

السنة الثالثة تسيير و اقتصاد

المتاليات العددية

• ملخص مع أمثلة تطبيقية

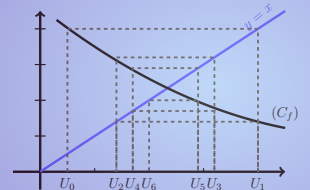
• اختبار معلوماتك

• حلول تمارين المتاليات في بكالوريا التسيير 2008-2025

• 42 تمرين محلول

• 18 تمرين مقترح

$$u_n = 7n + 4$$
$$u_n = 4n^2 + 4n$$



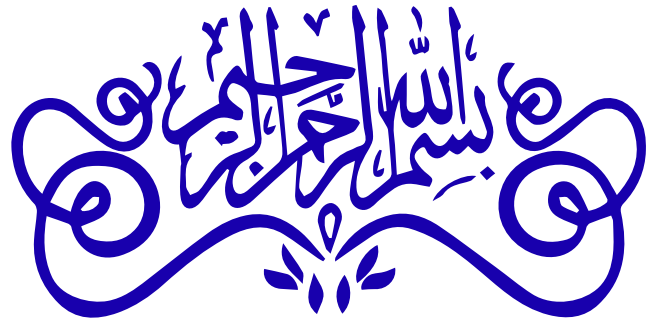
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(n) \end{cases}$$

إعداد الأستاذة:

• مباركة فاطمة

هذا العمل:
صدقة جارية على الأخ
"مصطفى. ش"
رحمه الله وطَّيَّب ثراه
ويرحم جميع موتانا
وموتى المسلمين





الى تلاميذ شعبة التسيير

لا تنتظروا من العالم أن يمنحكم مكانتكم، اصنعوها
أنتم بخطواتكم. أنتم طاقة قادرة على قلب الموازين،
فقط آمنوا أن تعب اليوم هو مجد الغد."

الاستاذة: مباركي

ملخص مع أمثلة طبية

- متتالية معطاه بعارة من الشكل: $u_n = f(n)$

يمكن تعريف متتالية بعارة صريحة (دستور) تسمح بحساب كل حد بدلالة n مباشرة

- متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

يمكن تعريف متتالية u بإعطاء الحد الأول وعلاقة تسمح بتعيين كل حد انطلاقا من الحد السابق وتسمى علاقة تراجعية

اتجاه تغير متتالية

لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

(1) ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$

(2) نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 (حدود المتتالية (u_n) من نفس الإشارة)

(3) إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n :
 $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

عموميات على المتتاليات

التقارب

• إذا كانت متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى $(u_n \leq a)$ فإن هذه المتتالية متقاربة.

• إذا كانت متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n \geq a)$ فإن هذه المتتالية متقاربة.

• المتتالية u_n متقاربة وتقتارب نحو العدد الحقيقي l معناه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

البرهان بالتراجع

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n . n_0 عدد طبيعي.

لبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي:

1. تتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n أكبر من أو يساوي n_0

أي n_0 P (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$

حساب الحدود

مثال تطبيقي 01

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 4n - 3$

• احسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_5 و u_{80}

الاجابة

• حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_5 و u_{80}

$$u_5 = 4(5) - 3 = 20 - 3 = 17 \quad , \quad u_1 = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1 \quad , \quad u_0 = 4(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$u_{80} = 4(80) - 3 = 320 - 3 = 317$$

مثال تطبيقي 02

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 6 \times 2^n$

احسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_4 و u_7

الاجابة

• حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_4 و u_7

$$u_7 = 6 \times 2^7 = 768 \quad , \quad u_4 = 6 \times 2^4 = 96 \quad , \quad u_1 = 6 \times 2^1 = 6 \times 2 = 12 \quad , \quad u_0 = 6 \times 2^0 = 6 \times 1 = 6$$

مثال تطبيقي 03

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \frac{1}{2n+3} - 4$

- احسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{10}

الاجابة

• حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{10}

$$u_1 = \frac{1}{2(1)+3} - 4 = \frac{1}{5} - 4 = \frac{1}{5} - \frac{4 \times 5}{5} = \frac{-19}{5} \quad , \quad u_0 = \frac{1}{2(0)+3} - 4 = \frac{1}{3} - 4 = \frac{1}{3} - \frac{4 \times 3}{3} = \frac{1-12}{3} = \frac{-11}{3}$$

$$u_{10} = \frac{1}{2(10)+3} - 4 = \frac{1}{23} - 4 = \frac{1}{23} - \frac{4 \times 23}{23} = \frac{-91}{23} \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2(2)+3} - 4 = \frac{1}{7} - 4 = \frac{1}{7} - \frac{4 \times 7}{7} = \frac{-27}{7}$$

مثال تطبيقي 04

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ —حدها الأول: $u_0 = -2$ وبالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = 2u_n + 3$

- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

الاجابة

• حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5 \quad , \quad u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times (-1) + 3 = 1 \quad , \quad u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times (-2) + 3 = -1$$

مثال تطبيقي 05

تكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -3n^2 + 1$.

(1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20} .

(2) أكتب بدلالة n الحدود u_{2n} ، u_{n+1} .

الاجابة

(1) حساب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20} .

$$u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199 \quad , \quad u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11 \quad , \quad u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2 \quad , \quad u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$$

(2) كتابة بدلالة n الحدود u_{2n} ، u_{n+1} .

$$u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1 \quad , \quad u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$$

مثال تطبيقي 06

نعتبر المتتالية u_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + 5}$.

- بين المتتالية u_n متقاربة.



الاجابة

نلاحظ أن $u_n = f(x)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ نستنتج أن المتتالية u_n متقاربة وبتقارب نحو العدد 2

مثال تطبيقي 07

نعتبر المتتالية u_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = 2n + \frac{1}{n+2}$.

هل المتتالية u_n متقاربة؟

الاجابة

نلاحظ أن $u_n = f(x)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = 2x + \frac{1}{x+2}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$. نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وبالتالي فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

نستنتج أن المتتالية u_n غير متقاربة.

مثال تطبيقي 08

u_n و (v_n) متتاليتين عدديتين معرفتين كما يلي: $u_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 7$ ، $v_n = -6 \times 9^n + 8$.

احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. ماذا تستنتج؟

الاجابة

حساب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [-6 \times 9^n + 8] = -\infty ، \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 7 \right] = -7$$

نستنتج أن: المتتالية u_n متقاربة والمتتالية (v_n) متباعدة



اتجاه التغير

مثال تطبيقي 01

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = n^2 - n$.

• ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

الاجابة

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = 2n \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - (n+1)] - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $2n \geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$. إذا: المتتالية (u_n) متزايدة.

مثال تطبيقي 02

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ، ادرس اتجاه تغيرها في كل حالة:

$$1) u_n = -2n + 3$$

$$2) u_n = (n+5)^2$$

$$3) u_n = 5 \times 4^n$$

$$4) u_{n+1} = u_n + 2n \text{ و } u_0 = 2$$

الاجابة

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) في كل حالة:

$$1) u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n + 3) = -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2 < 0$$

$$2) u_{n+1} - u_n = (n+1+5)^2 - (n+5)^2 = n^2 + 12n + 36 - n^2 - 10n - 25 = 2n + 11 > 0$$

3) طريقة 01:

$$\text{لدينا: } 1 < 4 = \frac{5 \times 4^{n+1}}{5 \times 4^n} \text{ و } u_0 = 5 \times 4^0 = 5 > 0 \text{ ومنه: المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{N}$$

طريقة 02:

$$u_{n+1} - u_n = 5 \times 4^{n+1} - 5 \times 4^n = 5 \times 4^n (4 - 1) = 5 \times 4^n \times 3 = 15 \times 4^n > 0$$

$$4) \text{ لدينا: } u_{n+1} = u_n + 2n \text{ ومنه: } u_{n+1} - u_n = 2n > 0 \text{ ومنه: المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{N}$$

البرهان بالتراجع

مثال تطبيقي 01

(u_n) متتالية حدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

(1) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(2) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 ($u_n \geq -2$) ما ذا تستنتج؟



الاجابة

(1) البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة معناه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} - u_n \leq 0$).

- لدينا $u_1 = \frac{1}{2} \times 4 - 1 = 1$ ومنه: $u_1 \leq u_0$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_{n+1} \leq u_n$.

- ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1} \leq u_n$ ومنه: $\frac{1}{2}u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}u_n - 1$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ومنه: فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$. ومنه المتتالية (u_n) متناقصة.

(2) البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 ($u_n \geq -2$)

لدينا $u_0 = 4$ ومنه: $u_0 \geq -2$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n : أي $u_n \geq -2$

ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \geq -2$.

لدينا $u_n \geq -2$ ومنه: $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq \frac{1}{2}(-2) - 1 = -2$ أي $u_{n+1} \geq -2$ ومنه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq -2$ ومنه: المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 .

مثال تطبيقي 02

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بجدها الأول $u_0 = \alpha$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(1) نضع $\alpha = 3$

- برهن بالتراجع ان المتتالية (u_n) ثابتة

(2) نضع $\alpha = 2$

- برهن بالتراجع ان $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

الاجابة



(1) نضع $\alpha = 3$ ، البرهان بالتراجع ان المتتالية (u_n) ثابتة

لدينا: $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3}(3) + 2 = 3$ ومنه: $u_1 = u_0 = 3$ إذا: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n : أي $u_n = 3$ ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$.

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ ومنه $u_{n+1} = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

إذا: حسب مبدأ البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . إذن (u_n) ثابتة.

(2) نضع $\alpha = 2$ ، البرهان بالتراجع ان $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

لدينا: $u_0 = -\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3 = -1 + 3 = 2$ ومنه: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n : أي $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي: $u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ ومنه: $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] + 2 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 1 + 2 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$ ومنه: $u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

إذا: حسب مبدأ البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي أي: $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

المتتاليات الحسابية

المتتاليات الحسابية	
التعريف	من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$
عبارة الحد العام	الحد الأول: $u_0 \leftarrow u_n = u_0 + nr$ الحد الأول: $u_1 \leftarrow u_n = u_1 + (n-1)r$ الحالة العامة: $u_n = u_p + (n-p)r$
اتجاه التغير	$r < 0$: المتتالية متناقصة، $r > 0$: المتتالية متزايدة، $r = 0$: المتتالية ثابتة
خاصية ثلاثة حدود متتابعة	a, b, c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية بهذا الترتيب تكافئ: $2b = a + c$
مجموع حدود متتابعة	$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ $S = \text{الحدود عدد} \times \frac{\text{الحد الاول} + \text{الحد الاخير}}{2}$

عدد الحدود = الدليل الأخير - الدليل الأول + 1



مثال تطبيقي 01

- لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -7n + 12$.
- أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
 - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

الاجابة

- اثبات أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$u_{n+1} - u_n = -7(n+1) + 12 - (-7n + 12) = -7$$

ومنه المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -7$ وحدها الأول $u_0 = -7(0) + 12 = 12$

- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $r = -7 < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

مثال تطبيقي 02

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -3n + 2$.

- (1) أحسب u_0 و u_1 .
- (2) أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .
- (3) أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

الاجابة

- (1) حساب u_0 و u_1 .

$$u_1 = -3(1) + 2 = -1 \quad \text{و} \quad u_0 = -3(0) + 2 = 2$$

- (2) اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .

لدينا $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$ ومنه المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

- (3) حساب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

$$S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2} \quad \text{ومنه} \quad S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2-3n+2}{2}$$

مثال تطبيقي 03

(v_n) متتالية حسابية حيث: $v_4 = 5$ و $v_8 = 7$.

- (1) عين أساس المتتالية وحدها الأول v_0 .
- (2) أحسب v_n بدلالة n . ثم عين العدد الطبيعي n حيث: $v_n = 50$.

الاجابة

(1) تعيين أساس المتتالية وحدها الأول v_0 .

لدينا: $v_4 = v_0 + \frac{1}{2}(4)$ ومنه : $v_0 = 5 - 2 = 3$

$$r = \frac{v_8 - v_4}{8 - 4} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(2) عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 + nr = 3 + \frac{1}{2}n$$

تعيين العدد الطبيعي n حيث: $v_n = 50$.

$v_n = 50$ تعني: $3 + \frac{1}{2}n = 50$ ومنه: $\frac{1}{2}n = 47$ إذا: $n = 47 \times 2 = 94$

مثال تطبيقي 04

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين على الترتيب: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$ ، $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) .

الاجابة

(1) اثبات أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n = -5n - 1$ و $v_{n+1} - v_n = -5(n+1) - 1 - (-5n - 1) = -5$

ومن المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 3 - 5(0) - 1 - 3 = -1$

(2) كتابة v_n بدلالة n ثم حساب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) .

- من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = -1 - 5n$.

- $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2} (5 + 5 - 5n) = \frac{n}{2} (-2 - 5n)$

مثال تطبيقي 05

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $r = -2$ ، وحدها الأول $u_0 = 204$.

• أحسب $S = u_{10} + u_{11} + \dots + u_{216} + u_{217}$.

الاجابة

عدد الحدود هو: $217 - 10 + 1 = 208$.لدينا: $u_{10} = u_0 + 10r = 204 - 20 = 184$ و $u_{217} = u_0 + 217(-2) = -230$ ومنه:

$$S = \frac{208}{2}(u_{10} + u_{217})$$

$$= 104(184 - 230)$$

$$= -4784$$

مثال تطبيقي 06

(1) متتالية حسابية حدها الأول u_1 .(2) احسب حدها الثاني u_2 علما أن: $u_1 + u_3 = 12$.(3) احسب الحد الرابع u_4 علما أن: $u_3 + u_4 + u_5 = 30$.(4) عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1 .(5) اكتب الحد العام u_n بدلالة n .

