

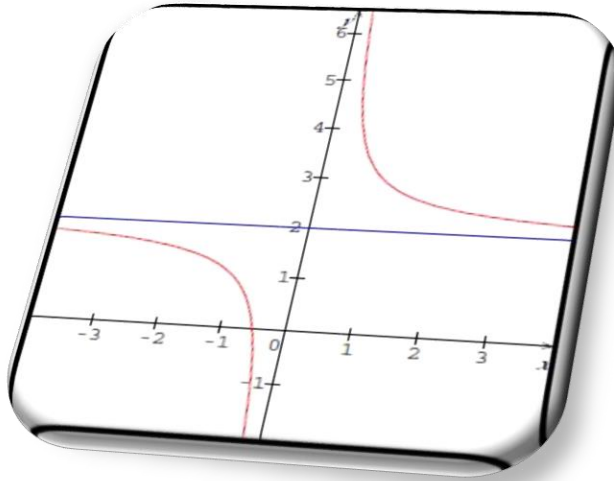
الرياضيات في الثانوية

نمارين متنوعة في محور الدوال العددية

مرفقة بحلول مفصلة

18 تمرين

للسنة الثانية ثانوي



كتابة الأستاذ :

حناش نبيل

Octobre 2021

أذكر إن كانت الدالتان f و g متساويتان في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad f(x) = x + 2 \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{(x+2)^2}$$

$$(2) \quad f(x) = \sqrt{x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = |x|$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{x^2}{|x|} \quad \text{و} \quad g(x) = |x|$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x-1)(x+1)} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2 - 1}$$

$$(6) \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x+3} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-3)^2}$$

عين $f \circ g$ و $g \circ f$ بعد تعيين مجموعة تعريف $f \circ g$ و $g \circ f$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad f(x) = 2x \quad \text{و} \quad g(x) = -3x$$

$$(2) \quad f(x) = x - 3 \quad \text{و} \quad g(x) = 2x + 3$$

$$(3) \quad f(x) = -\frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x) = 2x$$

$$(4) \quad f(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = 4x^2 - 3x$$

$$(5) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{x} - 3$$

$$g(x) = \cos(x-1) \quad \text{و} \quad f(x) = 3x-2 \quad (6)$$

التمرين رقم 03 :

فكك الدالة f إلى مركب دالتين بسيطتين في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = (x-1)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = (x+2)^2 + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad (5)$$

$$f(x) = \cos(x-1) \quad (6)$$

$$f(x) = \left| \frac{2x}{5} - 1 \right| \quad (7)$$

التمرين رقم 04 :

$$g(x) = 2x \quad \text{و} \quad f(x) = -\frac{1}{x+1} \quad \text{دالتان حيث :}$$

1- عين مجموعة تعريف الدالتين f و g ثم عين مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$

2- أحسب $g \circ f(x)$

3- استنتج اتجاه تغير الدالة $g \circ f$ بالإعتماد على تغيرات الدالتين f و g .

التمرين رقم 05 :

$$g(x) = 3x^2 + 1 \quad \text{و} \quad f(x) = 2x - 1 \quad \text{بـ : } \mathbb{R}$$

(1) عرف الدوال : $g \circ g$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$

(2) هل الدالتان $g \circ f$ و $f \circ g$ متساويتان ؟

(3) أكتب الدالة g على شكل مركب دالتين بسيطتين يطلب تحديدهما .

التمرين رقم 06 :

أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad I =]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{2}{x} + 3$$

$$(2) \quad I =]-\infty, 0] \quad f(x) = 3x^2 + 2$$

$$(3) \quad I = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right] \quad f(x) = (3 - 2x)^2$$

$$(4) \quad I = [-2, +\infty[\quad f(x) = (x + 2)^2 - 1$$

$$(5) \quad]-\infty, 2] \quad f(x) = \sqrt{2 - x}$$

$$(6) \quad I = [1, +\infty[\quad f(x) = \sqrt{x - 1} + 2$$

$$(7) \quad I = [0, \pi] \quad f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(8) \quad I = [0, \pi] \quad f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

التمرين رقم 07 :

f و g دالتان معرفتان على المجال $I = [0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$

أثبت أن الدالة $f + g$ متزايدة تماما على المجال I .

التمرين رقم 08 :

f دالة معرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بـ : $f(x) = x^2 + |x|$

(1) أثبت أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$.

(2) إستنتج إتجاه تغير الدالتين $2f - 5$ ، $-3f + 2$ على المجال $]-\infty, 0]$.

التمرين رقم 09 :

f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x^2 + x + 1$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) = (x + \alpha)^2 + \beta$ حيث α و β عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

(2) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) التمثيل البياني للدالة f إنطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها ثم أنشئ (C_f) .

(3) بين كيف يمكن إستنتاج التمثيلات البيانية للدوال الآتية : $g(x) = f(x + 2)$ ،

$h(x) = f(x) + 1$ ، $k(x) = f(x - 2) + 1$ ، $u(x) = -f(x)$ ، $v(x) = |f(x)|$ ، $w(x) = f(|x|)$.

التمرين رقم 10 :

(1) أثبت بطريقتين مختلفتين أن النقطة $\Omega(a, b)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

-أ- $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ ، $\Omega(-1, 1)$

-ب- $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ ، $\Omega(1, 2)$

(2) أثبت بثلاث طرق مختلفة أن المستقيم الذي $x = a$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_f) :

-أ- $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ، $x = -2$

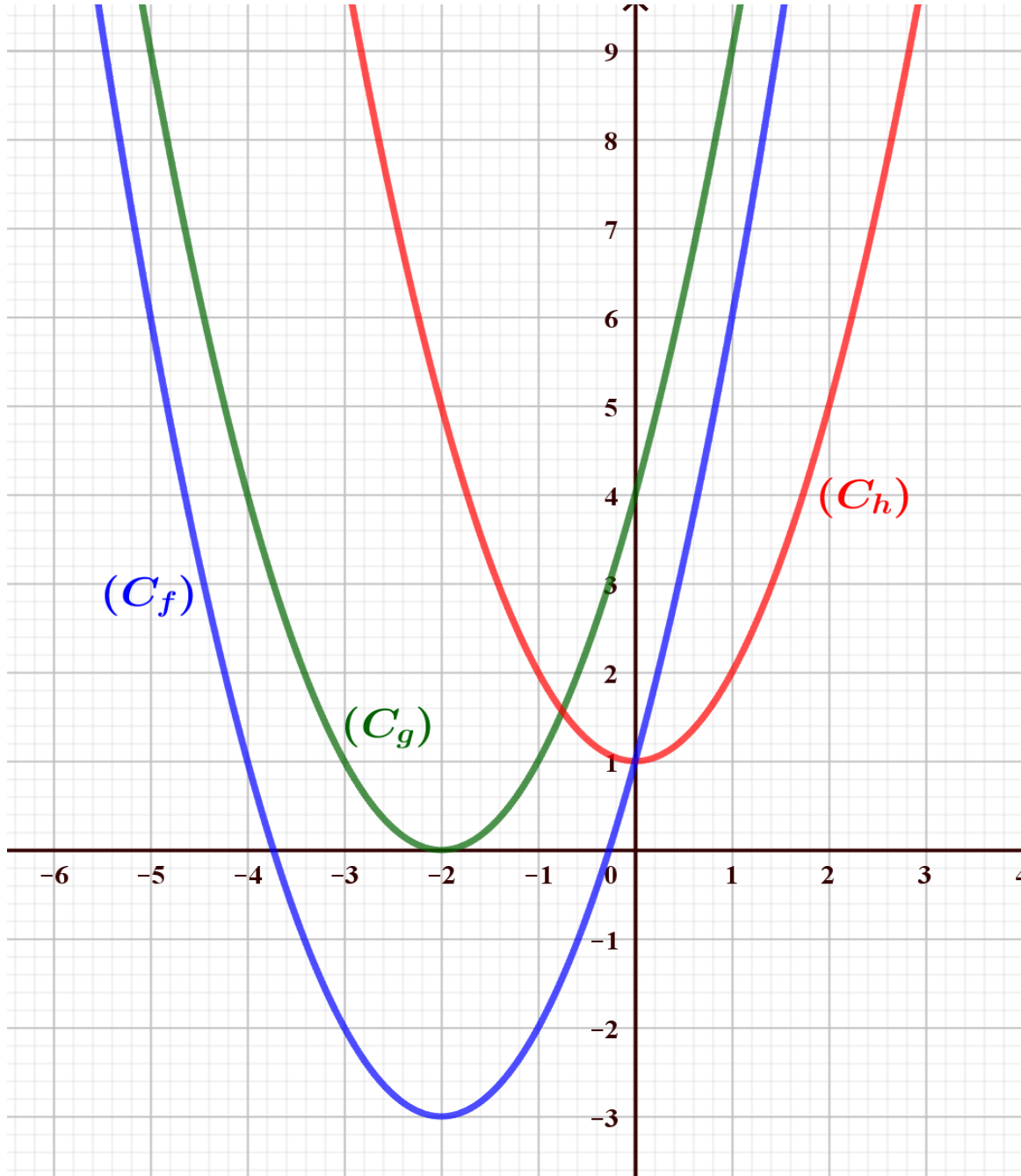
ب- $x = -3$ ، $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$

التمرين رقم 11 :

(C_f) ، (C_g) و (C_h) صور لمنحنى الدالة "مربع" بإنسحاب شعاعه \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} على الترتيب كما هو موضح في الشكل أدناه .

(1) عين مركبتا كل من الأشعة \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} .

(2) عين دستور الدوال f ، g و h .



f ، g و h دوال معرفة كما يلي :

$$h(x) = 3x - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = 1 - \frac{1}{3x} \quad , \quad f(x) = 3x - \frac{1}{3x}$$

(1) فكك الدالة f إلى مجموع دالتين u و v يطلب تعيينهما .

(2) عين إتجاه تغير الدالتين u و v على المجالين $] -\infty, 0[$ و $] 0, +\infty[$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة

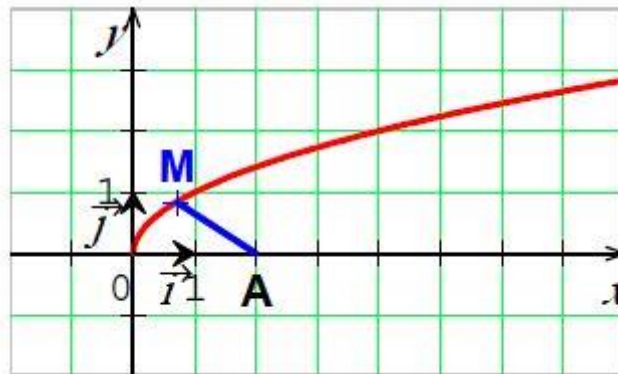
f على كل من المجالين $] -\infty, 0[$ و $] 0, +\infty[$.

