يلي : من أجل $x\geq x_0$ فإن :

$$y=\ell_1(x-x_0)+f(x_0)$$

أي أن التمثيل البياني للدالة f يقبل نصف مماس **من اليمين عند** $A(x_0\,;f(x_0))$ معامل توجيهه $f'_d(x_0)$.



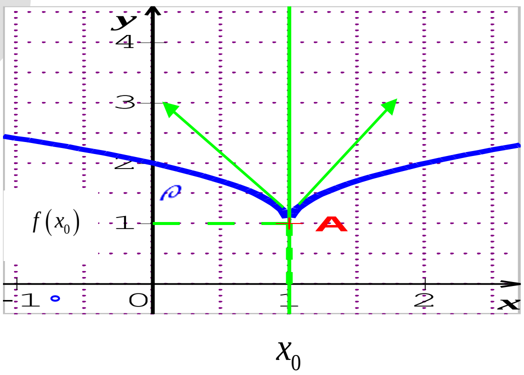
- إذا قبلت الدالة f الاستقاق عند x_0 من اليسار فإن تمثيلها البياني يقبل نصف مماس من اليسار و هومعرف كما يلي : من أجل $x\leq x_0$ فإن :

$$y=\ell_2(x-x_0)+f(x_0)$$

أي أن التمثيل البياني للدالة f يقبل **نصف مماس** **من اليسار عند** $A(x_0\,;f(x_0))$ معامل توجيهه $f'_g(x_0)$.

5/ نقطة زاوية :

اذا كان $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$ فان النقطة $A(x_0\,;f(x_0))$ تسمى نقطة زاوية .



مثـــال : الدالة المعرفة بـ : $f(x)=|x-2|$ المعرفة على $\Re$

ندرس قابلية الاشتقاق الدالة f من يمين العدد 2 و من يسار العدد 2

لدينا : $f(x)=\begin{cases} x-2; x\in[2;+\infty[\\ -x+2; x\in]-\infty;2] \end{cases}$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{x-2}{x-2}=1$

إذن الدالة f قابلة لاشتقاق عند 2 من اليمين و (C_f) **يقبل نصف مماس من اليمين عند** $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه $f'_d(x_0)$.

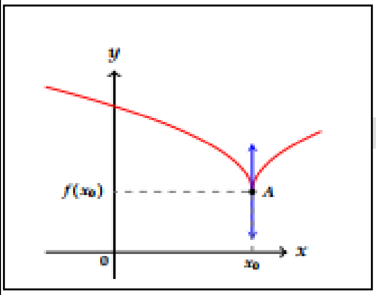
و $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{-x+2}{x-2}=-1$

إذن الدالة f قابلة لاشتقاق عند 2 من اليسار و (C_f) **يقبل نصف مماس من اليسار عند** $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه $f'_g(2)$. والنقطة $A(2;0)$ تسمى نقطة زاوية .

ملاحظة: إذا كانت نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ غير منتهية بمعنى :

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ أو

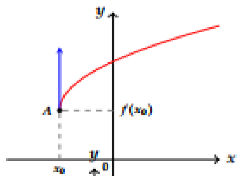
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$



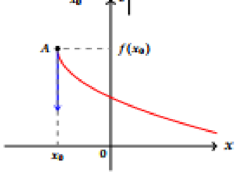
فإن المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **مماس موازي لمحور التراتيب .**

حالات خاصة :

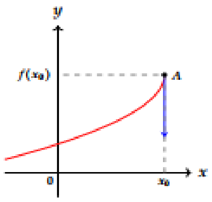
إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يمين x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$.



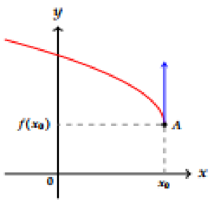
إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يمين x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$.



إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يسار x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$.



إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يسار x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$.



تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-1+|x-2|$.

1- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 2

2- فسرا بيانيا النتيجة المحصل عليها

الحل:

- إزالة رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x-3 & ;x\in]2;+\infty[\\ f(x)=x^2-x+1 & ;x\in]-\infty;2] \end{cases}$$

1. **دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 2 .**

لدينا

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{>} 2}\frac{x^2+x-3-3}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{>} 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{>} 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{>} 2}x+3=5$$

ومنه $f'_d(2)=5$ إذن الدالة f **قابلية للاشتقاق على يمين العدد 2 .**

و لدينا

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\frac{x^2-x+1-3}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{<} 2}x+1=3$$

ومنه $f'_g(2)=3$ إذن الدالة f **قابلية للاشتقاق على يسارالعدد 2 .**

- إذن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 2 لأن $f'_d(2)\neq f'_g(2)$.

2. التفسير البياني :

التمثيل البياني للدالة f يقبل نصفي مماس من اليمين ومن اليسارعند $A(x_0\,;f(x_0))$

معامل توجيهه كل منهما $f'_d(2)$ و $f'_g(2)$.

تمارين منزلية : 41 + 38 ص61

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة .-

المذكرة رقم: 02

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر

المادة: رياضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2026/2025

المحور : الدوال العددية.

المدة: 03 سا

المحتوى المعرفي : الاستمرارية .

ثانوية: الاخوة عباس–باتنة -

الكفاءات المستهدفة : ✍ استمرارية دالة على مجال – السلوك التقاربي لدالة .

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف و التشخيص	• **التهيئة النفسية**	05 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
	• **مناقشة النشاط رقم 3 ص 7 :**	15 د	

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\Re$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\;]$.

1) حساب $[-2,3]$، $E(-1)$، $[\sqrt{3}]$ و $E(11,01)$.

* $[-2,3]=-3$ لأن $-3 \le -2.3 < -2$

* $E(-1)=-1$ لأن $-1 \le -1 < 0$

* $[\sqrt{3}]=1$ لأن $1 \le \sqrt{3} < 3$

* $E(11.01)=11$ لأن $11 \le 11.01 < 12$

2) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على المجال $]-2;1[$ كما يلي:

$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$، و $h(x)=x^2+1$ لتكن (C_f)، (C_g)، (C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

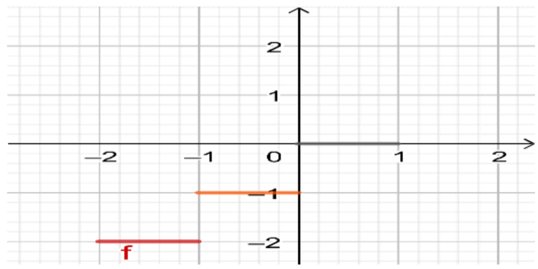
• رسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f)، (C_g) و (C_h).

مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم

لدينا : $f(x)=[x]$

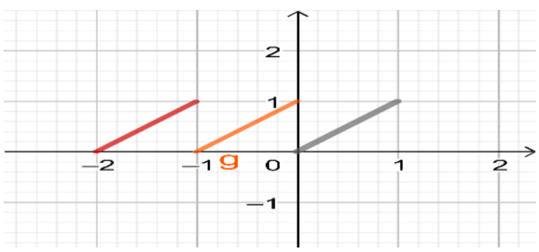
و $D_f=[-2;1[$

و $f(x)=\begin{cases}-2 & ;x\in[-2;1[\\ -1 & ;x\in[-1;0[\\ 0 & ;x\in[0;1[\end{cases}$



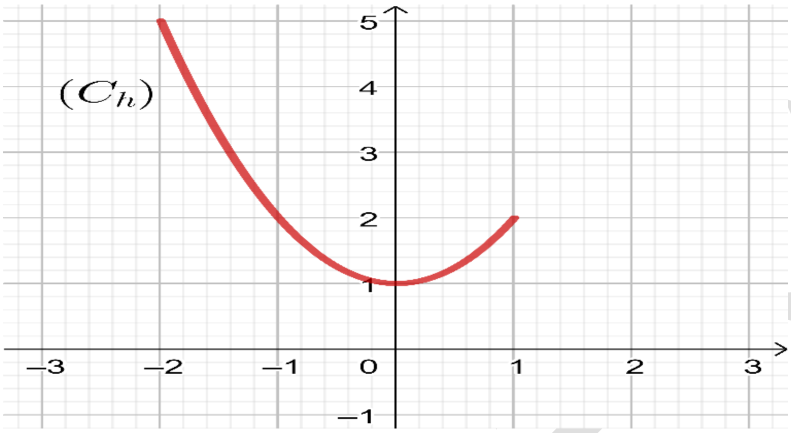
لدينا : $g(x)=x-[x]$

و $D_g=[-2;1[$



$$g(x)=\begin{cases} x+2 & ;x\in[-2;1[\\ x+1 & ;x\in[-1;0[\\ x & ;x\in[0;1[\end{cases}$$

لدينا : $h(x)=x^2+1$ و $D_h=[-2;1[$



05 د

يشارك التلاميذ في صياغة التعريف

3) لايمكن رسم المنحنيين (C_f) و (C_g) بدون رفع القلم (اليد) .

بينما يمكن رسم المنحنى (C_h) بدون رفع القلم (اليد) .

05 د

4)

- الدالتان f و g لا تقبلان نهاية عند **1−** و عند **0** .
- الدالة h تقبل نهاية عند **1−** و عند **0** لانها معرفة عندهما أي $\mathrm{h}(-1)=2$ و $\mathrm{h}(0)=1$

نشـــاط مقترح01

:" ا − 1

05 د

نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على المجال $[-2;2]$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x+1 & ;x\in[-2;0[\\ f(x)=x^2+1 & ;x\in[0;2] \end{cases}$$ و $$\mathrm{g}(x)=x^2$$

وليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب .

