

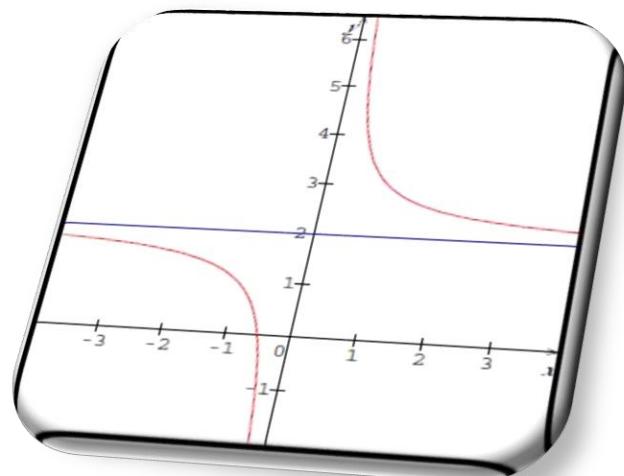
الرياضيات في الثانوية

نماذج متنوعة في محور الدوال العددية

مرفقة بحلول مفصلة

18 نماذج

للسنة الثانية ثانوي



كناية الأسناد :

حناس نبيل

Octobre 2021

أذكر إن كانت الدالتان f و g متساويتان في كل حالة من الحالات التالية :

$$g(x) = \sqrt{(x+2)^2} \quad \text{و} \quad f(x) = x+2 \quad (1)$$

$$g(x) = |x| \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x^2} \quad (2)$$

$$g(x) = |x| \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x^2}{|x|} \quad (3)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \quad (4)$$

$$g(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2-1} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x^2+4x+4}{(x-1)(x+1)} \quad (5)$$

$$g(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-3)^2} \quad \text{و} \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x+3} \quad (6)$$

عين $f \circ g$ و $g \circ f$ بعد تعين مجموعة تعريف $f \circ g$ و $g \circ f$ في كل حالات التالية :

$$g(x) = -3x \quad \text{و} \quad f(x) = 2x \quad (1)$$

$$g(x) = 2x+3 \quad \text{و} \quad f(x) = x-3 \quad (2)$$

$$g(x) = 2x \quad \text{و} \quad f(x) = -\frac{1}{x+1} \quad (3)$$

$$g(x) = 4x^2 - 3x \quad \text{و} \quad f(x) = 2x^2 - 1 \quad (4)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 3 \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} \quad (5)$$

$$g(x) = \cos(x-1) \quad \text{و} \quad f(x) = 3x-2 \quad (6)$$

التمرين رقم 03 :

فك الدالة f إلى مركب دالتين بسيطتين في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = (x-1)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = (x+2)^2 + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad (5)$$

$$f(x) = \cos(x-1) \quad (6)$$

$$f(x) = \left| \frac{2x}{5} - 1 \right| \quad (7)$$

التمرين رقم 04 :

$$g(x) = 2x \quad \text{و} \quad f(x) = -\frac{1}{x+1} \quad \text{حيث : } f \circ g$$

-1 عين مجموعة تعريف الدالتين f و g ثم عين مجموعة تعريف الدالة $f \circ g$

$$-2 \text{ أحسب } g \circ f(x)$$

-3 استنتج إتجاه تغير الدالة $f \circ g$ بالإعتماد على تغيرات الدالتين f و g .

التمرين رقم 05 :

$$g(x) = 3x^2 + 1 \quad \text{و} \quad f(x) = 2x-1 \quad \text{ـ : } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

كتابه الأستاذ : حناش نبيل

(1) عرف الدوال : $g \circ g$ ، $f \circ f$ ، $f \circ g$ ، $g \circ f$

(2) هل الدالتان $g \circ f$ و $f \circ g$ متساويتان ؟

(3) أكتب الدالة g على شكل مركب دالتين بسيطتين يطلب تحديدهما .

التمرين رقم : 06

ادرس إتجاه تغير الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$$I =]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{2}{x} + 3 \quad (1)$$

$$I =]-\infty, 0] \quad f(x) = 3x^2 + 2 \quad (2)$$

$$I = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right] \quad f(x) = (3 - 2x)^2 \quad (3)$$

$$I = [-2, +\infty[\quad f(x) = (x + 2)^2 - 1 \quad (4)$$

$$] -\infty, 2] \quad f(x) = \sqrt{2 - x} \quad (5)$$

$$I = [1, +\infty[\quad f(x) = \sqrt{x - 1} + 2 \quad (6)$$

$$I = [0, \pi] \quad f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (7)$$

$$I = [0, \pi] \quad f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (8)$$

التمرين رقم : 07

و $g(x) = x^2$ و $f(x) = x$: بـ $I = [0, +\infty[$ دالتان معرفتان على المجال I

أثبتت أن الدالة $f + g$ متزايدة تماما على المجال I .

التمرين رقم : 08

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

$$f(x) = x^2 + |x| \quad : \quad]-\infty, 0]$$

(1) أثبت أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$.

(2) استنتج اتجاه تغير الدالتين $5 - 3f + 2$ ، $2f - 5$ على المجال $]-\infty, 0]$.

التمرين رقم 09 :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad : \quad \mathbb{R}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) = (x + \alpha)^2 + \beta$ حيث α و β عددين حقيقيين يطلب تعبيئهما.

(2) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) التمثيل البياني للدالة f إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة المرجعية يطلب تعبيئها ثم انشئ (C_f) .

(3) بين كيف يمكن استنتاج التمثيلات البيانية للدوال الآتية :

$$v(x) = |f(x)| \quad , \quad u(x) = -f(x) \quad , \quad k(x) = f(x-2)+1 \quad , \quad h(x) = f(x)+1$$

$$\cdot w(x) = f(|x|)$$

التمرين رقم 10 :

(1) أثبت بطر يقين مختلقين أن النقطة $\Omega(a, b)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

$$\Omega(-1, 1) \quad , \quad f(x) = \frac{x+2}{x+1} \quad -\text{أ}$$

$$\Omega(1, 2) \quad , \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-1} \quad -\text{ب}$$

(2) أثبت بثلاث طرق مختلفة أن المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_f) :

$$x=-2 \quad , \quad f(x) = x^2 + 4x + 3 \quad -\text{أ}$$

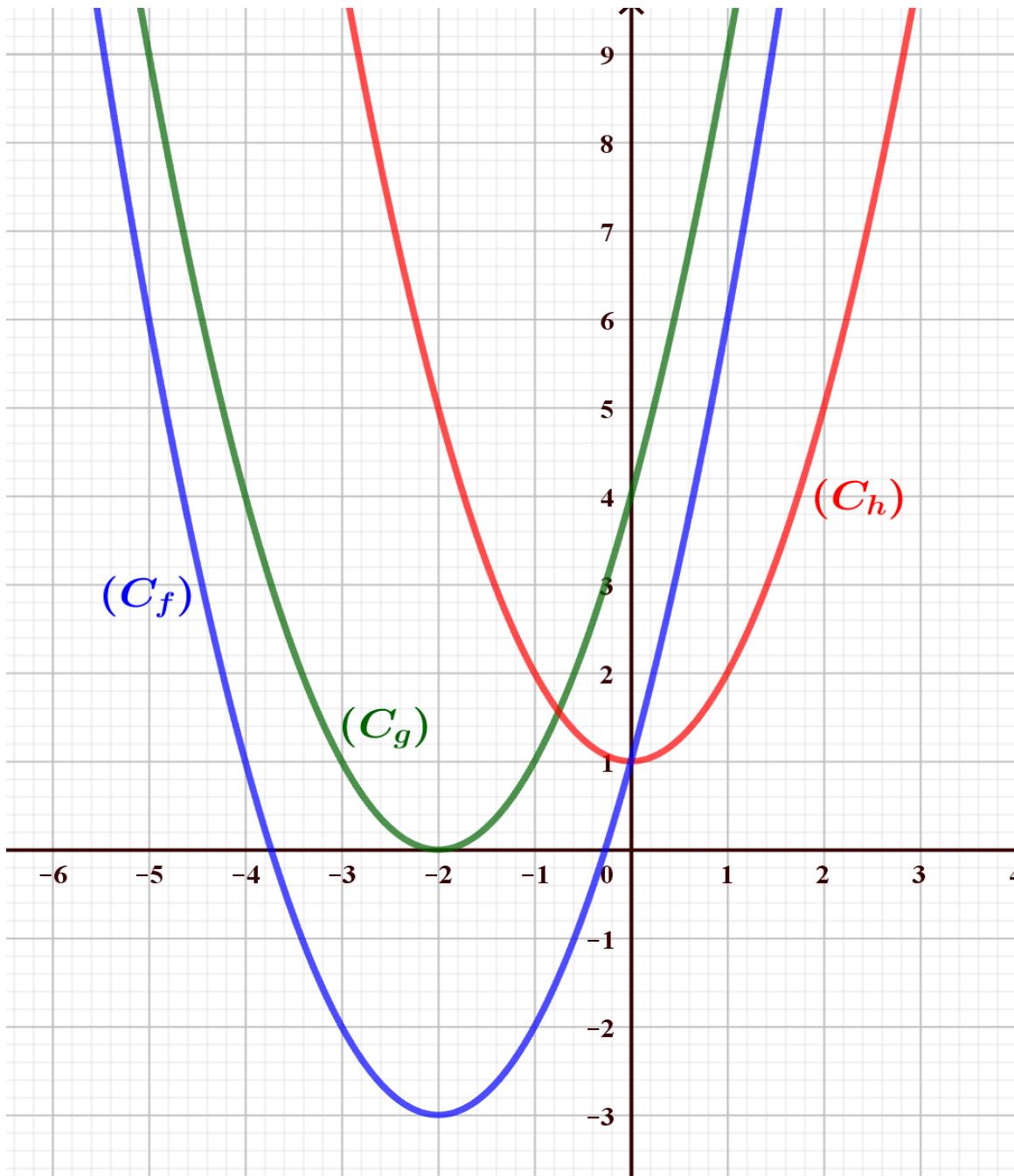
$$x = -3 \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10} \quad - 4$$

التمرين رقم 11 :

صور لمنحنى الدالة "مربع" بإنسحاب شعاعه \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} على الترتيب كما هو موضح في الشكل أدناه .

(1) عين مركبنا كل من الأشعّة \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} .

(2) عين دستور الدوال f ، g و h .



f ، g و h دوال معرفة كما يلي :

$$h(x) = 3x - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = 1 - \frac{1}{3x} \quad , \quad f(x) = 3x - \frac{1}{3x}$$

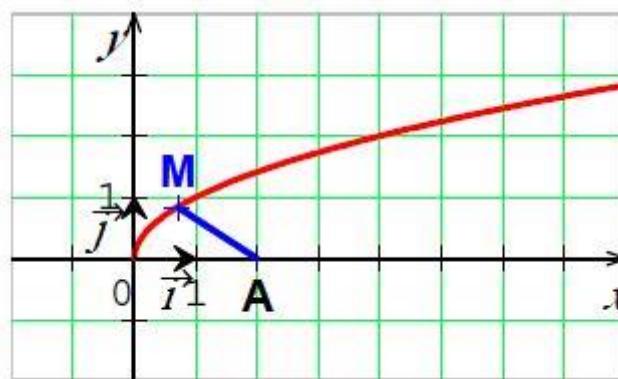
(1) فك الدالة f إلى مجموع الدالتين u و v يطلب تعبيئهما .