(3) أحسب و بسط $\frac{f(x)}{g(x)}$

(4) هل الدالتان $\frac{f}{g}$ و h متساويتان ؟

في مستو مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر المنحني (C) الذي معادلته $y = \sqrt{x}$ و النقطة

A التي إحداثيها $(2, 0)$.



الهدف من هذه المسألة هو تعيين النقطة من (C) الأقرب من A .

ليكن x عدد حقيقي موجب و M النقطة من (C) التي فاصلتها x .

(1) عبر عن AM بدلالة x .

(2) لتكن f الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

أ- ما هي العلاقة الموجودة بين $f(x)$ و AM ؟

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $[0, +\infty[$.

ج- استنتج إحداثيي النقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

التمرين رقم 14 :

f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = (x+1)(x-4)$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

(2) اشرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_f) للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني للدالة "مربع"

ثم أنشئ (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(3) g الدالة المعرفة على \mathbb{R} ب : $g(x) = f(|x|)$

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $g(x) = f(x)$

ب- أثبت أن g دالة زوجية .

ج- اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) التمثيل البياني للدالة g بالإعتماد على (C_f) ثم أنشئ (C_g) .

التمرين رقم 15 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{5-x}{2x-6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

(1) عين إحداثيي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 فإن : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3}$

(3) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x-3}$

أ- بين أنه يمكن كتابة g على شكل مركب دالتين يطلب تعيينهما .

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أنه من أجل كل x حيث $3 < x < 5$ فإن : $f(x) > 0$

(5) أثبت أن النقطة $\omega\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

(6) بالإعتماد على التمثيل البياني للدالة "مقلوب" ، أنشئ المنحني (C_f) .

(7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

التمرين رقم 16 :

$f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$ الدالة المعرفة كما يلي :

(1) أ- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- عين العددين الحقيقيين α ، β بحيث من أجل كل x من D_f يكون : $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$

ج- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$

(2) نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{x-1}}$

أ- عين D_g مجموعة تعريف الدالة g .

ب- بين أن g هي مركب دالتين يطلب تعيينهما .

ج- استنتج اتجاه تغير الدالة g على المجالين $]1, +\infty[$ و $] -\infty; -3]$.

التمرين رقم 17 :

I- f الدالة المعرفة على المجال $]1, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{x-1}$

✓ بين أن : $(f \circ f)(x) = x$ ثم استنتج قيمة $(f \circ f \circ f)(2)$

II- لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = \alpha x + \beta$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^*$ و $\beta \in \mathbb{R}$

✓ عرف الدالة $g \circ g$

✓ عين الثنائية $(\alpha; \beta)$ التي من أجلها يكون : $g \circ g = g$

التمرين رقم 18 :

يعطى جدول التغيرات لدالة f معرفة على المجال $[-3, 4]$ كما يلي :

x	-3	-1	0	2	3	4
$f(x)$	4	0	-1	0	5	2

• نعتبر الدوال g ، h ، k و u المعرفة بـ :

$$h(x) = -f(x) \quad ; \quad g(x) = [f(x)]^2$$

$$u(x) = \sqrt{f(x)} \quad ; \quad k(x) = \frac{1}{f(x)}$$

(1) حدد إشارة $f(x)$ على المجال $[-3, 4]$.

(2) عين مجموعة تعريف كل من الدوال g ، h ، k و u .

(3) باستعمال اتجاه تغير مركب دالتين ، شكل جدول تغيرات الدوال g ، h ، k و u .

(4) أنشئ (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، ثم استنتج (C_h) و

كذا المنحنيين (C_p) و (C_q) للدالتين p و q المعرفتين كما يلي :

$$q(x) = |f(x)| \quad ; \quad p(x) = f(-x)$$



$$(1) \quad f(x) = x+2 \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{(x+2)^2}$$

لدينا : $D_f = D_g$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ ، إذن $f \neq g$.

$$(2) \quad f(x) = \sqrt{x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = |x|$$

$D_f = D_g$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = f(x)$ ، إذن $f = g$.

$$(3) \quad f(x) = \frac{x^2}{|x|} \quad \text{و} \quad g(x) = |x|$$

$D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R}$ ، إذن $f \neq g$.

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

نعين D_f و D_g : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x \geq 0$ و $\sqrt{x}-1 \neq 0$ أي $x \geq 0$ و $x \neq 1$ و

منه $D_f = [0,1[\cup]1,+\infty[$ و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x \geq 0$ و $x-1 \neq 0$ أي $x \geq 0$ و

$x \neq 1$ و منه $D_g = [0,1[\cup]1,+\infty[$ ، إذن $D_f = D_g$. و من جهة أخرى من أجل كل $x \in D_f$ فإن :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} = g(x) \quad \text{و منه نستنتج أن : } f = g$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{x^2+4x+4}{(x-1)(x+1)} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2-1}$$

نعين D_f و D_g : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $(x-1)(x+1) \neq 0$ يكافئ $(x-1) \neq 0$ و

$(x+1) \neq 0$ يكافئ $x \neq -1$ و $x \neq 1$ و منه $D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا

كان $x^2-1 \neq 0$ يكافئ $(x-1)(x+1) \neq 0$ يكافئ $x \neq -1$ و $x \neq 1$ و منه $D_g = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ ، إذن

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x-1)(x+1)} = f(x) \quad \text{فإن } x \in D_g \quad \text{و من جهة أخرى من أجل كل } x \in D_g \quad D_f = D_g$$

و منه نستنتج أن : $f = g$.

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-3)^2} \quad \text{و} \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x+3} \quad (6)$$

نعين D_f و D_g : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+3 \neq 0$ أي $x \neq -3$ و منه

$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $(x-3)^2 \neq 0$ أي إذا و فقط إذا كان

$x-3 \neq 0$ أي $x \neq 3$ و منه $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$ ، إذن $D_f \neq D_g$. و منه نستنتج أن : $f \neq g$.

حل التمرين رقم 02 :

تعيين $f \circ g$ و $g \circ f$ بعد تعيين مجموعة تعريف $f \circ g$ و $g \circ f$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad f(x) = 2x \quad \text{و} \quad g(x) = -3x$$

$D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\text{و} \quad f \circ g(x) = f[g(x)] = f(-3x) = 2(-3x) = -6x$$

$$\cdot \quad g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x) = -3(2x) = -6x$$

$$(2) \quad f(x) = x-3 \quad \text{و} \quad g(x) = 2x+3$$

$D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\text{و} \quad f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x+3) = 2x+3-3 = 2x$$

$$\cdot \quad g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x-3) = 2(x-3)+3 = 2x-3$$

$$(3) \quad f(x) = -\frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x) = 2x$$

نعين $D_{f \circ g}$: من أجل كل $x \in D_g$ أي $x \in \mathbb{R}$ فإن $g(x) \in D_f$ معناه $g(x) \neq -1$ أي $2x \neq -1$ و منه

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إذن ، $x \neq -\frac{1}{2}$ ، $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ و من أجل كل $x \in D_{f \circ g}$ فإن :

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x) = -\frac{1}{2x+1}$$

نعين $D_{g \circ f}$: من أجل كل $x \in D_f$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ أي $x \neq -1$ فإن $f(x) \in D_g$ معناه $f(x) \in \mathbb{R}$

إذن $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$ و من أجل كل $x \in D_{g \circ f}$ فإن :

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{2}{x+1}$$

$$(4) \quad f(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = 4x^2 - 3x$$

$D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(4x^2 - 3x) = 2(4x^2 - 3x)^2 - 1$$

$$\text{و} \quad f \circ g(x) = 32x^4 - 48x^3 + 18x^2 - 1$$

$$\cdot \quad g \circ f(x) = 16x^4 - 22x^2 + 7 \quad \text{أي} \quad g \circ f(x) = g[f(x)] = 4(2x^2 - 1)^2 - 3(2x^2 - 1)$$

$$(5) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{x} - 3$$

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2 + 2x \geq 0$ أي إذا و فقط إذا كان $x(x+2) \geq 0$ و باستعمال

جدول الإشارة نجد : $D_f =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	—	—	0	+
$x + 2$	—	0	+	+
$x(x + 2)$	+	0	—	+

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

نعين $D_{f \circ g}$: من أجل كل $x \in D_g$ أي $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $g(x) \in D_f$ معناه

$$\text{معناه } \frac{1}{x} - 3 \geq 0 \text{ أو } \frac{1}{x} - 3 \leq -2 \text{ أي } g(x) \geq 0 \text{ أو } g(x) \leq -2 \text{ أي } g(x) \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$$

$$\frac{1}{x} \leq 1 \text{ أو } \frac{1}{x} \geq 3 \text{ معناه } x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[\text{ أو } x \in \left]0, \frac{1}{3}\right] \text{ و منه}$$

$$D_{f \circ g} =]-\infty, 0[\cup \left]0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty[: \text{ إذن ، } x \in]-\infty, 0[\cup \left]0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$$

$$\text{و من أجل كل } x \in D_{f \circ g} \text{ فإن : } f \circ g(x) = f[g(x)] = \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x} - 3\right)}$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}}$$

نعين $D_{g \circ f}$: من أجل كل $x \in D_f$ أي $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$ فإن $f(x) \in D_g$ معناه $f(x) \neq 0$ أي

$$\sqrt{x^2 + 2x} \neq 0 \text{ أي } x^2 + 2x \neq 0 \text{ أي } x(x+2) \neq 0 \text{ معناه } x \neq 0 \text{ و } x \neq -2 \text{ أي } x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$$

$$\text{إذن بالتقاطع ينتج : } D_{g \circ f} =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[\text{ و منه } x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

$$\text{و من أجل كل } x \in D_{g \circ f} \text{ فإن : } g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} - 1$$

$$g \circ f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$(6) \quad f(x) = 3x - 2 \text{ و } g(x) = \cos(x - 1)$$

$$D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R} \text{ ، و من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ فإن :}$$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = 3\cos(x - 1) - 2 \text{ و}$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = \cos(3x - 2 - 1) = \cos(3x - 3)$$

تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين بسيطتين في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = (x-1)^2 \quad (1)$$

$$x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} (x-1)^2 \quad \text{ندينا :}$$

$$v: x \mapsto x^2 \quad \text{و} \quad u: x \mapsto x-1 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = (x+2)^2 + 1 \quad (2)$$

$$x \xrightarrow{u} x+2 \xrightarrow{v} (x+2)^2 + 1 \quad \text{ندينا :}$$

$$v: x \mapsto x^2 + 1 \quad \text{و} \quad u: x \mapsto x+2 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \quad (3)$$

$$x \xrightarrow{u} 2x+3 \xrightarrow{v} \frac{1}{2x+3} \quad \text{ندينا :}$$

$$v: x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad u: x \mapsto 2x+3 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v} \sqrt{x+1} \quad \text{ندينا :}$$

$$v: x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{و} \quad u: x \mapsto x+1 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad (5)$$

$$x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} \sqrt{x-1} + 2 \quad \text{ندينا :}$$

$$v: x \mapsto \sqrt{x} + 2 \quad \text{و} \quad u: x \mapsto x-1 \quad \text{حيث} \quad f = v \circ u$$

$$f(x) = \cos(x-1) \quad (6)$$

لدينا : $x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} \cos(x-1)$

حيث : $f = v \circ u$ و $u : x \mapsto x-1$ و $v : x \mapsto \cos x$

$$f(x) = \left| \frac{2x}{5} - 1 \right| \quad (7)$$

لدينا : $x \xrightarrow{u} \frac{2x}{5} - 1 \xrightarrow{v} \left| \frac{2x}{5} - 1 \right|$

حيث : $f = v \circ u$ و $u : x \mapsto \frac{2x}{5} - 1$ و $v : x \mapsto |x|$

حل التمرين رقم 04 :

f و g دالتان حيث : $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ و $g(x) = 2x$

1- تعيين مجموعة تعريف الدالتين f و g ثم تعيين مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$:

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+1 \neq 0$ أي إذا و فقط إذا كان $x \neq -1$ و منه $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

مجموعة تعريف الدالة g هي \mathbb{R} .

حيث : $D_{g \circ f} = \{x / x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

من أجل كل $x \in D_f$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ أي $x \neq -1$ فإن $f(x) \in D_g$ معناه $f(x) \in \mathbb{R}$ و منه ينتج أن :

$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

2- حساب $g \circ f(x)$:

من أجل كل $x \in D_{g \circ f}$ فإن : $g \circ f(x) = g[f(x)] = -\frac{2}{x+1}$

3- استنتاج اتجاه تغير الدالة $g \circ f$ بالإعتماد على تغيرات الدالتين f و g :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$ لأن f هي مركب الدالة

$u: x \mapsto x+1$ (تالفية متزايدة تماما على \mathbb{R}) متبوعة بالدالة $v: x \mapsto -\frac{1}{x}$ و هي متزايدة تماما على

المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ ، الدالة g هي دالة خطية متزايدة تماما على \mathbb{R} .

من أجل كل $x \in]-\infty, -1[$ فإن : $x < -1$ و منه $x+1 < 0$ و منه $\frac{1}{x+1} < 0$ و بالتالي $-\frac{1}{x+1} > 0$ أي

$f(x) > 0$ أي $f(x) \in]0, +\infty[$ حيث أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ و منه فالدالة

$g \circ f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty, -1[$.

من أجل كل $x \in]-1, +\infty[$ فإن : $x > -1$ و منه $x+1 > 0$ و منه $\frac{1}{x+1} > 0$ و بالتالي $-\frac{1}{x+1} < 0$

أي $f(x) < 0$ أي $f(x) \in]-\infty, 0[$ حيث أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty, 0[$ و منه فالدالة

$g \circ f$ متزايدة تماما على المجال $]-1, +\infty[$.

حل التمرين رقم 05 :

f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ : $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = 3x^2 + 1$

(1) تعريف الدوال : $g \circ f$ ، $f \circ g$ ، $f \circ f$ ، $g \circ g$:

لدينا : $D_{g \circ f} = D_{f \circ g} = D_{f \circ f} = D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = 3(2x-1)^2 + 1 = 12x^2 - 12x + 4$$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = 2(x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 1$$

$$f \circ f(x) = f[f(x)] = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$$

$$g \circ g(x) = g[g(x)] = 3(3x^2 + 1)^2 + 1 = 27x^4 + 18x^2 + 4$$

من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

(2) الدالتان $g \circ f$ و $f \circ g$ غير متساويتين و نكتب $g \circ f \neq f \circ g$.

(3) كتابة الدالة g على شكل مركب دالتين بسيطتين يطلب تحديدهما :

لدينا : $x \xrightarrow{u} x^2 \xrightarrow{v} 3x^2 + 1$

$$g = v \circ u \text{ حيث : } u: x \mapsto x^2 \text{ و } v: x \mapsto 3x+1$$

حل التمرين رقم 06 :

دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad f(x) = \frac{2}{x} + 3 \quad I =]0, +\infty[$$

إذا اعتبرنا الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x}$ يكون لدينا : $f = 2g + 3$

للدالتين f و $2g$ نفس اتجاه التغير لأن f من الشكل $f = \lambda g + k$ حيث $\lambda = 2 > 0$ و $k = 3$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0, +\infty[$ و منه الدالة $2g$ متناقصة تماما على $]0, +\infty[$ ، إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0, +\infty[$.

$$(2) \quad f(x) = 3x^2 + 2 \quad I =]-\infty, 0]$$

إذا اعتبرنا الدالة g المعرفة على $] -\infty, 0]$ بـ : $g(x) = x^2$ يكون لدينا : $f = 3g + 2$

للدالتين f و $3g$ نفس اتجاه التغير لأن f من الشكل $f = \lambda g + k$ حيث $\lambda = 3 > 0$ و $k = 2$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $] -\infty, 0]$ و منه الدالة $3g$ متناقصة تماما على $] -\infty, 0]$ ، إذن الدالة f متناقصة تماما على $] -\infty, 0]$.

$$(3) \quad f(x) = (3 - 2x)^2 \quad I = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $\left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$ بـ : $u(x) = 3 - 2x$ و حيث من أجل كل x من المجال

$\left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$ يكون $x \leq \frac{3}{2}$ و منه $-2x \geq -3$ و منه $3 - 2x \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ أي $u(x) \in [0, +\infty[$ ،

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $v(x) = x^2$ و عليه فإن :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$f = v \circ u$. بما أن الدالة u متناقصة تماما على $\left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$ (لأنها تالفية و $a = -2 < 0$) و الدالة v

متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ (الدالة مربع) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متناقصة تماما على $\left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$.

$$I = [-2, +\infty[\quad f(x) = (x+2)^2 - 1 \quad (4)$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ بـ : $u(x) = x+2$ و حيث من أجل كل x من المجال

$[-2, +\infty[$ يكون $x \geq -2$ و منه $x+2 \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ أي $u(x) \in [0, +\infty[$ ، نعتبر الدالة v

المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $v(x) = x^2 - 1$ و عليه فإن :

$f = v \circ u$. بما أن الدالة u متزايدة تماما على $[-2, +\infty[$ (لأنها تالفية و $a = 1 > 0$) و الدالة v

متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ (لأن الدالة مربع متزايدة تماما على $[0, +\infty[$) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متزايدة تماما على $[-2, +\infty[$.

$$f(x) = \sqrt{2-x} \quad]-\infty, 2]$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $]-\infty, 2]$ بـ : $u(x) = 2-x$ و حيث من أجل كل x من المجال

$]-\infty, 2]$ يكون $x \leq 2$ و منه $-x \geq -2$ و منه $2-x \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ أي $u(x) \in [0, +\infty[$ ، نعتبر

الدالة v المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $v(x) = \sqrt{x}$ و عليه فإن :

$f = v \circ u$. بما أن الدالة u متناقصة تماما على $]-\infty, 2]$ (لأنها تالفية و $a = -1 < 0$) و الدالة v

متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ (دالة الجذر التربيعي) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين

تكون الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty, 2]$.

$$I = [1, +\infty[\quad f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad (6)$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بـ : $u(x) = x - 1$ و حيث من أجل كل x من المجال

$[1, +\infty[$ يكون $x \geq 1$ و منه $x - 1 \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ أي $u(x) \in [0, +\infty[$ ، نعتبر الدالة v المعرفة على

المجال $[0, +\infty[$ بـ : $v(x) = \sqrt{x} + 2$ و عليه فإن :

$f = v \circ u$. بما أن الدالة u متزايدة تماما على $[1, +\infty[$ (لأنها تاليفية و $a = 1 > 0$) و الدالة v

متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ (لأن دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على $[0, +\infty[$) فإنه حسب

مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متزايدة تماما على $[1, +\infty[$.

$$I = [0, \pi] \quad f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (7)$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بـ : $u(x) = x + \frac{\pi}{4}$ و حيث من أجل كل x من المجال $[0, \pi]$

يكون $0 \leq x \leq \pi$ و منه $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ أي $u(x) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ بـ : $v(x) = \sin x$ و عليه فإن :

$f = v \circ u$. الدالة u متزايدة تماما على $[0, \pi]$ (لأنها تاليفية و $a = 1 > 0$) ، لكن الدالة v ليست

رتيبة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ (أنظر الدائرة المثلثية) حيث أن الدالة $v : x \mapsto \sin x$ متزايدة تماما

على المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$ ($\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$)

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad u(x) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{معناه} \quad \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{و منه} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{أي} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \checkmark$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \quad u(x) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \quad \text{معناه} \quad \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4} \quad \text{و منه} \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \quad \text{أي} \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \quad \checkmark$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إذن حسب مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ لأن للدالتين u

و v نفس اتجاه التغير ، و f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ لأن للدالتين u و v إتجاهها تغير

متعاكسين .

$$I = [0, \pi] \quad f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (8)$$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بـ : $u(x) = x + \frac{\pi}{6}$ و حيث من أجل كل x من المجال $[0, \pi]$

يكون $0 \leq x \leq \pi$ و منه $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ أي $u(x) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ بـ : $v(x) = \cos x$ و عليه فإن :