الاجابة

(1) حساب حدها الثاني u_2 علما أن: $u_1 + u_3 = 12$.

$$u_2 = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{ومنه:} \quad u_1 + u_3 = 2u_2 = 12$$

(2) حساب الحد الرابع u_4 علما أن: $u_3 + u_4 + u_5 = 30$.لدينا حسب خاصية الوسط الحسابي: $u_3 + u_5 = 2u_4$

$$u_4 = \frac{30}{3} = 10 \quad \text{ومنه:} \quad u_3 + u_4 + u_5 = 30 \quad \text{تعني:} \quad u_4 + 2u_4 = 30 \quad \text{ومنه:} \quad 3u_4 = 30$$

(3) تعيين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1 .

$$u_1 = u_2 - r = 6 - 2 = 4$$

$$r = \frac{u_4 - u_2}{4 - 2} = \frac{10 - 6}{2} = 2$$

(4) كتابة الحد العام u_n بدلالة n لدينا: $u_n = u_p + (n - p)r$ ومنه: $u_n = u_1 + (n - 1)(2)$ ومنه: $u_n = 4 + (n - 1)(2)$

$$u_n = 2 + 2n \quad \text{إذًا:} \quad u_n = 4 + 2n - 2$$

المتتاليات الهندسية

المتتاليات الهندسية	
من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$	التعريف
الحد الأول: $u_0 \leftarrow u_0 \times q^n$ الحد الأول: $u_1 \leftarrow u_1 \times q^{n-1}$ الحالة العامة: $u_n = u_p \times q^{n-p}$	عبرة الحد العام
a, b, c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية بهذا الترتيب تكافئ: $b^2 = a \times c$	خاصية ثلاثة حدود متتابعة
• إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. • إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة. • إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة. • إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. • إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة. • إذا كان $q < 0$ فإن الفرق $u_{n+1} - u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة ومنه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.	اتجاه التغير
$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ عدد الحدود $S = \text{الحد الاول} \times \frac{1 - \text{الأساس}}{1 - \text{الأساس}}$	مجموع حدود متتابعة



مثال تطبيقي 01

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$.

(1) أحسب v_2 و v_3 .

(2) أكتب بدلالة n ، الحد العام v_n .

(3) أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

الاجابة

(1) حساب v_2 و v_3 .

$$v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$$

$$v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$$

(2) عبارة الحد العام

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$$

$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \quad (3) \quad \text{ومنه: } S = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -3(1-2^n) = 3(2^n - 1)$$

مثال تطبيقي 02

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

(2) ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

الاجابة

(1) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3 \times 3^n}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} v_n \quad \text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{3}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = \frac{1}{2}$$

(2) اتجاه تغير المتتالية (v_n)

$$\text{بما أن } \frac{3}{2} > 1 \text{ و } v_0 > 0 \text{ فإن المتتالية } (v_n) \text{ متزايدة} \quad \left(v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \right)^n > 0 \right)$$

مثال تطبيقي 03

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) معرفتين كإيلي على الترتيب: $u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = 4u_n + 6$ و $v_n = u_n + 2$.
• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

الاجابة

اثبات أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 4u_n + 8 = 4(u_n + 2) = 4v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 2 = 5$

مثال تطبيقي 04



(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $q = \frac{1}{2}$ ، و $u_5 = \frac{1}{32}$.

(1) أحسب u_{2007}

(2) أحسب $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{28} + u_{29}$.

الاجابة

(1) حساب u_{2007}

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

$$\text{إذًا: } u_{2007} = u_5 \times q^{2007-5} = \frac{1}{32} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2002} = \frac{1}{2^{2007}}$$

(2) حساب $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{28} + u_{29}$

$$\text{لدينا: } S = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \text{ و } u_5 = u_0 \times q^5 \text{ ومنه: } u_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 1$$

$$\text{ومنه: } S = 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \text{ إذًا: } S = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{30}} \right)$$

مثال تطبيقي 05

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : بـ: $u_0 + u_1 = 6$ و $u_0 \times u_2 = 16$

(1) أحسب u_1 ، u_0 والأساس q لهذه المتتالية

(2) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{n+1}$

الاجابة

(1) حساب u_1 ، u_0 والأساس q لهذه المتتالية

- لدينا: $u_0 \times u_2 = 16$ ومنه: حسب خاصية الوسط الهندسي نجد: $u_0 \times u_2 = u_1^2 = 16$ ومنه: $u_1 = \sqrt{16} = 4$

- لدينا: $u_0 + u_1 = 6$ ومنه: $u_0 + 4 = 6$ إذا: $u_0 = 6 - 4 = 2$

- نعلم أن: $u_1 = u_0 \times q$ ومنه: $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{2} = 2$

(2) تبين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{n+1}$

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$



اختبر معلوماتك

اختر الإجابة الصحيحة مع تبرير اختيارك في كل سؤال

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 2$ والعبارة: $u_{n+1} = (2\alpha - 1)u_n$ ، قيمة α حتى تكون (u_n) ثابتة هي:

$\alpha = 1$ ☐ c

$\alpha = -3$ ☐ b

$\alpha = 2$ ☐ a

(2) (u_n) متتالية معرفة بالعبارة: $u_n = -3^n + n$ إذا: $u_{n+1} - u_n = \dots\dots\dots$

$3^n + 1$ ☐ c

$-3^n + 1$ ☐ b

$-2(3)^n + 1$ ☐ a

(3) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 2$ هي متتالية

غير رتيبة ☐ c

متناقصة ☐ b

متزايدة ☐ a

(4) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2^n + 4$ إذا الحد السابع للمتتالية (v_n) هو:

260 ☐ c

68 ☐ b

132 ☐ a

(5) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$ إذا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots\dots\dots$

$+\infty$ ☐ c

4 ☐ b

0 ☐ a

(6) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 3n^2 - n + 1$ هي متتالية

لا نعلم ☐ c

متباعدة ☐ b

متقاربة ☐ a

(7) (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 7n - 1$ إذا: (w_n) هي متتالية:

حسابية ☐ c

لا هندسية ولا حسابية ☐ b

هندسية ☐ a

(8) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4 قيمة n التي من أجلها يكون $v_n = 2025$ هي

506 ☐ c

504 ☐ b

507 ☐ a

(9) (u_n) متتالية حسابية علم منها الحدان: $u_2 = 11$ و $u_8 = 41$ إذا عبارة u_n بدلالة n هي:

$u_n = 1 - 5n$ ☐ c

$u_n = 11 + 5n$ ☐ b

$u_n = 5n + 1$ ☐ a

(10) (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بجدها الأول $u_0 = -5$ و $u_4 + u_7 + u_{10} = 174$ إذا أساس المتتالية (u_n) هو:

9 ☐ c

-9 ☐ b

7 ☐ a

(11) (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_2 + u_3 + u_4 = 75$ و $u_5 + u_7 = 86$ إذا أساس المتتالية (v_n) هو:

-6 ☐ c

6 ☐ b

7 ☐ a

(12) a, b, c بهذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متناقصة أساسها r وتحقق: $b^2 = ac + 4$ إذا: $r = \dots\dots\dots$

-2 ☐ c

2 ☐ b

-3 ☐ a

(13) قيمة المجموع S حيث: $S = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \dots + 20$ هي:

605 ☐ c

1210 ☐ b

3630 ☐ a

(14) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 4^n$ إذا الحد الرابع للمتتالية هو:

2048 ☐ c

512 ☐ b

128 ☐ a

(15) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة بالحدين: $v_9 = 2560$ ، $v_7 = 640$ إذا أساس المتتالية (v_n) هو:

$q = 5$ ☐ c

$q = -2$ ☐ b

$q = 2$ ☐ a

(16) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $v_2 \times v_4 = 186624$ و $v_0 + v_3 = 434$ إذا أساس المتتالية (v_n) هو:

$q = 12$ ☐ c

$q = 6$ ☐ b

$q = 2$ ☐ a

(17) u_1, u_2, u_3 ثلاث حدود من متتالية عددية (u_n) إذا كان: $u_1 = -1$ ، $u_2 = \frac{5}{2}$ ، $u_3 = \frac{7}{3}$ إذا (u_n) هي متتالية....

حسابية ☐ c

لا هندسية ولا حسابية ☐ b

هندسية ☐ a

(18) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 5(-7)^n$ إذا (v_n) هي متتالية.....

غير رتيبة ☐ c

متناقصة ☐ b

متزايدة ☐ a

(19) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3^{-2n}$ إذا أساس المتتالية هو.....

$q = 9$ ☐ c

$q = -9$ ☐ b

$q = \frac{1}{9}$ ☐ a

(20) (u_n) متتالية هندسية حيث: $u_3 = 384$ و $u_0 = 6$ إذا عبارة u_n بدلالة n هي:

$$u_n = 6 \times 3^n \quad [c] \quad u_n = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad [b] \quad u_n = 6 \times 4^n \quad [a]$$

(21) (u_n) متتالية هندسية أساسها $q > 0$ وحدها الأول $u_0 = \frac{30}{7}$ إذا علمت أن: $u_0 + u_1 + u_2 = 30$ فإن: $q = \dots$

$$8 \quad [c] \quad 3 \quad [b] \quad 2 \quad [a]$$

(22) a, b, c اعداد حقيقية ولتكن $3c, 2b, a$ حدود متعاقبة من متتالية هندسية تحقق $a \times b \times c = \frac{32}{3}$ اذا: $b = \dots$

$$\sqrt{\frac{32}{3}} \quad [c] \quad 2 \quad [b] \quad 8 \quad [a]$$

(23) (u_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $u_0 = 3$ إذا قيمة المجموع: $S_n = u_0 + u_2 + \dots + u_{2n}$ هي:

$$-1 + 4^{n+1} \quad [c] \quad 1 - 4^{n+1} \quad [b] \quad 1 - 4^n \quad [a]$$

(24) أودع خالد مبلغ قدره 20000 DA في البنك بفائدة بسيطة قدرها 3% إذا بعد سنتين يصبح هذا المبلغ:

$$21218 \quad [c] \quad 21200 \quad [b] \quad 20600 \quad [a]$$

(25) وضع شخص مبلغ قدره 50000 DA في البنك بفائدة مركبة قدرها 2% إذا بعد ثلاث سنوات يصبح هذا المبلغ:

$$53060.4 \quad [c] \quad 50300 \quad [b] \quad [a] \text{ لا يمكن الحساب}$$

(26) قام أحمد بتأجير سكن لمدة 8 سنوات حيث يدفع 5000 DA في السنة الأولى ثم يزداد كل سنة بقيمة ثابتة قدرها 150DA إذا

ثمن الكرا لمدة 8 سنوات هو:

$$6200 \quad [c] \quad 6050 \quad [b] \quad 44200 \quad [a]$$



الاجابة

(1) الاختيار [c] لأن :

$$(u_n) \text{ متتالية ثابتة معناه: } u_{n+1} = u_n = u_0 = 2 \text{ ومنه: } 2 = (2\alpha - 1) \times 2 \text{ ومنه: } 2\alpha - 1 = 1 \text{ ومنه: } 2\alpha = 2 \text{ إذا: } \boxed{\alpha = 1}$$

(2) الاختيار [a] لأن:

$$u_{n+1} - u_n = (-3^{n+1} + n + 1) - (-3^n + n) = -3^{n+1} + n + 1 + 3^n - n = 3^n(-3 + 1) + 1 = -2 \times 3^n + 1$$

(3) الاختيار [a] لأن:

$$(u_n) \text{ متتالية متزايدة ومنه: } u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2 - (n^2 - 2) = n^2 + 2n + 1 - 2 - n^2 + 2 = 2n + 1 > 0$$

(4) الاختيار [b] لأن:

$$\boxed{v_6 = 2^6 + 4 = 68}$$

(5) الاختيار [b] لأن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 4 \right] = 4 \text{ إذا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = 0$$

(6) الاختيار [b] لأن:

$$(u_n) \text{ متتالية متباعدة ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^2 - n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 = +\infty$$

(7) الاختيار [c] لأن:

$$(w_n) \text{ حاسوبية أساسها } \boxed{r=7} \text{ ومنه: المتتالية } w_{n+1} - w_n = 7(n+1) - 1 - (7n - 1) = 7n + 7 - 1 - 7n + 1 = 7$$

(8) الاختيار [c] لأن:

$$\text{عبارة } v_n \text{ بدلالة } n \text{ هي: } \boxed{v_n = 1 + 4n}$$

$$v_n = 2025 \text{ تعني: } 1 + 4n = 2025 \text{ ومنه: } \boxed{n = \frac{2025 - 1}{4} = 506}$$

(9) الاختيار [a] لأن:

$$\text{لدينا: } \boxed{r = \frac{u_8 - u_2}{8 - 2} = \frac{41 - 11}{6} = 5} \text{ و } u_2 = u_0 + 5 \times 2 \text{ ومنه: } \boxed{u_0 = 11 - 10 = 1} \text{ إذا: } \boxed{u_n = 1 + 5n}$$

(10) الاختيار [c] لأن:

$$\text{لدينا: } u_4 + u_7 + u_{10} = 174 \text{ تعني: } u_0 + 4r + u_0 + 7r + u_0 + 10r = 174 \text{ ومنه: } 3u_0 + 21r = 174$$

$$\text{ومنه: } \boxed{r = \frac{174 - 3u_0}{21} = \frac{174 - 3(-5)}{21} = 9}$$

(11) الاختيار $[b]$ لأن:

لدينا: $u_2 + u_3 + u_4 = 75$ و $u_5 + u_7 = 86$ وحسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $u_2 + u_4 = 2u_3$ و $u_5 + u_7 = 2u_6$

$$\text{ومنه: } 2u_3 + u_3 = 75 \text{ ومنه: } 3u_3 = 75 \text{ إذا: } u_3 = \frac{75}{3} = 25$$

$$\text{ومنه: } u_5 + u_7 = 2u_6 = 86 \text{ ومنه: } u_6 = \frac{86}{2} = 43 \text{ إذا: } r = \frac{u_6 - u_3}{6 - 3} = \frac{43 - 25}{3} = 6$$

(12) الاختيار $[c]$ لأن:

a, b, c بهذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية معناه: $b = a + r$ و $c = b + r = a + 2r$ ولدينا: $b^2 = ac + 4$

$$\text{بالتعويض نجد: } (a + r)^2 = a(a + 2r) + 4 \text{ ومنه: } a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 2ar + 4 \text{ ومنه: } r^2 = 4$$

$$\text{إذا: } [r = -2] \text{ أو } r = 2 \text{ (مرفوض لأن المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة)}$$

(13) الاختيار $[b]$ لأن:

S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{6}$ وحدها الأول $u_0 = \frac{1}{6}$ أي: $u_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}n$

$$u_n = 20 \text{ تعني: } \frac{1}{6} + \frac{1}{6}n = 20 \text{ ومنه: } \frac{1}{6}n = \frac{20 \times 6}{6} - \frac{1}{6} \text{ ومنه: } \frac{1}{6}n = \frac{119}{6} \text{ ومنه: } n = \frac{119}{6} \times 6 = 119$$

$$\text{إذا: } S = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \dots + 20 = u_0 + u_1 + \dots + u_{119} = \frac{120}{2}(u_0 + u_{119}) = 60 \left(\frac{1}{6} + 20 \right) = 1210$$

(14) الاختيار $[a]$ لأن:

$$\text{الحد الرابع للمتتالية } (v_n) \text{ هو: } v_3 = 2 \times 4^3 = 2 \times 64 = 128$$

(15) الاختيار $[a]$ لأن:

$$\text{لدينا: } v_9 = v_7 \times q^2 \text{ ومنه: } q^2 = \frac{v_9}{v_7} = \frac{2560}{640} = 4 \text{ ومنه: } q = -2 \text{ مرفوض لأن حدود المتتالية موجبة أو } [q = 2]$$

$$\text{إذا أساس المتتالية } (u_n) \text{ هو: } [q = 2]$$

(16) الاختيار $[b]$ لأن:

$$\text{لدينا: } v_2 \times v_4 = 186624 \text{ ومنه حسب خاصية الوسط الهندسي: } v_3^2 = 186624 \text{ ومنه: } v_3 = \sqrt{186624} = 432$$

$$\text{ولدينا: } v_0 + v_3 = 434 \text{ ومنه: } v_0 = 434 - v_3 = 434 - 432 = 2$$

$$v_3 = v_0 \times q^3 \text{ ومنه: } q^3 = \frac{v_3}{v_0} = \frac{432}{2} = 216 \text{ ونعلم أن: } 6^3 = 216 \text{ إذا: } [q = 6]$$

(17) الاختيار $[b]$ لأن:

لدينا: $u_1 + u_3 = -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$ و $2u_2 = 2 \times \frac{5}{2} = 5$ ومنه: $u_1 + u_3 \neq 2u_2$ ومنه: المتتالية (u_n) ليست حسابية.

ولدينا: $u_1 \times u_3 = -1 \times \frac{7}{3} = -\frac{7}{3}$ و $u_2^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ ومنه: $u_1 \times u_3 \neq u_2^2$ ومنه: المتتالية (u_n) ليست هندسية.

(18) الاختيار $[c]$ لأن:

$$v_{n+1} - v_n = 5(-7)^{n+1} - 5(-7)^n = 5(-7)^n(-7-1) = -40(-7)^n$$

- من أجل: n عدد زوجي فإن: $v_{n+1} - v_n < 0$

- من أجل: n عدد زوجي فإن: $v_{n+1} - v_n > 0$

(19) الاختيار $[a]$ لأن:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-2n-2}}{3^{-2n}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

(20) الاختيار $[a]$ لأن:

$$\text{لدينا: } u_3 = u_0 \times q^3 \text{ ومنه: } q^3 = \frac{u_3}{u_0} = \frac{384}{6} = 64 \text{ ولدينا: } 4^3 = 64 \text{ ومنه: } q = 4 \text{ إذا: } u_n = 6 \times 4^n$$

(21) الاختيار $[a]$ لأن:

$$\text{لدينا: } u_0 + u_1 + u_2 = 30 \text{ ولدينا: } u_1 = u_0 \times q = \frac{30}{7}q \text{ و } u_2 = u_0 \times q^2 = \frac{30}{7}q^2 \text{ بتعويض القيم في المعادلة نجد:}$$

$$\frac{30}{7} + \frac{30}{7}q + \frac{30}{7}q^2 = 30 \text{ ومنه: } \frac{30}{7}(1+q+q^2) = 30 \text{ ومنه: } 1+q+q^2 = 30 \times \frac{7}{30} = 7 \text{ ومنه: } q^2 + q - 6 = 0$$

$$\text{ومنه: } \Delta = 25 \text{ إذا: } q = -3 \text{ مرفوض لان } q > 0 \text{ أو: } q = 2 \text{ إذا أساس المتتالية } (u_n) \text{ هو: } q = 2$$

(22) الاختيار $[b]$ لأن:

$$a, 2b, 3c \text{ ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه: } 3ac = 4b^2 \text{ ومنه: } ac = \frac{4}{3}b^2 \text{ بالتعويض في المعادلة } a \times b \times c = \frac{32}{3}$$

$$\text{نجد: } \frac{4}{3}b^2 \times b = \frac{32}{3} \text{ ومنه: } b^3 = \frac{32}{3} \times \frac{3}{4} = 8 \text{ ومنه: } b^3 = 8 \text{ إذا: } b = 2$$

(23) الاختيار c لأن:

$$\text{لدينا: } u_n = 3 \times 2^n \text{ ومنه: } u_{2n} = 3 \times 2^{2n} = 3 \times 4^n \text{ نضع: } v_n = 3 \times 4^n$$

حيث: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول: $v_0 = 3 \times 4^0 = 3$ إذا:

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_2 + \dots + u_{2n} \\ &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= 3 \times \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = -1(1 - 4^{n+1}) = 4^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

(24) الاختيار b لأن:

$$\text{مقدار الزيادة هو: } 20000 \times \frac{3}{100} = 600 \text{ ومنه: مقدار الزيادة بعد سنتين هو: } 20000 + 600 + 600 = 21200$$

(25) الاختيار c لأن:

$$\text{المبلغ الذي يصبح عنده بعد ثلاث سنوات: } 50000 \left(1 + \frac{2}{100}\right) \left(1 + \frac{2}{100}\right) \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 53060.4 \text{ DA}$$

(26) الاختيار a لأن:

$$\text{ليكن ثمن الكراء في السنة } n \text{ هو } u_n \text{ إذا: } u_{n+1} = u_n + 150$$

$$\text{إذا: } (u_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } 150 \text{ وحدها الأول: } u_1 = 5000 \text{ ومنه: } u_n = u_1 + (n-1)r = 5000 + 150n - 150 = 4850 + 150n$$

$$\text{ثمن الكراء في العام الثامن هو: } u_8 = 4850 + 150 \times 8 = 6050 \text{ إذا: ثمن الكراء لمدة 8 سنوات هو:}$$

$$\begin{aligned} S &= u_1 + u_2 + \dots + u_8 \\ &= \frac{8}{2}(u_1 + u_8) \\ &= 4(5000 + 6050) \\ &= 44200 \end{aligned}$$



حلول تمارين المتكاملات
في بكالوريا التسيير
2025-2008

بكالوريا 2008 الموضوع الأول

التمرين 01

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & ; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} & ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي:}$$

(1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة

(2) في كل ما يلي $\alpha = 2$ ، ونعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ) أحسب u_1, u_2 .

ب) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

ت) أكتب عبارة u_n بدلالة n . وأحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

حل التمرين 01

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & ; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} & ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي:}$$

(1) البرهان بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة

لدينا: $u_0 = -\frac{8}{3}$ ، إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -\frac{8}{3}$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$

لدينا: $u_n = -\frac{8}{3}$ ومنه: $u_{n+1} = \frac{2}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{8}{9} = -\frac{24}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{32}{9} = -\frac{8}{3}$ ومنه: $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$ صحيحة

إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع المتتالية (u_n) ثابتة في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$

(2) في كل ما يلي $\alpha = 2$ ، ونعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ) حساب u_1, u_2 .

$$u_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{9} = -\frac{16}{27} \quad , \quad u_2 = \frac{2}{3}\left(2\right) - \frac{8}{9} = \frac{4}{9}$$

ب) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

لدينا: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{8}{3}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} + \frac{8}{3}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{16}{9}$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}v_n$ وعليه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$

ت) كتابة عبارة u_n بدلالة n وحساب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\frac{8}{3} \quad , \quad u_n = v_n - \frac{8}{3} = \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{8}{3} \quad \text{ومنه} \quad v_n = u_n + \frac{8}{3}$$

بكالوريا 2008 الموضوع الثاني

التمرين 02

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

(1) أحسب u_1, u_2 و u_3 .

(2) أ) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$.

ب) جد اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 2$

أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية.

ب) عبر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n .

ت) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

ث) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 02

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

(1) حساب u_1, u_2 و u_3 .

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{4} \right) - 1 = -\frac{13}{8}, \quad u_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - 1 = -\frac{5}{4}, \quad u_1 = \frac{1}{2}(1) - 1 = -\frac{1}{2}$$

(2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$

لدينا: $u_0 = 1$ و $1 \geq -2$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq -2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} \geq -2$

$$\text{لدينا: } u_n \geq -2 \text{ ومنه: } \frac{1}{2}u_n - 1 \geq \frac{1}{2}(-2) - 1 = -2 \text{ ومنه: } u_{n+1} \geq -2 \text{ صحيحة}$$

إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n \geq -2$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1 \leq -\frac{1}{2}u_n - 1 \leq -\frac{1}{2} \times (-2) - 1 = 0 \text{ ومنه: } u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ ولدينا: } u_n \geq -2 \text{ ومنه: } u_{n+1} - u_n \leq -\frac{1}{2} \times (-2) - 1 = 0$$

ومنه: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة تماما

الاستنتاج: المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 ($u_n \geq -2$) إذن فهي متقاربة

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 2$.

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + 2 \text{ ومنه: } v_{n+1} = u_{n+1} + 2 \text{ ومنه: } v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 \text{ ومنه: } v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - 2) + 1 = \frac{1}{2}v_n$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \text{ وعليه: } v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2) = \frac{1}{2}v_n \text{ إذا } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{2}$$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$$

ب) التعبير عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

$$\boxed{v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad , \quad \text{لدينا: } v_n = u_n + 2 \text{ ومنه } \boxed{u_n = v_n - 2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}$$

ت) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \right) = -2$$

د) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

لدينا: $v_n = u_n + 2$ ومنه: $u_n = v_n - 2$ إذا: $S_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \dots + (v_n - 2)$

$$S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2(n+1) \quad \text{ومنه: } S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 2(n+1)$$

$$\boxed{S_n = 4 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2n} \quad \text{ومنه: } S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) - 2(n+1) \quad \text{إذا:}$$

بكالوريا 2009 الموضوع الأول

التمرين 03

(1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1} = u_n + 4$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ت) استنتج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n .

ت) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

ث) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 03

(1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1} = u_n + 4$

أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$

لدينا: $u_0 = -1$ و $-1 \leq 2$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} \leq 2$

لدينا: $u_n \leq 2$ ومنه: $\frac{1}{3}u_n - \frac{4}{3} \leq \frac{1}{3}(2) - \frac{4}{3}$ ومنه: $u_{n+1} \leq -\frac{2}{3}$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq 2$ محققة

إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 2$



(ب) اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة.

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n = \frac{-2}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

ومنه: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ إذا المتتالية (u_n) متزايدة تماما

(ت) استنتاج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 إذن فهي متقاربة

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 2$.

(أ) تبيان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 2 \text{ ومنه: } v_{n+1} = u_{n+1} - 2 \text{ ومنه: } v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2 \text{ ومنه: } v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} \text{ ومنه: } v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 2) \text{ ومنه: } v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

$$\text{وعليه: } v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \text{ إذا } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{3} \text{ وحدها الأول } v_0 = u_0 - 2 = -1 - 2 = -3$$

(ب) كتابة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج الحد العام u_n بدلالة n .

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = -3 \left(\frac{1}{3} \right)^n \text{ و } u_n = v_n + 2 \text{ أي: } u_n = -3 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 2$$

(ت) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right) = 2$$

(ث) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لدينا: $v_n = u_n - 2$ ومنه: $u_n = v_n + 2$ إذا: $S_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$ يعني:

$$S_n = -\frac{9}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) + 2(n+1) \text{ ومنه: } S_n = -3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + 2(n+1) \text{ ومنه: } S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 2(n+1)$$

بكالوريا 2009 الموضوع الثاني

التمرين 04

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2$

(1) أحسب u_1 ، u_2 .