(2) عين اتجاه تغير الدالتين u و v على المجالين $[-\infty, 0)$ و $(0, +\infty]$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $[-\infty, 0)$ و $(0, +\infty]$.

$$(3) \text{ أحسب و بسط } \frac{f(x)}{g(x)}$$

(4) هل الدالتان $\frac{f}{g}$ و h متساويتان ؟

في مستو مزود بعلم متعامد و متجانس (C) ، نعتبر المنحني $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الذي معادلته $y = \sqrt{x}$ و النقطة A التي إحداثياتها $(2, 0)$.



. الهدف من هذه المسألة هو تعريف النقطة من (C) الأقرب من A .

ليكن x عدد حقيقي موجب و M النقطة من (C) التي فاصلتها x .

(1) عبر عن AM بدلالة x .

$$(2) \text{ لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } [0, +\infty[\text{ كما يلي :}$$

أ- ما هي العلاقة الموجودة بين AM و $f(x)$ ؟

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $[0, +\infty[$.

ج- استنتج إحداثي النقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

التمرين رقم 14 :

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي :}$$

$$(1) \text{ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ يكون :}$$

(2) إشرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_f) للدالة f إنطلاقاً من التمثيل البياني للدالة "مربع"

ثم أنشئ (C_g) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$(3) g \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ :}$$

$$g(x) = f(|x|) : x \geq 0$$

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$:

ب- أثبت أن g دالة زوجية.

ج- إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) التمثيل البياني للدالة g بالإعتماد على (C_f) ثم أنشئ (C_g) .

التمرين رقم 15 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{5-x}{2x-6}$ تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

كتابه الأستاذ : حناش نبيل

(1) عين إحداثي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 فإن : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3}$

(3) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$:

أ- بين أنه يمكن كتابة g على شكل مركب دالتين يطلب تعبيئهما .

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أنه من أجل كل x حيث $3 < x < 5$ فإن : $f(x) > 0$

(5) أثبت أن النقطة $\omega\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني $\cdot (C_f)$

(6) بالإعتماد على التمثيل البياني للدالة "مقلوب" ، أنشئ المنحني $\cdot (C_f)$

(7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارات حلول المعادلة $f(x) = m$

التمرين رقم 16 :

f الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$$

(1) أ- عين D_f مجموعة تعريف الدالة .

ب- عين العددان الحقيقيين α ، β بحيث من أجل كل x من D_f يكون :

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$$

ج- استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجالين $[-\infty, 1]$ و $[1, +\infty]$

(2) نعتبر الدالة g حيث :

$$g(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{x-1}}$$

أ- عين D_g مجموعة تعريف الدالة .

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

ب- بين أن g هي مركب دالتين يطلب تعبيئهما .

ج- استنتج إتجاه تغير الدالة g على المجالين $[-\infty; -3]$ و $[1, +\infty[$.

التمرين رقم 17 :

- I الدالة المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ كما يلي :

$$(f \circ f \circ f)(2) \text{ ثم استنتاج قيمة } (f \circ f)(x) = x$$

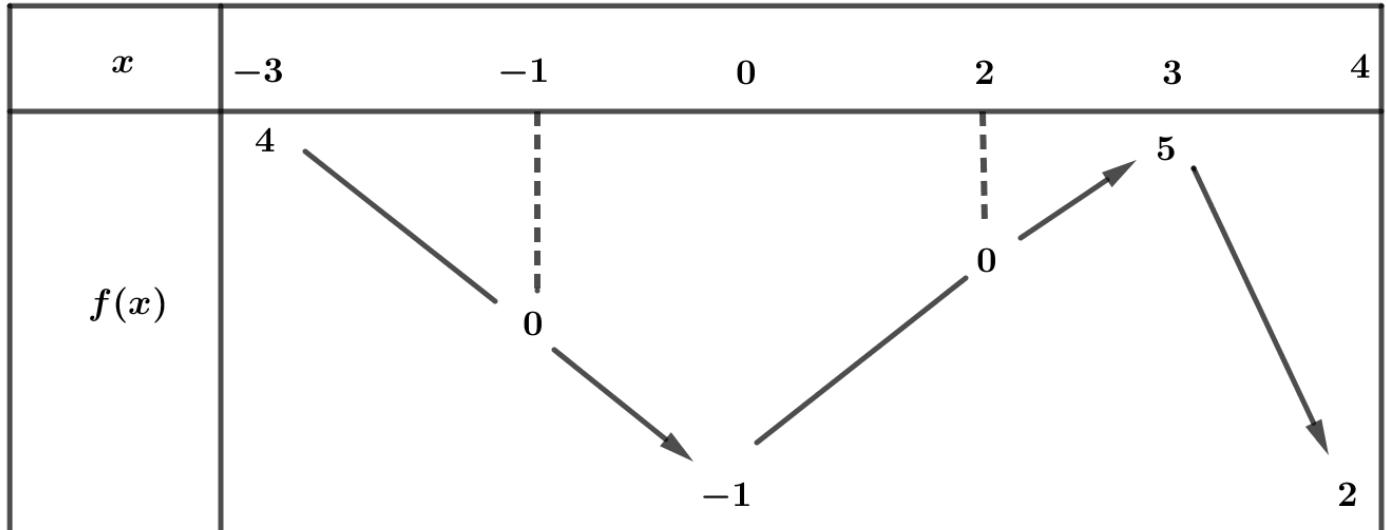
- II لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = \alpha x + \beta$ حيث $\beta \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}^*$

✓ عرف الدالة $g \circ g$

✓ عين الثنائية $(\alpha; \beta)$ التي من أجلها يكون : $g \circ g = g$

التمرين رقم 18 :

يعطى جدول التغيرات الدالة f معرفة على المجال $[-3, 4]$ كما يلي :



نعتبر الدوال g ، h ، k و u المعرفة بـ :

$$h(x) = -f(x) \quad ; \quad g(x) = [f(x)]^2$$

$$u(x) = \sqrt{f(x)} \quad ; \quad k(x) = \frac{1}{f(x)}$$

1) حدد إشارة $f(x)$ على المجال $[-3, 4]$.

2) عين مجموعة تعريف كل من الدوال g ، h ، k و u .

3) باستعمال إتجاه تغير مركب دالتين ، شكل جدول تغيرات الدوال g ، h ، k و u .

4) أنشئ (C_f) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتبعانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، ثم استنتج (C_h) و (C_p) لهذا المنحنيين p و q المعرفتين كما يلي :

$$q(x) = |f(x)| \quad ; \quad p(x) = f(-x)$$



$$g(x) = \sqrt{(x+2)^2} \quad \text{و} \quad f(x) = x+2 \quad (1)$$

لدينا : $D_f = D_g$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f \neq g$ ، إذن $g(x) = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$

$$g(x) = |x| \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x^2} \quad (2)$$

و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f = g$ ، إذن $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = f(x)$ $D_f = D_g$

$$g(x) = |x| \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x}{|x|} \quad (3)$$

• $f \neq g$ ، $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \quad (4)$$

نعني D_g و D_f : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x \geq 0$ و $x \neq 1$ أي $\sqrt{x-1} \neq 0$

و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x \geq 0$ و $x-1 \neq 0$ أي $x \neq 1$ منه

و منه $x \in D_f$. و من جهة أخرى من أجل كل $x \in D_f$ فإن $D_f = D_g$ ، إذن $D_f = [0,1] \cup [1,+\infty[$

$$\cdot f = g : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} = g(x)$$

$$g(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2-1} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x^2+4x+4}{(x-1)(x+1)} \quad (5)$$

نعني D_g و D_f : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $(x-1)(x+1) \neq 0$ أي $x \neq -1$ و $x \neq 1$

و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا $(x+1) \neq 0$ أي $x \neq -1$ منه

كانت $D_g = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ يكافي $x^2 - 1 \neq 0$ ، إذن $x \neq -1$ و $x \neq 1$ و منه $(x-1)(x+1) \neq 0$

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x-1)(x+1)} = f(x) \quad : \quad x \in D_g \quad \text{فإن} \quad D_f = D_g$$

• و منه نستنتج أن : $f = g$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-3)^2} \quad \text{و} \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x+3} \quad (6)$$

نعيين D_f و D_g : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+3 \neq 0$ أي $x \neq -3$ و منه

و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $(x-3)^2 \neq 0$ أي إذا و فقط إذا كان

• $f \neq g$ ، إذن $D_f \neq D_g$. و منه نستنتج أن : $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$ أي $x \neq 3$ و منه $x-3 \neq 0$

حل التدريب رقم 02 :

تعين $f \circ g$ و $g \circ f$ بعد تعين مجموعة تعريف $f \circ g$ و $g \circ f$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$g(x) = -3x \quad \text{و} \quad f(x) = 2x \quad (1)$$

• و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(-3x) = 2(-3x) = -6x$$

$$\cdot g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x) = -3(2x) = -6x$$

$$g(x) = 2x + 3 \quad \text{و} \quad f(x) = x - 3 \quad (2)$$

• و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x + 3) = 2x + 3 - 3 = 2x$$

$$\cdot g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x - 3) = 2(x - 3) + 3 = 2x - 3$$

$$g(x) = 2x \quad \text{و} \quad f(x) = -\frac{1}{x+1} \quad (3)$$

نعيين $D_{f \circ g}$: من أجل كل $2x \neq -1$ أي $g(x) \neq -1$ أي $g(x) \in D_f$ $x \in \mathbb{R}$ أي $x \in D_g$ و منه

كتابه الاستاذ : حناش نبيل

$x \in D_{f \circ g}$ و من أجل كل $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ إذن ، $x \neq -\frac{1}{2}$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x) = -\frac{1}{2x+1}$$

$f(x) \in \mathbb{R}$ معناه $f(x) \in D_g$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ أي $x \in D_f$ فـإن $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$ نعـين

إذن $x \in D_{g \circ f}$ و من أجل كل $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{2}{x+1}$$

$$g(x) = 4x^2 - 3x \quad \text{و} \quad f(x) = 2x^2 - 1 \quad (4)$$

و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(4x^2 - 3x) = 2(4x^2 - 3x)^2 - 1$$

$$\text{و} \quad f \circ g(x) = 32x^4 - 48x^3 + 18x^2 - 1$$

$$\cdot \quad g \circ f(x) = 16x^4 - 22x^2 + 7 \quad \text{أي} \quad g \circ f(x) = g[f(x)] = 4(2x^2 - 1)^2 - 3(2x^2 - 1)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 3 \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} \quad (5)$$

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2 + 2x \geq 0$ أي إذا و فقط إذا كان $x(x+2) \geq 0$ و باستعمال

جدول الإشارة نجد :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	—	—	0	+
$x+2$	—	0	+	+
$x(x+2)$	+	0	—	0

كتابه الاستاذ : حناش نبيل

نعيين : $D_{f \circ g}$ معناه $g(x) \in D_f$ اي $x \in \mathbb{R}^*$ و $x \in D_g$ اي $x \neq 0$ فـإن

$\frac{1}{x} - 3 \geq 0$ او $\frac{1}{x} - 3 \leq -2$ اي $g(x) \geq 0$ او $g(x) \leq -2$ اي $g(x) \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

و منه $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ او $x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ معناه $\frac{1}{x} \geq 3$ او $\frac{1}{x} \leq 1$

$D_{f \circ g} =]-\infty, 0[\cup \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$: إذن ، $x \in]-\infty, 0[\cup \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$

و من أجل كل $x \in D_{f \circ g}$ فـإن $f \circ g(x) = f[g(x)] = \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x} - 3\right)}$

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}}$$

نعيين : من أجل كل $D_{g \circ f}$ معناه $f(x) \neq 0$ اي $f(x) \in D_g$ فـإن $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$ اي $x \in D_f$

$x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$ اي $x \neq -2$ و $x \neq 0$ معناه $x(x+2) \neq 0$ اي $x^2 + 2x \neq 0$ اي $\sqrt{x^2 + 2x} \neq 0$