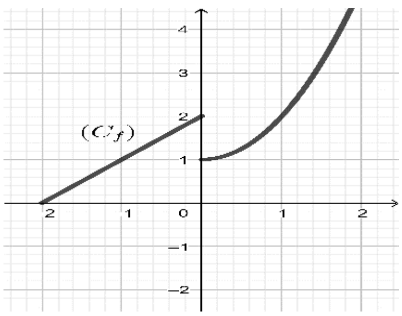
1− أنشئ في معلمين مختلفين كل من (C_f) و (C_g) .

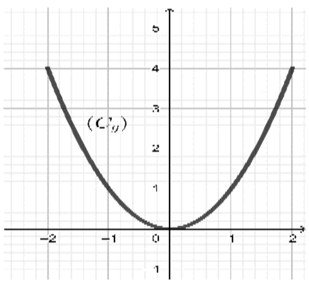
2− هل يمكن رسم المنحنين (C_f) و (C_g) دون رفع القلم ؟ماذا تستنتج ؟

3− هل تقبل الدالة f و g نهاية عند **1** عند **0** ؟

مناقشة النشـــاط مقترح

1. الانشاء .





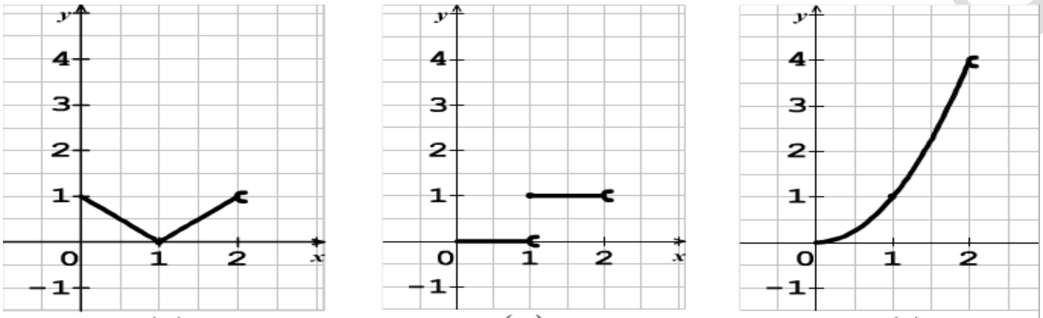
2. لا يمكن رسم المنحنيين (C_f) دون رفع القلم . إذن نستنتج أن الدالة غير مستمرة على المجال $[-2;2]$
يمكن رسم المنحنيين (C_g) دون رفع القلم. إذن نستنتج أن الدالة g مستمرة على المجال $[-2;2]$
3. نعم تقبل الدالة g نهاية عند **1** و عند **0** .
نعم تقبل الدالة f نهاية عند **1** و لاتقبل نهاية عند **0** .

نشـــاط مقترح02

نعتبر الدوال f و g و h المعرفة على المجال $[0;2[$

$$f(x)=\begin{cases}0;0\le x<1\\1;1\le x<2\end{cases} \quad ، \quad g(x)=x^2 \quad ، \quad h(x)=|x-1|$$

ولتكن (C_f) ، (C_g) ، (C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب



(3) (2) (1)

a. حدد من بين المنحنيات التالية الممثلة لدالة f و g و h
b. نلاحظ أن منحنيين من بين المنحنيات الثلاثة يمكن رسمها ، دون رفع القلم ، نقول في هذه الحالة ان دالتيهما مستمرتين على المجال $[0;2[$ ، والأمر ليس كذلك بالنسبة لدالة الثالثة
C. حدد ماهي الدالة
D . قارن بين $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ و $f(1)$. ماذا تستنتج

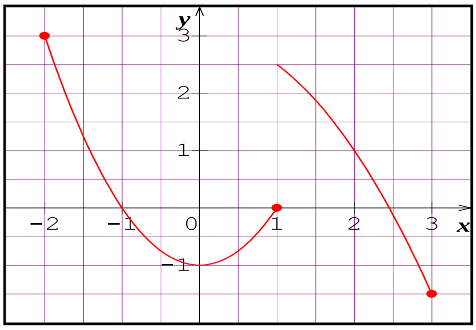
مناقشة النشـــاط

1. تعريف الاستمرارية

تعريف: f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f.
f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ معناه f مستمرة عند a

مثـال : دالة معرفة على بـ $f(x)=x^2-3$ و $a=-1$
لدينا $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(x^2-3)=-2$ و لدينا $f(-1)=-2$
بمأن $\lim\limits_{x\to-1} f(-1)=f(-1)$ فإن f مستمرة عند -1
ملاحظة:القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I

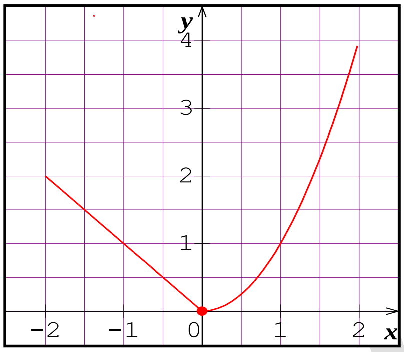
التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).



مثال1: الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البيانيدون رفع القلم. في حين نلاحظ أنها مستمرة على كل من المجالين $[-2;1]$ و $]1;3]$.

مثال2: الدالة f المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}-x & ; x\in]-2;0]\\ x^2 & ; x\in[0;2[\end{cases}$$



و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $]-2;2[$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم

استمرارية الدالة عند يمين و يسار قيمة:

القول أن f مستمرة من يمين x_0 معناه : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0\\ >}} f(x)=f(x_0)$

القول أن f مستمرة من يسار x_0 معناه : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0\\ <}} f(x)=f(x_0)$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\begin{cases}x^2+x & ; x\in]-2;1[\\ x-1 & ; x\in[1;4[\end{cases}$

1. أدرس استمرار الدالة f عند القيمة 1(من اليمين و من اليسار).

2 . نتائج :

- نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
  - الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
  - الدوال كثيرات الحدود، sin و cos مستمرة علىR.
  - الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة:

- **الدالة** $x\mapsto 2x^2-3x+4$ **مستمرة على** R.
- **الدالة** $x\mapsto \dfrac{3x-2}{x^2-1}$ **مستمرة على كل من المجالات** $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$.

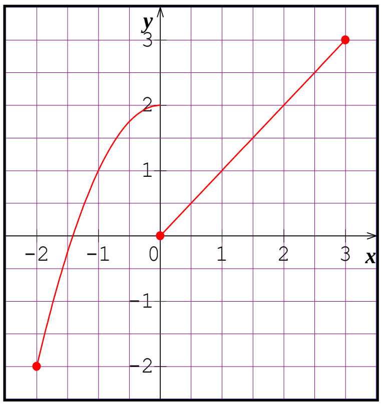
تمرين تطبيقي : لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+2 & x\in[-2;0[\text{ إذا كان } \\ f(x)=x & x\in[0;3] \text{ إذا كان } \end{cases}$$

1. مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

الحل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=2$

و لدينا من جهة ثانية

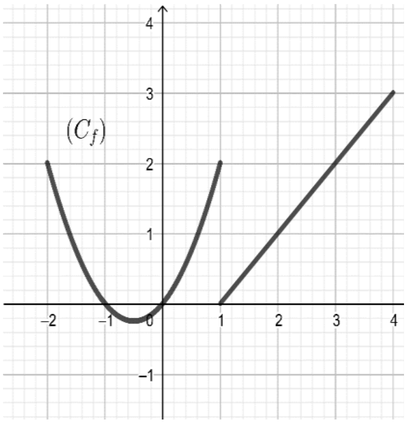
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=0$. إذن لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.

2. الدالة غير مستمرة عند 0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.

نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

حل تمرين 42 ص 29 :



نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x \ ; & x\in]-2;1[\\ f(x)=x-1 \ ; & x\in[1;4[\end{cases}$$

1) تمثيل بيانيا الدالة f في معلم.

- هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1}(x^2+x)=2$ و لدينا $f(1)=2$

ومنه $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=f(1)$

لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}(x-1)=0$ و لدينا $f(1)=0$ ومنه $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=f(1)$

بما أن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)\neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ فإن f غير مستمرة عند 1

2) **الدالة f غير مستمرة على المجال $]-2;4[$ لأنه لايمكن رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم(اليد)**

3) المجالات التي تكون الدالة f مستمرة عليها هي $]-2;1[$ و $[1;4[$.

تطبيق 01 : لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1 \ ; & x\le 2 \\ f(x)=x^2+x-5 \ ; & x>2 \end{cases}$$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 2 .

2) هل الدالة f مستمرة على R ؟ لماذا؟

تطبيق02 : f دالة عددية معرفة كما يلي:

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ إذا كان $x\neq 1$ و $f(1)=3$

1) ادرس استمرارية f عند 1 .

2) هل الدالة f مستمرة على R ؟

2- الدالة الجزء الصحيح :

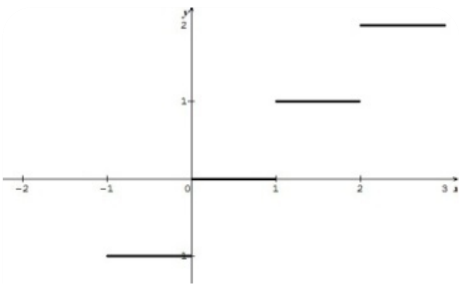
تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على R والتي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n\leq x \prec n+1$ ونرمزلها بالرمز E أو [ ] .

مثال : $E(3.9)=3$ $\quad n\leq x\prec n+1$. أي $3\leq x\prec 4$.

$E(-3.1)=-3$ $\quad n\leq x\prec n+1$ أي $-3\leq x\prec -2$.