$f = v \circ u$. الدالة u متزايدة تماما على $[0, \pi]$ (لأنها تالفية و $a=1 > 0$) ، و الدالة v ليست

رتيبة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ (أنظر الدائرة المثلثية) حيث أن الدالة $v: x \mapsto \cos x$ متناقصة تماما

على المجال $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$ ($\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right] \cup \left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$)

✓ $u(x) \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ معناه : $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \pi$ و منه $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ أي $x \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$

✓ $u(x) \in \left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$ معناه : $\pi \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ و منه $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$ أي $x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

إذن حسب مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$ لأن للدالتين

u و v إتجاهها تغير متعاكسين ، و f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ لأن للدالتين u و v نفس

حل التمرين رقم 07 :

f و g دالتان معرفتان على المجال $I = [0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$

إثبات أن الدالة $f + g$ متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f هي دالة خطية متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ (لأن $a = 1 > 0$) و الدالة g متزايدة تماما على

$[0, +\infty[$ (الدالة مربع) ، إذن حسب مبرهنة مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I فإن الدالة

$f + g$ متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

حل التمرين رقم 08 :

f دالة معرفة على المجال $] -\infty, 0]$ بـ : $f(x) = x^2 + |x|$

(1) إثبات أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $] -\infty, 0]$:

إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على المجال $] -\infty, 0]$ بـ : $u : x \mapsto x^2$ و $v : x \mapsto |x|$ ، إذن

$f = u + v$ حيث أن الدالة u (الدالة مربع) متناقصة تماما على $] -\infty, 0]$ و كذلك الدالة v متناقصة

تماما على $] -\infty, 0]$ (دالة القيمة المطلقة) ، إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير مجموع دالتين متناقصتين تماما

على مجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على $] -\infty, 0]$.

ملاحظة هامة : لا يمكن إعطاء قاعدة عامة حول إتجاه تغير مجموع دالتين إحداهما متزايدة تماما على مجال

I و الأخرى متناقصة تماما على I ...

مثال 1 : $I = [0, +\infty[$ ، $u : x \mapsto 3x + 1$ ، $v : x \mapsto -2x$ و منه :

، $u(x) + v(x) = x + 1$ ، إذن دالة $u + v$ متزايدة تماما على I .

مثال 2 : $I = [0, +\infty[$ ، $u : x \mapsto -3x + 1$ ، $v : x \mapsto 2x$ و منه :

، إذن $u+v$ دالة متناقصة تماما على I .

(2) إستنتاج إتجاه تغير الدالتين $2f-5$ ، $-3f+2$ على المجال $]-\infty, 0]$:

الدالة $2f-5$ هي من الشكل $\lambda f+k$ حيث $\lambda=2$ ، $k=-5$ و نعلم أن للدالتين $\lambda f+k$ و λf نفس إتجاه التغير ، و بما أن $\lambda=2>0$ فإن للدالتين λf و f نفس إتجاه التغير . بما أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$ فإن $2f$ متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$ و منه نستنتج أن الدالة $2f-5$ متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$.

بنفس الطريقة ، الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$ و بما أن $\lambda=-3<0$ فإن الدالة $-3f$ متزايدة تماما على $]-\infty, 0]$ و منه نستنتج أن الدالة $-3f+2$ متزايدة تماما على $]-\infty, 0]$ لأن للدالتين $-3f$ و $-3f+2$ نفس إتجاه التغير على $]-\infty, 0]$.

حل التمرين رقم 09 :

f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x^2 + x + 1$

(1) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) = (x+\alpha)^2 + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = x^2 + x + 1$ أي $f(x) = (x)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ أي } f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ و منه ينتج :}$$

(2) شرح كيف يمكن إنشاء (C_f) التمثيل البياني للدالة f إنطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها ثم إنشاء (C_f) :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ و منه (C_f) صورة (P) التمثيل البياني للدالة

"مربع" بانسحاب شعاعه $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}$.

(3) كيفية إستنتاج التمثيلات البيانية للدوال الآتية : $h(x) = f(x) + 1$ ، $g(x) = f(x + 2)$ ،

$w(x) = f(|x|)$ ، $v(x) = |f(x)|$ ، $u(x) = -f(x)$ ، $k(x) = f(x - 2) + 1$.

✓ $g(x) = f(x + 2)$: من الشكل $g(x) = f(x + a) + b$ حيث $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$ و منه (C_g) صورة (C_f)

بانسحاب شعاعه $\vec{u} = -2\vec{i}$.

✓ $h(x) = f(x) + 1$: من الشكل $h(x) = f(x + a) + b$ حيث $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ و منه (C_h) صورة (C_f)

بانسحاب شعاعه $\vec{u} = \vec{j}$.

✓ $k(x) = f(x - 2) + 1$: من الشكل $k(x) = f(x + a) + b$ حيث $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ و منه (C_k) صورة

(C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

✓ $u(x) = -f(x)$: من الشكل $u = \lambda f$ حيث $\lambda = -1$ ، و منه (C_u) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى

حامل محور الفواصل .

✓ $v(x) = |f(x)|$: إذا كان $f(x) \geq 0$ فإن $|f(x)| = f(x)$ و منه $v(x) = f(x)$ ، إذن لما

$f(x) \geq 0$ فإن (C_v) ينطبق على (C_f) .

إذا كان $f(x) \leq 0$ فإن $|f(x)| = -f(x)$ و منه $v(x) = -f(x)$ ، إذن لما $f(x) \leq 0$ فإن

(C_v) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

✓ $w(x) = f(|x|)$: $D_w = \mathbb{R}$ و هي مجموعة متناظرة بالنسبة إلى 0 ، و من أجل كل عدد حقيقي x

فإن : $w(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = w(x)$ أي $w(-x) = w(x)$ (لأن $|-x| = |x|$) و منه فالدالة w

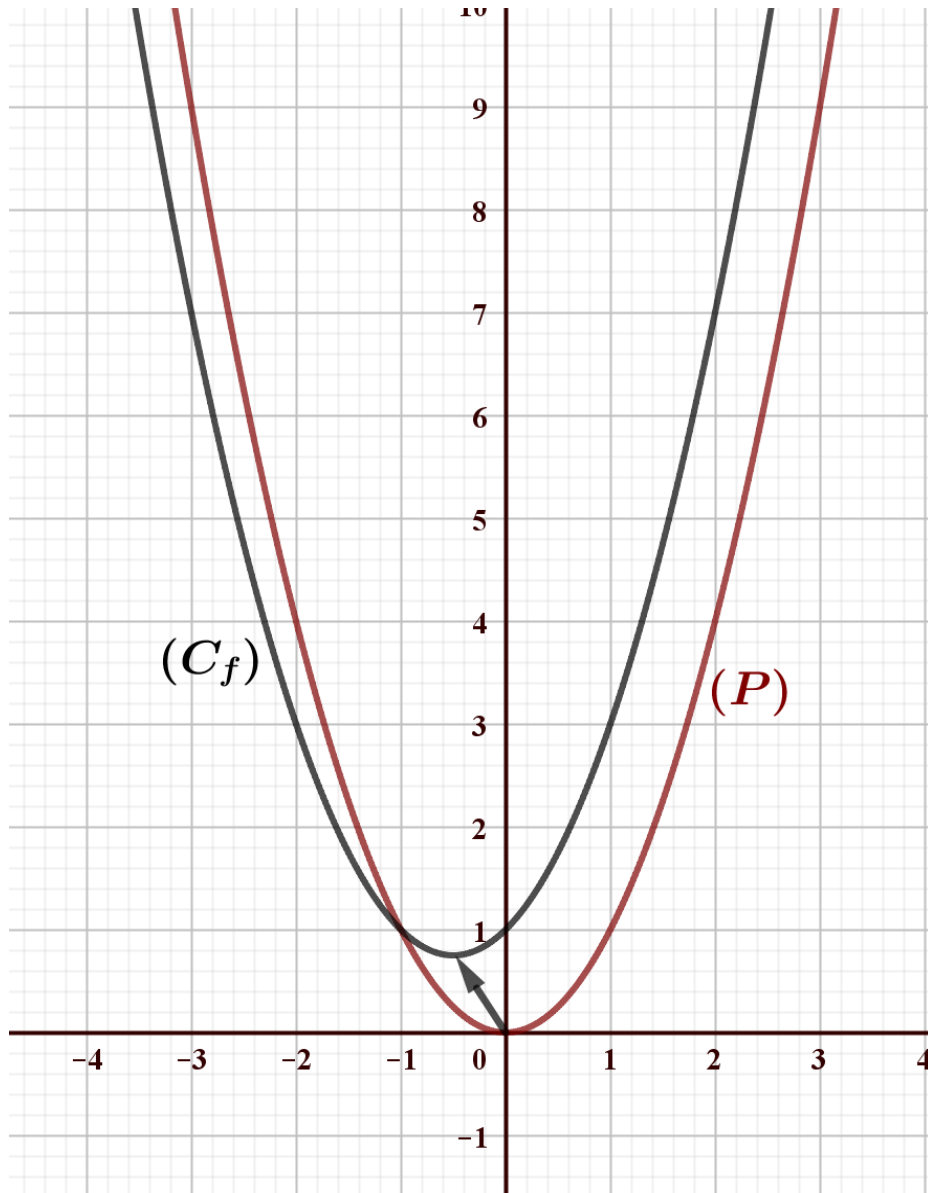
زوجية .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إذا كان $x \geq 0$: فإن $|x| = x$ و منه $w(x) = f(x)$ ، إذن لما $x \geq 0$ فإن (C_w) ينطبق على (C_f) .

و بما أن الدالة w زوجية فإنه لما $x \leq 0$ يكون (C_w) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الترتيب .