إذن بالتقاطع ينتج : $D_{g \circ f} =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ و منه $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

و من أجل كل $x \in D_{g \circ f}$ فـإن $g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} - 1$

$$g \circ f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$g(x) = \cos(x-1) \quad \text{و} \quad f(x) = 3x-2 \quad (6)$$

: و من أجل كل عدد حقيقي x فـإن $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$$\text{و} \quad f \circ g(x) = f[g(x)] = 3\cos(x-1) - 2$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = \cos(3x-2-1) = \cos(3x-3)$$

كتابه الاستاذ : حناش نبيل

تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين بسيطتين في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = (x-1)^2 \quad (1)$$

$$x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} (x-1)^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$v: x \mapsto x^2 \quad u: x \mapsto x-1 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = (x+2)^2 + 1 \quad (2)$$

$$x \xrightarrow{u} x+2 \xrightarrow{v} (x+2)^2 + 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$v: x \mapsto x^2 + 1 \quad u: x \mapsto x+2 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \quad (3)$$

$$x \xrightarrow{u} 2x+3 \xrightarrow{v} \frac{1}{2x+3} \quad \text{لدينا :}$$

$$v: x \mapsto \frac{1}{x} \quad u: x \mapsto 2x+3 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v} \sqrt{x+1} \quad \text{لدينا :}$$

$$v: x \mapsto \sqrt{x} \quad u: x \mapsto x+1 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad (5)$$

$$x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} \sqrt{x-1} + 2 \quad \text{لدينا :}$$

$$v: x \mapsto \sqrt{x} + 2 \quad u: x \mapsto x-1 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = \cos(x-1) \quad (6)$$

$$x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} \cos(x-1) \quad \text{لدينا :}$$

$$v: x \mapsto \cos x \quad u: x \mapsto x-1 \quad \text{حيث } f = v \circ u$$

$$f(x) = \left| \frac{2x}{5} - 1 \right| \quad (7)$$

$$x \xrightarrow{u} \frac{2x}{5} - 1 \xrightarrow{v} \left| \frac{2x}{5} - 1 \right| \quad \text{لدينا :}$$

$$v: x \mapsto |x| \quad u: x \mapsto \frac{2x}{5} - 1 \quad \text{حيث } f = v \circ u$$

حل التدريب رقم 04

$$g(x) = 2x \quad \text{و} \quad f(x) = -\frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad g \text{ دالة حيث } f$$

1- تعريف مجموعة تعریف الدالتين f و g ثم تعريف مجموعة تعریف الدالة $f \circ g$:

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x \neq 1$ أي إذا و فقط إذا كان $x \neq -1$ و منه

مجموعة تعریف الدالة g هي \mathbb{R} .

$$D_{g \circ f} = \{x / x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \quad \text{حيث :}$$

من أجل كل x أي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن $x \neq 1$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ و منه ينتج أن :

$$\bullet \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

- حساب $g \circ f(x)$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = -\frac{2}{x+1} \quad \text{فإن : } x \in D_{g \circ f}$$

3- استنتاج إتجاه تغير الدالة $g \circ f$ بالإعتماد على تغيرات الدالتين f و g :

كتابه الاستاذ : حناش نبيل

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1, +\infty)$ و $(-\infty, -1]$ لأن f هي مركب الدالة

$u: x \mapsto x+1$ (تالية متزايدة تماما على \mathbb{R}) متبوعة بالدالة $v: x \mapsto -\frac{1}{x}$ و هي متزايدة تماما على

المجالين $(-\infty, 0]$ و $[0, +\infty)$ ، الدالة g هي دالة خطية متزايدة تماما على \mathbb{R} .

من أجل كل $x \in [-\infty, -1]$ فإن : $\frac{1}{x+1} > 0$ و منه $x+1 < 0$ و منه $-1 < x$ و بالتالي $-\frac{1}{x+1} > 0$ أي

حيث أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty)$ و منه فالدالة

$g \circ f$ متزايدة تماما على المجال $(-\infty, -1]$.

من أجل كل $x \in [-1, +\infty)$ فإن : $\frac{1}{x+1} < 0$ و منه $x+1 > 0$ و منه $0 > -1 > x$ و بالتالي $-\frac{1}{x+1} < 0$ أي

حيث أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $(-\infty, 0]$ و منه فالدالة

$g \circ f$ متزايدة تماما على المجال $[-1, +\infty)$.

حل التمرين رقم 05 :

و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ : $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = 3x^2 + 1$

: $g \circ g$ ، $f \circ f$ ، $f \circ g$ ، $g \circ f$: (1) تعريف الدوال :

لدينا : $D_{g \circ f} = D_{f \circ g} = D_{f \circ f} = D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} g \circ f(x) = g[f(x)] = 3(2x-1)^2 + 1 = 12x^2 - 12x + 4 \\ f \circ g(x) = f[g(x)] = 2(x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 1 \\ f \circ f(x) = f[f(x)] = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3 \\ g \circ g(x) = g[g(x)] = 3(3x^2 + 1)^2 + 1 = 27x^4 + 18x^2 + 4 \end{cases}$$

من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

(2) الدالتان $f \circ g$ و $g \circ f$ غير متساويتين و نكتب $g \circ f \neq f \circ g$.

(3) كتابة الدالة g على شكل مركب دالتين بسيطتين يطلب تحديدهما :

لدينا : $x \xrightarrow{u} x^2 \xrightarrow{v} 3x^2 + 1$

$$v: x \mapsto 3x+1 \quad u: x \mapsto x^2 \quad \text{و} \quad g = v \circ u \quad \text{حيث}$$

حل التمرين رقم 06 :

دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$$I =]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{2}{x} + 3 \quad (1)$$

إذا اعتبرنا الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{1}{x} + 3$ يكون لدينا :

للهالتين f و $2g$ نفس إتجاه التغير لأن $f = \lambda g + k$ من الشكل $f = \lambda g + k$ حيث $\lambda = 2 > 0$ و

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0, +\infty[$ و منه الدالة $2g$ متناقصة تماما على $]0, +\infty[$ ، إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0, +\infty[$.

$$I =]-\infty, 0] \quad f(x) = 3x^2 + 2 \quad (2)$$

إذا اعتبرنا الدالة g المعرفة على $]-\infty, 0]$ بـ $g(x) = x^2 + 2$ يكون لدينا :

للهالتين f و $3g$ نفس إتجاه التغير لأن $f = \lambda g + k$ من الشكل $f = \lambda g + k$ حيث $\lambda = 3 > 0$ و

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$ و منه الدالة $3g$ متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$ ، إذن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$.

$$I =]-\infty, \frac{3}{2}] \quad f(x) = (3 - 2x)^2 \quad (3)$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $]-\infty, \frac{3}{2}]$ بـ $u(x) = 3 - 2x$ و حيث من أجل كل x من المجال

$u(x) \in [0, +\infty[$ و منه $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$ أي $u(x) \geq 0$ أي $u(x) \in [0, +\infty[$

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ $v(x) = x^2$ و عليه فإن :

كتابه الاستاذ : حناش نبيل

• بما أن الدالة u متناقصة تماما على $\left[-\infty, \frac{3}{2}\right]$ (لأنها تاليفية و $a = -2 < 0$) و الدالة v

متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty)$ (الدالة مربع) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة

f متناقصة تماما على $\left[-\infty, \frac{3}{2}\right]$.

$$I = [-2, +\infty[\quad f(x) = (x+2)^2 - 1 \quad (4)$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[-2, +\infty)$ بـ : $u(x) = x+2$ و حيث من أجل كل x من المجال

v يكون $x \geq -2$ و منه $x+2 \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ ، نعتبر الدالة v

المعرفة على المجال $[0, +\infty)$ بـ : $v(x) = x^2 - 1$ و عليه فإن :

• بما أن الدالة u متزايدة تماما على $[-2, +\infty)$ (لأنها تاليفية و $a = 1 > 0$) و الدالة v

متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty)$ (لأن الدالة مربع متزايدة تماما على $[0, +\infty)$) فإنه حسب مبرهنة

إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متزايدة تماما على $[-2, +\infty)$.

$$]-\infty, 2] \quad f(x) = \sqrt{2-x} \quad (5)$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[-\infty, 2]$ بـ : $u(x) = 2-x$ و حيث من أجل كل x من المجال

v يكون $x \leq 2$ و منه $-x \geq -2$ و منه $2-x \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ ، نعتبر

الدالة v المعرفة على المجال $[0, +\infty)$ بـ : $v(x) = \sqrt{x}$ و عليه فإن :

• بما أن الدالة u متناقصة تماما على $[-\infty, 2]$ (لأنها تاليفية و $a = -1 < 0$) و الدالة v

متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty)$ (دالة الجذر التربيعي) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين

تكون الدالة f متناقصة تماما على $[-\infty, 2]$.

$$I = [1, +\infty[\quad f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad (6)$$

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[1, +\infty)$ بـ : $u(x) = x - 1$ و حيث من أجل كل x من المجال

يكون $x \geq 1$ و منه $x - 1 \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ ، نعتبر الدالة v المعرفة على

المجال $[0, +\infty)$ بـ : $v(x) = \sqrt{x} + 2$ و عليه فإن :

. بما أن الدالة u متزايدة تماما على $[1, +\infty)$ (لأنها تالية و $a = 1 > 0$) و الدالة v

متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty)$ (لأن دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على $[0, +\infty)$) فإنه حسب

مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متزايدة تماما على $[1, +\infty)$.

$$I = [0, \pi] \quad f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (7)$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بـ : $u(x) = x + \frac{\pi}{4}$ و حيث من أجل كل x من المجال

يكون $0 \leq x \leq \pi$ و منه $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ بـ : $v(x) = \sin x$ و عليه فإن :

. الدالة u متزايدة تماما على $[0, \pi]$ (لأنها تالية و $a = 1 > 0$) ، لكن الدالة v ليست

رتيبة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ (انظر الدائرة المثلثية) حيث أن الدالة $v: x \mapsto \sin x$ متزايدة تماما

على المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$

$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ أي $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ و منه $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$: $u(x) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ✓

$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ أي $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$ و منه $\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$: $u(x) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$ ✓

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

$$u \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$$

إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتيين فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال u لأن للدالتيين u و v نفس إتجاه التغير ، و f متناقصة تماما على المجال v لأن للدالتيين u و v إتجاهها تغير متعاكسين .

$$I = [0, \pi] \quad f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (8)$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بـ $u(x) = x + \frac{\pi}{6}$ حيث من أجل كل x من المجال

$u(x) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ أي $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ يكون $0 \leq x \leq \pi$ و منه

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ بـ $v(x) = \cos x$ و عليه فإن :

الدالة u متزايدة تماما على $[0, \pi]$ (لأنها تالية و $a = 1 > 0$) ، و الدالة v ليست

رتيبة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ (انظر الدائرة المثلثية) حيث أن الدالة $v: x \mapsto \cos x$ متناقصة تماما

على المجال $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right] \cup \left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$) $\left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$

$x \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$ أي $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ و منه $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \pi$: $u(x) \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ ✓

$x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ أي $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$ و منه $\pi \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$: $u(x) \in \left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$ ✓

إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتيين فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$ لأن للدالتيين

u و v إتجاهها تغير متعاكسين ، و f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ لأن للدالتيين u و v نفس

حل التمرن رقم 07 :

و $g(x) = x^2$ $f(x) = x$: $I = [0, +\infty[$ بـ و

إثبات أن الدالة $f + g$ متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f هي دالة خطية متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ (لأن $a = 1 > 0$) و الدالة g متزايدة تماما على

(الدالة مربع) ، إذن حسب مبرهنة مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I فإن الدالة

$f + g$ متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

حل التمرن رقم 08 :

$f(x) = x^2 + |x|$: $I = [-\infty, 0]$ بـ

(1) إثبات أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-\infty, 0]$:

إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على المجال $[-\infty, 0]$ بـ : $v: x \mapsto |x|$ و $u: x \mapsto x^2$ ، إذن

$f = u + v$ حيث أن الدالة u (الدالة مربع) متناقصة تماما على $[-\infty, 0]$ و كذلك الدالة v متناقصة

تماما على $[-\infty, 0]$ (دالة القيمة المطلقة) ، إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير مجموع دالتين متناقصتين تماما

على مجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على $[-\infty, 0]$.