$E(2)=2$ $\quad n\leq x\prec n+1$ أي $2\leq x\prec 3$

3- التمثيل البياني للدالة الجزء الصحيح : .



ملاحظة: الدالة الجزء الصحيح غير مستمرة على R لانه لا يمكن رسم منحناها البياني دون رفع القلم

3)الاستمرارية و قابلية الاشتقاق

خاصية: إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال .

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا يعني ليس كل دالة مستمرة على مجال I قابلة للاشتقاق على هذا المجال

- فمثلا الدالة: $x\mapsto |x|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للاشتقاق عند0. لدينا $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

بينما النسبة $\dfrac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{|h|}{h}=-1$ و $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{|h|}{h}=1$.

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.		

المذكرة رقم: 03 | **الأستاذ: بن حولة عثمان** | مذكرة رقم

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر	**المادة:** ريـاضيات
ميدان التعلم: تحليل	**السنة الدراسية:** 2026/2025
المحور : الدوال العددية.	**المدة:** 05 سا
المحتوى المعرفي : مبرهنة القيم المتوسطة .	**ثانوية:** الاخوة عباس–باتنة -

الكفاءات المستهدفة : استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لاثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$ حيث k عدد حقيقي، معطى .

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف والتشخيص	**1- التهيئة النفسية** **مناقشة النشاط رقم 4 صفحة 07 :** 1 – ا ": 3- المنحنيين (C_f) و (C_g) يمكن رسمها دون رفع القلم إذن الدالتين f و g مستمرتين على المجال $[-1;2]$. 4- المنحنى (C_h) لايمكن رسمه دون رفع القلم على المجال $[-1;2]$. إذن الدالة h غير مستمرة على المجال $[-1;2]$ 5- .تحديد عدد حلول المعادلات (1) و (2) و(3) . ✓ (1): $f(x)=k$. $k\in[-2;3]$ المعادلة (1) تقبل حل وحيد على المجال $[-1;2]$. ✓ (2): $g(x)=k$. $k\in[-2;0[\cup]1;3]$ المعادلة (2) تقبل حل وحيد على المجال $[-1;2]$.. $k=0$ أو $k=1$ المعادلة (2) تقبل حلان مختلفان في المجال $[-1;2]$.. $k\in[0;1]$ المعادلة (2) تقبل ثلاث حلول مختلفة في المجال $[-1;2]$.. ✓ (3) $h(x)=k$: $k\in[-2;0]\cup[2;3]$ المعادلة (3) تقبل حل وحيد على المجال $[-1;2]$. $k\in]0;2[$ لمعادلة (3) لا تقبل حلول في المجال $[-1;2]$.. 6- القيمتين -2 و 3حدود المجال $[-2;3]$ تمثل صورتي العددين -1 و 2حدود المجال $[-1;2]$ 7- المعادللتين (1) و (2)تقبلان على الأقل حل في المجال $[-1;2]$ المعادلة (3) لا تقبل حلول لما $k\in]0;1[$ في المجال $[-1;2]$.. المعادلة (1) تقبل حل وحيد على المجال $[-1;2]$. بينما المعادلتين (2) و (3) عدد الحلول حسب قيم العدد k .	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

مرحلة بناء و ترسيخ

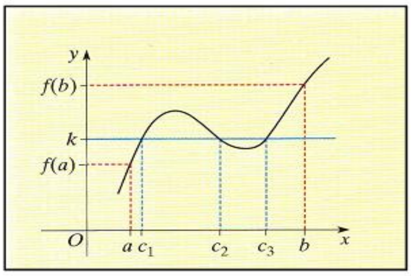
1- مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

التفسير البياني :

2. التفسير البياني

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.
(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



تطبيق : (مبرهنة القيم المتوسطة)

لتكن g الدالة المعرفة على R بـ : $g(x)=x^3-5x^2+3x+4$

1- أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $[1;2]$

حل التطبيق

$D_g=\Re$ ، $g(x)=x^3-5x^2+3x+4$.

1- دراسة إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

الدالة g قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=3x^2-10x+3$

لدينا $g'(x)=0$ معناه $3x^2-10x+3=0$ وبعد حل هذه المعادلة باستعمال المميز Δ نجد :

$x_1=3$ و $x_2=\frac{1}{3}$.

إشارة $g'(x)$.

-

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- الدالة g متزايدة تماما على المجالين $[3;+\infty[$ و $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$

- الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{3};3\right]$.

05 د

05 د

05 د

يشارك التلاميذ في صياغة التعريف

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{27}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

3− تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $[1;2]$.

لدينا من الدراسة السابقة الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $\left]\frac{1}{3};3\right[$ الذي يحوي المجال $[1;2]$

وبالتالي فهي مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1;2]$.

ولدينا $g(1)=3$ و $g(2)=-2$ و كذالك لدينا $g(1)\times f(2)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $[1;2]$.

حالة خاصة:

1. إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$. أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على المجال $[a;b]$.
2. المعادلة $f(x)=k$

- إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصوربين $f(a)$ و$f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثـــال:

اثبات أن المعادلة $x^5+3x^4-6x^2=1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1;2]$.

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.
- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

الحـل: يمكن كتابة المعادلة $x^5+3x^4-6x^2=1$ على الشكل $f(x)=1$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\Re$ بـ: $f(x)=x^5+3x^4-6x^2$ (يمكن اختيار كتابة أخرى مماثلة)

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي مستمرة على $\Re$ و من تم على $[1;2]$.

لدينا $f(2)=56$ و $f(1)=-2$ وبما ان $f(1)\prec 1\prec f(2)$ أي $-2\prec 1\prec 56$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^5+3x^4-6x^2=1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1;2]$.

•اثبات أن $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1;2]$ حيث $f(x)=x^5+3x^4-6x^2$

الدالة f معرفة و مستمرة على $[1;2]$.

ولدينا $\begin{cases} f(1)=-2 \\ f(2)=56 \end{cases}$ و $f(1)\times f(2)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1;2]$

حل تمرين 52 ص 30

f دالة معرفة على $\Re$ كما يلي: $f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$

1) حساب $f(1)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)$

لدينا $f(1)=\frac{3}{4}$, $f(0)=\frac{-1}{4}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$, $f(-1)=\frac{-5}{4}$

2) استنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي معرفة و مستمرة على $\Re$ و بالتالي فهي مستمرة على $[-1;1]$.

- لدينا f مستمرة على المجال $\left[-1;\frac{-1}{2}\right]$ و $f(-1)\times f\left(\frac{-1}{2}\right)<0$.

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[-1;\frac{-1}{2}\right]$............(1)

- لدينا f مستمرة على المجال $\left[\frac{-1}{2};0\right]$ و $f(0)\times f\left(\frac{-1}{2}\right)<0$.

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[\frac{-1}{2};0\right]$............(2)

- لدينا f مستمرة على المجال $[0;1]$ و $f(0)\times f(1)<0$.

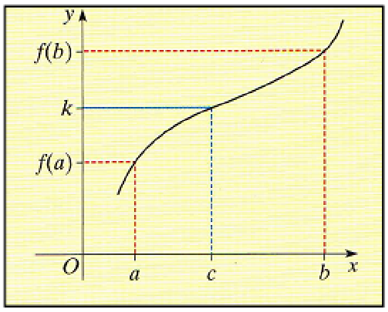
إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;1]$............(3)

من (1)، (2) و (3) نجد أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول في المجال $[-1;1]$.

ـ الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

1. الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a;b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.



البرهان:

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$.

و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c، محصور بين a و b و يحقق $f(c')=k$.

يكون لدينا حينئذ $c \neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على المجال $[a;b]$.

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=k$.

ملاحظة2: تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

مثـــال :

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;2[$ بـ $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-\infty;2[$ ولدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي k من $]-\infty;2[$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]-\infty;2[$.

حل تمرين رقم 58 ص 30 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2]$ بـ: $f(x)=2x^3-3x^2-1$

1) حساب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

$D_f=[-1;2]$, $f(x)=2x^3-3x^2-1$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-1;2]$ودالتها المشتقة هي : $f'(x)=6x^2-6x$

لدينا $f'(x)=0$ معناه $6x^2-6x=0$ أي $x(6x-6)=0$

اي $x=0$ أو $x=1$.

إشارة $f'(x)$.

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-6 ↗	-1 ↘	-2 ↗	3

4- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا وحيد α على المجال $[1;2]$.

لدينا من الدراسة السابقة الدالة f وانطلاقا من جدول التغيرات $f(1)=-2$ و $f(2)=3$

و كذالك لدينا $f(1)\times f(2)<0$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما(متزايدة تماما) على المجال $[1;2]$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $[1;2]$.

2) ارسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باستعمال نافذة مناسبة.

4) باستعمال حاسبة بيانية ايجاد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$f(x)$	-2	-1.9	-1.8	-1.6	-1.3	-1	-0.4	0.1

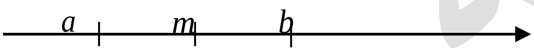
من الجدول نستنتج ان $1.6\prec\alpha\prec1.7$

- **إيجاد حصر لحل معادلة بالتصنيف**

طريقة : للحصول على حصر أدق للعدد α نتبع طريقة التصنيف الأتية : بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$

فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$.

نعلم أن $m=\dfrac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a;b]$.