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = u_n - 1$

(أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

(ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(4) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = n - 79$

حل التمرين 04

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = 3u_n - 2$



(1) حساب u_1, u_2 .

$$u_1 = 3(-5) - 2 = -17, \quad u_2 = 3(-1) - 2 = -5$$

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = u_n - 1$

(أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

لدينا: $v_n = u_n - 1$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$ ومنه: $v_{n+1} = 3u_n - 2 - 1$ ومنه: $v_{n+1} = 3u_n - 3$ ومنه: $v_{n+1} = 3(u_n - 1)$

وعليه: $v_{n+1} = 3v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = -2$

(ب) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n

$$v_n = -2 \times 3^n \text{ لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = -2 \times 3^n$$

(3) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$

$$u_n = -2 \times 3^n + 1 \text{ أي: } u_n = v_n + 1 \text{ ومنه: } v_n = u_n - 1$$

$$u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n \text{ إذا: } u_{n+1} - u_n = -2 \times 3^{n+1} - (-2 \times 3^n) = -6 \times 3^n + 2 \times 3^n$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لدينا $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة تماما

(4) تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = n - 79$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ نضع}$$

$$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + 1) \text{ إذا: } u_n = v_n + 1 \text{ ومنه: } v_n = u_n - 1$$

$$S_n = -2 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} + (n + 1) \text{ ومنه: } S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (n + 1)$$

$$S_n = 1 - 3^{n+1} + n + 1 = -3^{n+1} + n + 2 \text{ ومنه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = n - 79 \text{ وعليه}$$

$$-3^{n+1} + n + 2 = n - 79 \text{ ومنه: } -3 \times 3^n = -81 \text{ ومنه: } 3^n = 27 = 3^3 \text{ إذا } n = 3$$

بكالوريا 2010 الموضوع الأول

التمرين 05

(1) n عدد طبيعي، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + e + e^2 + \dots + e^n$ (S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1، و e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

(2) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$

- بين ان: $w_n = u_n + v_n$ حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول والأساس لكل منهما.

(3) أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$

(4) استنتج المجموع S بدلالة n حيث: $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

حل التمرين 05

(1) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = 1 + e + e^2 + \dots + e^n = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$$

(2) اثبات ان: $w_n = u_n + v_n$

لدينا $w_n = 2n + 4 + e^n$ ومنه $u_n = 4 + 2n$ و $v_n = e^n$ إذا (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $u_0 = 4$
 (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e$ وحدها الأول $v_0 = 1$

(3) اثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$

$$4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\text{ومنه: } u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n + 1) \frac{(u_0 + u_n)}{2} = (n + 1) \frac{(4 + 4 + 2n)}{2}$$

$$4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4): n \text{ عدد طبيعي}$$

(4) استنتاج المجموع S بدلالة n حيث: $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

$$\text{لدينا: } S = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) \text{ ومنه } S = u_0 + u_1 + \dots + u_n + v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$\text{ومنه } S = (n + 1)(n + 4) + S_n \text{ إذا: } S = (n + 1)(n + 4) + \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$$

بكالوريا 2010 الموضوع الثاني

التمرين 06

تكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$

(1) أحسب الحدود u_1, u_2 و u_3 .

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$.

ت) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ث) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n . ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ج) ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

حل التمرين 06

تكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$

(1) حساب الحدود u_1, u_2 و u_3

$$u_3 = \frac{3u_2 + 2}{4} = \frac{3\left(\frac{23}{16}\right) + 2}{4} = \frac{101}{64},$$

$$u_2 = \frac{3u_1 + 2}{4} = \frac{3\left(\frac{5}{4}\right) + 2}{4} = \frac{23}{16},$$

$$u_1 = \frac{3u_0 + 2}{4} = \frac{3(1) + 2}{4} = \frac{5}{4}$$

(2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n < 2$

لدينا: $u_0 = 1 < 2$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي n أي: $u_n < 2$ ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} < 2$

لدينا: $u_n < 2$ ، $\frac{1}{4}(3u_n + 2) < \frac{1}{4}(2 \times 3 + 2)$ ، ومنه: $u_{n+1} < 2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{4} - u_n = \frac{2 - u_n}{4}$ وبما أن $u_n < 2$ فإن: $u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذا المتتالية (u_n) متزايدة تماما

(ج) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 ($u_n < 2$) فإنها متقاربة

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = u_n - 2$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها

لدينا $v_n = u_n - 2$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4} - 2 = \frac{3u_n - 6}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 2)$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$ إذا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -1$

(ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n . ثم استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

لدينا: $v_n = v_0 q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ولدينا: $v_n = u_n - 2$ ومنه $u_n = v_n + 2$ إذا: $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(ج) نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] = 2$$

(4) حساب بدلالة n المجموع S_n واستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 2n - 2$

$$S_n = -4 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \quad \text{لذا: } S_n = -\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = -4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = -4 + 4 \times \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{ومنه } S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

لدينا: $u_n = v_n + 2$ ومنه $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$

ومنه: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 2(n+1) = S_n + 2(n+1) = -4 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 2n + 2$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 2n - 2 \quad \text{وهو المطلوب}$$

بكالوريا 2011 الموضوع الثاني

التمرين 07

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$ (1) أحسب u_1, u_2 .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

(ب) اكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n .

(ت) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمرين 07

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$

(1) حساب u_1, u_2 .

$$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{9}{25}$$

$$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

(2) تبان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$.

لدينا: $u_0 = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي n أي: $u_n > \frac{1}{3}$ ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} > \frac{1}{3}$

لدينا: $u_n > \frac{1}{3}$ ومنه: $\frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} > \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > \frac{1}{3}$ ومنه: $u_{n+1} > \frac{1}{3}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$

إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(3) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

* لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - u_n = \frac{1-3u_n}{5}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي $u_n > \frac{1}{3}$ فإن: $u_{n+1} - u_n < 0$

إذا المتتالية (u_n) متناقصة تماما

* بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{3}$ فإنها متقاربة

(4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

(أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

لدينا: $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}$ أي: $v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{15}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{1}{3}\right)$

وعليه: $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$ إذا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ومنه: $v_0 = \frac{1}{6}$

(ب) كتابة كلا من u_n و v_n بدلالة n .

$$\boxed{v_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5} \right)^n} \text{ لدينا: } v_n = u_n - \frac{1}{3} \text{ ومنه } u_n = v_n + \frac{1}{3} \text{ أي: } \boxed{u_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{1}{3}}$$

(ت) حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3}$$

بكالوريا 2012 الموضوع الأول

التمرين 08

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(2) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$

(ث) ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 08

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$

(1) أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$.

لدينا: $u_0 = 1 > \frac{2}{3}$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي n أي: $u_n > \frac{2}{3}$ ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$ ومنه: $\frac{1}{9}(3u_n + 4) > \frac{1}{9} \left(3 \times \frac{2}{3} + 4 \right)$ ومنه: $\frac{1}{9}(3u_n + 4) > \frac{2}{3}$ ومنه $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

لأن $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4}{9} - u_n = \frac{3u_n + 4 - 9u_n}{9} = \frac{4 - 6u_n}{9} < 0$ يعني $u_n > \frac{2}{3}$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(2) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{3u_n + 4 - 6}{9} = \frac{3u_n - 2}{9} = \frac{3}{9} \left(u_n - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} v_n$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3}$ ومنه $v_0 = \frac{1}{3}$

(ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$

$$v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^n \text{ ومنه } v_n = v_0 q^n \bullet$$

$$\bullet \text{ لدينا: } v_n = u_n - \frac{2}{3} \text{ ومنه } u_n = v_n + \frac{2}{3} \text{ ومنه: } u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right] \text{ وهو المطلوب}$$

(ج) نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right] = \frac{2}{3}$$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$\text{لدينا: } u_n = v_n + \frac{2}{3} \text{ ومنه: } S_n = \left(v_0 + \frac{2}{3} \right) + \left(v_1 + \frac{2}{3} \right) + \left(v_2 + \frac{2}{3} \right) + \dots + \left(v_n + \frac{2}{3} \right)$$

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \frac{2}{3}(n+1) \text{ ومنه: } S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) + \frac{2}{3}(n+1) = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{2} + \frac{2}{3}(n+1)$$

بكالوريا 2012 الموضوع الثاني

التمرين 09

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغ من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والاحتياط يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا. يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد).

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008+n$

(1) أ) أحسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2

(ب) هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ برر إجابتك.

(ج) بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا: $u_{n+1} = 1.05u_n - 5000$

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 100000$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول.

(ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -50000 \times (1.05)^n + 100000$

(3) أ) ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

(ب) ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

حل التمرين 09

(1) أ) حساب كلا من u_0 ، u_1 و u_2

$$u_0 = 50000 \text{ ، } u_1 = \left(u_0 + \frac{5}{100} u_0 \right) - 5000 = 47500 \text{ ، } u_2 = \left(u_1 + \frac{5}{100} u_1 \right) - 5000 = 44875$$

(ب) هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ برر إجابتك.

المتتالية (u_n) ليست حسابية ولا هندسية لأن:

$$\text{ومنهم } \begin{cases} u_0 + u_2 = 94875 \\ 2u_1 = 95000 \end{cases} \text{ إذن } (u_n) \text{ ليست حسابية}$$

$$\text{ومنهم } \begin{cases} u_0 \times u_2 = 2243750000 \\ u_1^2 = 2256250000 \end{cases} \text{ إذن } (u_n) \text{ ليست هندسية}$$

(ج) اثبات لماذا من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا: $u_{n+1} = 1.05u_n - 5000$

$$\text{لدينا: } u_1 = \left(u_0 + \frac{5}{100}u_0\right) - 5000 \text{ و } u_2 = \left(u_1 + \frac{5}{100}u_1\right) - 5000$$

$$\text{إذن: } u_{n+1} = \left(u_n + \frac{5}{100}u_n\right) - 5000 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)u_n - 5000 = 1.05u_n - 5000$$

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 100000$

(أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول.

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 100000 \text{ ومنهم } v_{n+1} = u_{n+1} - 100000 = 1.05u_n - 5000 - 100000 = 1.05u_n - 105000$$

$$\text{ومنهم: } v_{n+1} = 1.05(u_n - 100000) = 1.05v_n \text{ إذن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = 1.05 \text{ وحدها الأول}$$

$$v_0 = u_0 - 100000 = 50000 - 100000 = -50000$$

(ب) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -50000 \times (1.05)^n + 100000$

$$* \text{ لدينا } v_n = v_0 q^n \text{ ومنهم } v_n = -50000(1.05)^n$$

$$* \text{ لدينا } v_n = u_n - 100000 \text{ ومنهم } u_n = v_n + 100000 \text{ ومنهم: } v_n = -50000(1.05)^n + 100000$$

(3) حساب المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 (بداية جانفي 2016)

$$\text{ومنهم } u_8 = -50000(1.05)^8 + 100000 = 26127,23DA$$

(ب) إيجاد السنة التي لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة

$$\text{نضع } u_n < 5000 \text{ ومنهم } -50000(1.05)^n + 100000 < 5000 \text{ ومنهم: } -50000(1.05)^n < -95000$$

$$\text{نجد } (1.05)^n > \frac{-95000}{-50000} \text{ ومنهم } n > \frac{\ln(1.9)}{\ln(1.05)} \text{ وبالتالي } \boxed{n=14}$$

إذن ابتداء من سنة (2008+14) أي سنة 2022 لا يسمح لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد

بكالوريا 2013 الموضوع الأول

التمرين 10

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \left(\frac{2\alpha+1}{3}\right)u_n - \frac{2\alpha+4}{3}$ حيث α وسيط حقيقي.

(1) عين قيمة α التي تكون من أجلها (u_n) ثابتة.

(2) نفرض $\alpha \neq \frac{5}{2}$. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ثم احسب عندئذ u_n مجموع n حدا الأولى من المتتالية.