ملاحظة هامة : لا يمكن إعطاء قاعدة عامة حول إتجاه تغير مجموع دالتين إحداها متزايدة تماما على مجال

I ... و الأخرى متناقصة تماما على I

مثال 1 : $v: x \mapsto -2x$ ، $u: x \mapsto 3x + 1$ ، $I = [0, +\infty[$ و منه :

$u(x) + v(x) = x + 1$. ، إذن $u + v$ دالة متزايدة تماما على I .

مثال 2 : $v: x \mapsto 2x$ ، $u: x \mapsto -3x + 1$ ، $I = [0, +\infty[$ و منه :

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

$u(x) + v(x) = -x + 1$ ، إذن $u + v$ دالة متناقصة تماما على I .

(2) استنتاج إتجاه تغير الدالتين $-3f + 2$ ، $2f - 5$ على المجال $[-\infty, 0]$:

الدالة $2f - 5$ هي من الشكل $\lambda f + k$ حيث $k = -3$ ، $\lambda = 2$ و نعلم أن للدالتين $\lambda f + k$ و λf نفس

إتجاه التغير ، و بما أن $\lambda > 0$ فإن للدالتين f و λf نفس إتجاه التغير . بما أن الدالة f متناقصة

تماما على $[-\infty, 0]$ فإن $2f$ متناقصة تماما على $[-\infty, 0]$ و منه نستنتج أن الدالة $2f - 5$ متناقصة تماما

على $[-\infty, 0]$.

بنفس الطريقة ، الدالة f متناقصة تماما على $[-\infty, 0]$ و بما أن $\lambda < -3$ فإن الدالة $-3f$ متزايدة

تماما على $[-\infty, 0]$ و منه نستنتج أن الدالة $-3f + 2$ متزايدة تماما على $[-\infty, 0]$ لأن للدالتين $-3f$ و

$-3f + 2$ نفس إتجاه التغير على $[-\infty, 0]$.

حل التدريب رقم 09 :

الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x^2 + x + 1$

(1) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) = (x + \alpha)^2 + \beta$ حيث α و β عدادان حقيقيان يطلب

تعيينهما :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ أي

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{و منه ينتج : } f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

(2) شرح كيف يمكن إنشاء (C_f) التمثيل البياني للدالة f إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة مرجعية يطلب

تعيينها ثم إنشاء (C_f) :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ صورة (P) التمثيل البياني للدالة

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

• "مربع" بإنسحاب شعاعه $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}$

(3) كيفية استنتاج التمثيلات البيانية للدوال الآتية :

$w(x) = f(|x|)$ $v(x) = |f(x)|$ ، $u(x) = -f(x)$ ، $k(x) = f(x-2) + 1$

(C_f) و منه $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$ صورة (C_g) حيث $g(x) = f(x+a)+b$ من الشكل $: g(x) = f(x+2)$ ✓

• $\vec{u} = -2\vec{i}$ بإنسحاب شعاعه

(C_f) و منه $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ صورة (C_h) حيث $h(x) = f(x+a)+b$ من الشكل $: h(x) = f(x)+1$ ✓

• $\vec{u} = \vec{j}$ بإنسحاب شعاعه

(C_k) و منه $\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$ صورة (C_h) حيث $k(x) = f(x+a)+b$ من الشكل $: k(x) = f(x-2)+1$ ✓

• $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ بإنسحاب شعاعه (C_f)

$u(x) = -f(x)$ ✓ : من الشكل $u = \lambda f$ حيث $\lambda = -1$ ، و منه (C_u) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى

حاملي محور الفوائل .

$v(x) = f(x)$ ✓ : إذا كان $f(x) \geq 0$ ، إذن لما $|f(x)| = f(x)$

• (C_f) فإن $f(x) \geq 0$ ينطبق على (C_v)

إذا كان $f(x) \leq 0$ فإن $f(x) \leq 0$ ، إذن لما $|f(x)| = -f(x)$

هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حاملي محور الفوائل .

$w(x) = f(|x|)$ ✓ : $D_w = \mathbb{R}$ و هي مجموعة متناظرة بالنسبة إلى 0 ، و من أجل كل عدد حقيقي x

فإن $|-x| = |x|$ لأن $w(-x) = w(x)$ أي $w(-x) = f(|-x|) = f(|x|)$ و منه فالدالة w

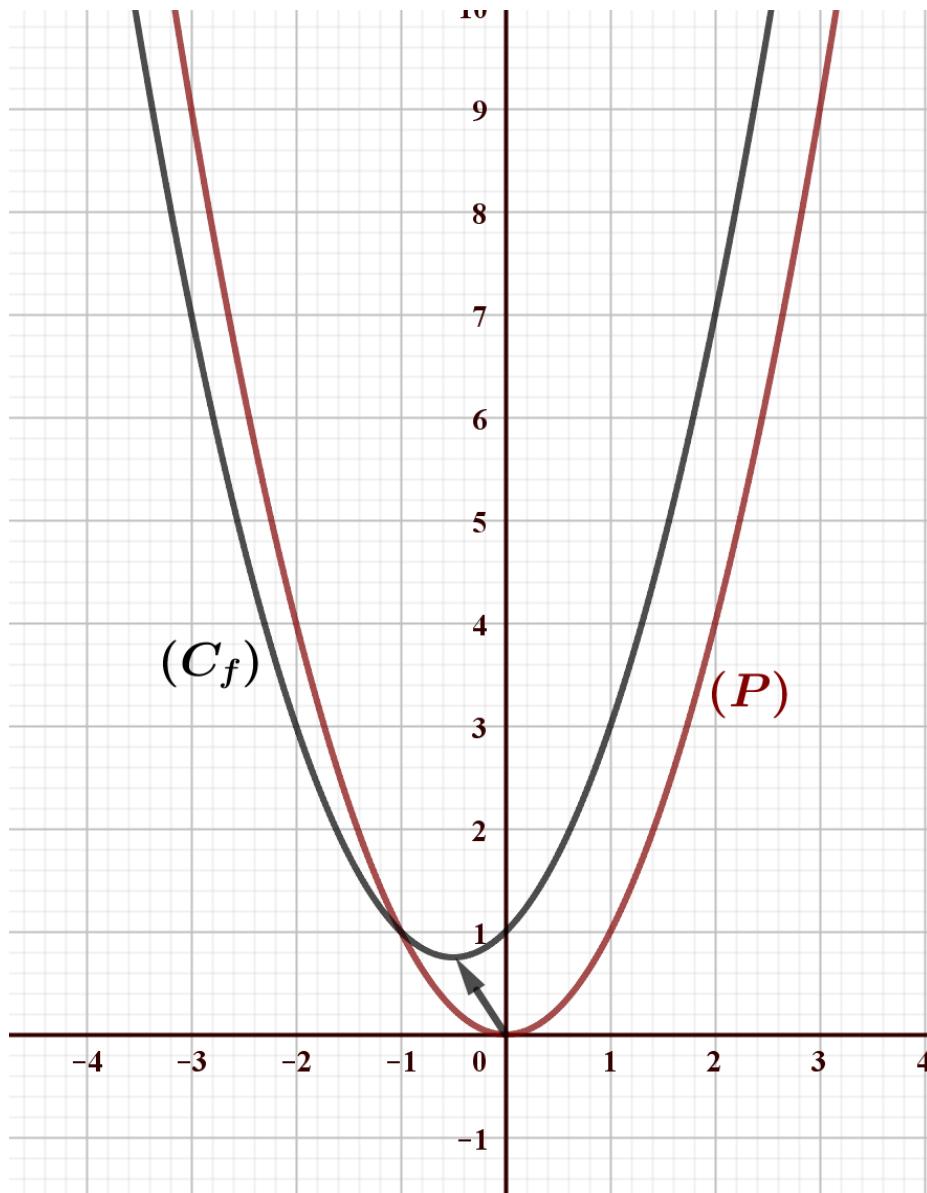
زوجية .

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

إذا كان $x \geq 0$: فإن $w(x) = f(x)$ و منه $|x| = x$ فـ $w(x) = f(x)$ ينطبق على $\cdot (C_f)$

و بما أن الدالة w زوجية فإنه لما $x \leq 0$ يكون (C_w) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

: (C_f) و (P) إنشاء 



حل التمرين رقم 10 :

: (1) إثبات بطريقتين مختلفتين أن النقطة $\Omega(a, b)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

$$\Omega(-1,1) \quad , \quad f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$f(-2-x) + f(x) = 2(1) \quad \text{و} \quad 2(-1) - x \in D_f : \quad x \in D_f$$

$$x \in D_f \text{ معناه } x \neq -1 \text{ و } -x \neq 1 \text{ و } -2-x \neq -2+1 \text{ اي } -2-x \neq -1 \text{ و منه } x \neq -1$$

$$\text{من أجل كل لدينا : } x \in D_f \quad f(-2-x) + f(x) = \frac{-2-x+2}{-2-x+1} + \frac{x+2}{x+1}$$

$$\therefore \text{أي } f(-2-x) + f(x) = \frac{-x}{-x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x+2}{x+1}$$

$$\text{يُنْتَجُ } x \neq -1 \text{ و منه من أجل } f(-2-x) + f(x) = \frac{2(x+1)}{x+1} \text{ أي } f(-2-x) + f(x) = \frac{2x+2}{x+1}$$

$$\text{و } f(2a-x) + f(x) = 2b \quad \text{من الشكل } f(2(-1)-x) + f(x) = 2(1) \quad \text{أي } f(-2-x) + f(x) = 2$$

• (C_f) مركز تناول للمنحنى

$$\Omega(1,2) \quad , \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

دفاتير تغيير المعلم : 2 طرق

$$Y = \frac{2X+1-2X}{X} \quad \text{أي } Y = \frac{2X+1}{X} - 2 \quad \text{أي } 2+Y = \frac{2(1+X)-1}{1+X-1} \quad \text{و منه } y = \frac{2x-1}{x-1} \quad \text{لدينا :}$$

و منه $Y = \frac{1}{X}$ و هي معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ ، نضع من أجل كل $X \neq 0$

و ثبت أن الدالة $g(X)$ فردية :

متناهية بالنسبة إلى 0 : $X \in \mathbb{R}^*$ و منه $X \neq 0$ ، $-X \neq 0$ ، إذن $D_g = \mathbb{R}^*$

و من أجل كل g فردية . إذن الدالة g :

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

• (C_f) هي مركز تناظر للمنحنى الاستنتاج

• (2) إثبات بثلاث طرق مختلفة أن المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحنى $f(x) = x^2 + 4x + 3$

$$x = -2 \quad , \quad f(x) = x^2 + 4x + 3$$

طريقة 1 : إذا كان من أجل كل عدد حقيقي $f(2a-x) = f(x)$ فإن $2a-x \in D_f$: $x \in D_f$