1. نحسب كل من $m=\dfrac{a+b}{2}$ و $f(m)$ (m مركز المجال ل $[a;b]$) $f(a)\times f(m)<0$ ؟

2. نقارن بين $f(a)$ و $f(m)$ و نميز حالتين :

أ- إذا كان $f(a)\times f(m)<0$ فان الحل α موجود بين $[a;m]$

ب- إذا كان $f(b)\times f(m)<0$ فان الحل α موجود بين $[b;m]$

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

تطبيق :

لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) أدرس اتجاه تغر الدالة ثم شكل جدول تغيراتها

2) برهن ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $[1.1;2.3]$.

3) باستعمال طريقة التصنيف عين حصرا للعدد α طول مجاله 0.15 .

الإجابة :

2) حساب $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f

$D_f=]1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

بما أن $\frac{-1}{2\sqrt{x}}\prec 0$ و $\frac{-1}{(x-1)^2}\prec 0$ ومنه $f'(x)\prec 0$ على المجال $]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

5- البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا وحيد α على المجال $[1.1;2.3]$.

- الدالة f مستمرة ورتيبة تماما(متناقصة تماما) على المجال $[1.1;2.3]$.

$f(1.1)=8.95$ و $f(2.3)=-0.75$ و كذالك لدينا $f(1.1)\times f(2.3)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $[1.1;2.3]$.

3) تعيين باستعمال طريقة التصنيف عين حصرا للعدد α طول مجاله 0.15

لدينا $\alpha\in[1.1;2.3]$ وليكن m_1 مركز المجال $[1.1;2.3]$

ومنه $m_1=\frac{1.1+2.3}{2}=1.7$ ولدينا $f(1.1)=8.95$ و $f(2.3)=-0.75$ و $f(1.7)=0.12$

و لدينا $f(1.7)\times f(2.3)<0$ أي $f(2.3)\prec 0\prec f(1.7)$ وعليه $\alpha\in[1.7;2.3]$

طول المجال $[1.7;2.3]$ هو $2.3-1.7=0.6$ و $0.6\succ 0.15$

نواصل بنفس الطريقة حتى نجد مجال طوله 0.15 .

- ليكن m_2 مركز المجال $[1.7;2.3]$ ومنه $m_2=2$

ولدينا $f(2)=-0.41$ و $f(2.3)=-0.75$ و $f(1.7)=0.12$

و لدينا $f(1.7)\times f(2)<0$ أي $f(2)\prec 0\prec f(1.7)$ وعليه $\alpha\in[1.7;2]$

طول المجال $[1.7;2]$ هو $2-1.7=0.3$ و $0.3\succ 0.15$

- ليكن m_3 مركز المجال $[1.7;2]$ ومنه $m_3=1.85$

ولدينا $f(2)=-0.41$ و $f(1.85)=-0.18$ و $f(1.7)=0.12$

و لدينا $f(1.85)\times f(1.7)<0$ أي $f(1.85)\prec 0\prec f(1.7)$ وعليه $\alpha\in[1.7;1.85]$

طول المجال $[1.7;1.85]$ هو $1.85-1.7=0.15$

إذن حصر α هو $1.7\prec\alpha\prec 1.85$

تطبيق01

برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$

تطبيق02 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$

1) بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $D=[0;2]$

2) لتكن الدالة g المعرفة على D بـ: $g(x)=f(x)-x$

- بين أن الدالة g متناقصة تماما على D.
- احسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D

تطبيق03:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2]$ بِـ: $f(x)=x^4-x^2+1$ و الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ: $g(x)=-x^3-2x+5$

1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
2. بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1;2[$
3. أرسم التمثيل البياني للدالة f
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.
5. احسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيرات g
6. برهن ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α
7. احسب $g(1)$ و $g(2)$ ثم مثل منحنى الدالة .

5.عين حسب قيم x إشارة g

تمارين منزلية : 52 +57 ص 30

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة ـ		

عثمان

المذكرة رقم: 04

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر .

ميدان التعلم: تحليل

المحور : الدوال العددية.

المحتوى المعرفي : المشتقات والعمليات عليها .

المادة: رياضيات

السنة الدراسية: 2026/2025

المدة: 01 سا

ثانوية: الاخوة عباس–باتنة -

الكفاءات المستهدفة : استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة و المنحنى الممثل لها .

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف والتشخيص	**1. التهيئة النفسية :.**	05 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
	1. مشتقات دوال مألوفة تذكير:	15 د	

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

2. المشتقات والعمليات على الدوال :

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم

نتـــائج :

* الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

* الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

3. مشتقة الدالة: $x \mapsto u(ax+b)$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$. u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.
ليكن J المجال المكون
من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I.
الدالة $f : x \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J و لدينا: $f'(x) = au'(ax+b)$

أمثلة:

* الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ $f(x) = \sin(2x+1)$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$f'(x) = 2\cos(2x+1)$$

* الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x) = \cos(x+3)$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$g'(x) = -\sin(x+3)$$

تمرين تطبيقي 01: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\Re$ حيث $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $\Re$ بـ $g(x) = f(-x)$ و $h(x) = f(2x-1)$

بدون تعيين الدالتين g و h عين الدالتين g' و h'.

الحل:

* من أجل كل x من $\Re$، $(-x)$ ينتمي إلى $\Re$ ومنه فالدالة g قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$g'(x) = -f'(-x) = -\frac{1}{(-x)^2+(-x)+1} = -\frac{1}{x^2-x+1}$$

* من أجل كل x من $\Re$، $(2x-1)$ ينتمي إلى $\Re$ ومنه فالدالة h قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$h'(x) = 2f'(2x-1) = 2\times\frac{1}{(2x-1)^2+(2x-1)+1} = \frac{2}{4x^2-2x+1}$$

تمرين تطبيقي02: من أجل $x \geq 0$ و n عدد طبيعي نضع $f_n(x) = x^n\sqrt{x}$

بين أن الدالة f_n تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ثم عبر عن $f'_{n+1}(x)$ بدلالة n و $f_n(x)$.

الحل: الدالة $x \mapsto x^n$ تقبل الاشتقاق على $\Re$ بينما الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و منه فالدالة f_n جداؤهما تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$.

لدينا: $f_{n+1}(x) = x^{n+1}\sqrt{x}$ و منه $f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n\sqrt{x} + x^{n+1}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

و بالتالي $f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}x^n\sqrt{x} = \left(n+\dfrac{3}{2}\right)x^n\sqrt{x}$

و نجد هكذا: $f'_{n+1}(x) = \left(n+\dfrac{3}{2}\right)f_n(x)$

05 د

05 د

05 د

يشارك التلاميذ في صياغة التعري ف

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة -		

المذكرة رقم: 05

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر.
المادة: ريـاضيات

ميدان التعلم: تحليل
السنة الدراسية: 2026/2025

المـــــــحور : الدوال العددية.
المـدة: 01 سا

المـــــحتوى المعـرفي : حساب مشتق الدالة المركبة.
ثانوية: الاخوة عباس–باتنة -

الكفاءات المستهـدفة : استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة و المنحنى الممثل لها .

◈ اشتقاق دالة مركبة

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف والتشخيص	**2. التهيئة النفسية : التذكير بمشتقات الدوال المألوفة .** **نشــــاط مقترح** 1 – 1 ": f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 3$ 1) عين عبارة الدالة fog 2) أحسب $f'(x)$, $g'(x)$, $(fog)'(x)$ 3) قارن بين : $(fog)'(x)$ و $g'(x)\, f'(g(x))$ **مناقشة النشــــاط** 1) لدينا $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3)$ ومنه $(f\circ g)(x) = (x+3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 8$ 2) لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة هي : $f'(x) = 2x$ لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 1$ لدينا الدالة $f\circ g$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة هي : $(f\circ g)'(x) = 2x - 6$ 3) المقارنة : لدينا $g'(x)\, f'(g(x)) = 1 f'(x+3) = 2(x+3) = 2x+6$ و $(f\circ g)'(x) = 2x - 6$ اذن $(f\circ g)'(x) = g'(x)\, f'(g(x))$ ↲ اشتقاق دالة مركبة **1. مشتقة الدالة $v \circ u$** **مبرهنة (دون برهان):** إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\Re$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I : $(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\Re$ بـِ $f(x)=2(x^2+3)^2+1$

نلاحظ أن $f=v\circ u$ حيث $u:x\mapsto x^2+3$ و $v:x\mapsto 2x^2+1$ و منه

$f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))$ أي $f'(x)=u'(x)\times v'(x^2+1)$

بعد الحساب نجد: $f'(x)=4(x^2+3)\times 2x=8x(x^2+3)$

2. تطبيقات

- **مشتقة الدالة** $x\mapsto\sqrt{u(x)}$

> إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\Re$ و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

البرهان: نضع $f=\sqrt{u}$ و منه $f=v\circ u$ حيث $v:x\mapsto\sqrt{x}$

الدالة v تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. بما أن من أجل كل x من I، $u(x)>0$ فإن f تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $f'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\times u'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

مثال : مشتقة الدالة $h:x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ المعرفة على $]2;+\infty[$.

نلاحظ أن $h=\sqrt{u}$ مع $u(x)=x^2-4$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ مع $u(x)>0$. إذن h قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ و لدينا $h'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ومنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$،

$h'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

- **مشتقة الدالة** $x\mapsto[u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n\geq 2$)

> إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\Re$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(u^n)'=nu'u^{n-1}$.

البرهان: نضع $f=u^n$ و منه $f=v\circ u$ حيث $v:x\mapsto x^n$

الدالة $(n\geq 2)$ v تقبل الاشتقاق على $\Re$ و لدينا $v'(x)=nx^{n-1}$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق على I ولدينا: $f'=nu^{n-1}\times u'=nu'u^{n-1}$

مثال : مشتقة الدالة $f:x\mapsto(2x^2-x+3)^4$ المعرفة على $\Re$.