إنشاء (P) و (C_f) :



حل التمرين رقم 10 :

(1) إثبات بطريقتين مختلفتين أن النقطة $\Omega(a, b)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

$$\Omega(-1,1) \quad , \quad f(x) = \frac{x+2}{x+1} \quad -\text{أ}$$

طريقة 1 : من أجل كل $x \in D_f$ فإن $2(-1)-x \in D_f$ و $f(-2-x) + f(x) = 2(1)$

$x \in D_f$ معناه $x \neq -1$ و منه $-x \neq 1$ و منه $-2-x \neq -2+1$ أي $-2-x \neq -1$ و منه $-2-x \in D_f$

$$\text{من أجل كل } x \in D_f \text{ لدينا : } f(-2-x) + f(x) = \frac{-2-x+2}{-2-x+1} + \frac{x+2}{x+1}$$

$$: \text{أي } f(-2-x) + f(x) = \frac{-x}{-x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x+2}{x+1}$$

$$f(-2-x) + f(x) = \frac{2(x+1)}{x+1} \text{ أي } f(-2-x) + f(x) = 2 \text{ و منه من أجل } x \neq -1 \text{ ينتج}$$

و $f(2a-x) + f(x) = 2b$ من الشكل $f(2(-1)-x) + f(x) = 2(1)$ أي $f(-2-x) + f(x) = 2$

منه نستنتج أن النقطة $\Omega(-1;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

$$\Omega(1,2) \quad , \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-1} \quad -\text{ب}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{array} \right. \text{ حيث } (x_0; y_0) = (1; 2) \text{ و منه } \left\{ \begin{array}{l} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{array} \right. \text{ دساتير تغيير المعلم}$$

$$\text{لدينا : } y = \frac{2x-1}{x-1} \text{ و منه } 2+Y = \frac{2(1+X)-1}{1+X-1} \text{ أي } Y = \frac{2X+1-2X}{X} \text{ أي } Y = \frac{2X+1}{X} - 2$$

$$\text{و منه } Y = \frac{1}{X} \text{ و هي معادلة } (C_f) \text{ في المعلم الجديد } (\Omega; \vec{i}, \vec{j}) \text{ ، نضع من أجل كل } X \neq 0 :$$

$$g(X) = \frac{1}{X} \text{ و نثبت أن الدالة } g \text{ فردية :}$$

$$D_g = \mathbb{R}^* \text{ متناظرة بالنسبة إلى } 0 : X \in \mathbb{R}^* \text{ معناه } X \neq 0 \text{ و منه } -X \neq 0 \text{ ، إذن } -X \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{و من أجل كل } X \in D_g : g(-X) = \frac{1}{-X} = -\frac{1}{X} = -g(X) \text{ ؛ إذن الدالة } g \text{ فردية .}$$

الاستنتاج : $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

(2) إثبات بثلاث طرق مختلفة أن المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) :

أ- $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ، $x = -2$

طريقة 1 : إذا كان من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ و $f(2a - x) = f(x)$ فإن

المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) .

$D_f = \mathbb{R}$ و منه من أجل كل $x \in D_f$ فإن $-\infty < x < +\infty$ و منه $-\infty < -x < +\infty$ و منه

$-\infty < -4 - x < +\infty$ أي $-4 - x \in \mathbb{R}$ و منه $-4 - x \in D_f$ أي $2(-2) - x \in D_f$

و من أجل كل $x \in D_f$: $f(-4 - x) = (-4 - x)^2 + 4(-4 - x) + 3$

أي $f(-4 - x) = x^2 + 8x + 16 - 16 - 4x + 3$ أي $f(-4 - x) = x^2 + 4x + 3$ و منه ينتج :

$f(-4 - x) = f(x)$ ؛ إذن نستنتج أن المستقيم الذي $x = -2$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) .

ب- $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ ، $x = -3$

طريقة 2 : دساتير تغيير المعلم حيث $(x_0; y_0) = (-3, 1)$ و منه $\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y + 1 \end{cases}$

لدينا : $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ و منه $Y + 1 = \sqrt{(X - 3)^2 + 6(X - 3) + 10}$ أي $Y + 1 = \sqrt{X^2 + 1}$ و

منه $Y = \sqrt{X^2 + 1} - 1$ و هي معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ ،

نضع من أجل كل عدد حقيقي X : $g(X) = \sqrt{X^2 + 1} - 1$ و نثبت أن الدالة g زوجية :

$D_g = \mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 ، و من أجل كل $X \in D_g$:

$g(-X) = \sqrt{(-X)^2 + 1} - 1 = \sqrt{X^2 + 1} - 1 = g(X)$ ؛ إذن الدالة g زوجية .

الاستنتاج : المستقيم الذي $x = -3$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

طريقة 3 : إذا كان من أجل كل $x \in D_f$: $a+x \in D_f$ و $a-x \in D_f$ و $f(a-x) = f(a+x)$ فإن المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) .

$D_f = \mathbb{R}$ و منه من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $-3+x \in D_f$ و $-3-x \in D_f$

$f(-3-x) = \sqrt{(-3-x)^2 + 6(-3-x) + 10}$ أي $f(-3-x) = \sqrt{x^2 + 1}$ و من جهة أخرى :

$f(-3+x) = \sqrt{(-3+x)^2 + 6(-3+x) + 10}$ أي $f(-3+x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ؛ إذن من أجل كل $x \in D_f$

فإن : $-3+x \in D_f$ و $-3-x \in D_f$ و $f(-3-x) = f(-3+x)$

الاستنتاج : المستقيم الذي $x=-3$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) .

حل التمرين رقم 11 :

(C_f) ، (C_g) و (C_h) صور لمنحني الدالة "مربع" بإنسحاب شعاعه \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} على الترتيب كما هو موضح في الشكل أدناه .

(1) تعيين مركبتا كل من الأشعة \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} :

مركبتا كل شعاع من هذه الأشعة تساوي إحداثيي نقطة ذروة كل من المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (C_h) .

✓ المنحني (C_f) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(-2, -4)$ ، إذن شعاع الإنسحاب \vec{u} هو $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

✓ المنحني (C_g) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(-2, 0)$ ، إذن شعاع الإنسحاب \vec{v} هو $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

✓ المنحني (C_h) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(0, 1)$ ، إذن شعاع الإنسحاب \vec{w} هو $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) تعيين دستور الدوال f ، g و h :

دستور الدالة f يعطى من الشكل : $f(x) = (x+a)^2 + b$ حيث a ، b عدنان حقيقيان و (C_f) صورة

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ و من السؤال السابق ينتج :

$$\boxed{f(x) = (x+2)^2 - 3} \quad : \quad \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} -a=-2 \\ b=-3 \end{cases} \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ فإن } :$$

دستور الدالة g يعطى من الشكل : $g(x) = (x+\alpha)^2 + \beta$ حيث α ، β عدنان حقيقيان و (C_g) صورة

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و من السؤال السابق ينتج :

$$\boxed{g(x) = (x+2)^2} \quad : \quad \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=0 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} -\alpha=-2 \\ \beta=0 \end{cases} \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ فإن } :$$

دستور الدالة h يعطى من الشكل : $h(x) = (x+\gamma)^2 + \lambda$ حيث γ ، λ عدنان حقيقيان و (C_h) صورة

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{w} \begin{pmatrix} -\gamma \\ \lambda \end{pmatrix}$ و من السؤال السابق ينتج :

$$\boxed{h(x) = x^2 + 1} \quad : \quad \begin{cases} \gamma=0 \\ \lambda=1 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} -\gamma=0 \\ \lambda=1 \end{cases} \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ فإن } :$$

حل التمرين رقم 12 :

f ، g و h دوال معرفة كما يلي :

$$h(x) = 3x - 1 \quad \text{ و } \quad g(x) = 1 - \frac{1}{3x} \quad , \quad f(x) = 3x - \frac{1}{3x}$$

(1) تفكيك الدالة f إلى مجموع دالتين u و v يطلب تعيينهما :

إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على \mathbb{R}^* بـ : $u(x) = 3x$ و $v(x) = -\frac{1}{3x}$ فإن $f = u + v$.

(2) تعيين اتجاه تغير الدالتين u و v على المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة

f على كل من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$:

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

الدالة u خطية متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$ (لأن $a = 3 > 0$) و إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على

$]-\infty, 0[$ ب : $h(x) = \frac{1}{x}$ فإن $v = -\frac{1}{3}h$ و حيث أن الدالة h (دالة المقلوب) متناقصة تماما على

$]-\infty, 0[$ فإن الدالة v متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$ (لأن $-\frac{1}{3} < 0$) ، إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير

مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I فإن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$.

بنفس خطوات البرهان نبين أن الدالة f متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

(3) حساب و تبسيط : $\frac{f(x)}{g(x)}$

من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$ فإن :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 3x + 1 \quad \text{أي} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(3x-1)(3x+1)}{3x-1} \quad \text{أي} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - \frac{1}{3x}}{1 - \frac{1}{3x}} = \frac{\frac{9x^2 - 1}{3x}}{\frac{3x-1}{3x}} = \frac{9x^2 - 1}{3x-1}$$

(4) $D_h = \mathbb{R}$ لأن h دالة تألفية ، لكن $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$ ، إذن ليس للدالتين h و $\frac{f}{g}$ نفس مجموعة

التعريف ، و منه نستنتج أن : $h \neq \frac{f}{g}$.

حل التمرين رقم 13 :

ليكن x عدد حقيقي موجب و M النقطة من (C) التي فاصلتها x .

(1) التعبير عن AM بدلالة x :

$M(x, y)$ نقطة من (C) معناه أن إحداثيي النقطة M هما (x, \sqrt{x}) ، و حسب قانون المسافة بين نقطتين

$$\text{فإن : } AM = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \quad \text{أي} \quad AM = \sqrt{(x - 2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} \quad \text{و منه نجد :}$$

$$AM = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

(2) لتكن f الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

أ- تحديد العلاقة الموجودة بين AM و $f(x)$:

$AM = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ و منه $AM^2 = x^2 - 3x + 4$ أي $AM^2 = x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ و منه

$AM^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ و منه نستنتج أن : $AM^2 = f(x)$ أي $AM = \sqrt{f(x)}$.