• (C_f) المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحنى

و منه من أجل كل $-x \in D_f$ فإن $x \in D_f$ و منه $-x < +\infty$ و منه $-x > -\infty$

$$2(-2)-x \in D_f \quad \text{أي} \quad -4-x \in D_f \quad \text{و منه} \quad -4-x \in \mathbb{R}$$

$$\text{و من أجل كل } f(-4-x) = (-4-x)^2 + 4(-4-x) + 3 : x \in D_f$$

$$f(-4-x) = x^2 + 4x + 3 \quad \text{أي} \quad f(-4-x) = x^2 + 8x + 16 - 16 - 4x + 3$$

• (C_f) : إذن نستنتج أن المستقيم الذي $x=-2$ معادلة له محور تناظر للمنحنى $f(x) = x^2 + 4x + 3$

$$x = -3 \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$$

طريقة 2 : دساتير تغيير المعلم

$$\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y + 1 \end{cases} \quad \text{حيث} \quad (x_0; y_0) = (-3, 1) \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

$$Y + 1 = \sqrt{X^2 + 1} \quad \text{أي} \quad Y + 1 = \sqrt{(X - 3)^2 + 6(X - 3) + 10} \quad \text{و منه} \quad y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$$

$$, \quad (\Omega; \vec{i}, \vec{j}) \quad \text{في المعلم الجديد} \quad (C_f) \quad \text{و هي معادلة} \quad Y = \sqrt{X^2 + 1} - 1$$

نضع من أجل كل عدد حقيقي X : $g(X) = \sqrt{X^2 + 1} - 1$: $X \in D_g$ و ثبت أن الدالة g زوجية :

• $X \in D_g$ متناظرة بالنسبة إلى 0 ، و من أجل كل

$$g(-X) = \sqrt{(-X)^2 + 1} - 1 = \sqrt{X^2 + 1} - 1 = g(X)$$

• (C_f) المستقيم الذي $x=-3$ معادلة له محور تناظر للمنحنى الاستنتاج

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

• إذا كان من أجل كل $f(a-x) = f(a+x)$ و $a+x \in D_f$ و $a-x \in D_f$: $x \in D_f$ فإن 3

• المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحي (C_f)

و منه من أجل كل $-3+x \in D_f$ و $-3-x \in D_f$: $x \in D_f$ فإن $D_f = \mathbb{R}$

• $f(-3-x) = \sqrt{x^2 + 1}$ أي $f(-3-x) = \sqrt{(-3-x)^2 + 6(-3-x) + 10}$ و من جهة أخرى :

$x \in D_f$: $f(-3+x) = \sqrt{x^2 + 1}$ أي $f(-3+x) = \sqrt{(-3+x)^2 + 6(-3+x) + 10}$

فإن : $f(-3-x) = f(-3+x)$ و $-3+x \in D_f$ و $-3-x \in D_f$

• الاستنتاج : المستقيم الذي $x=-3$ معادلة له محور تناظر للمنحي (C_f)

حل التمرين رقم 11

• صور لمنحي الدالة "مربع" بإنسحاب شعاعه \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} على الترتيب كما هو موضح في الشكل أدناه .

• (1) تعين مركبنا كل من الأشعة \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} :

• مركبنا كل شعاع من هذه الأشعة تساوي إحداثي نقطة ذروة كل من المنحنيات (C_g) و (C_h) و (C_f)

✓ المنحي (C_f) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(-2, -4)$ ، إذن شعاع الإنسحاب \vec{u} هو

✓ المنحي (C_g) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(-2, 0)$ ، إذن شعاع الإنسحاب \vec{v} هو

✓ المنحي (C_h) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(0, 1)$ ، إذن شعاع الإنسحاب \vec{w} هو

• (2) تعين دستور الدوال f ، g و h :

• دستور الدالة f يعطى من الشكل : $f(x) = (x+a)^2 + b$ حيث a ، b عددان حقيقيان و صورة

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شاعره \vec{u} و من السؤال السابق ينتج :

$$f(x) = (x+2)^2 - 3 \quad , \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ فإن} : \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \text{ و منه} \begin{cases} -a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$$

دستور الدالة g يعطى من الشكل : $g(x) = (x+\alpha)^2 + \beta$ حيث α, β عدادان حقيقيان و (C_g) صورة

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شاعره \vec{v} و من السؤال السابق ينتج :

$$g(x) = (x+2)^2 \quad , \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ فإن} : \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=0 \end{cases} \text{ و منه} \begin{cases} -\alpha=-2 \\ \beta=0 \end{cases}$$

دستور الدالة h يعطى من الشكل : $h(x) = (x+\gamma)^2 + \lambda$ حيث γ, λ عدادان حقيقيان و (C_h) صورة

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شاعره \vec{w} و من السؤال السابق ينتج :

$$h(x) = x^2 + 1 \quad , \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ فإن} : \begin{cases} \gamma=0 \\ \lambda=1 \end{cases} \text{ و منه} \begin{cases} -\gamma=0 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

حل التمرين رقم 12

، f و g و h دوال معرفة كما يلي :

$$h(x) = 3x - 1 \quad , \quad g(x) = 1 - \frac{1}{3x} \quad , \quad f(x) = 3x - \frac{1}{3x}$$

(1) تفكيك الدالة f إلى مجموع دالتين u و v يطلب تعيينهما :

إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على \mathbb{R}^* بـ : $u(x) = 3x$ و $v(x) = -\frac{1}{3x}$

(2) تعين اتجاه تغير الدالتين u و v على المجالين $[-\infty, 0]$ و $[0, +\infty]$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة

f على كل من المجالين $[-\infty, 0]$ و $[0, +\infty]$:

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

الدالة u خطية متزايدة تماما على $[0, \infty)$ لأن $a = 3 > 0$ و إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على

$v = -\frac{1}{3}h$ فإن $h(x) = \frac{1}{x}$: بـ $v = -\frac{1}{3}h$ متناقصة تماما على $[0, \infty)$

فإن الدالة v متزايدة تماما على $(-\frac{1}{3}, 0)$ لأن حسب مبرهنة إتجاه تغير

مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I فإن الدالة f متزايدة تماما على $[-\infty, 0]$.

بنفس خطوات البرهان نبين أن الدالة f متزايدة تماما على $[0, +\infty)$.

حساب و تبسيط (3) :

$$: \frac{f(x)}{g(x)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 3x + 1 \quad \text{أي} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(3x-1)(3x+1)}{3x-1} \quad \text{أي} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - \frac{1}{3x}}{1 - \frac{1}{3x}} = \frac{\frac{9x^2 - 1}{3x}}{\frac{3x-1}{3x}} = \frac{9x^2 - 1}{3x-1}$$

$\frac{f}{g}$ ، إذن ليس للدالتين h و $\frac{f}{g}$ نفس مجموعة

التعريف ، و منه نستنتج أن : $h \neq \frac{f}{g}$

حل التمرين رقم 13 :

ليكن x عدد حقيقي موجب و M النقطة من (C) التي فاصلتها x .

(1) التعبير عن AM بدلالة x :

نقطة من (C) معناه أن إحداثياتي النقطة M هما (x, \sqrt{x}) ، و حسب قانون المسافة بين نقطتين

$AM = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2}$ أي $AM = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2}$ فإن :

$$AM = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

(2) لتكن f الدالة المعرفة على $[0, +\infty]$ كما يلي :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4}$$

أ- تحديد العلاقة الموجودة بين AM و $f(x)$:

و منه $AM^2 = x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ أي $AM^2 = x^2 - 3x + 4$ و منه $AM = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

. $AM = \sqrt{f(x)}$ أي $AM^2 = f(x)$ و منه نستنتج أن : $AM^2 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4}$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها على المجال $[0, +\infty]$

إذا اعتبرنا الدالة u المعرفة على $\left[-\infty, \frac{3}{2} \right]$ فإن $x \in \left[-\infty, \frac{3}{2} \right]$ حيث من أجل كل

$x \leq \frac{3}{2}$ و منه $x - \frac{3}{2} \leq 0$ أي $u(x) \leq 0$ و لتكن الدالة v المعرفة على

$f = v \circ u$ و منه يكون لدينا : $v(x) = x^2 + \frac{7}{4}$: $\left[-\infty, 0 \right]$

الدالة u متزايدة تماما على $\left[-\infty, \frac{3}{2} \right]$ لأنها تالية حيث $a = 1 > 0$ و الدالة v متناقصة تماما على

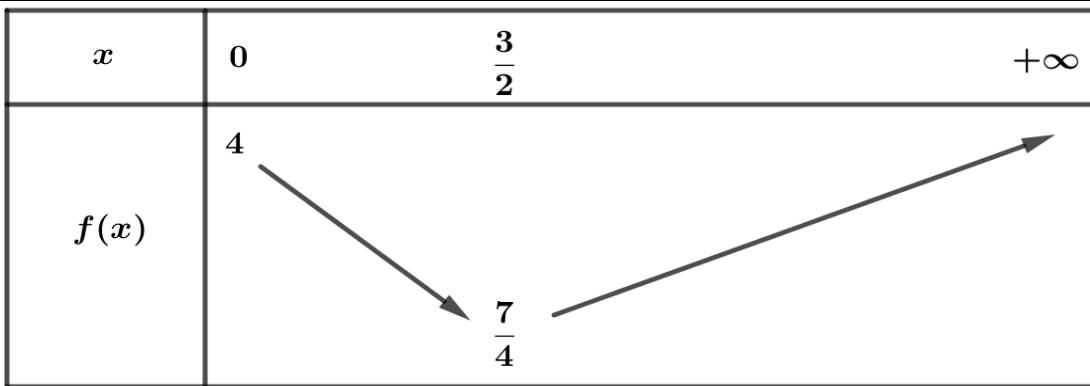
(لأن الدالة "مربع" متناقصة تماما على $\left[0, +\infty \right]$) ، للدالتين u و v إتجاهها تغير متعاكسين و

منه فالدالة f متناقصة تماما على $\left[0, \frac{3}{2} \right]$ ، إذن بصفة خاصة فالدالة f متناقصة تماما على

بنفس الطريقة (مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين) نبين أن الدالة f متزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2}, +\infty \right]$

جدول تغيرات الدالة :

كتاب الاستاذ : حناش نبيل



جـ- استنتاج احديي النقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن :

نلاحظ من جدول التغيرات أن أصغر قيمة تأخذها الدالة f هي $\frac{7}{4}$ ، حيث من السؤال (2) نعلم أن :

$$\cdot x = \frac{3}{2} \quad AM = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{أي} \quad AM = \sqrt{\frac{7}{4}} \quad \text{و منه أصغر مسافة ممكنة هي} \quad AM = \sqrt{f(x)}$$

استنتاج احديي النقطة M : بما أن $M \in (C)$ فإن احديي M هما (x, \sqrt{x}) : إذن

حل التمرين رقم 14 :

الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$(1) \text{ التتحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ يكون : } f(x) = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{25}{4}$$

لدينا : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ و بالنشر ثم التبسيط نجد

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} \quad f(x) = x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} \quad \text{و منه المطلوب .}$$

(2) شرح كيف يمكن استنتاج التمثيل البياني (C_f) للدالة f إنطلاقاً من التمثيل البياني للدالة "مربع" :

$$\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{25}{4}\vec{j} \quad \text{صورة } (P) \text{ التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شاعره}$$

$g(x) = f(|x|)$ بـ (3) الدالة المعرفة على \mathbb{R} :

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

أ- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$:

$$g(x) = f(x) : x \geq 0$$

ب- إثبات أن g دالة زوجية :