نلاحظ أن $f=u^4$ مع $u(x)=2x^2-x+3$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا $u'(x)=4x-1$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا $f'=4u'u^3$ و منه من أجل كل x من $\Re$ ، $f'(x)=4(4x-1)(2x^2-x+3)^3$

- **مشتقة الدالة** $x\mapsto\dfrac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n\geq 1$)

> إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\Re$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

05 د

05 د

05 د

05 د

يشارك التلاميذ في صياغة التعريف

برهان: نضع $f(x)=\frac{1}{(u(x))^n}$ ، لدينا $f=v\circ u$ حيث $v(x)=\frac{1}{x}$

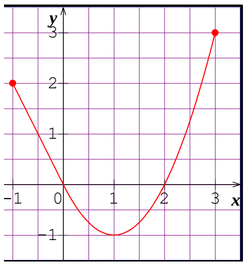
الدالة u قابلة للاشتقاق على I و منه $x\mapsto (u(x))^n$ قابلة للاشتقاق على I و لا تنعدم على I و منه حسب مبرهنة مشتقة مقلوب الاشتقاق $\frac{1}{(u(x))^n}$ قابلة للاشتقاق على I أي f قابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة f' حيث: $f'(x)=u'(x)v'(u(x))$

لدينا $v'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$ و منه $v'(u(x))=-\frac{n}{u^{n+1}(x)}$ و عليه $f'(x)=-\frac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$

مثال : مشتقة الدالة $g:x\mapsto \frac{1}{(x^2-1)^3}$ المعرفة على $]1;+\infty[$.

نلاحظ أن $g=\frac{1}{u^3}$ مع $u(x)=x^2-1$ كما أن $u(x)\neq 0$ من أجل x من $]1;+\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $u'(x)=2x$. إذن g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $g'=-\frac{3u'}{u^4}$ و منه من أجل كل x من $\Re$ ، $g'(x)=-\frac{3(2x)}{(x^2-1)^4}=-\frac{6x}{(x^2-1)^4}$

تطبيق: التمثيل البياني المقابل هو لدالة g قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$



1. عين بيانيا إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g'(x)$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;3]$ بـِ $f(x)=[g(x)]^2$

أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$

الحـــــل:

1. نلاحظ أن منحنى الدالة g يقع فوق محور الفواصل من أجل $x\in[-1;0]\cup[2;3]$ و تحته من أجل $x\in[0;2]$

و منه $g(x)\geq 0$ من أجل $x\in[-1;0]\cup[2;3]$ و $g(x)\leq 0$ من أجل $x\in[0;2]$.

بما أن الدالة g متناقصة تماما على $[-1;1]$ و متزايدة تماما على $[1;3]$ و تقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة 1 فإن $g'(x)<0$ من أجل $x\in[-1;1[$

و $g'(x)>0$ من أجل $x\in]1;3]$ و $g'(1)=0$.

3. الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$ و منه فالدالة $f=g^2$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$

و لدينا: $f'(x)=2g'(x)g(x)$. باستعمال الجدول الموالي نحصل على إشارة $f'(x)$

x	-1		0		1		2		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

↲ اتجاه تغير دالة

1. المشتقة و اتجاه تغير دالة

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\Re$.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

ملاحظة: لتكن f الدالة المعرفة على $\Re$ بـ $f(x)=x^3$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا $f'(x)=3x^2$ و منه:

من أجل كل x من $\Re^*$، $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\Re$

تطبيق :

تمرين تطبيقي 01 : لتكن f الدالة المعرفة على $\Re$ بـ $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. أدرس اتجاه تغير f. أحسب $f(-1)$. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارتها على $\Re$.

2. باستعمال السؤال 1 أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{4}{x}$$

الحل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا: $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. $f'(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه 0 و 2 و بالتالي فإشارته من نفس إشارة (-3) بين الجذرين أي سالبة على المجال $[0;2]$

لدينا: $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=0$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	− 0	+
$f(x)$	↗	0 ↗	4	↘ 0	↗

2. الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$ و لدينا:

$$g'(x)=x-3+\frac{4}{x^2}=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}$$

إذن إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $f(x)$ على $]-\infty;0[$ أي سالبة على $]-\infty;-1]$ و موجبة على $[-1;0[$.

نستنتج هكذا أن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ و متزايدة تماما على $[-1;0[$.

5)القيم الحدية لدالة

مبرهنة (دون برهان): f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\Re$ و x_0 عدد حقيقي من I.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

القيم الحدية المحلية

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\Re$ و x_0 عدد حقيقي من I.

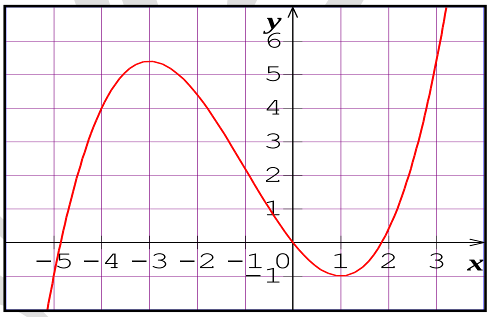
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x) \le f(x_0)$.
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x) \ge f(x_0)$.
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـِ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $[-6;4]$

بـِ $f(x)=\frac{1}{5}(x^3+3x^2-9x)$

و ليكن في الشكل المقابل تمثيلها البياني.



$f(-3)=\frac{27}{5}$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

و $f(1)=-1$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f

ملاحظة :

* يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I .
* إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة C من I فإن الرسم البياني للدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها C .

3. المشتقات المتتابعة :

تعاريف: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجا ل I من $\mathbb{R}$.

✓ إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f'' . إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f , و نرمز لها بالرمز f'''

➕ تسمى الدوال f' ، f'' ، f''' ،.......، $f^{(n)}$ ،... المشتقات المتتابعة للدالة f .

مثال 01

نعتبر الدالة f ذات المتغير x المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x + 6$$

– عين كل من $f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}$.

الحل :

الدالة f هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12$$

الدالة f' هي دالة كثير حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f''(x) = 12x^2 - 24$$

الدالة f'' هي دالة كثير حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'''(x) = 24x$$

مثال 02: لتكن f الدالة المعرفة على $\Re-\{0\}$ بـ: $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}$.

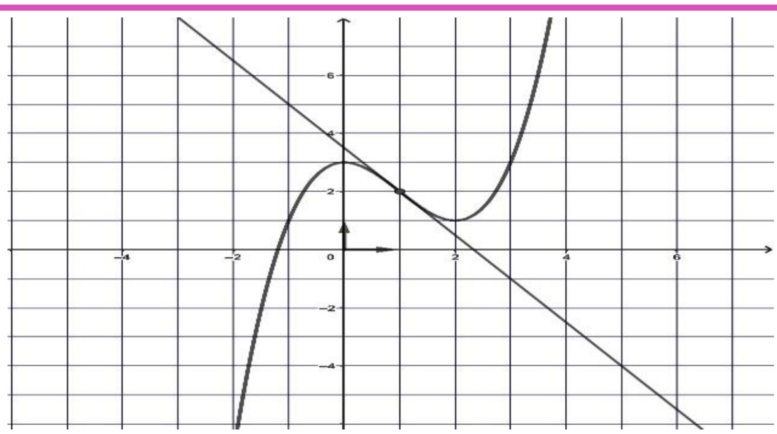
لدينا : $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ، $f''(x)=6x-\dfrac{2}{x^3}$ و $f'''(x)=6+\dfrac{6}{x^4}$

نقطة الإنعطاف :

مبرهنة : f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I يشمل x_0 :

إذا إنعدمت المشتقة الثانية f'' عند x_0 مغيرة إشارتها ، فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f .

✓ نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني .



ملاحظة :

إذا انعدمت المشتقة الأولى للدالة ولم تغير اشارتها بجوار فإن المنحنى الممثل للدالة يقبل نقطة انعطاف احداثيايها $(x_0; f(x_0))$

مثــــــال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3$

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ لنبين أن المنحنى (c_f) يقبل نقطة إنعطاف :

لدينا : $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$

$f''(x) = 3x - 3$

لدينا : $f''(x) = 0$ معناه : $3x - 3 = 0$

أي : $x = 1$

<u>إشارة $f''(x)$:</u>

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

المشتقة الثانية f'' انعدمت عند 1 مغيرة إشارتها. إذن النقطة $A(1; 2)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (c_f)

تمارين منزلية : 04 + 10 ص58

تمارين منزلية : 24 + 25 ص60

تمارين منزلية : 13 + 14 ص 59

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.

المذكرة رقم: 06

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المستوى 3 عت + 3 تر + 3 ر.

ميدان التعلم: تحليل

المحور : الدوال العددية.

المحتوى المعرفي : التقريب التألفي .

المادة: رياضيات

السنة الدراسية: 2026/2025

المدة: 01 سا

ثانوية: الاخوة عباس–باتنة -

الكفاءات المستهدفة :

◈ إنشاء تمثيلات بيانية تقريبة لدوال باستعمال التقريب التالفي .