(3) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

(4) نفرض $\alpha = 4$. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = 3^n + 2$ ثم بين أن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$

حل التمرين 10

(1) تعين قيمة α التي تكون من اجلها (u_n) ثابتة.

$$u_0 = u_n = u_{n+1} = 3 \text{ ثابتة معناه:}$$

$$\alpha = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ أي } 4\alpha - 1 = 9 \text{ ومنه } \frac{6\alpha + 3 - 2\alpha - 4}{3} = 3 \text{ وعليه } 3 = \left(\frac{2\alpha + 1}{3}\right)3 - \frac{2\alpha + 4}{3}$$

(2) نفرض $\alpha \neq \frac{5}{2}$. تعين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ثم حساب عندئذ u_n مجموع n حدا الأولى من المتتالية.

$$(u_n) \text{ حسابية معناه: } \frac{2\alpha + 1}{3} = 1 \text{ ومنه: } \boxed{\alpha = 1}$$

$$\text{أساسها } r = -\frac{2+4}{3} = -2 \text{ ومنه } u_n = u_0 + nr \text{ أي } \boxed{u_n = 3 - 2n}$$

-حساب مجموع n حدا الأولى من المتتالية

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = (n-1-0+1) \left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \right) = n \left(\frac{3 + 3 - 2(n-1)}{2} \right)$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n(4-n) \text{ ومنه}$$

(3) تعين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثم تعين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

$$(u_n) \text{ متتالية هندسية معناه: } \frac{2\alpha + 4}{3} = 0 \text{ أي: } \boxed{\alpha = -2}$$

$$\text{أساسها } q = \frac{2(-2)+1}{3} = -1 \text{ ومنه } \boxed{u_n = u_0 q^n = 3(-1)^n} \text{ و } \boxed{u_{50} = 3(-1)^{50} = 3}$$

$$\text{تعين مجموع 50 حدا الأولى } \boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{49} = 3 \frac{1 - (-1)^{50}}{1 - (-1)} = 0}$$

(4) نفرض $\alpha = 4$. البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = 3^n + 2$

$$\text{لدينا: } u_0 = 3^0 + 2 = 3 \text{ إذا الخاصية محققة من أجل } n = 0$$

$$\text{نفرض من أجل كل } n \in \mathbb{N} \text{ صحة ونثبت صحة } u_{n+1} = 3^{n+1} + 2$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = 3u_n - 4 = 3(3^n + 2) - 4 = 3^{n+1} + 2 \text{ ومنه: } u_{n+1} = 3^{n+1} + 2 \text{ صحة}$$

$$\text{إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ } u_n = 3^n + 2$$

$$\text{-إثبات أن: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

لدينا

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n &= (3^0 + 2) + (3^1 + 2) + \dots + (3^n + 2) \\ &= (3^0 + 3^1 + \dots + 3^n) + 2(n+1) \\ &= \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) + 2(n+1) = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 2n + 2 \end{aligned}$$

$$\text{ولدينا: } \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 2n + 2 = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1 + 4n + 4) = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

$$\text{اذن: } \boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)}$$



التمرين 11

بكالوريا 2013 الموضوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$

(1) أ) أحسب كلا من u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

(ب) هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$ ؟ برر اجابتك

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$

(ب) استنتج ان المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ج) اكتب كلا من v_n ثم u_n بدلالة n . (د) بين ان (u_n) متقاربة

(3) باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال (1) ب

حل التمرين 11

(1) أ) حساب كلا من u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

$$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 6 = -\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right) + 6 = \frac{15}{4}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 6 = -\frac{1}{2} \times 3 + 6 = \frac{9}{2}, \quad u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 6 = -\frac{1}{2} \times 6 + 6 = 3$$

$$u_4 = -\frac{1}{2}u_3 + 6 = -\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\right) + 6 = \frac{33}{8}$$

(ب) لا المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$ لأن الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ليست مرتبة

(2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 2 = -\frac{1}{2}(u_n - 4) \text{ ومنه } u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$$

(ب) استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$\text{لدينا: } v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 2 = -\frac{1}{2}(u_n - 4) \text{ ومنه } v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$$

$$\text{ومن: } v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n \text{ إذن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = -\frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$$

(ج) كتابة كلا من v_n ثم u_n بدلالة n .

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 q^n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ ولدينا: } v_n = u_n - 4 \text{ ومنه: } u_n = v_n + 4 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

(د) إثبات أن (u_n) متقاربة

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 \right] = 4 \text{ ومنه المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة}$$

(3) التأكد ثانية من نتيجة السؤال (1) ب باستعمال عبارة u_n

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 6 - u_n = -\frac{3}{2}u_n + 6 = -\frac{3}{2}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 \right] + 6 = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

فإن إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ غير ثابتة وبالتالي المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$

التمرين 12

بكالوريا 2014 الموضوع الأول (س1)

أجب بصح او خطأ مع التبرير في كل حالة:

- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln u_n$
- (أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فإن (v_n) متقاربة
- (ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فإن (v_n) متناقصة
- (ت) إذا كانت (u_n) هندسية فإن (v_n) حسابية

حل التمرين 12

الاجابة بصح او خطأ مع التبرير في كل حالة:

- (أ) خطأ لأن: نأخذ مثلاً: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0^n$ ، أي أن المتتالية (u_n) متقاربة
- لدينا: $v_n = \ln u_n = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^n = -n \ln 2$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n \ln 2) = -\infty$ ، أي أن المتتالية (v_n) متباعدة
- (ب) صحيح لأن: (u_n) متناقصة معناه: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ أي: $u_{n+1} \leq u_n$ ومنه $\ln u_{n+1} \leq \ln u_n$ ومنه: $v_{n+1} \leq v_n$
- (ت) صحيح لأن: (u_n) متتالية هندسية معناه: $u_{n+1} = qu_n$ ومنه $\ln u_{n+1} = \ln(qu_n)$ أي: $\ln u_{n+1} = \ln q + \ln u_n$ ومنه: $v_{n+1} = \ln q + v_n$ ، إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln q$

التمرين 13

بكالوريا 2014 الموضوع الثاني

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -3$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

(2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$

أ- بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

ب- أحسب الأساس q ثم عين عبارة v_n بدلالة n .

ت- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n

حل التمرين 13

(1) أ- إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -3$.

لدينا $u_0 = 3$ ومنه $3 > -3$ الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أنه من أجل العدد طبيعي n : $u_n > -3$ صحيحة ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $u_{n+1} > -3$



لدينا: $u_n > -3$ ومنه $u_n - 1 > -3 \left(\frac{2}{3} \right) - 1$ ومنه: $\frac{2}{3}u_n - 1 > -3$ إذن: $u_{n+1} > -3$ صحيحة

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -3$

ب- اثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n - 1$$

$$u_n > -3 \text{ ومنه } -\frac{1}{3}u_n - 1 < -3 \left(-\frac{1}{3} \right) - 1 \text{ ومنه: } -\frac{1}{3}u_n - 1 < 0 \text{ إذن } u_{n+1} - u_n < 0$$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة

ج- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا: المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -3 ($u_n > -3$) فهي متقاربة

(2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$

$$\text{أ- اثبات أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \right] = \frac{v_0}{1-q}$$

لأن المتتالية (v_n) متقاربة وهذا يعني أن $-1 < q < 1$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$

ب- حساب الأساس q ثم تعين عبارة v_n بدلالة n .

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18 \text{ وبما أن } \frac{v_0}{1-q} = 18 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$$

$$\text{ومنه } \frac{6}{1-q} = 18, \quad 18 - 18q = 6 \quad \text{ومنه } -18q = 6 - 18 \text{ إذن: } q = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$$

- تعين عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 q^n \text{ ومنه } v_n = 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

ت- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$ واستنتاج عبارة u_n بدلالة n (نستعمل البرهان بالتراجع)

$$\text{لدينا: } u_0 = v_0 - 3 = 6 - 3 = 3 \text{ ومنه الخاصية محققة من أجل } n = 0$$

نفرض أنه من أجل العدد الطبيعي n $u_n = v_n - 3$

ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي نبرهن أن: $u_{n+1} = v_{n+1} - 3$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 = \frac{2}{3}(v_n - 3) - 1 = \frac{2}{3}v_n - 2 - 1 = \frac{2}{3}v_{n+1} - 3 = v_{n+1} - 3$$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$\text{لدينا: } u_n = v_n - 3 = 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 3 \text{ ومنه } u_n = v_n - 3$$

التمرين 14

بكالوريا 2015 الموضوع الأول (س1)

اقترح الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$

أ) (u_n) حسابية ب) (u_n) هندسية ج) (u_n) لا حسابية لا هندسية.

(2) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4، قيمة n التي من أجلها يكون: $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$ هي:

أ) $n = 31$ ب) $n = 32$ ج) $n = 33$



حل التمرين 14

اختيار الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل حالة:

(1) الاختيار "ب" لأن: لدينا: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1} = 5 \times 2^n \times 3^n \times 3^{-1} = \frac{5}{3} \times 6^n$

ومنه: $u_{n+1} = \frac{5}{3} \times 6^{n+1} = 6 \left(\frac{5}{3} \times 6^n \right) = 6 \times u_n$ إذا: (u_n) متتالية هندسية أساسها 6

(2) الاختيار "ب" لأن: لدينا: $v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{n(5+1+4n)}{2} = \frac{4n^2 + 6n}{2} = 2n^2 + 3n$

$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$ تعني: $2n^2 + 3n - 2015 = 0$ ومنه: $\Delta = 16129$ ومنه: $n = -32.5$ (مرفوض لأنه عدد غير

طبيعي)، $n = 31$

بكالوريا 2015 الموضوع الثاني

التمرين 15

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا. علما أن سنة

2012 كان عدد العمال 50000. نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي: $u_0 = 50$

(1) أوجد u_1 و u_2

(2) أ- بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0.95u_n + 3$

ب- بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 60 - u_n$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ث- قدر عدد العمال سنة 2017.

ج- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ح- احسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

حل التمرين 15



(1) إيجاد u_1 و u_2

$$u_1 = 50 \left(1 - \frac{5}{100} \right) + 3 = 50.975 \quad , \quad u_2 = 50 \left(1 - \frac{5}{100} \right) + 3 = 50.5$$

(2) أ) تبيان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0.95u_n + 3$

$$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{5}{100} \right) + 3 = 0.95u_n + 3$$

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_0 = 50.5 - 50 = 0.5 \\ u_2 - u_1 = 50.975 - 50.5 = 0.475 \end{cases}$ ومنه: إذا: المتتالية (u_n) ليست حسابية

لدينا: $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = \frac{50.5}{50} = 1.01 \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{50.975}{50.5} = 1.009 \end{cases}$ ومنه: إذا: المتتالية (u_n) ليست هندسية

(3) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 60 - u_n$

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - 0.95u_n - 3 = 57 - 0.95u_n = 0.95(60 - u_n) = 0.95v_n$$

$$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$$

ب- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n

$$u_n = 60 - v_n = 60 - 10(0.95)^n \quad , \quad v_n = v_0 \times q^n = 10(0.95)^n$$

ت- تقدير عدد العمال سنة 2017.

$$u_5 = 60 - 10(0.95)^5 = 52.262 \quad \text{لدينا: } 2017 = 2012 + 5 \quad \text{إذا: } n = 5 \quad \text{ومنه:}$$

ث- تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = 60 - 10(0.95)^{n+1} - 60 + 10(0.95)^n = 10(0.95)^n (-0.95 + 1) = -8.5(0.95)^n < 0$$

ج- حساب نهاية المتتالية (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [60 - 10(0.95)^n] = 60$$

وبالتالي لا يمكن أن يصل عدد عمال لمصنع إلى 60000 عامل

بكالوريا 2016 الموضوع الأول

التمرين 16

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بجدها الأول $v_0 = 18$ والعلاقة: $v_0 + v_1 + v_2 = 18$

(1) بين أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$

(2) أ- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n)

ج- أحسب نهاية (v_n)

(3) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

أ- أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$

ب- جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = \frac{3510}{81}$

حل التمرين 16

(1) تبين ان أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$

لدينا: $v_0 + v_1 + v_2 = 38$ تعني: $v_0 + v_0 \times q + v_0 \times q^2 = 38$ ومنه: $18 + 18q + 18q^2 = 38$ ومنه: $18q^2 + 18q - 20 = 0$

$\Delta = 1764$ ومنه: $q = \frac{-5}{3}$ (مرفوض لان الحدود موجبة) أو: $q = \frac{2}{3}$ إذا: أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$

(2) أ) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \times q^n = 18 \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n)

$$v_{n+1} - v_n = 18 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 18 \left(\frac{2}{3} \right)^n = 18 \left(\frac{2}{3} \right)^n \left[\frac{2}{3} - 1 \right] = -6 \left(\frac{2}{3} \right)^n < 0$$

ج) حساب نهاية (v_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[18 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = 0$$

(3) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

أ- حساب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} \quad \text{ومنه:} \quad S_n = 18 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \quad \text{إذا:} \quad S_n = 54 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 54 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = 54$$

ب- إيجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = \frac{3510}{81}$

$$S_n = \frac{3510}{81} \quad \text{تعني:} \quad 54 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = \frac{3510}{81} \quad \text{ومنه:} \quad 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{3510}{4374} \quad \text{ومنه:} \quad -\left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{3510}{4374} - 1$$

$$-\left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{3510}{4374} - 1 \quad \text{وبالتالي:} \quad -\left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{-864}{4374} \quad \text{وعليه:} \quad \ln \left(\frac{2}{3} \right)^n = \ln \frac{864}{4374} \quad \text{ومنه:} \quad n \ln \left(\frac{2}{3} \right) = \ln \frac{864}{4374} \quad \text{إذا:} \quad n = \frac{\ln \left(\frac{864}{4374} \right)}{\ln \left(\frac{2}{3} \right)} = 4$$

بكالوريا 2016 الموضوع الثاني

التمرين 17

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

(1) أحسب u_1, u_2 .

(2) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ج- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n)

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$

ت- أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمرين 17

(1) حساب u_1, u_2 .

$$u_1 = \frac{4}{7}u_0 + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}(5) + \frac{3}{7} = \frac{23}{7}$$

$$u_2 = \frac{4}{7}u_1 + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}\left(\frac{23}{7}\right) + \frac{3}{7} = \frac{113}{49}$$

(2) أ) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

لدينا: $u_0 = 5$ و $5 > 1$ إذا الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} > 1$

لدينا: $u_n > 1$ ومنه: $\frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7} > 1\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{3}{7}$ ومنه: $u_{n+1} > 1$ صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n > 1$

ب) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$u_{n+1} - u_n = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7} - u_n = \frac{-3}{7}u_n + \frac{3}{7} = \frac{-3}{7}(u_n - 1) < 0$ لان: $u_n > 1$ تعني: $u_n - 1 > 0$ ومنه: (u_n) متناقصة تماما

ج) ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n)

بما ان (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 ($u_n > 1$) فهي متقاربة نحو العدد l

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

أ- تبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7} - 1 = \frac{4}{7}u_n - \frac{4}{7} = \frac{4}{7}(u_n - 1) = \frac{4}{7}v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{7}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 5 - 1 = 4$



ب- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$

$$u_n = v_n + 1 = 4\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1, \quad v_n = v_0 \times q^n = 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$$

ت- حساب نهاية المتتالية (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[4\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1 \right] = 1$$

بكالوريا 2017 الموضوع الأول

التمرين 18

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(1) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة

(2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 - u_n$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ ثم عين حدها الأول.

ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

حل التمرين 18

(1) أ- البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$.

لدينا: $u_0 = -1$ و $-1 < 3$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} < 3$

لدينا: $u_n < 3$ ومنه: $\frac{1}{3}u_n + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2$ ومنه: $u_{n+1} < 3$ صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n < 3$

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \frac{-2}{3}u_n + 2 = \frac{-2}{3}(u_n - 3) > 0$$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ($u_n < 3$) فهي متقاربة نحو العدد الحقيقي l

(2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 - u_n$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ ثم تعيين حدها الأول.

$$v_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \left(\frac{1}{3}u_n + 2\right) = 3 - \frac{1}{3}u_n - 2 = 1 - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(3 - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

وحدها الأول: $v_0 = 3 - u_0 = 3 + 1 = 4$



(ب) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ومنه: $S_n = 3 - v_0 + 3 - v_1 + \dots + 3 - v_n$ ومنه: $S_n = (3 + 3 + \dots + 3) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$

$$S_n = 3(n+1) - 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3n + 3 - 4 \times \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

$$S_n = 3n + 3 - 6 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

التمرين 19

بكالوريا 2017 الموضوع الثاني

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2$

(1) أحسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 ثم نحدد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - u_n$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ب) عين v_n بدلالة n ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(3) نضع من أجل كل عدد n غير معدوم: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

(أ) أحسب S_n بدلالة n .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n

حل التمرين 19

(1) حساب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 ثم نحدد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_3 = 3u_2 - 2 = 3(10) - 2 = 28 \quad , \quad u_2 = 3u_1 - 2 = 3(4) - 2 = 10 \quad , \quad u_1 = 3u_0 - 2 = 3(2) - 2 = 4$$

نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ومنه: (u_n) متزايدة

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - u_n$

(أ) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2 - 3u_n + 2 = 3(u_{n+1} - u_n) = 3v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 وحدها الأول: $v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2$

(ب) تعيين v_n بدلالة n واستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

$$v_n = v_0 \times 3^n = 2 \times 3^n$$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = v_n = 2 \times 3^n > 0$ ومنه: (u_n) متزايدة.

(3) نضع من أجل كل عدد n غير معدوم: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

(أ) حساب S_n بدلالة n .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = 3^n - 1$$



(ب) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = S_n + u_0$

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ و $v_n = u_{n+1} - u_n$ ومنه: $S_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1}$

إذا: $S_n = -u_0 + u_n$ وبالتالي نجد: $u_n = S_n + u_0$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $u_n = S_n + u_0$ ومنه: $u_n = 3^n - 1 + 2 = 3^n + 1$

بكالوريا 2017 الموضوع الأول (الدورة الاستثنائية)

التمرين 20

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = -2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$: n : $u_n < 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

(1) أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$.

ب) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كإيلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2u_n - 4$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

ب) جد عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 20

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = -2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$: n : $u_n < 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

(1) أ) تبين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $-2 < 2$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} < 2$

لدينا: $u_n < 2$ ومنه: $\frac{1}{2}u_n + 1 < \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$ ومنه: $u_{n+1} < 2$ صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n < 2$

ب) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{-1}{2}(u_n - 2) > 0$ لأن لدينا: $u_n < 2$ تعني: $u_n - 2 < 0$

ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 $(u_n < 2)$ فهي متقاربة نحو العدد l

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كإيلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2u_n - 4$

أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

$v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 = u_n + 2 - 4 = u_n - 2 = \frac{1}{2}(2u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 2u_0 - 4 = -4 - 4 = -8$

ب) عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \quad \text{إذا:} \quad u_n = \frac{1}{2}v_n + 2 \quad \text{ومنه:} \quad v_n = 2u_n - 4$$

$$v_n = v_0 \times q^n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ومنه: $S_n = \frac{1}{2}v_0 + 2 + \frac{1}{2}v_1 + 2 + \dots + \frac{1}{2}v_n + 2$ ومنه: $S_n = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (2 + 2 + \dots + 2)$

$$\text{ومنه: } S_n = \frac{1}{2}(-8) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) + 2(n+1) \quad \text{إذ: } S_n = -8 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] + 2(n+1)$$

بكالوريا 2017 الموضوع الثاني (الدورة الاستثنائية)

التمرين 21

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كيلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ ، $u_n = w_n - v_n$

بين أن: المتتالية (u_n) حسابية، حدد أساسها r وحدها الأول u_0

(3) أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$

(4) استنتج المجموع T_n بدلالة n حيث: $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

حل التمرين 21

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{1 - e^{2(n+1)}}{1 - e^2}$$

(2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كيلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ ، $u_n = w_n - v_n$

تبيان أن: المتتالية (u_n) حسابية، وتحديد أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا: $u_n = w_n - v_n$ ومنه: $w_n = u_n + v_n$ إذ: $u_n = 2n + 4$

إذ: المتتالية (u_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول $u_0 = 4$

(3) اثبات أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$

$$4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(4 + 2n + 4)$$

$$= \frac{n+1}{2}(8 + 2n) = (n + 1)(4 + n)$$

(4) استنتاج المجموع T_n بدلالة n حيث: $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

$$\begin{aligned} T_n &= w_0 + w_1 + \dots + w_n \\ &= u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + \dots + u_n + v_n \\ &= (u_0 + u_1 + \dots + u_n) + (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ &= (n+1)(n+4) + \frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2} \end{aligned}$$

بكالوريا 2018 الموضوع الأول

التمرين 22

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كإيلي:

$$u_0 = 50 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = 0.7u_n + 6 \text{ و } v_n = u_n - 20$$

(1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.7 يطلب تعيين حدها الأول وأكتب عبارة v_n بدلالة n

(2) أ- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

ب- عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016+n$ أي $u_0 = 50$.

(1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017؟ ثم في سنة 2018؟

(2) أ- برر العبارة: $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$

ب- ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك؟

حل التمرين 22

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كإيلي: $u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي: $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$

(1) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.7 يطلب تعيين حدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0.7u_n + 6 - 20 = 0.7u_n - 14 = 0.7(u_n - 20) = 0.7v_n$$

$$\boxed{v_0 = u_0 - 20 = 50 - 20 = 30} \text{ ومنه: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } 0.7 \text{ وحدها الأول}$$

كتابة عبارة v_n بدلالة n

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 30(0.7)^n}$$

(2) أ) كتابة بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

$$\boxed{u_n = v_n + 20 = 30(0.7)^n + 20} \text{ ومنه: } v_n = u_n - 20$$

ب) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = 30(0.7)^{n+1} + 20 - 30(0.7)^n - 20$$

$$= 30(0.7)^n [0.7 - 1]$$

$$= -9(0.7)^n < 0$$

ومنه: المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [30(0.7)^n + 20] = 20$$

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

(1) عدد المشتركين في سنة 2017؟ ثم في سنة 2018؟

$$u_1 = 50 \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 6 = 41, \quad u_2 = 41 \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 6 = 34.7$$

إذا عدد المشتركين سنة 2017 هو 4100 وفي سنة 2018 هو 3470

(2) تبرير العبارة: $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 6 \text{ ومنه: } u_{n+1} = 0.7u_n + 6$$

(ب) ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك؟

$$\text{معناه: } u_n < 24 \text{ أي: } 30(0.7)^n + 20 < 24 \text{ ومنه: } (0.7)^n < \frac{24-20}{30} \text{ ومنه: } (0.7)^n < \frac{4}{30}$$

$$\text{ومنه: } \ln(0.7)^n < \ln \frac{4}{30} \text{ ومنه: } n \ln(0.7) < \ln \frac{4}{30} \text{ ومنه: } n > \frac{\ln \frac{4}{30}}{\ln(0.7)} \text{ وعليه: } n > 5.64 \text{ إذا: } n=6$$

وبالتالي يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك سنة: $2016 + 6 = 2022$

بكالوريا 2018 الموضوع الثاني

التمرين 23

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كيلي: $u_0 = -1$ و $2u_{n+1} = u_n + 6$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ- بين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) أحسب بدلالة n ما يلي: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

حل التمرين 23

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كيلي: $u_0 = -1$ و $2u_{n+1} = u_n + 6$.

لدينا: $2u_{n+1} = u_n + 6$ تعني: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

(1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$

لدينا: $u_0 = -1 < 6$ وإذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 6$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} < 6$

لدينا: $u_n < 6$ ومنه: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 < \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$ ومنه: $u_{n+1} < 6$ صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n < 6$



(ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = \frac{-1}{2}u_n + 3 = \frac{-1}{2}(u_n + 6) > 0$$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- بما ان (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 $(u_n < 6)$ فهي متقاربة نحو العدد الحقيقي l

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 6$

(أ) تبين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 6 = -1 - 6 = -7$

(ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [v_n + 6] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-7 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 6 \right] = 6, \quad v_n = v_0 \times q^n = -7 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

(3) حساب بدلالة n ما يلي: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ &= -7 \left(\frac{1}{2} \right)^0 \times -7 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \times \dots \times -7 \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= (-7 \times -7 \times \dots \times -7) \times \left(\frac{1}{2} \right)^{0+1+\dots+n} \\ &= (-7)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 + 6 + v_1 + 6 + \dots + v_n + 6 \\ &= -7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 6(n+1) \\ &= -14 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] + 6(n+1) \end{aligned}$$

بكالوريا 2019 الموضوع الأول

التمرين 24



(u_n) المتتالية العددية المعرفة كإيلي: $u_0 = -4$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

(1) أ- أحسب كلا من u_1 و u_2

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 8$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(3) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$

ب- عين قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0

ج- نضع $\alpha = 8$ ، عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من اجل كل طبيعي n : $u_n = -12 \left(\frac{3}{4} \right)^n + 8$

(4) أحسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 24

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كإيلي: $u_0 = -4$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

(1) أ- حساب كلا من u_1 و u_2

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(-4) + 2 = -3 + 2 = -1 \quad , \quad u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}(-1) + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n < 8$

لدينا: $u_0 = -4$ و $-4 < 8$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_n < 8$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} < 8$

لدينا: $u_n < 8$ ومنه: $\frac{3}{4}u_n + 2 < \frac{3}{4} \times 8 + 2 = 5$ ومنه: $u_{n+1} < 8$ صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n < 8$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة.

- $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{4}u_n + 2 = -\frac{1}{4}(u_n - 8) > 0$ لان $u_n < 8$ تعني: $u_n - 8 < 0$ ومنه: (u_n) متتالية متزايدة - -

بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 8 ($u_n < 8$) فهي متقاربة نحو l

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$

ولدينا: $u_n = v_n + \alpha$ بالتعويض نجد: $v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_n + \alpha) + 2 - \alpha = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}\alpha + 2 - \alpha$

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2 \quad \text{إذا:} \quad v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}\alpha + 2 - \alpha$$

ب- تعيين قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0

$$v_n \text{ هندسية تعني: } -\frac{1}{4}\alpha + 2 = 0 \text{ ومنه: } -\frac{1}{4}\alpha = -2 \text{ ومنه: } \alpha = 8$$

ج- نضع $\alpha = 8$ ، التعبير عن v_n بدلالة n ثم استنتاج أنه من أجل كل طبيعي $n: u_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$

$$v_n = v_0 \times q^n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad u_n = v_n + 8 = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$$

(4) حساب المجموع S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 8(n+1)$$

$$= -12 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} + 8(n+1)$$

$$= -12 \times 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right] + 8n + 8$$

$$\text{إذا:} \quad S = -48 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right] + 8n + 8$$

بكالوريا 2019 الموضوع الثاني

التمرين 25

$$\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{بـ: } \mathbb{N} \quad \text{المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N}$$

(1) أحسب حدها الأول u_0 وأساسها r

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) بين أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية ثم أحسب كلا من المجموعين: S_1 و S_2 حيث:

$$S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344} \quad , \quad S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$$

- استنتج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1344}$

$$(4) \quad (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = e^{6-2u_n}$$

$$- \text{ أحسب المجموع: } S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

حل التمرين 26

$$\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{بـ: } \mathbb{N} \quad \text{المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N}$$

(1) حساب الأساس r

لدينا: $u_2 = u_1 + r$ ، $u_5 = u_1 + 4r$ وبالتالي: $u_1 + r + 2u_1 + 8r = 27$ ومنه: $3u_1 + 9r = 27$

$$\text{نعوض قيمة } u_1 \text{ في المعادلة نجد: } 3\left(\frac{9}{2}\right) + 9r = 27 \text{ ومنه: } 9r = 27 - \frac{27}{2} \text{ ومنه: } 9r = \frac{27}{2} \text{ إذا: } r = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

حساب الحد الأول u_0

$$\text{لدينا: } u_1 - u_0 = r \text{ ومنه: } u_0 = u_1 - r = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

(2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

$$u_n = u_0 + nr = 3 + \frac{3}{2}n$$

(3) تبين أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية

$$u_n = 2019 \text{ تعني: } 3 + \frac{3}{2}n = 2019 \text{ ومنه: } \frac{3}{2}n = 2016 \text{ ومنه: } n = 2016 \times \frac{2}{3} = 1344 \text{ ومنه: العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية}$$

- حساب كلا من المجموعين: S_1 و S_2

$$S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344}$$

$$= \frac{1344}{4}(u_2 + u_{1344})$$

$$= 336(6 + 2009) = 680400$$

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$$

$$= \frac{1344-1+1}{2}(u_1 + u_{1344})$$

$$= 672\left(2019 + \frac{9}{2}\right) = 1359792$$

- استنتج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1344}$

$$\text{نلاحظ أن: } S_1 = S_2 + S_3 \text{ ومنه: } S_3 = S_1 - S_2 = 1359792 - 680400 = 679392$$

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{6-2u_n}$

- حساب المجموع: $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

لدينا: $v_n = e^{6-2u_n}$ ومنه: $\frac{1}{v_n} = \frac{1}{e^{6-2u_n}} = e^{2u_n-6} = (e^3)^n$

نضع: $w_n = (e^3)^n$ حيث (w_n) متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها e^3 إذا: $S_n = \frac{1 - e^{3(n+1)}}{1 - e^3}$

بكالوريا 2020 الموضوع الأول

التمرين 26

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ 70000 DA ، في شهر جانفي استهلك منه 80% وابتداء من شهري فيفري قرر تخفيض مبلغ الاستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله.