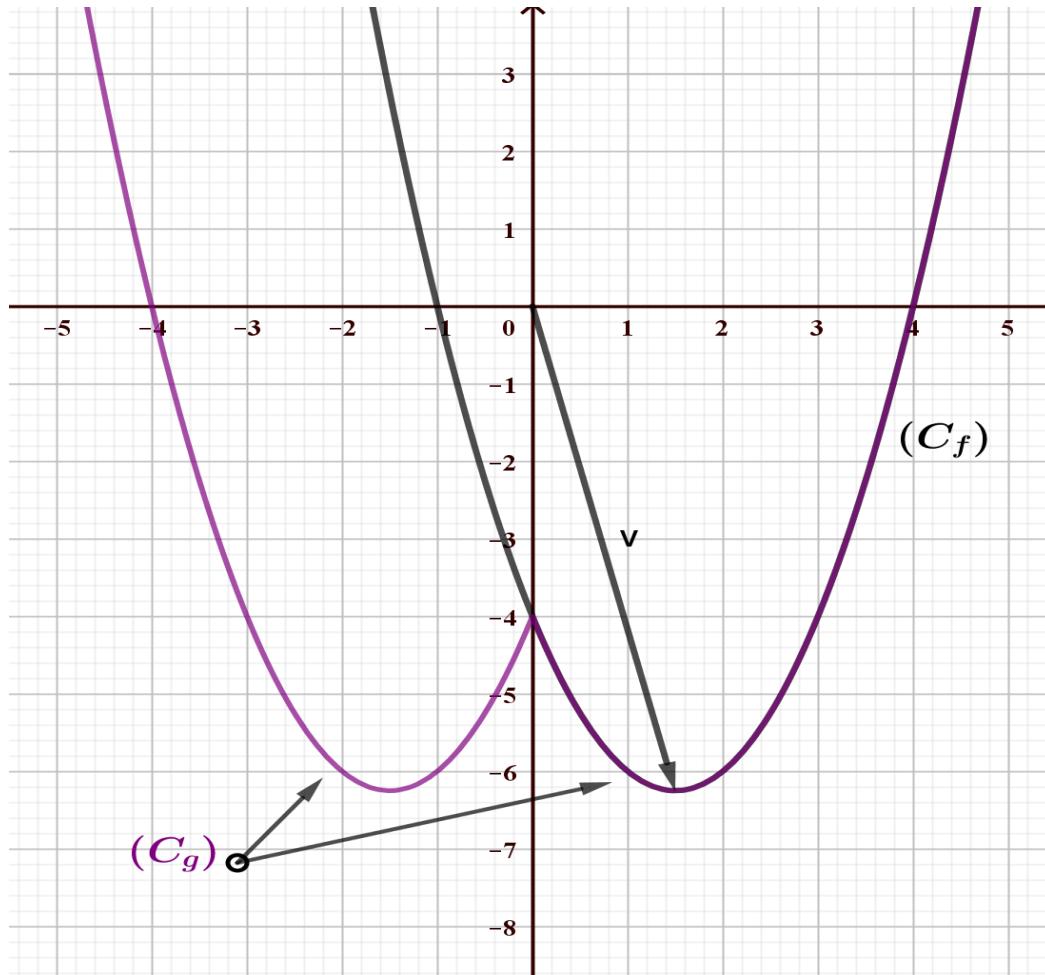
$-x \in D_g$ متناظر بالنسبة إلى 0 : إذا كان $x \in D_g$ فإن $D_g = \mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|)$ لأن $|x| = | -x |$ أي $g(-x) = g(x)$ و منه فالدالة g زوجية .

ج- شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) التمثيل البياني للدالة g بالإعتماد على (C_f) :

• إذا كان $x \geq 0$ أي $x \in [0; +\infty[$ و منه $g(x) = f(x)$ ينطبق على (C_f)

• و بما أن الدالة g زوجية فإنه لما $x \leq 0$ أي $x \in]-\infty; 0]$ فإن (C_f) نظير الواقع في المجال $[0; +\infty[$ بالنسبة إلى محور التراتيب .



الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{5-x}{2x-6}$ تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\cdot (O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تعين إحداثي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات :

مع حامل محور الفواصل (xx') : نحل المعادلة $f(x) = 0$ تكافئ $f(x) = 0$ تكافئ $5-x = 0$ تكافئ $\frac{5-x}{2x-6} = 0$.

و $5-x = 0$ تكافئ $x=5$ ، تكافئ $2x-6 \neq 0$ ، إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي

$S = \{5\}$ و منه المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 5.

مع حامل محور التراتيب (yy') : نحسب $f(0) = -\frac{5}{6}$ و منه المنحني (C_f) يقطع حامل

محور التراتيب في النقطة ذات الترتيب $-\frac{5}{6}$.

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x مختلف عن 3 فإن :

$$f(x) = \frac{5-x}{2x-6} = \frac{-x+3+2}{2(x-3)} = \frac{-(x-3)+2}{2(x-3)} = \frac{-(x-3)}{2(x-3)} + \frac{2}{2(x-3)}$$

فإن : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3}$ و هو المطلوب.

(3) نتken الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ :

أ- إثبات أنه يمكن كتابة g على شكل مركب دالتين يطلب تعبينهما :

$$v(x) = \frac{1}{x} \quad u(x) = x-3 \quad \text{حيث } g = v \circ u \quad \text{لدينا} \quad x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} \frac{1}{x-3}$$

كتابه الأستاذ : حناش نبيل

بـ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

- على المجال $u(x) \in]-\infty; 0[$: من أجل $x < 3$ فإن $u(x) < 0$ أي $x - 3 < 0$ معناه $a = 1 > 0$ لـ u متساوية تماماً على $]-\infty; 3[$ (لأنها دالة تالية حيث $a = 1 > 0$)
- و بما أن الدالة v متناقصة تماماً على $]-\infty; 0[$ (الدالة مقلوب) فإنه حسب مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين فإن f متناقصة تماماً على $]-\infty; 3[$.

(4) نبين أنه من أجل كل x حيث $3 < x < 5$ فإن :

$$f(x) > 0 \quad \text{إذا كان } 3 < x < 5 \quad \text{فإن } -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3} > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{و منه } \frac{1}{x-3} > \frac{1}{2} \quad \text{و منه } 0 < x-3 < 2 \quad \text{و منه } x \in D_f \quad \text{و هو المطلوب.}$$

(5) إثبات أن النقطة $\omega\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى :

من أجل كل $x \in D_f$ فإن $2(3)-x \in D_f$ أي $2(3)-x \neq 3$ و منه $-x \neq -3$ و منه $x \in D_f$

$$\text{و من أجل كل } f(2(3)-x) + f(x) = \frac{5-6+x}{2(6-x)-6} + \frac{5-x}{2x-6} = \frac{x-1}{6-2x} + \frac{5-x}{2x-6} \quad \text{لدينا } x \in D_f$$

$$f(2(3)-x) + f(x) = \frac{-(2x-6)}{2x-6} \quad \text{أي } f(2(3)-x) + f(x) = \frac{1-x+5-x}{2x-6} = \frac{6-2x}{2x-6} \quad \text{إذن}$$

$$\boxed{f(2a-x) + f(x) = 2b} \quad \text{من الشكل } f(2(3)-x) + f(x) = -1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

• $\left(C_f\right)$ مركز تناظر للمنحنى $\omega\left(3; -\frac{1}{2}\right)$ الاستنتاج : النقطة

(6) شرح كيفية إنشاء المنحنى $\left(C_f\right)$

$$\text{لدينا من أجل كل } f(x) = k(x-3) - \frac{1}{2} \quad \text{و هي من الشكل } f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3} \quad \text{حيث } k \text{ هي}$$

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

دالة المقلوب ، إذن (C_f) صورة (H) التمثيل البياني للدالة "مقلوب" بالإنسحاب الذي شاعره

$$\vec{v} = 3\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

7 المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا تمثل فوائل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات الأفقيه (d_m) الموازية لحامل محور الفوائل و التي $y = m$ معادلة لها .

✓ إذا كان $m \in \left[-\infty; -\frac{5}{6} \right]$ أي $m < -\frac{5}{6}$ يقطع المنحني (C_f) في

نقطة وحيدة فاصلتها موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

✓ إذا كان $m = -\frac{5}{6}$ فإن المستقيم $(d_{-\frac{5}{6}})$ يقطع المنحني (C_f) في النقطة ذات الإحداثيات $\left(0; -\frac{5}{6}\right)$ و

بالتالي المعادلة $f(x) = -\frac{5}{6}$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل معدوم .

✓ إذا كان $m \in \left[-\frac{5}{6}; -\frac{1}{2} \right]$ أي $-\frac{5}{6} < m \leq -\frac{1}{2}$ لا تقطع المنحني (C_f) و

بالتالي المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حلولا .

✓ إذا كان $m \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right]$ أي $m > -\frac{1}{2}$ في نقطة وحيدة تقطع المنحني (C_f) فإن المستقيمات (d_m) في

ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

(بالأخص من أجل $m = 0$ فإن المنحني (C_f) يتقطع مع حامل محور الفوائل $(y = 0)$ في نقطة وحيدة فاصلتها هي $x = 5$.

حل التفرع رقم 16 :

$f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$ الدالة المعرفة كما يلي :

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

(1) أ- تعين D_f مجموعة تعريف الدالة f :

. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x \neq 1$ و منه

ب- تعين العددان الحقيقيين α ، β بحيث من أجل كل x من D_f يكون :

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1} \quad f(x) = \frac{2x+6}{x-1} = \frac{2x-2+8}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{8}{x-1} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 8 \end{cases} : \text{إذن نجد : } f(x) = 2 + \frac{8}{x-1}$$

ج- استنتاج إتجاه تغير الدالة f على المجالين $[-\infty, 1]$ و $[1, +\infty)$:

باتباع المخطط : $f = v \circ u$: $x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} 2 + \frac{8}{x-1}$ حيث

$$v(x) = 2 + \frac{8}{x} \quad \text{و} \quad u(x) = x-1$$

✓ على المجال $[-\infty; 1]$: لدينا $x-1 < 0$ أي $u(x) < 0$ و منه $u(x) < 0$ معناه

و الدالة u متزايدة تماما على $[-\infty; 1]$

و بما أن الدالة v متناقصة تماما على $[-\infty; 0]$ لأن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $[-\infty; 0]$

. فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فالدالة f متناقصة تماما على $[-\infty; 1]$.

✓ على المجال $[1; +\infty)$: لدينا $x-1 > 0$ أي $x > 1$ و منه $u(x) > 0$ معناه

و الدالة u متزايدة تماما على $[1; +\infty)$

و بما أن الدالة v متناقصة تماما على $[0; +\infty)$ لأن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $[0; +\infty)$

. فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فالدالة f متناقصة تماما على $[1; +\infty)$.

$$(2) \text{ نعتبر الدالة } g \text{ حيث : } g(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{x-1}}$$

أ- تعيين D_g مجموعة تعريف الدالة g :

: $x \neq 1$ مع $\frac{2x+6}{x-1} \geq 0$ أي $x-1 \neq 0$ و $\frac{2x+6}{x-1} \geq 0$ إذا كان $0 \leq x < 1$ أو $x > 1$

لتحديد قيم x حيث $\frac{2x+6}{x-1} \geq 0$ نستعمل جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$2x + 6$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$\frac{2x+6}{x-1}$	+	0	-	+

إذن من جدول الإشارة نجد : $D_g =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

ب- تفكيك الدالة g إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما :

$$g = v \circ f : x \xrightarrow{f} \frac{2x+6}{x-1} \xrightarrow{v} \sqrt{\frac{2x+6}{x-1}} \quad \text{باتباع الخطط :}$$

حيث $v(x) = \sqrt{x}$ "دالة الجذر التربيعي"

ج- استنتاج إتجاه تغير الدالة g على المجالين $]1, +\infty[$ و $]-\infty; -3]$:

على $]-\infty; -3]$: من أجل كل $x \in]-\infty; -3]$ فإن $x \leq -4$ و منه $x-1 \leq -4$ و منه $x \leq -3$ ✓

معناه $0 \leq f(x) < 2$ أي $0 \leq 2 + \frac{8}{x-1} < 2$ و منه $-2 \leq \frac{8}{x-1} < 0$ و منه $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} < 0$

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

حيث أن الدالة $f(x) \in [0;2]$ متزايدة تماما على $[0;2]$ وبما أن f متناقصة تماما على $[-\infty; -3]$ فإنه حسب مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين فإن g متناقصة تماما على $[-\infty; -3]$.