ملاحظات و توجيهات	المدة	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المراحل
يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ	05 د 15 د	1. التهيئة النفسية : التذكير بمعادلة المماس . 2. التذكير بأحسن تقريب تألفي . **1) التقريب التآلفي لدالة:** **خاصية:** f دالة معرفة على مجال مفتوح I. إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$. من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f. **مثال 01 :** أحسن تقريب تالفي للدالة $x\to\sqrt{x+1}$ بجوار 0 هي الدالة التالفية $x\to\frac{1}{2}x+1$ ونكتب : $\sqrt{x+1}\approx\frac{1}{2}x+1$ بجوار 0. **مثال 02 :** باستعمال التقريب التألفي للدالة f . لنحسب قيمة مقربة للعدد $f(25,2)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x}$.	مرحلة الاستكشاف والتشخيص

مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم

لدينا : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f(25,2)=f(25+0,2)\approx 0,2f'(25)+f(25)$$

$$\approx 0,2\times\frac{1}{2\sqrt{25}}+\sqrt{25}$$

$$\approx 5,02$$

إذن : $f(25,2)\approx 5,02$

مثـــال 03 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\Re$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$

- باستعمال التقريب التآلفي للدالة f لنحسب القيمة المقربة إلى 10^{-2} للعدد $f(1.0001)$

لدينا: $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$ ، $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ و $f'(1)=1$

و منه: $f(1.0001)=f(1+0.0001)\approx f(1)+0.0001f'(1)$

و منه: $f(1.0001)\approx -0.50$

2) <u>الكتابة التفاضلية :</u>

لدينا سابقا $f(x+h)=hf'(x)+f(x)$.

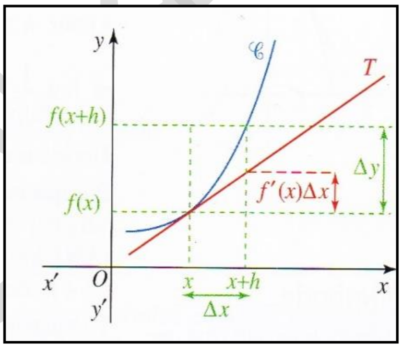
بوضع: $\Delta x=(x+h)-x$ و $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ تكتب المساواة

$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\varepsilon(h)$ كما يلي: $\Delta y=f'(x)\Delta x+\Delta x\,\varepsilon(\Delta x)$

و منه التقريب $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0.

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية: $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ أو

$dy=f'(x)dx$.



يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية و بصفة

عامةنكتب: $\dfrac{df}{dx}$ بدلا من f'

و $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' وهكذا $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$

05 د

05 د

05 د

05 د

يشارك التلاميذ في صياغة التعريف

3) طريقة أولر

تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و $y_0=f(x_0)$.

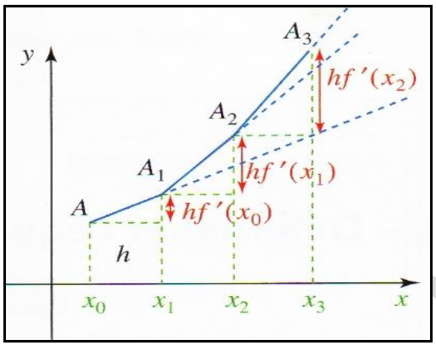
ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا:

$f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$.

انطلاقا من النقطة $A_0(x_0;y_0)$ بحيث $f'(x_0)\neq 0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1;y_1)$ ذات الفاصلة $x_1=x_0+h$ و التي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ والمار من A_0 و بالتالي:

$y_1=f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن

$f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$



من أجل h قريب من 0 فإن النقطة $A_1(x_1;y_1)$ قريبة من منحني (C_f) f.

بنفس الطريقة يمكن إنشاء، انطلاقا من A_1، النقطة $A_2(x_1+h;f(x_1)+hf'(x_1))$.

و هكذا يمكن على التوالي إنشاء النقط $A_n(x_n;y_n)$ حيث $x_n=x_{n-1}+h$ و $y_n=f(x_{n-1})+hf'(x_{n-1})$ مع $n\geq 1$. بربط النقط A_0، A_1، A_2، ....، نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة. و نحصل على أكثر دقة كلما كان h أقربا إلى 0.

تطبيـــــــــق

لتكن f دالة تحقق: $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{x}$.

1. باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0{,}5$ شكل جدولا يتضمن القيم التقريبية لِـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;5]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f . تدور النتائج إلى $0{,}01$. عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.

2. باختيار خطوة جديدة $h=0{,}1$ عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.

3. نبرهن أن $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+1$. تحقق أن $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{x}$. أحسب $f(4)$ ثم قارن النتيجة مع القيم المقربة المحصل عليها سابقا بالخطوتين $0{,}5$ و $0{,}1$.

<u>طريقة:</u> لإيجاد قيمة مقربة لِـ $f(a+h)$ نستعمل التقريب $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$ حيث h قريب من 0.

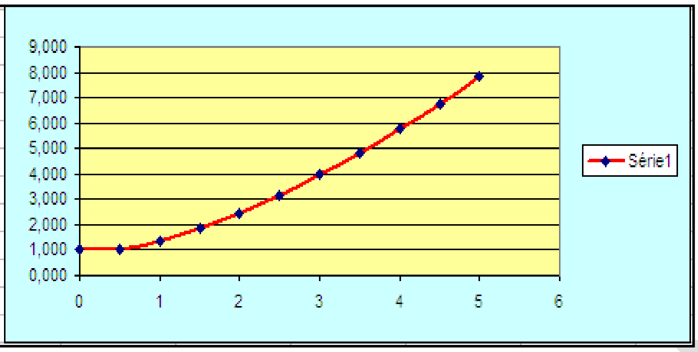
الحل:

1.لدينا: $f\left(0,5\right)\approx f\left(0\right)+0,5f'\left(0\right)\approx 1$

$$f\left(1\right)\approx f\left(0,5\right)+0,5f'\left(0,5\right)\approx 1+0,5\sqrt{0,5}\approx 1,354$$

لدينا $f\left(4\right)\approx 5,765$.

x	f(x)
0	1,000
0,5	1,000
1	1,354
1,5	1,854
2	2,466
2,5	3,173
3	3,964
3,5	4,830
4	5,765
4,5	6,765
5	7,826



2. نجد باستعمال مجدول أو برنامج حاسبة بيانية $f\left(4\right)\approx 6,227$.

3. من الواضح أن $f\left(0\right)=1$ كما أن $f'\left(x\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{x}=\sqrt{x}$

لدينا $f\left(4\right)=\frac{2}{3}\times 4\sqrt{4}+1=\frac{19}{3}$ و باستعمال حاسبة نجد $f\left(4\right)\approx 6,333$. نلاحظ أن القيمة المقربة المحصل عليها بالخطوة $0,1$ أقرب من القيمة المضبوطة لِـ$f\left(4\right)$ من القيمة المقربة المحصل عليها بالخطوة $0,5$.

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة -

المذكرة رقم: 07 | مذكرة رقم | **الأستاذ:** بن حولة عثمان

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر. | **المادة:** رياضيات

ميدان التعلم: تحليل | **السنة الدراسية:** 2026/2025

المحور : الدوال العددية. | **المدة:** 01 سا

المحتوى المعرفي : حل مسائل باستخدام الاشتقاق والاستمرارية. | **ثانوية:** الاخوة عباس–باتنة -

الكفاءات المستهدفة : ندرس أمثلة حول دوال من مثل:

* الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثير حدود من الدرجة 2 أو 3 على كثير حدود من الدرجة 1 أو 2).
* الدوال الصماء $x \mapsto \sqrt{f(x)}$، حيث f دالة موجبة وقابلة للاشتقاق.
* دراسة اتجاه تغير دوال كثير حدود ، ناطقة ، الصماء

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف والتشخيص	**التهيئة النفسية :** تذكير حول الدوال العددية و الاشتقاقية و الاستمرارية . دراسة دالة كثيرة حدود + ناطقة : **تمرين 01 : دراسة دالة كثيرة حدود.** I. g دالة كثير حدود معرفة كمايلي : $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$ 1) ادرس نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها . 2) ادرس اتجاه تغير الدالة g . شكل جدول التغيرات . **3)** بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$ ، ثم استنتج اشارة $g(x)$ II. f دالة عددية معرفة على $D=IR-\{-1\}$ كمايلي : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ 1) أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجالي تعريفها 2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها . 3) بين أن : $f(\alpha)\approx 2-\alpha$. 4) أحسب $f(-2)$ ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f . 5) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بالنسبة لـ C_f 6) أدرس وضعية (c_f) بالنسبة (Δ) وأرسمهما III. نضع : $K(x)=\frac{\lvert x^3\rvert-3x^2+3\lvert x\rvert-2}{(\lvert x\rvert-1)^2}$ 7) عين مجموعة تعريف الدالة K ثم بين أن الدالة K زوجية. أدرس قابلية اشتقاق الدالة K عند 0 ثم أرسم C_K في نفس المعلم	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

تمرين 02 : دراسة دالة صماء .

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ بـِ $f(x)=\sqrt{x^2-1}+|x|$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس شفعية الدالة f ثم أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3) أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 1 من اليمين و فسر النتيجة بيانيا .

4) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;+\infty[$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;-1]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

5) أنشئ المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f)

الحـــــــــل :

1. دراسة شفعية الدالة f

لدينا $f(x)=\sqrt{x^2-1}+|x|$ و $D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

ولدينا من اجل كل $x\in\Re$ فإن $(-x)\in\Re$ بما أن D_f متناظر بالنسبة لـ 0

و
$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-1}+|-x|$$
$$=\sqrt{x^2-1}+|x|$$

وعليه $f(-x)=f(x)$

إذن الدالة f زوجية والمنحنى (C_f) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

- حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}+x=+\infty$$

2. نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=0$

لدينا
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}+x-2x\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{(\sqrt{x^2-1}+x)}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1-x^2}{(\sqrt{x^2-1}+x)}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{(\sqrt{x^2-1}+x)}\right]$$
$$=0$$

- التفسير البياني :

المنحنى يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=2x$.

3. دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند 1 من اليمين

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\sqrt{(1+h)^2-1}+(1+h)-1}{h}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\sqrt{h^2+2h+1-1}+(1+h)-1}{h}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\sqrt{h^2+2h}+h}{h}$$

لدينا

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\sqrt{h^2(1+\frac{2}{h})}+h}{h}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{h\left(\sqrt{(1+\frac{2}{h})}+1\right)}{h}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \sqrt{(1+\frac{2}{h})}+1$$

$$= +\infty$$

ومنه $\lim_{h \xrightarrow{>} 1} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty$. إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند يمين 1 .

- **التفسير الهندسي** :

المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماس موازي لحامل محور التراتيب .

4. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;+\infty[$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;-1]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

أ- عللى المجال $[1;+\infty[$

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$ أي $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

لدينا $f'(x) \succ 0$ من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$.

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;1]$.

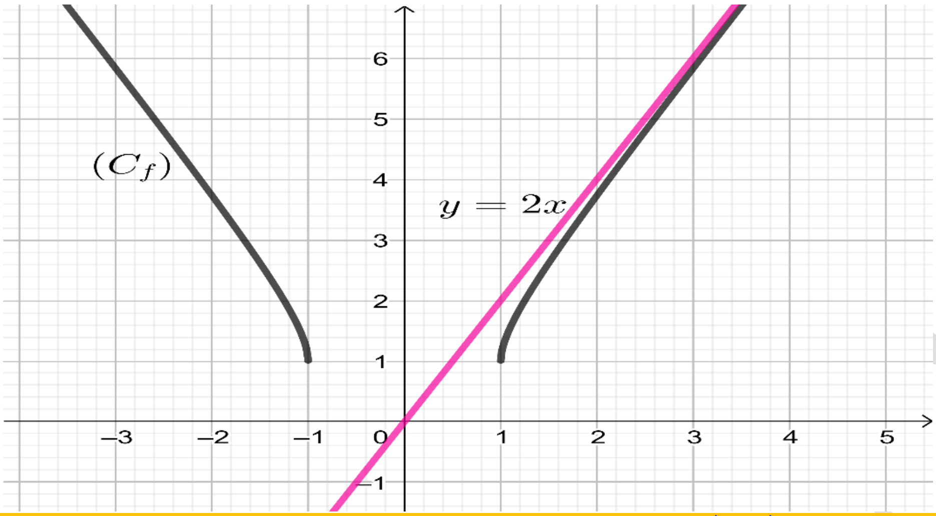
لدينا مما سبق الدالة f زوجية ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$.

- جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$\searrow$			$\nearrow$

5. أنشاء المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f)



تمرين 02 : دراسة دالة صماء .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

1) ادرس نهايات الدالة g .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g . شكل جدول التغيرات .

3)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $g(x)=0$.

4)استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\leq 0$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=-x+1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (C) تمثيلها البياني .

1)اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

2)احسب النهايات ،ادرس اتجاه التغير و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3)برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)=2$ ماذا تستنتج ؟

4)اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5)بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1<\beta<2$

6)احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x-2]$ ماذا تستنتج ؟ و أحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ ماذا تستنتج ؟

7)انشئ (C) .

8)ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x :

$$(-x+1)\sqrt{x^2+1}=m\sqrt{x^2+1}-x$$

6. دراسة دالة كثير حدود:

التمرين رقم 72صفحة 65

7. دراسة دالة ناطقة:

التمرين رقم 86صفحة 68 (ت87 ص)

8 . دراسة دالة صماء:

التمرين رقم 40 صفحة 61 (ت 53 ص المماس الموازي لمحور التراتيب).

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة ـ

المذكرة رقم:08

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 عت + 3 تر + 3 ر.

المادة: رياضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2026/2025

المحور : الدوال العددية.

المدة: 01 سا

المحتوى المعرفي : دراسة الدوال المثلثية.

ثانوية: الاخوة عباس-باتنة -

الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin x$ ، $x \mapsto \cos x$ ، $t \mapsto a\sin(\omega t+\varphi)$

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف والتشخيص	i. التهيئة النفسية	05 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
		15 د	

i. التهيئة النفسية

2) **تذكير بالدوال المثلثية (الشفعية و التفسير الهندسي . اتجاه تغيرها . العلاقات المثلثية ...)**

3) **التطرق إلى فكرة الدوال الدورية**

نشاط مقترح :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\Re$ بـِ $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos(x)$ و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليها البيانيين في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نقتصر دراسة الدالتين على المجال $[-\pi;\pi]$.

1. إعتمادا على الدائرة المثلثية حدد إشارة $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$.
2. باستعمال دساتير الجمع
   4) أدرس شفاعة الدالتين f و g, فسر النتائج بيانيا .
   5) أثبت أن f و g دوريتان دورهما 2π .
3. أحسب $f'(x)$ و $g'(x)$.
4. استنتج اتجاه تغير f و g على المجال $[0;\pi]$ ثم شكل جدول تغيراتها .
5. أنشئ (C_f) و (C_g) على المجال $[0;\pi]$ ثم استنتج الانشاء على المجال $[-\pi;0]$.

اشرح كيف يتم انشاء (C_f) و (C_g) على $\Re$.

مناقشة النشاط المقترح :

1) إشارة $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g(x)$	$+$	0	$-$

x	-0	π
$f(x)$	$+$	

2. باستعمال دساتير الجمع
   1) أدرس شفعية الدالتين f و g و,تفسير النتائج بيانيا .

أ- شفعية الدالتين f: لدينا $f(x)=\sin x$ و $D_f=[-\pi;\pi]$

حولة عثمان

مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم

بما أن D_f متناظر بالنسبة لـ 0 ولدينا من اجل كل $x\in\Re$ فإن $(-x)\in\Re$

$$\sin(-x)=\sin(0-x)$$

و $=\sin(0)\cos(x)-\sin(x)\cos(0)$

$$=0\cos(x)-1\sin(x)$$

ومنه $\sin(-x)=-\sin(x)$ وعليه $f(-x)=-f(x)$

إذن الدالة f فردية والمنحنى (C_f) متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم .

ب- شفعية الدالة g : لدينا $g(x)=\cos(x)$ و $D_f=[-\pi;\pi]$

بما أن D_g متناظر بالنسبة لـ 0 ولدينا من اجل كل $x\in\Re$ فإن $(-x)\in\Re$

$$\cos(-x)=\sin(0-x)$$

و $=\cos(0)\cos(x)-\sin(0)\sin(x)$

$$=1\cos(x)-0\sin(x)$$

ومنه $\cos(-x)=\cos(x)$ وعليه $g(-x)=g(x)$

إذن الدالة g فردية والمنحنى (C_g) متناظر بالنسبة الى محور التراتيب .

2) اثبات أن f و g دوريتان دورهما 2π.

لدينا من اجل كل $x\in\Re$ فإن $(x+2\pi)\in\Re$

$$\sin(2\pi+x)=\sin(2\pi)\cos(x)+\sin(x)\cos(2\pi)$$

و $=0\cos(x)+\sin(x)$

$$\sin(2\pi+x)=\sin(x)$$

إذن الدالة f دوريتان ودورها 2π.

* لدينا من اجل كل $x\in\Re$ فإن $(x+2\pi)\in\Re$

$$\cos(2\pi+x)=\cos(2\pi)\cos(x)-\sin(x)\sin(2\pi)$$

و $=1\times\cos(x)-0\times\sin(x)$

$$\cos(2\pi+x)=\cos(x)$$

إذن الدالة g دوريتان ودورها 2π.

3. حساب $f'(x)$ و $g'(x)$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة هي : $f'(x)=\cos x$

و الدالة g قابلة للاشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=-\sin x$

4. استنتج اتجاه تغير f و g على المجال $[0;\pi]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

- لدينا $f'(x)\succ 0$ من اجل $x\in[0;\pi]$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;\pi]$

* لدينا $g'(x)\succ 0$ من اجل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ و لدينا $g'(x)\prec 0$ من اجل $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ و

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

05 د

05 د

05 د

05 د

يشارك التلاميذ في صياغة التعري ف

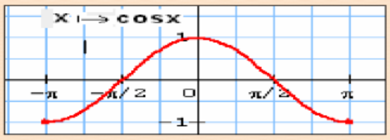
جدول تغيرات الدالة f و g على المجال $[0;\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos$	1 ↘	0 ↘	-1

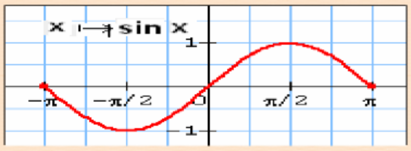
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin$	0 ↗	1 ↘	0

- التمثيل البياني

- ننشئ التمثيل البياني للدالة cos على المجال $[0,\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.
نتمم هذا الرسم على $[-\pi,0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة cos زوجية .

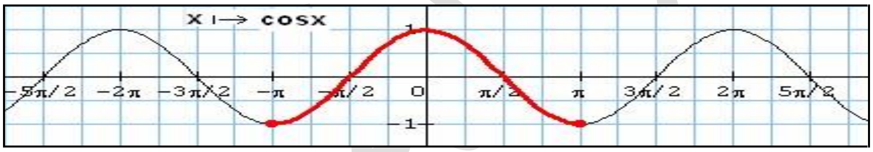


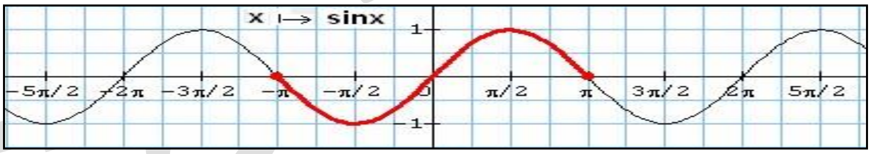
- ننشئ التمثيل البياني للدالة sin على المجال $[0,\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.
نتمم هذا الرسم على $[-\pi,0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة sin فردية .