(1) أ- ما هو المبلغ المستهلك في شهر جانفي؟

ب- حدد المبلغ المستهلك في شهر فيفري

(2) نضع u_1 المبلغ المستهلك في شهر جانفي و u_n المبلغ المستهلك في شهر n ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

- عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n واستنتج ان (u_n) هندسية أساسها 0.95

(3) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(4) أ- احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019

ب- أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة.

حل التمرين 26

(1) أ) حساب المبلغ المستهلك في شهر جانفي: $70\,000 \times \frac{80}{100} = 56\,000 \text{ DA}$

ب) المبلغ المستهلك في شهر فيفري: $56\,000 \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 53\,200 \text{ DA}$

(2) التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n

لدينا: $u_2 = u_1(1 - 0.05) = 0.95u_1$ ، $u_3 = u_2(1 - 0.05) = 0.95u_2$ و $u_4 = u_3(1 - 0.05) = 0.95u_3$

ومنه: $u_{n+1} = 0.95u_n$ إذا: المتتالية (u_n) هندسية أساسها 0.95

(3) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

لدينا: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $u_n = 56\,000 \times (0.95)^{n-1}$

(4) أ- احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019

لدينا: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{12}$ ومنه: $S = u_1 \left(\frac{1 - q^{12}}{1 - q} \right) = 56\,000 \left(\frac{1 - 0.95^{12}}{1 - 0.95} \right) = 514\,796.7018 \text{ DA}$

إذا المبلغ المستهلك خلال سنة 2019 هو $514\,796.7018 \text{ DA}$

ب) إيجاد المبلغ المدخر خلال هذه السنة: $70\,000 \times 12 - S = 325\,203.2982 \text{ DA}$

بكالوريا 2020 الموضوع الأول

التمرين 26

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n < \frac{9}{2}$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = u_n - \frac{9}{2}$.

أ- بين ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب حساب حددها الأول v_0

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. أحسب بدلالة n المجموع S_n .

حل التمرين 26



المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2}$.

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n < \frac{9}{2}$

لدينا: $u_0 = 1 < \frac{9}{2}$ وإذا انخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}: u_n < \frac{9}{2}$ صحيحة وثبت صحة $u_{n+1} < \frac{9}{2}$

لدينا: $u_n < \frac{9}{2}$ ومنه: $\frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2} < \frac{9}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$ ومنه: $u_{n+1} < 3 + \frac{3}{2}$ ومنه: $u_{n+1} < \frac{9}{2}$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n < \frac{9}{2}$

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{3}{2}$ ولدينا: $u_n < \frac{9}{2}$ ومنه: $-\frac{1}{3}u_n + \frac{3}{2} > -\frac{1}{3} \times \frac{9}{2} + \frac{3}{2}$

ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ إذا (u_n) متزايدة

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{9}{2}$ فهي متقاربة نحو العدد l

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - \frac{9}{2}$.

أ- تبين ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب حساب حددها الأول v_0

لدينا: $v_n = u_n - \frac{9}{2}$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{2}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 3$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ وعليه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}\left(u_n - \frac{9}{2}\right) = \frac{2}{3}v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحددها الأول $v_0 = u_0 - \frac{9}{2} = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}$

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7 \left(\frac{2}{3} \right)^n}{2} = 0$$

$$v_n = \frac{-7 \left(\frac{2}{3} \right)^n}{2} \quad \text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه:}$$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حساب بدلالة n المجموع S_n .

$$S_n = \left(v_0 + \frac{9}{2} \right) + \left(v_1 + \frac{9}{2} \right) + \dots + \left(v_n + \frac{9}{2} \right) \quad \text{لدينا: } v_n = u_n - \frac{9}{2} \text{ ومنه: } u_n = v_n + \frac{9}{2}$$

$$S_n = \frac{-7}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{9}{2} (n+1) \quad \text{يعني: } S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \frac{9}{2} (n+1) \text{ ومنه:}$$

$$S_n = \frac{-21}{2} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right] + \frac{9}{2} (n+1) \quad \text{لدينا: } S_n = \frac{-7}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} + \frac{9}{2} (n+1) \text{ ومنه:}$$

بكالوريا 2020 الموضوع الثاني

التمرين 27



$$\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases} \quad \text{المتتالية الهندسية } (v_n) \text{ حدها الأول } v_0 \text{ وأساسها } q \text{ موجبان تماما:}$$

$$(1) \text{ بين ان: } v_3 = 8 \text{ و } v_5 = 32$$

$$(2) \text{ أ- بين ان: } q = 2 \text{ و } v_0 = 1$$

$$\text{ب- أكتب } v_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{ج- هل العدد } 1024 \text{ حد من حدود المتتالية } (v_n) \text{ ؟}$$

$$(3) \text{ المتتالية } (w_n) \text{ معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية } \mathbb{N} \text{ بـ: } w_n = 2n - 3 + 2^n$$

$$\text{أ- تحقق ان: } w_n = u_n + v_n \text{ حيث } (u_n) \text{ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول } u_0$$

$$\text{ب- من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ نضع: } S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$$

$$\text{بين أنه من اجل كل عدد طبيعي } n: S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$$

حل التمرين 27

$$\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases} \quad \text{المتتالية الهندسية } (v_n) \text{ حدها الأول } v_0 \text{ وأساسها } q \text{ موجبان تماما:}$$

$$(1) \text{ تبين ان: } v_3 = 8 \text{ و } v_5 = 32$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases} \text{ بالجمع نجد: } 2 \ln v_5 = 10 \ln 2 \text{ ومنه: } \ln v_5 = 5 \ln 2 \text{ ومنه: } v_5 = 2^5 = 32 \text{ إذا:}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases} \text{ بالطرح نجد: } 2 \ln v_3 = 6 \ln 2 \text{ ومنه: } \ln v_3 = 3 \ln 2 \text{ ومنه: } v_3 = 2^3 = 8 \text{ إذا:}$$

(2) أ- تبين ان: $q=2$ و $v_0=1$

لدينا: $v_5 = v_3 \times q^2$ ومنه: $q^2 = \frac{v_5}{v_3} = \frac{32}{8} = 4$ ومنه: $q=2$ لان الحدود موجبة.

ولدينا: $v_3 = v_0 \times q^3$ ومنه: $v_0 = \frac{v_3}{q^3} = \frac{8}{2^3} = 1$

ب- كتابة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 2^n$

ج- هل العدد 1024 حد من حدود المتتالية (v_n) ؟

$v_n = 2024$ تعني: $2^n = 2024$ ومنه: $\ln 2^n = \ln 2024$ ومنه: $n \ln 2 = \ln 2024$ ومنه: $n = \frac{\ln 2024}{\ln 2} = 10$

ومنه: العدد 1024 حد من حدود المتتالية (v_n)

(3) المتتالية (w_n) معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ب: $w_n = 2n - 3 + 2^n$

أ- التحقق ان: $w_n = u_n + v_n$ حيث (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_0

لدينا: $v_n = 2^n$ ، نضع: $u_n = 2n - 3$ ومنه: $w_n = u_n + v_n$

لدينا: $u_n = 2n - 3$ من الشكل $u_n = u_0 + nr$ إذا (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0 = -3$

ب- تبين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

لدينا: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ تعني: $S_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n)$

ومنه: $S_n = (u_0 + u_1 + \dots + u_n) + (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$ ومنه: $S_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) + v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

ومنه: $S_n = (n+1) \left(\frac{-3+2n-3}{2} \right) + 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ ومنه: $S_n = (n+1) \left(\frac{-6+2n}{2} \right) + (-1+2^{n+1})$

ومنه: $S_n = (n+1) \left(\frac{2(-3+n)}{2} \right) + 2^{n+1} - 1$ إذا: $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

بكالوريا 2020 الموضوع الثاني

التمرين 28

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الاول $u_0=5$ حيث: $u_0=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7}$

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = u_n - 3$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n

ج- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 \times \left(\frac{5}{7} \right)^n + 3$ وأحسب نهاية (u_n) .

(4) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n < \frac{7}{2}$

حل التمرين 28

المتتالية العددية (u_n) معرفة بجدها الاول u_0 حيث: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7}$

(1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$

لدينا: $u_0 = 5$ و $5 > 3$ إذا الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} > 3$

لدينا: $u_n > 3$ ومنه: $\frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7} > 3\left(\frac{5}{7}\right) + \frac{6}{7}$ ومنه: $\frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7} > \frac{15}{7} + \frac{6}{7}$ ومنه: $u_{n+1} > 3$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n > 3$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انها متقاربة

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7} - u_n = \frac{-2}{7}u_n + \frac{6}{7}$ ولدينا: $u_n > 3$ ومنه: $\frac{-2}{7}u_n + \frac{6}{7} < 3\left(\frac{-2}{7}\right) + \frac{6}{7}$

ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$ إذا (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 ($u_n > 3$) فهي متقاربة نحو العدد l

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 3$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا: $v_n = u_n - 3$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7} - 3 = \frac{5}{7}u_n - \frac{15}{7}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{5}{7}u_n - \frac{15}{7}$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{5}{7}(u_n - 3) = \frac{5}{7}v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{7}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n$

ج- استنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$ وحساب نهاية (u_n)

لدينا: $v_n = u_n - 3$ ومنه: $u_n = v_n + 3$ إذا: $u_n = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3 \right] = 3$

(4) تعيين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n < \frac{7}{2}$

$u_n < \frac{7}{2}$ تعني: $2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3 < \frac{7}{2}$ تعني: $2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n < \frac{7}{2} - 3$ تكافئ: $2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n < \frac{1}{2}$ ومنه: $\left(\frac{5}{7}\right)^n < \frac{1}{4}$

ومنه: $\ln\left(\frac{5}{7}\right)^n < \ln\frac{1}{4}$ ومنه: $n \ln\left(\frac{5}{7}\right) < \ln\frac{1}{4}$ ومنه: $n > \frac{-\ln 4}{\ln \frac{5}{7}}$ ومنه: $n > 4.12$ إذا: $n \geq 5$

إذا: أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n < \frac{7}{2}$ هي: $n = 5$

بكالوريا 2021 الموضوع الأول

التمرين 29



المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$.

(1) أ- أحسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2 .

ب- تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ج- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 1$.

أ- أحسب v_0 ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ب- بين ان (v_n) متتالية هندسية $\frac{1}{4}$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أ- حسب بدلالة n المجموع S_n .

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = n + \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

حل التمرين 29

المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$.

(1) أ- حساب الحدود u_0 ، u_1 و u_2 .

$$u_2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{2}{16} + 1 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} , \quad u_1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^1 + 1 = \frac{2}{4} + 1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} , \quad u_0 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^0 + 1 = 3$$

ب- التحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{-3}{4} \times 2\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{-3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ج- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $0 < u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ومنه: (u_n) متناقصة

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 1$.

أ- حساب v_0 ثم كتابة عبارة v_n بدلالة n .

$$v_n = u_n - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{و} \quad v_0 = u_0 - 1 = 3 - 1 = 2 \quad \text{ومنه:} \quad v_n = u_n - 1$$

ب- تبين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{4}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{4}$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
أ- حساب بدلالة n المجموع S_n .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = 2 \times \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] = \frac{8}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right]$$

ب- استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = n + \frac{11}{3} - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا: $v_n = u_n - 1$ ومنه: $u_n = v_n + 1$ ولدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ومنه: $S'_n = v_0 + 1 + v_1 + 1 + \dots + v_n + 1$ اذا:

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1(n+1)$$

$$= S_n + n + 1 = \frac{8}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] + n + 1$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + n + 1 = \frac{11}{3} + n - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

بكالوريا 2021 الموضوع الثاني

التمرين 30

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 حيث: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ج- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$.

أ- أحسب v_0 ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ب- بين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

أ- أحسب بدلالة n عبارة S_n .

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$



حل التمرين 30

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

لدينا: $u_0 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3 = 2 + 3 = 5$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي n أي: $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ ومنه: $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] + 2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 + 2 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$ ومنه:

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل n

ب- تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{-2}{3} \times 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ج- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$.

أ- حساب v_0 ثم كتابة عبارة v_n بدلالة n .

لدينا: $v_n = u_n - 3$ ومنه: $v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$ و $v_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 - 3 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ب- بتيان ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

لدينا: $v_{n+1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أ- حساب بدلالة n عبارة S_n .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = 2 \times \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = 3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

ب- استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ومنه: $S'_n = v_0 + 3 + v_1 + \dots + v_n + 3 = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 3(n+1)$

$$S'_n = 3 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right] + 3n + 3$$

$$S'_n = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \quad \text{إذا:}$$

$$= 3 - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} + 3n + 3$$

$$= -3 \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(\frac{1}{3} \right) + 3n + 6$$

بكالوريا 2022 الموضوع الأول

التمرين 31

$$\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 21 \\ u_4 + u_5 = 20 \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ وأساسها } r \text{ حيث:}$$

(1) أ- بين ان: $u_3 = 7$ و $r = 2$ ثم استنتج قيمة u_0

ب- أكتب u_n بدلالة n

ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$(2) (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = 3 \times 2^{2n}$$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) .