✓ على $x \in]1; +\infty[$ من أجل كل $x > 1$ و منه $x-1 > 0$ و منه $\frac{1}{x-1} > 0$

حيث أن الدالة $f(x) \in]2; +\infty[$ معناه $f(x) > 2$ أي $2 + \frac{8}{x-1} > 2$ و منه $\frac{8}{x-1} > 0$ تماما على $]2; +\infty[$ وبما أن f متناقصة تماما على $[\infty; +\infty[$ فإنه حسب مبرهنة اتجاه تغير مركب

دالتين فإن g متناقصة تماما على $]1; +\infty[$.

حل التمرين رقم 17 :

- I الدالة المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ كما يلي :

✓ نبين أن : $(f \circ f \circ f)(2) = f(f(f(2))) = x$

من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن : $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$(f \circ f \circ f)(2) = f(f(f(2))) = f(f(2)) = f(2)$ إذن

- II - نتken الدالة g المعرفة على \mathbb{R} حيث $g(x) = \alpha x + \beta$ كما يلي :

✓ تعريف الدالة $g \circ g$:

و من أجل كل عدد حقيقي x $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta$ و منه $g \circ g(x) = g(g(x)) = \alpha(g(x)) + \beta = \alpha(\alpha x + \beta) + \beta$

✓ تعين الثنائية $(\alpha; \beta)$ التي من أجلها يكون : $g \circ g = g$

و من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $D_{g \circ g} = D_g = \mathbb{R}$ معناه

: $(\alpha^2 - \alpha)x + \alpha\beta = 0$ ، إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $\alpha^2 x + \alpha\beta + \beta = \alpha x + \beta$ و منه ينتج :

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ اي } \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ حيث نعلم أن } \alpha \neq 0 \text{ و منه ينتج :} \quad \begin{cases} \alpha(\alpha - 1) = 0 \\ \alpha\beta = 0 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \alpha^2 - \alpha = 0 \\ \alpha\beta = 0 \end{cases}$$

$g(x) = x$: $g \circ g = g$ و منه من أجل : تبا

حل التدريب رقم 18 :

(1) تحديد إشارة $f(x)$ على المجال $[-3; 4]$:

x	-3	-1	2	4
$f(x)$	+	0	-	0

(2) تعريف مجموعة كل من الدوال g ، h ، k و u :

و تكون الدالة k معرفة إذا و فقط إذا كان المقام $D_h = D_f = [-3; 4]$ ، $D_g = D_f = [-3; 4]$

حيث من جدول الإشارة نلاحظ أن : $f(x) = 0$ من أجل $x = -1$ أو من أجل $x = 2$

إذن : $D_k = [-3; -1] \cup [-1; 2] \cup [2; 4]$

و تكون الدالة u معرفة إذا و فقط إذا كان $f(x) \geq 0$ ، و من جدول إشارة الدالة f نجد :

• $D_u = [-3; -1] \cup [2; 4]$

(3) باستعمال إتجاه تغير مركب دالتين ، تشكيل جدول تغيرات الدوال g ، h ، k و u :

g هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة "مربع" :

إذا كان $x \in [-3; -1]$ فإن الدالة f متناقصة تماماً حيث $f(x) \in [0; 4]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع"

متزايدة تماماً على $[0; 4]$: إذن للدالتين f و الدالة "مربع" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة g

متناقضة تماماً على $[-3; -1]$.

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

إذا كان $x \in [-1;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [-1;0]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع"

متناقصة تماما على $[-1;0]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" نفس إتجاه التغير و منه الدالة g

متزايدة تماما على $[-1;0]$.

إذا كان $x \in [0;2]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x) \in [-1;0]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع"

متناقصة تماما على $[-1;0]$ ؛ إذن للدالدين f و الدالة "مربع" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة g

متناقصة تماما على $[0;2]$.

إذا كان $x \in [2;3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x) \in [0;5]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع"

متزايدة تماما على $[0;5]$ ؛ إذن للدالدين f و الدالة "مربع" نفس إتجاه التغير و منه الدالة g

متزايدة تماما على $[2;3]$.

إذا كان $x \in [3;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [2;5]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع"

متزايدة تماما على $[2;5]$ ؛ إذن للدالدين f و الدالة "مربع" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة g

متناقصة تماما على $[3;4]$.

.... $g(-3) = [f(-3)]^2 = 4^2 = 16$: جدول تغيرات الدالة g

x	-3	-1	0	2	3	4
$g(x)$	16		1		25	4

بما أن $\lambda = -1 < 0$ $h = -f$ (فإن للدالدين f و h إتجاهها تغير متعاكسين حيث :

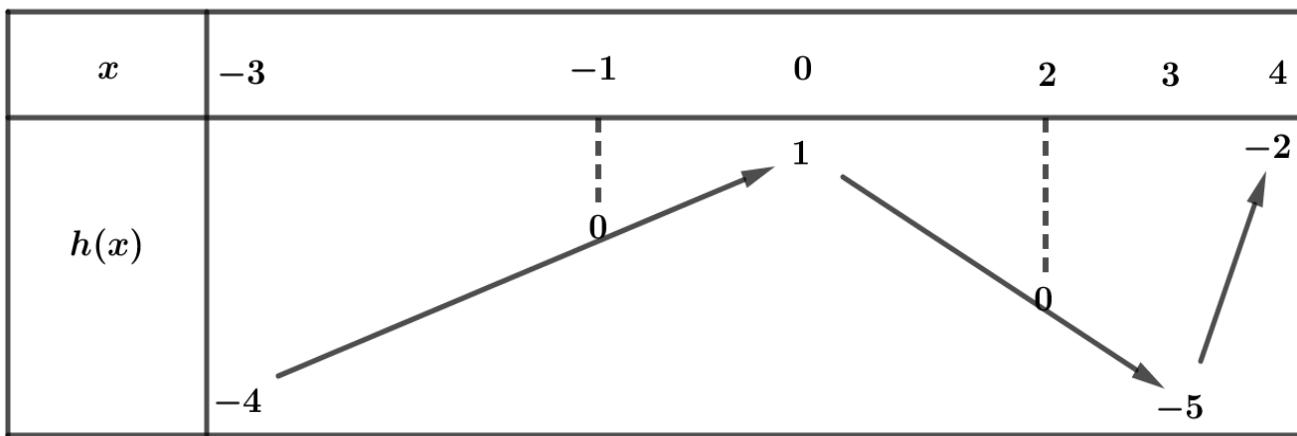
إذا كان $x \in [-3;0]$ أو $x \in [3;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما و منه فالدالة h متزايدة تماما على

كل من المجالين $[-3;0]$ و $[3;4]$.

إذا كان $x \in [0;3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما و منه فالدالة h متناقصة تماما على $[0;3]$.

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

جدول تغيرات الدالة h : $h(-1) = -f(-1) = 0$ ، $h(-3) = -f(-3) = -4$



k هي مركب الدالة f متباينة بالدالة "مقلوب" :

إذا كان $x \in [-3; -1]$ فإن الدالة f متناقصة تماماً حيث $f(x) \in [0; 4]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماماً على $[4; 0]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس إتجاه التغير و منه الدالة k متزايدة تماماً على $[-1; -3]$.

إذا كان $x \in [-1; 0]$ فإن الدالة f متناقصة تماماً حيث $f(x) \in [-1; 0]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماماً على $[0; -1]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس إتجاه التغير و منه الدالة k متزايدة تماماً على $[-1; 0]$.

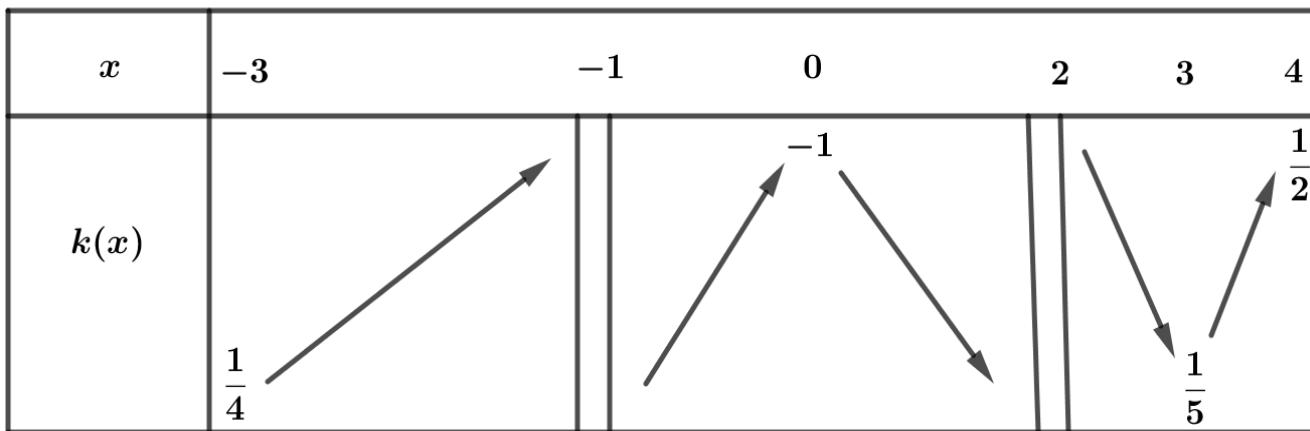
إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن الدالة f متزايدة تماماً حيث $f(x) \in [0; 2]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماماً على $[2; 0]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة k متناقصة تماماً على $[0; 2]$.

إذا كان $x \in [2; 3]$ فإن الدالة f متزايدة تماماً حيث $f(x) \in [2; 5]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماماً على $[5; 2]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة k متناقصة تماماً على $[2; 3]$.

إذا كان $x \in [3; 4]$ فإن الدالة f متناقصة تماماً حيث $f(x) \in [3; 4]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماماً على $[4; 3]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس إتجاه التغير و منه الدالة k متزايدة تماماً على $[3; 4]$.