6) شرح كيف يتم انشاء (C_f) و (C_g) على $\Re$.

ملاحظة: يتم انشاء (C_f) و (C_g) على $\Re$.بانشاء تمثيلات مماثلة دورية ودورها 2π أي نجري انسحابات متتالية أشعتها $2k\pi\vec{i}$ حيث k عدد صحيح نسبي





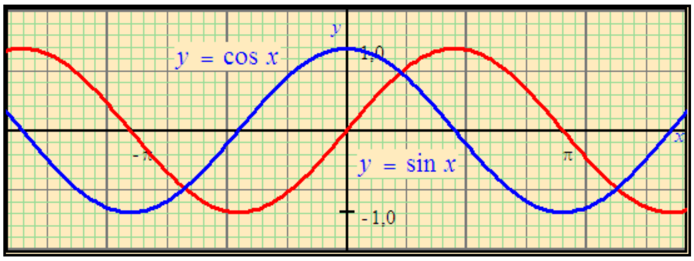
دراسة دالة مثلثية

1. تذكير حول الدالتين " جيب " و " جيب التمام "

* الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ معرفتان على $\Re$.
* الدالتين $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ دوريتان دورهما 2π .
* من أجل كل x من $\Re$ ،

$\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

وعليه الدالة $x \mapsto \cos x$ زوجية و الدالة $x \mapsto \sin x$ فردية



2- دراسة دالة مثلثية من الشكل $x \to a\sin(bx+c)$ أو $x \to a\cos(bx+c)$ مع a، b و c أعداد حقيقية غير معدومة

الدالتان $x \to a\sin(bx+c)$ أو $x \to a\cos(bx+c)$ دوريتان ودورهما $\dfrac{2\pi}{|b|}$.

الدالة $x \to a\sin(bx+c)$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة هي $x \to ab\cos(bx+c)$

الدالة $x \to a\cos(bx+c)$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة هي $x \to -ab\sin(bx+c)$

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ : $f(x) = \sin(2x - \dfrac{\pi}{2})$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أحسب $f(x+\pi)$ ماذا تستنتج ؟

2- أحسب $f'(x)$ وحدد اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;\pi]$

3- شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C_f) .

الحـــل :

1- حساب $f(x+\pi)$:

لدينا
$$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi) - \frac{\pi}{2})$$
$$= \sin(2x + 2\pi - \frac{\pi}{2})$$
$$= \sin(2x - \frac{\pi}{2})$$

اذن نستنتج أن f دورية ودورها π .

2- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ ودالتها المشتقة هي $f'(x) = 2\cos(2x - \dfrac{\pi}{2})$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;\pi]$

لدينا $f'(x) = 0$ معناه $2\cos(2x - \dfrac{\pi}{2}) = 0$ معناه $\cos(2x - \dfrac{\pi}{2}) = 0$ معناه

$\cos(2x - \dfrac{\pi}{2}) = \cos(\dfrac{\pi}{2})$ ومنه $2x - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ ومنه $2x = \pi$ أي $x = \dfrac{\pi}{2}$

إشارة $f'(x)$

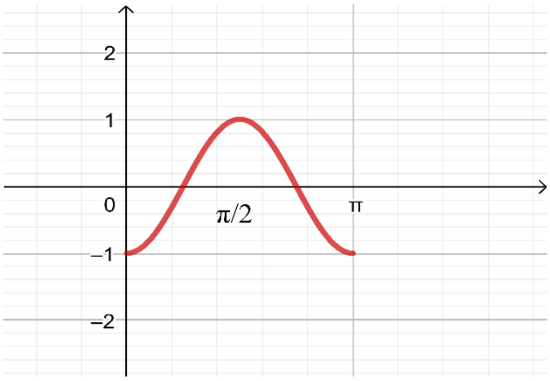
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

اذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

أنشاء (C_f) .



نشاط مقترح :

من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح $(k\in Z)$. نعرف الدالة $f(x)=\tan x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- بين أن الدالة f **فردية .ماذا تستنتج ؟**

2- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح $(k\in Z)$: $f'(x)=1+\tan^2 x$

3- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

4- أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} f(x)$ **ثم فسر النتيجة بيانيا .**

5- أنشئ (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

مناقشة النشاط :

1. تبيان أن الدالة f **فردية . لدينا** $x\in\Re-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ **ومنه** $-x\in\Re-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

ولدينا $f(-x)=\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$ أي $f(-x)=-f(x)$

وبالتالي **الدالة** f **فردية .**

نستنتج أن المنحنى الممثل للدالة "ظل" متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

2. تبيان أنه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح $(k\in Z)$: $f'(x)=1+\tan^2 x$

لدينا من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ،

$$f'(x)=(\tan)'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

بما أن بما أن $(\tan)'(x)>0$ فإن الدالة "ظل" متزايدة تماما على كل مجال معرفة فيه.

- **تشكيل جدول تغيراتها** على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

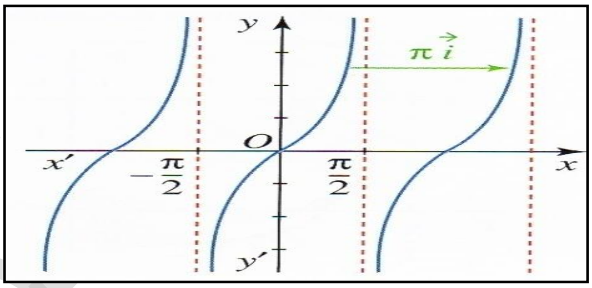
4. حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ و بما أن من أجل كل x من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، $\cos x>0$ فإن

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x=+\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة "ظل".

5. انشاء (C_f)



a. الدالة " ظل "

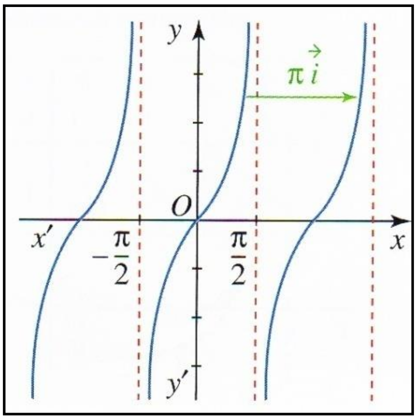
تعريف: الدالة " ظل " و التي نرمز إليها بالرمز " $\tan$ " معرفة بـ $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح $(k\in Z)$.

خواص: * الدالة" ظل " دورية دورها π .
* المنحني الممثل للدالة "ظل" متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

دراسة الدالة "ظل" من الخاصيتين السابقتين يمكن اقتصار دراسة الدالة "ظل" على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

*من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $(\tan)'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

الدالة "ظل" متزايدة تماما على كل مجال معرفة فيه.



x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$	$+$
$\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$

- لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة "ظل".

تمرين : f دالة عددية معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & , x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\\ f(x) = 0 & , x = 0 \end{cases}$

/1 أدرس استمرارية وقابلية الاشتقاق الدالة f عند0 ،

/2 بين أن الدالة f فردية ثم أدرس تغيراتها

/3 تأكد أن المنحني (c_f) يقبل نقطة انعطاف ،

/4 عين احداثيي النقطة A من (c_f) المماس عندها يوازي منصف الربع الأول

/5 بين أنه يوجد α وحيد من المجال $]3\pi/4 \;,\; 5\pi/6[$ يحقق $f(\alpha) = \alpha$ ، فسر هندسيا النتيجة

/ 6 أرسم (c_f)

حل التمرين رقم 93 صفحة 69 :

من أجل كل x من $\Re$ ، $f(x+\pi) = \sin^2(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$ **و منه الدالة f دورية دورها π.**

من أجل كل x من $\Re$ ، $f(-x) = \sin^2(-x) = [\sin(-x)]^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$ **و منه الدالة f زوجية و بالتالي فإن محور التراتيب محور تناظر للمنحني (C).**

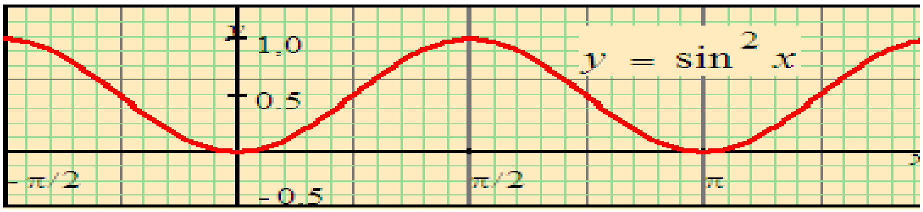
.2 بما أن الدالة $x \mapsto \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ (جداء دالتين) فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ و لدينا: من أجل كل x من $\Re$،

$f'(x) = 2\sin x \cos x$

و بما أن العددين $\sin x$ و $\cos x$ موجبان على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ مع $\sin 0 = 0$ و $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ فإن $f'(x) \geq 0$ على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ و بالتالي فالدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0 $\quad +$ $\quad 0$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

3. نرسم في البداية المنحني الممثل للدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ثم باستعمال التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نرسم المنحني على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ و بما أن الدالة f دورية π دورها نقوم بانسحاب شعاعه $\pi\vec{i}$ لرسم المنحني (C) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.



ملاحظة: لرسم (C) على $\mathfrak{R}$ نجري انسحابات متتالية أشعتها $k\pi\vec{i}$ حيث k عدد صحيح نسبي

تمارين : 95 ،94 ، 97 صفحة 70

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي – المنهاج – الوثيقة المرافقة -		

بن خولة عثمان