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها على المجال $[0, +\infty[$:

إذا اعتبرنا الدالة u المعرفة على $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ بـ : $u(x) = x - \frac{3}{2}$ حيث من أجل كل $x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ فإن

$x \leq \frac{3}{2}$ و منه $x - \frac{3}{2} \leq 0$ و منه $u(x) \leq 0$ أي $u(x) \in]-\infty, 0]$ ، و لتكن الدالة v المعرفة على

$]-\infty, 0]$ بـ : $v(x) = x^2 + \frac{7}{4}$ و منه يكون لدينا : $f = v \circ u$

الدالة u متزايدة تماما على $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ لأنها تالفية حيث $a = 1 > 0$ و الدالة v متناقصة تماما على

$]-\infty, 0]$ (لأن الدالة "مربع" متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$) ، للدالتين u و v إتجاهها تغير متعاكسين و

منه فالدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ ، إذن بصفة خاصة فالدالة f متناقصة تماما على $\left[0, \frac{3}{2}\right]$

بنفس الطريقة (مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين) نبين أن الدالة f متزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة f :

كتابة الأستاذ : جناش نبيل

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	4	$\frac{7}{4}$	

ج- إستنتاج إحداثيي النقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن :

نلاحظ من جدول التغيرات أن أصغر قيمة تأخذها الدالة f هي $\frac{7}{4}$ ، حيث من السؤال (2) نعلم أن :

$$AM = \sqrt{f(x)} \text{ و منه أصغر مسافة ممكنة هي } AM = \sqrt{\frac{7}{4}} \text{ أي } AM = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ من أجل الفاصلة } x = \frac{3}{2} .$$

$$\text{إستنتاج إحداثيي النقطة } M : \text{ بما أن } M \in (C) \text{ فإن إحداثيي } M \text{ هما } (x, \sqrt{x}) ; \text{ إذن } M\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) .$$

حل التمرين رقم 14 :

f الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = (x+1)(x-4)$$

$$(1) \text{ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ يكون : } f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

لدينا : $f(x) = (x+1)(x-4)$ و بالنشر ثم التبسيط نجد $f(x) = x^2 - 3x - 4$ أي

$$f(x) = x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \text{ و منه } f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \text{ و هو المطلوب .}$$

(2) شرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_f) للدالة f إنطلاقاً من التمثيل البياني للدالة "مربع" :

$$(C_f) \text{ صورة } (P) \text{ التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه } \vec{v} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{25}{4}\vec{j}$$

$$(3) \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ : } g(x) = f(|x|)$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

أ- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $g(x) = f(x)$

من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ لدينا : $|x| = x$ و منه $g(x) = f(x)$

ب- إثبات أن g دالة زوجية :

$D_g = \mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 : إذا كان $x \in D_g$ فإن $-x \in D_g$

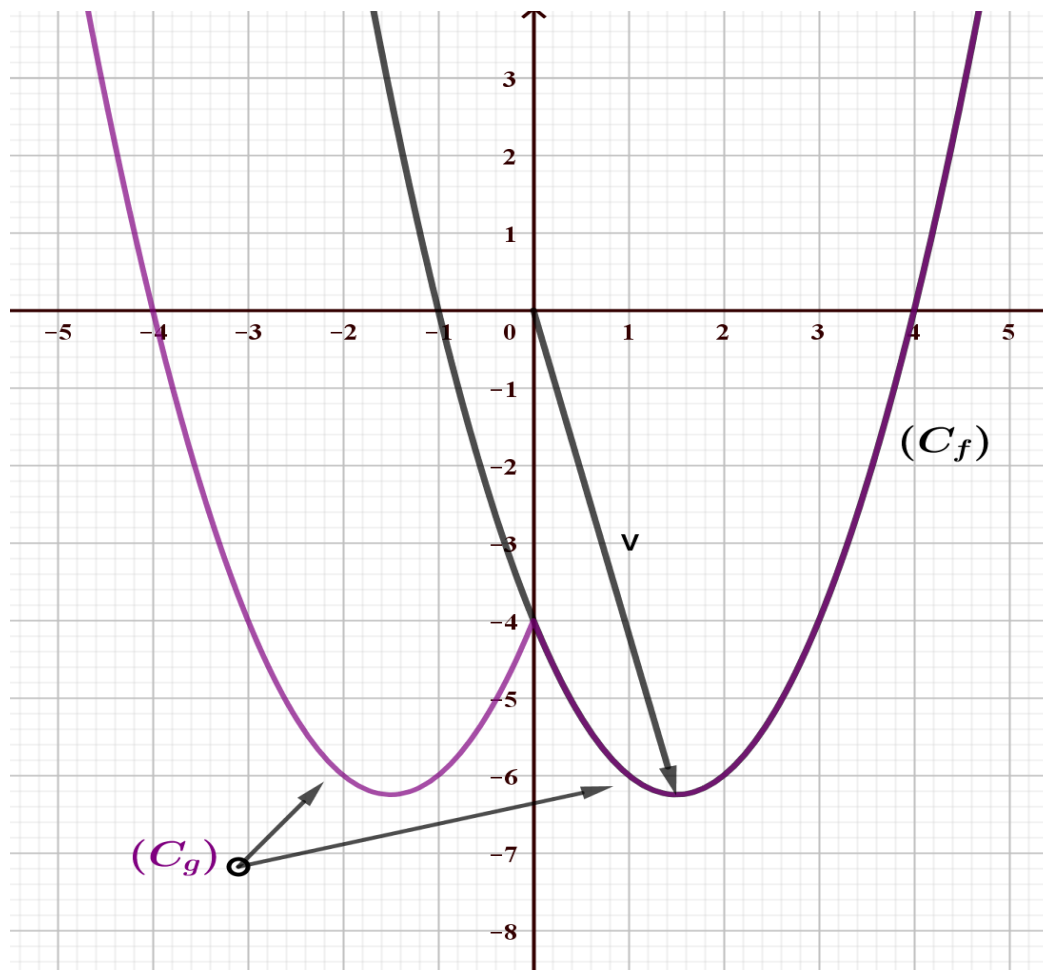
و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ لأن $|-x| = |x|$ أي $g(-x) = g(x)$ و منه فالدالة g زوجية .

ج- شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) التمثيل البياني للدالة g بالإعتماد على (C_f) :

➤ إذا كان $x \geq 0$ أي $x \in [0; +\infty[$ فإن $g(x) = f(x)$ و منه (C_g) ينطبق على (C_f) .

➤ و بما أن الدالة g زوجية فإنه لما $x \leq 0$ أي $x \in]-\infty; 0]$ فإن (C_g) نظير (C_f) (الواقع في

المجال $[0; +\infty[$) بالنسبة إلى محور الترتيب .



f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{5-x}{2x-6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تعيين إحداثيي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات :

مع حامل محور الفواصل (xx') : نحل المعادلة $f(x) = 0$: $f(x) = 0$ تكافئ $\frac{5-x}{2x-6} = 0$ تكافئ

$5-x=0$ و $2x-6 \neq 0$ ، تكافئ $x=5$ و $x \neq 3$ ؛ إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي

$S = \{5\}$ و منه المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 5 .

مع حامل محور الترتيب (yy') : نحسب $f(0)$ فنحصل على $f(0) = -\frac{5}{6}$ و منه المنحني (C_f) يقطع حامل

محور الترتيب في النقطة ذات الترتيب $-\frac{5}{6}$.

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 فإن : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3}$

$$x \neq 3 \text{ و منه من أجل كل } f(x) = \frac{5-x}{2x-6} = \frac{-x+3+2}{2(x-3)} = \frac{-(x-3)+2}{2(x-3)} = \frac{-(x-3)}{2(x-3)} + \frac{2}{2(x-3)}$$

فإن : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3}$ و هو المطلوب .

(3) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x-3}$

أ- إثبات أنه يمكن كتابة g على شكل مركب دالتين يطلب تعيينهما :

$$\text{لدينا : } g = v \circ u \text{ حيث } u(x) = x-3 \text{ و } v(x) = \frac{1}{x}$$

$$x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} \frac{1}{x-3}$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

▪ على المجال $]-\infty; 3[$: من أجل $x < 3$ فإن $x - 3 < 0$ أي $u(x) < 0$ معناه $u(x) \in]-\infty; 0[$

و الدالة u متزايدة تماما على $]-\infty; 3[$ (لأنها دالة تألفية حيث $a = 1 > 0$)

و بما أن الدالة v متناقصة تماما على $]-\infty; 0[$ (الدالة مقلوب) فإنه حسب مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين

فإن f متناقصة تماما على $]-\infty; 3[$.

(4) نبين أنه من أجل كل x حيث $3 < x < 5$ فإن : $f(x) > 0$

إذا كان $3 < x < 5$ فإن $0 < x - 3 < 2$ و منه $\frac{1}{x-3} > \frac{1}{2}$ و منه $-\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3} > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ أي $f(x) > 0$

و هو المطلوب .

(5) إثبات أن النقطة $\omega\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $x \neq 3$ و منه $-x \neq -3$ و منه $2(3) - x \in D_f$ أي $2(3) - x \neq 3$

و من أجل كل $x \in D_f$ لدينا $f(2(3) - x) + f(x) = \frac{5-6+x}{2(6-x)-6} + \frac{5-x}{2x-6} = \frac{x-1}{6-2x} + \frac{5-x}{2x-6}$

إذن ، $f(2(3) - x) + f(x) = \frac{-(2x-6)}{2x-6}$ أي $f(2(3) - x) + f(x) = \frac{1-x+5-x}{2x-6} = \frac{6-2x}{2x-6}$

• $f(2a-x) + f(x) = 2b$ من الشكل $f(2(3) - x) + f(x) = -1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)$

الاستنتاج : النقطة $\omega\left(3; -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

(6) شرح كيفية إنشاء المنحني (C_f) :

لدينا من أجل كل $x \neq 3$: $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3}$ و هي من الشكل $f(x) = k(x-3) - \frac{1}{2}$ حيث k هي

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

دالة المقلوب ، إذن (C_f) صورة (H) التمثيل البياني للدالة "مقلوب" بالإنسحاب الذي شعاعه

$$\vec{v} = 3\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

(7) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m$:

حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات الأفقية (d_m) الموازية لحامل محور الفواصل و التي $y = m$ معادلة لها .

✓ إذا كان $m < -\frac{5}{6}$ أي $m \in]-\infty; -\frac{5}{6}[$ فإن المستقيم (d_m) الذي $y = m$ يقطع المنحني (C_f) في

نقطة وحيدة فاصلتها موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

✓ إذا كان $m = -\frac{5}{6}$ فإن المستقيم $(d_{-\frac{5}{6}})$ يقطع المنحني (C_f) في النقطة ذات الإحداثيات $(0; -\frac{5}{6})$ و

بالتالي المعادلة $f(x) = -\frac{5}{6}$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل معدوم .

✓ إذا كان $-\frac{5}{6} < m \leq -\frac{1}{2}$ أي $m \in]-\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}]$ فإن المستقيمات (d_m) لا تقطع المنحني (C_f) و

بالتالي المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حولا .