كتاب الاستاذ : حناش نبيل

➤ جدول تغيرات الدالة k : $k(0) = \frac{1}{f(0)} = -1$ ، $k(-3) = \frac{1}{f(-3)} = \frac{1}{4}$



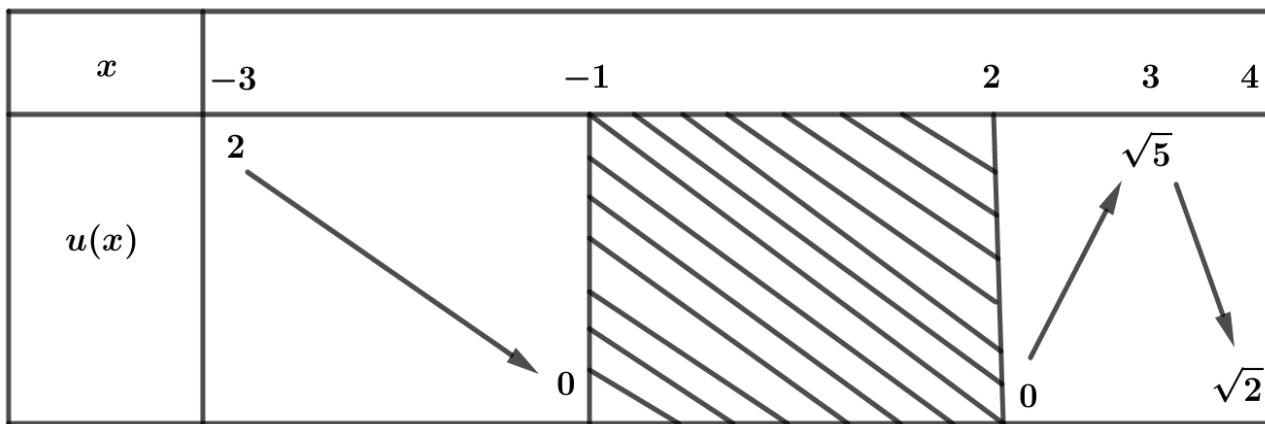
u هي مركب الدالة f متبوعة بدالة "الجذر التربيعي" :

➤ إذا كان $x \in [-3; -1]$ فإن الدالة f متناقصة تماماً حيث $f(x) \in [0; 4]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر التربيعي" متزايدة تماماً على $[0; 4]$: إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة u متناقصة تماماً على $[-3; -1]$.

➤ إذا كان $x \in [2; 3]$ فإن الدالة f متزايدة تماماً حيث $f(x) \in [0; 5]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر التربيعي" متزايدة تماماً على $[0; 5]$: إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" نفس إتجاه التغير و منه الدالة u متزايدة تماماً على $[2; 3]$.

➤ إذا كان $x \in [3; 4]$ فإن الدالة f متناقصة تماماً حيث $f(x) \in [2; 5]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر التربيعي" متزايدة تماماً على $[2; 5]$: إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة u متناقصة تماماً على $[3; 4]$.

➤ جدول تغيرات الدالة u : $u(3) = \sqrt{f(3)} = \sqrt{5}$ ، $u(-3) = \sqrt{f(-3)} = \sqrt{4} = 2$:



(4) إنشاء (C_f) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (C_h) ، ثم استنتاج (C_p) و (C_q) للمنحنين p و q المعرفتين كما يلي :

$$q(x) = |f(x)| \quad : \quad p(x) = f(-x)$$

✓ هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

✓ هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب .

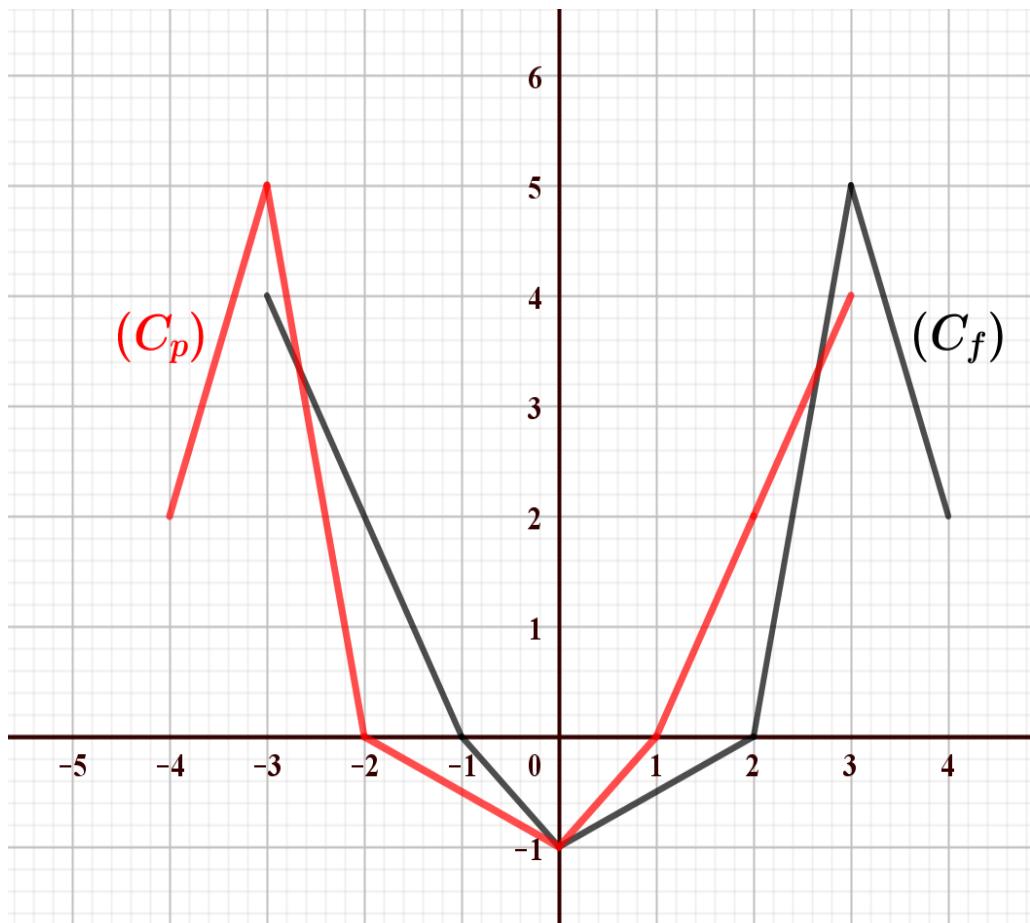
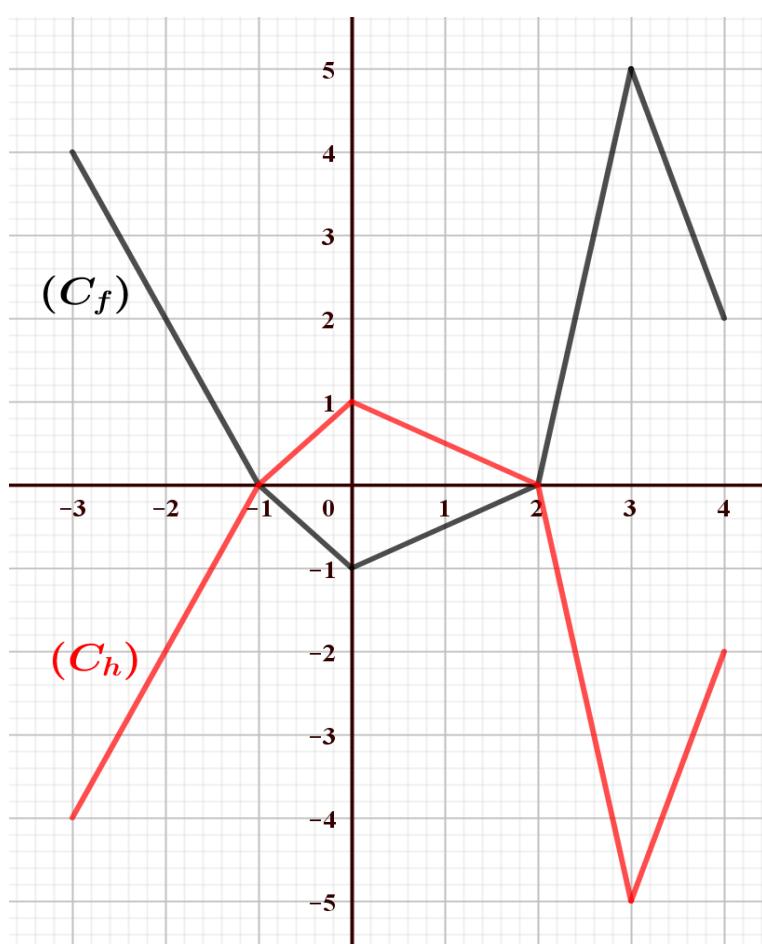
✓ لما f فإن (C_q) ينطبق على (C_f) ، إذن $|f(x)| = f(x)$ و منه $|f(x)| = f(x) \geq 0$ لما f يقع فوق محور الفواصل .

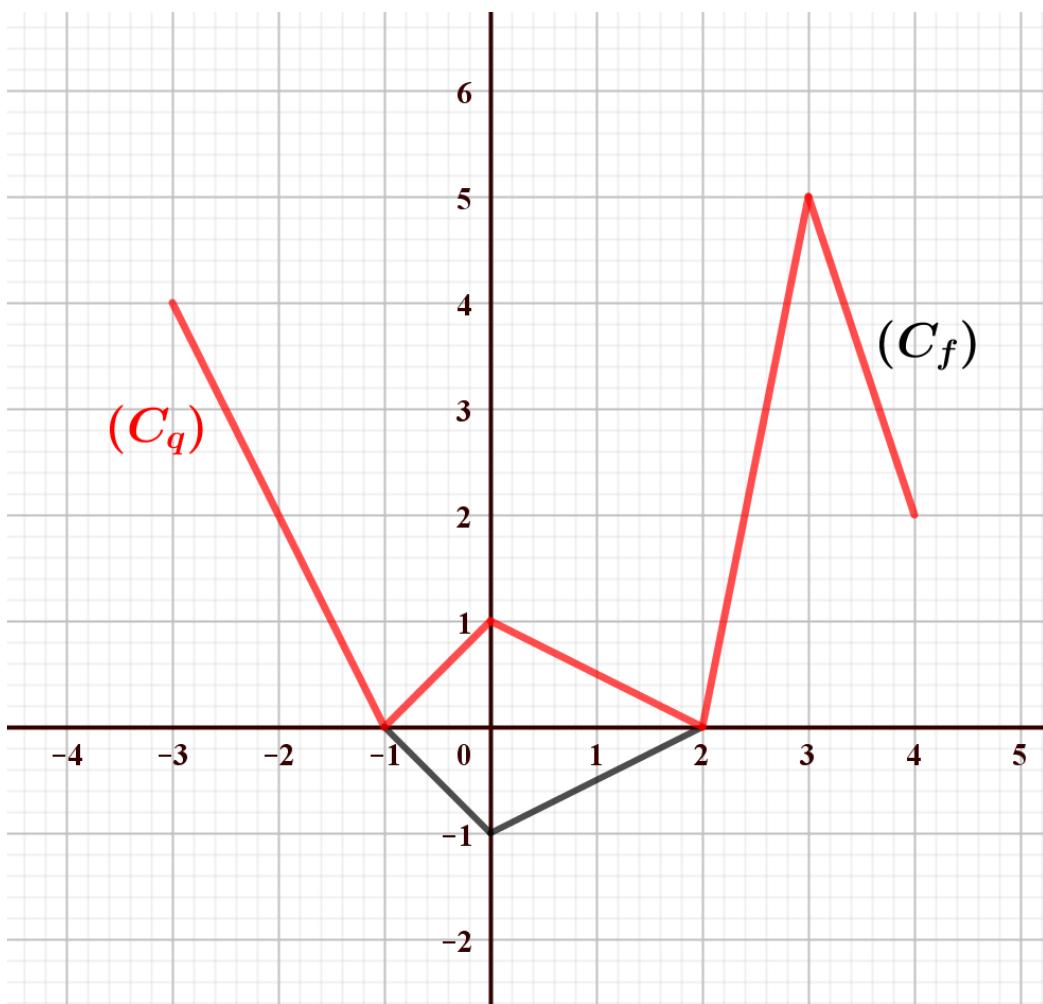
✓ لما f فإن (C_q) هو نظير (C_f) ، إذن $|f(x)| = -f(x)$ و منه $|f(x)| = -f(x)$.

بالنسبة إلى محور الفواصل (لما (C_f) يقع تحت محور الفواصل) .

التمثيلات البيانية : (بالنسبة لإنشاء (C_f) نعتمد فقط على جدول التغيرات)

كتاب الاستاذ : حناش نبيل





لا تنسونا من رب صالح دعائكم