✓ إذا كان $m > -\frac{1}{2}$ أي $m \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$ فإن المستقيمات (d_m) تقطع المنحني (C_f) في نقطة وحيدة

ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

(بالأخص من أجل $m = 0$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع حامل محور الفواصل $(y = 0)$ في نقطة وحيدة فاصلتها هي $x = 5$) .

حل التمرين رقم 16 :

$f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$ الدالة المعرفة كما يلي :

(1) أ- تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x-1 \neq 0$ و منه $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

ب- تعيين العددين الحقيقيين α ، β بحيث من أجل كل x من D_f يكون : $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$

لدينا : $f(x) = \frac{2x+6}{x-1} = \frac{2x-2+8}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{8}{x-1}$ و منه من أجل كل $x \neq 1$ فإن :

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 8 \end{cases} : \text{ إذن نجد : } f(x) = 2 + \frac{8}{x-1}$$

ج- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]1, +\infty[$ و $]-\infty, 1[$:

باتباع المخطط : $x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} 2 + \frac{8}{x-1}$ ينتج : $f = v \circ u$ حيث

$$u(x) = x-1 \text{ و } v(x) = 2 + \frac{8}{x}$$

✓ على المجال $]1, +\infty[$: لدينا $x > 1$ و منه $x-1 > 0$ أي $u(x) > 0$ معناه $u(x) \in]0, +\infty[$

و الدالة u متزايدة تماما على $]1, +\infty[$

و بما أن الدالة v متناقصة تماما على $]0, +\infty[$ لأن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $]0, +\infty[$

فإنه حسب مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين فالدالة f متناقصة تماما على $]1, +\infty[$.

✓ على المجال $]-\infty, 1[$: لدينا $x < 1$ و منه $x-1 < 0$ أي $u(x) < 0$ معناه $u(x) \in]-\infty, 0[$

و الدالة u متزايدة تماما على $]-\infty, 1[$

و بما أن الدالة v متناقصة تماما على $]0, +\infty[$ لأن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $]0, +\infty[$

فإنه حسب مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين فالدالة f متناقصة تماما على $]-\infty, 1[$.

(2) نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{x-1}}$

أ- تعيين D_g مجموعة تعريف الدالة g :

تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $\frac{2x+6}{x-1} \geq 0$ و $x-1 \neq 0$ أي $\frac{2x+6}{x-1} \geq 0$ مع $x \neq 1$:

لتحديد قيم x حيث $\frac{2x+6}{x-1} \geq 0$ نستعمل جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$2x + 6$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x + 6}{x - 1}$	$+$	0	$-$	$+$

إذن من جدول الإشارة نجد : $D_g =]-\infty; -3] \cup]1; +\infty[$

ب- تفكيك الدالة g إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما :

باتباع المخطط : $g = v \circ f$ ينتج $x \xrightarrow{f} \frac{2x+6}{x-1} \xrightarrow{v} \sqrt{\frac{2x+6}{x-1}}$

حيث $v(x) = \sqrt{x}$ " دالة الجذر التربيعي "

ج- استنتاج اتجاه تغير الدالة g على المجالين $]-\infty; -3]$ و $]1; +\infty[$:

✓ على $]-\infty; -3]$: من أجل كل $x \in]-\infty; -3]$ فإن $x \leq -3$ و منه $x-1 \leq -4$ و منه

$-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} < 0$ و منه $-2 \leq \frac{8}{x-1} < 0$ و منه $0 \leq 2 + \frac{8}{x-1} < 2$ أي $0 \leq f(x) < 2$ معناه

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$f(x) \in [0;2[$ حيث أن الدالة v متزايدة تماما على $[0;2[$ و بما أن f متناقصة تماما على

$]-\infty;-3]$ فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فإن g متناقصة تماما على $]-\infty;-3]$.

✓ على $]1;+\infty[$: من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ فإن $x > 1$ و منه $x-1 > 0$ و منه $\frac{1}{x-1} > 0$ و منه

$\frac{8}{x-1} > 0$ و منه $2 + \frac{8}{x-1} > 2$ أي $f(x) > 2$ معناه $f(x) \in]2;+\infty[$ حيث أن الدالة v متزايدة

تماما على $]2;+\infty[$ و بما أن f متناقصة تماما على $]1;+\infty[$ فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب

دالتين فإن g متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

حل التمرين رقم 17 :

I- f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{x-1}$

✓ نبين أن : $(f \circ f)(x) = x$ ثم استنتاج قيمة $(f \circ f \circ f)(2)$:

من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ فإن : $f \circ f(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{x}{1} = x$

إذن $(f \circ f \circ f)(2) = f \circ f(f(2)) = f(2)$ و منه $(f \circ f \circ f)(2) = 2$

II- لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = \alpha x + \beta$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^*$ و $\beta \in \mathbb{R}$

✓ تعريف الدالة $g \circ g$:

$D_{g \circ g} = \mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$g \circ g(x) = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta$ و منه $g \circ g(x) = g[g(x)] = \alpha(g(x)) + \beta = \alpha(\alpha x + \beta) + \beta$

✓ تعيين الثنائية $(\alpha; \beta)$ التي من أجلها يكون : $g \circ g = g$

$D_{g \circ g} = D_g = \mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $g \circ g(x) = g(x)$ معناه

$\alpha^2 x + \alpha\beta + \beta = \alpha x + \beta$ ، إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $(\alpha^2 - \alpha)x + \alpha\beta = 0$ و منه ينتج :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} : \text{ حيث نعلم أن } \alpha \neq 0 \text{ و منه ينتج : } \begin{cases} \alpha(\alpha - 1) = 0 \\ \alpha\beta = 0 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \alpha^2 - \alpha = 0 \\ \alpha\beta = 0 \end{cases}$$

نتيجة : $(\alpha; \beta) = (1; 0)$ و منه $g \circ g = g$ من أجل : $g(x) = x$

حل التمرين رقم 18 :

(1) تحديد إشارة $f(x)$ على المجال $[-3; 4]$:

x	-3	-1	2	4
$f(x)$	+	0	-	+

(2) تعيين مجموعة تعريف كل من الدوال g ، h ، k و u :

$$D_h = D_f = [-3; 4] \text{ ، } D_g = D_f = [-3; 4] \text{ و تكون الدالة } k \text{ معرفة إذا و فقط إذا كان المقام}$$

$$f(x) \neq 0 \text{ حيث من جدول الإشارة نلاحظ أن : } f(x) = 0 \text{ من أجل } x = -1 \text{ أو من أجل } x = 2$$

$$\text{إذن : } D_k = [-3; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; 4]$$

و تكون الدالة u معرفة إذا و فقط إذا كان $f(x) \geq 0$ ، و من جدول إشارة الدالة f نجد :

$$D_u = [-3; -1] \cup [2; 4]$$

(3) باستعمال اتجاه تغير مركب دالتين ، تشكيل جدول تغيرات الدوال g ، h ، k و u :

g هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة "مربع" :

➤ إذا كان $x \in [-3; -1]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [0; 4]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع"

متزايدة تماما على $[0; 4]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" اتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة g

متناقصة تماما على $[-3; -1]$.

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

- إذا كان $x \in [-1;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [-1;0]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متناقصة تماما على $[-1;0]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" نفس اتجاه التغير و منه الدالة g متزايدة تماما على $[-1;0]$.
- إذا كان $x \in [0;2]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x) \in [-1;0]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متناقصة تماما على $[-1;0]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة g متناقصة تماما على $[0;2]$.
- إذا كان $x \in [2;3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x) \in [0;5]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متزايدة تماما على $[0;5]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" نفس اتجاه التغير و منه الدالة g متزايدة تماما على $[2;3]$.
- إذا كان $x \in [3;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [2;5]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متزايدة تماما على $[2;5]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة g متناقصة تماما على $[3;4]$.
- جدول تغيرات الدالة g : $g(-3) = [f(-3)]^2 = 4^2 = 16$

x	-3	-1	0	2	3	4
$g(x)$	16		1		25	4

بما أن $h = -f$ ($\lambda = -1 < 0$) فإن للدالتين f و h إتجاهها تغير متعاكسين حيث :

- إذا كان $x \in [-3;0]$ أو $x \in [3;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما و منه فالدالة h متزايدة تماما على كل من المجالين $[-3;0]$ و $[3;4]$.
- إذا كان $x \in [0;3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما و منه فالدالة h متناقصة تماما على $[0;3]$.

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

➤ جدول تغيرات الدالة h : $h(-3) = -f(-3) = -4$ ، $h(-1) = -f(-1) = 0$

x	-3	-1	0	2	3	4
$h(x)$	-4	0	1	0	-5	-2

k هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة "مقلوب" :

➤ إذا كان $x \in [-3; -1[$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in]0; 4]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب"

متناقصة تماما على $]0; 4]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس اتجاه التغير و منه الدالة k

متزايدة تماما على $[-3; -1[$.

➤ إذا كان $x \in]-1; 0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [-1; 0[$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب"

متناقصة تماما على $[-1; 0[$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس اتجاه التغير و منه الدالة k

متزايدة تماما على $] -1; 0]$.

➤ إذا كان $x \in [0; 2[$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x) \in [-1; 0[$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب"

متناقصة تماما على $[-1; 0[$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة

k متناقصة تماما على $[0; 2[$.

➤ إذا كان $x \in]2; 3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x) \in]0; 5]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب"

متناقصة تماما على $]0; 5]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" إتجاهها تغير متعاكسين و منه الدالة k

متناقصة تماما على $]2; 3]$.

➤ إذا كان $x \in [3; 4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [2; 5]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب"

متناقصة تماما على $[2; 5]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس اتجاه التغير و منه الدالة k

متزايدة تماما على $[3; 4]$.

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

➤ جدول تغيرات الدالة k : $k(-3) = \frac{1}{f(-3)} = \frac{1}{4}$ ، $k(0) = \frac{1}{f(0)} = -1$

x	-3	-1	0	2	3	4
$k(x)$	$\frac{1}{4}$		-1		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

u هي مركب الدالة f متبوعة بدالة "الجذر التربيعي" :

➤ إذا كان $x \in [-3; -1]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [0; 4]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر

التربيعي" متزايدة تماما على $[0; 4]$ ؛ إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" إتجاهها تغير متعاكسين

و منه الدالة u متناقصة تماما على $[-3; -1]$.

إذا كان $x \in [2; 3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x) \in [0; 5]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر

التربيعي" متزايدة تماما على $[0; 5]$ ؛ إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" نفس إتجاه التغير و منه

الدالة u متزايدة تماما على $[2; 3]$.

➤ إذا كان $x \in [3; 4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x) \in [2; 5]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر

التربيعي" متزايدة تماما على $[2; 5]$ ؛ إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" إتجاهها تغير متعاكسين

و منه الدالة u متناقصة تماما على $[3; 4]$.

➤ جدول تغيرات الدالة u : $u(-3) = \sqrt{f(-3)} = \sqrt{4} = 2$ ، $u(3) = \sqrt{f(3)} = \sqrt{5}$

x	-3	-1	2	3	4
$u(x)$	2 ↘ 0		0 ↗ $\sqrt{5}$ ↘ $\sqrt{2}$		

4) إنشاء (C_f) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، ثم استنتاج (C_h) و كذا المنحنيين (C_p) و (C_q) للدالتين p و q المعرفتين كما يلي :

$$q(x) = |f(x)| \quad ; \quad p(x) = f(-x)$$

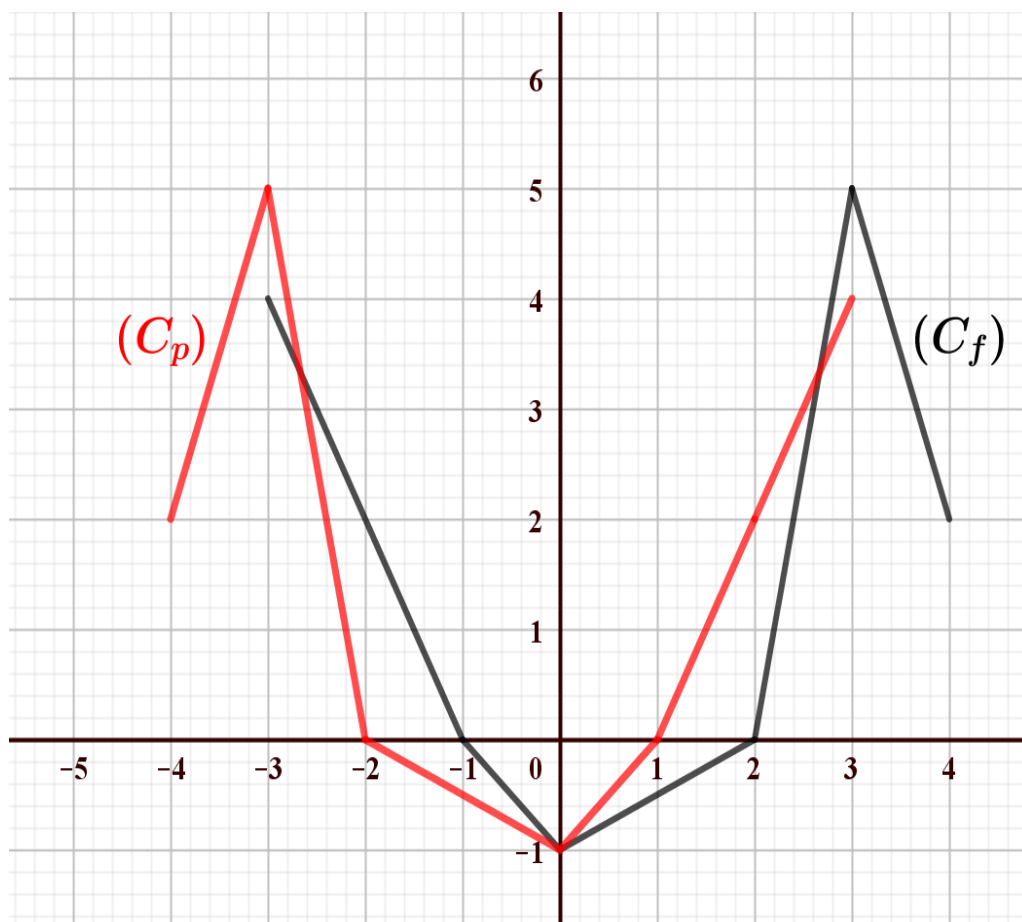
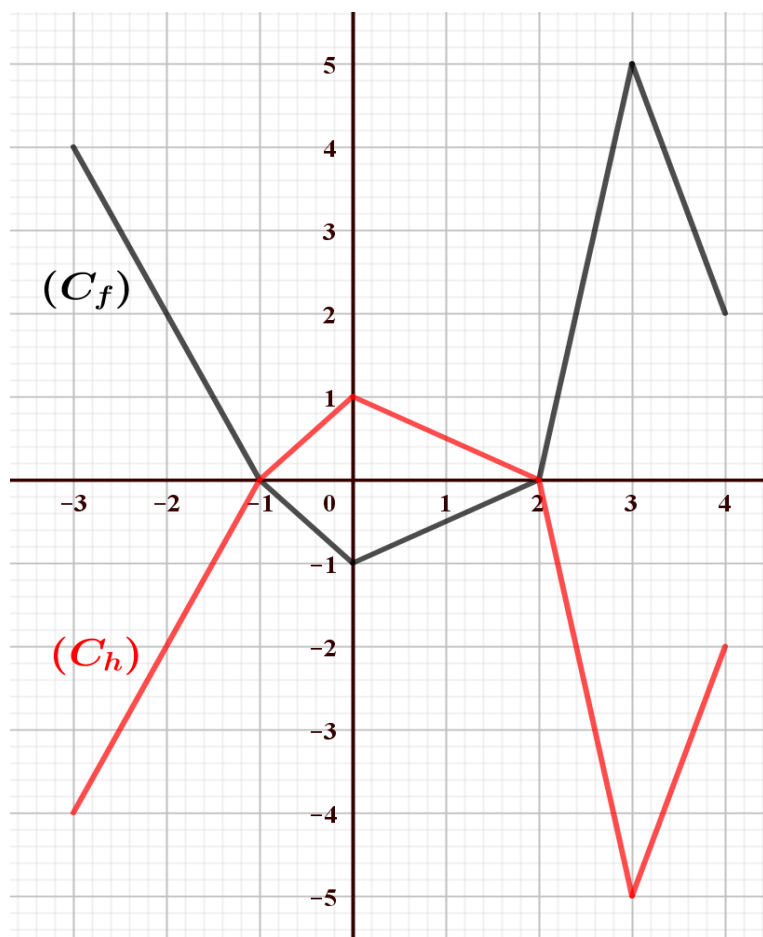
✓ (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

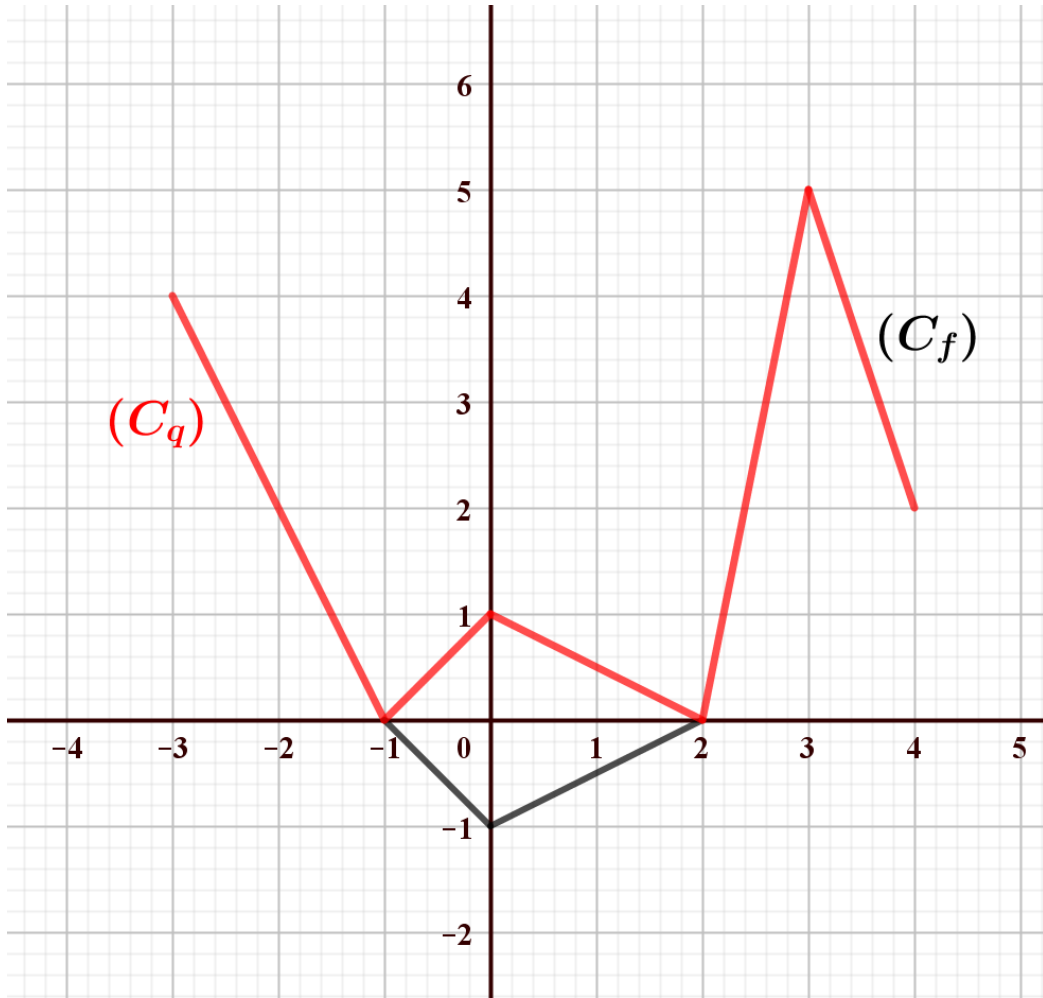
✓ (C_p) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب .

✓ لما $f(x) \geq 0$ فإن $|f(x)| = f(x)$ و منه $q(x) = f(x)$ ، إذن (C_q) ينطبق على (C_f) لما (C_f) يقع فوق محور الفواصل .

✓ لما $f(x) < 0$ فإن $|f(x)| = -f(x)$ و منه $q(x) = -f(x)$ ، إذن (C_q) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (لما (C_f) يقع تحت محور الفواصل) .

التمثيلات البيانية : (بالنسبة لإنشاء (C_f) نعتد فقط على جدول التغيرات)





لا تنسونا من صالح دعائكم