ب- أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$$(3) \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n: w_n = \frac{2}{3} v_n$$

أ- تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2^{u_n}$

ب- أحسب P_n حيث: $P_n = w_0 \times w_1 \times \dots \times w_{n-1}$

حل التمرين 31

$$\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 21 \\ u_4 + u_5 = 20 \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ وأساسها } r \text{ حيث:}$$

(1) أ- تبين ان: $u_3 = 7$ و $r = 2$

- لدينا: $u_2 + u_3 + u_4 = 21$ يعني حسب خاصية الوسط الحسابي نجد: $2u_3 + u_3 = 21$ ومنه: $3u_3 = 21$ إذا: $u_3 = \frac{21}{3} = 7$

$$- \text{ لدينا: } u_4 + u_5 = 20 \text{ تعني: } u_3 + r + u_3 + 2r = 20 \text{ ومنه: } 2u_3 + 3r = 20 \text{ ومنه: } r = \frac{20 - 2u_3}{3} = \frac{20 - 2 \times 7}{3} = 2$$

استنتج قيمة u_0

$$u_0 = u_3 - 3r = 7 - 3 \times 2 = 1 \quad \text{لدينا: } u_3 = u_0 + 3r \text{ ومنه:}$$

ب- كتابة u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{تعني: } u_n = 1 + 2n$$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \right) = n \left(\frac{2 + 2(n-1)}{2} \right) = n^2$$

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 \times 2^{2n}$

أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ ثم استنتاج طبيعة المتتالية (v_n) .

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ومنه: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 \times 2^{2(n+1)}}{3 \times 2^{2n}} = \frac{3 \times 2^{2n} \times 2^2}{3 \times 2^{2n}} = 4$

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = 3 \times \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = 4^n - 1$$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{2}{3} v_n$

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2^{u_n}$

لدينا: $w_n = \frac{2}{3} v_n = \frac{2}{3} (3 \times 2^{2n}) = 2 \times 2^{2n} = 2^{2n+1} = 2^{u_n}$ تعني: $w_n = \frac{2}{3} v_n$

ب- حساب P_n :

$$\begin{aligned} P_n &= w_0 \times w_1 \times \dots \times w_{n-1} \\ &= 2^{u_0} \times 2^{u_1} \times \dots \times 2^{u_{n-1}} \\ &= 2^{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}} = 2^{S_n} = 2^{n^2} \end{aligned}$$

بكالوريا 2022 الموضوع الثاني

التمرين 32

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -2$ و $u_{n+1} = 5u_n + 20$

(1) أ- أحسب u_1 و u_2

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 5 = 5(u_n + 5)$

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -5$

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 5$

تحقق أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 5 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 32

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -2$ و $u_{n+1} = 5u_n + 20$

(1) أ- حساب u_1 و u_2

$$u_2 = 5u_1 + 20 = 5(10) + 20 = 70 \quad , \quad u_1 = 5u_0 + 20 = 5(-2) + 20 = 10$$

ب- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 5 = 5(u_n + 5)$

$$u_{n+1} + 5 = 5u_n + 20 + 5 = 5u_n + 25 = 5(u_n + 5)$$

(2) أ-برهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > -5$

لدينا: $u_0 = -2$ و $-2 > -5$ اذا الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل العدد الطبيعي n أي $u_n > -5$ و نثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} > -5$

$u_{n+1} > -5$ تعني: $u_{n+1} + 5 > 0$ و $u_{n+1} + 5 = 5(u_n + 5)$ و $u_n + 5 > 0$ اذا: $u_{n+1} > -5$

وعليه الخاصية صحيحة من اجل $(n+1)$ فهي صحيحة من اجل n

ب-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لأن: $u_{n+1} - u_n = 5u_n + 20 - u_n = 4u_n + 20 = 4(u_n + 5) > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 5$

التحقق أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 5

$v_0 = u_0 + 5 = 3$ وحدها الأول $v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = 5u_n + 20 + 5 = 5(u_n + 5) = 5v_n$ ومنه: (v_n) هندسية أساسها 5

كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 5^n$$

(4) حساب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 - 5 + v_1 - 5 + \dots + v_n - 5 \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (5 + 5 + \dots + 5) \\ &= 3 \times \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} - 5(n+1) \\ &= \frac{-3}{4} (1 - 5^{n+1}) - 5n - 5 \end{aligned}$$

بكالوريا 2023 الموضوع الأول

التمرين 33

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5}$

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > -5$

(2) بين أن (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

(3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ $v_n = u_n + 3$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n , $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$, $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أحسب S_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $T_n = \frac{19}{2} - 3n - \frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

حل التمرين 33

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5}$

(1) برهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -3$

لدينا: $u_0 = 2$ و $2 > -3$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > -3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} > -3$

لدينا: $u_n > -3$ ومنه: $\frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5} > -3\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{6}{5}$ ومنه: $u_{n+1} > -3$ صحيحة

إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n > -3$

(2) تبيان أن (u_n) متناقصة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5} - u_n = -\frac{2}{5}u_n - \frac{6}{5}$ ولدينا: $u_n > -3$ ومنه: $-\frac{2}{5}u_n - \frac{6}{5} < -3\left(\frac{-2}{5}\right) - \frac{6}{5}$

ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$ إذا (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -3 ($u_n > -3$) فهي متقاربة نحو العدد l

(3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على: $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

$v_0 = u_0 + 3 = 5$ وحدها الأول: $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5} + 3 = \frac{3}{5}u_n + \frac{9}{5} = \frac{3}{5}(u_n + 3) = \frac{3}{5}v_n$

ت- عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3$

$$u_n = v_n - 3 = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3, \quad v_n = v_0 \times q^n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3 \right] = -3$$

(4) حساب S_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $T_n = \frac{19}{2} - 3n - \frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 5 \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} \right] = 5 \times \frac{5}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \right] = \frac{25}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \right]$$

لدينا: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 - 3 + v_1 - 3 + \dots + v_n - 3 = S_n - 3(n+1)$ ومنه:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{25}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} \right] - 3n - 3 \\ &= \frac{25}{2} - \frac{25}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} - 3n - 3 \\ &= \frac{25}{2} - \frac{6}{2} - \frac{25}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n \left(\frac{3}{5} \right) - 3n \\ &= \frac{19}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n - 3n \end{aligned}$$

بكالوريا 2023 الموضوع الثاني

التمرين 34

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 4$

(2) بين أن (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

(3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = u_n - 4$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -2 \left(\frac{1}{4} \right)^n + 4$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أحسب S_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = 4n + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n$

حل التمرين 34

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

(1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 4$

لدينا: $u_0 = 2$ و $2 < 4$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 4$ صحيحة وثبت صحة $u_{n+1} < 4$

لدينا: $u_n < 4$ ومنه: $\frac{1}{4}u_n + 3 < 4 \left(\frac{1}{4} \right) + 3 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} < 4$ ومنه: $u_{n+1} < 4$ صحيحة

إذا: حسب مبداء الاستدلال بالتراجع $u_{n+1} < 4$

(2) تبين أن (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = \frac{-3}{4}u_n + 3$ ولدينا: $u_n < 4$ ومنه: $\frac{-3}{4}u_n + 3 > 4 \left(\frac{-3}{4} \right) + 3 = -\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4} > 0$

ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ إذا (u_n) متزايدة

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 ($u_n < 4$) فهي متقاربة نحو العدد l



(3) (v_n) متتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 4$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

$$\frac{1}{4} \text{ هندسية أساسها } (v_n) \text{ المتتالية ومنه: } v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$$

$$v_0 = u_0 - 4 = 2 - 4 = -2 \text{ وحدها الأول:}$$

ب - تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

$$u_n = v_n + 4 = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$$

$$v_n = v_0 \times q^n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 \right] = 4$$

(4) حساب S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = -2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) = -2 \times \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] = \frac{-8}{3} + \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-8}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = 4n + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$T_n = v_0 + 4 + v_1 + 4 + \dots + v_n + 4 = S_n + 4(n+1) = \frac{-8}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4n + 4 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4n$$

بكالوريا 2024 الموضوع الأول

التمرين 35

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3}$

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n \leq 0$

ب) بين أن (u_n) متناقصة تماما.

(3) (v_n) متتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 2$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- احسب S_n بدلالة n ثم استنتج T_n بدلالة n



حل التمرين 35

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3}$

(1) حساب u_1 و u_2

$$u_2 = \frac{5}{6}u_1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{-5}{18} - \frac{6}{18} = \frac{-11}{18}$$

$$u_1 = \frac{5}{6}u_0 - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}(0) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

(2) أ) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n \leq 0$

لدينا: $u_0 = 0$ و $-2 < 0 \leq 0$ إذا الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $-2 < u_n \leq 0$ صحيحة ونثبت صحة $-2 < u_{n+1} \leq 0$

لدينا: $-2 < u_n \leq 0$ ومنه: $-2\left(\frac{5}{6}\right) - \frac{1}{3} < \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3} \leq 0\left(\frac{5}{6}\right) - \frac{1}{3}$ ومنه: $-2 < u_{n+1} \leq \frac{-1}{3} < 0$

ومنه: $-2 < u_{n+1} \leq 0$ إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $-2 < u_n \leq 0$

ب) تبين أن (u_n) متناقصة تماما.

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3} - u_n = -\frac{1}{6}u_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}(u_n + 2) < 0$ لأن: $u_n > -2$ تعني $u_n + 2 > 0$

ومنه: (u_n) متناقصة تماما.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 2$

أ- تبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$

ومنه: (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 2 = 0 + 2 = 2$

$$v_0 = u_0 + 2 = 0 + 2 = 2$$

ب- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2$

$$u_n = v_n - 2 = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2$$

$$v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2 \right] = -2$$

(4) حساب S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{6}} = 2 \times 6 \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \right] = 12 - 12\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n = 12 - 10\left(\frac{5}{6}\right)^n$$



استنتاج T_n بدلالة n

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 - 2 + v_1 - 2 + \dots + v_n - 2 \\ &= S_n - 2(n+1) \\ &= 12 - 10 \left(\frac{5}{6} \right)^n - 2n - 2 \\ &= 10 - 10 \left(\frac{5}{6} \right)^n - 2n \end{aligned}$$

بكالوريا 2024 الموضوع الثاني

التمرين 36



(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

ب- أثبت أن (u_n) متناقصة تماما.

(3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 2$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

ب- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم بين انه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6 \left(\frac{3}{4} \right)^n - 2$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و T_n بدلالة حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$, $T_n = \frac{1}{2+u_0} + \frac{1}{2+u_1} + \dots + \frac{1}{2+u_n}$

حل التمرين 36

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$

(1) حساب u_1 و u_2 .

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \left(\frac{5}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{15}{8} - \frac{1}{2} = \frac{11}{8}$$

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times 4 - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(2) أ- البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

لدينا: $u_0 = 4 > -2$ وإذا الخصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > -2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} > -2$

لدينا: $u_n > -2$ ومنه: $\frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} > -2 \left(\frac{3}{4} \right) - \frac{1}{2}$ ومنه: $u_{n+1} > -2$ إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n > -2$

(ب) اثبات أن (u_n) متناقصة تماما.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} - u_n = -\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(u_n + 2) < 0$$

إذا: المتتالية (u_n) متناقصة تماما

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N} : v_n = u_n + 2$

أ- تبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

وحدها الأول: $v_0 = u_0 + 2 = 4 + 2 = 6$

ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$

$$u_n = v_n - 2 = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2 \quad , \quad v_n = v_0 \times q^n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2 \right] = -2$$

(4) حساب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و T_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 6 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \right) = 6 \times 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right] = 24 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right]$$

- حساب: $T_n = \frac{1}{2+u_0} + \frac{1}{2+u_1} + \dots + \frac{1}{2+u_n}$

لدينا: $\frac{1}{2+u_n} = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{6\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{1}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

نضع: $w_n = \frac{1}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ حيث المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{4}{3}$ وحدها الأول: $w_0 = \frac{1}{6}$ نجد:

$$T_n = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{1}{6} \times (-3) \left[1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \right] = \frac{-1}{2} \left[1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \right]$$

بكالوريا 2025 الموضوع الأول

التمرين 37

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5}$

أ) أحسب u_1 و u_2 ثم نحدد اتجاه تغير (u_n)

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n < 4$

ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)





$$(2) \quad (v_n) \text{ لمتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } v_n = u_n - 4$$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ب) استنتج كتابة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$(3) \quad \text{نضع من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\text{بين أن: } S_n = 5 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} + 4n - 1$$

حل التمرين 37

$$(1) \quad (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ: } u_0 = 2 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5}$$

أ) حساب u_1 و u_2 ثم تخمين اتجاه تغير (u_n)

$$u_2 = \frac{3}{5}u_1 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5} \left(\frac{14}{5} \right) + \frac{8}{5} = \frac{42}{25} + \frac{8 \times 5}{5 \times 5} = \frac{82}{25}, \quad u_1 = \frac{3}{5}u_0 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5} \times 2 + \frac{8}{5} = \frac{6}{5} + \frac{8}{5} = \frac{14}{5}$$

نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2$ ومنه: (u_n) متزايدة

ب) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n: 2 \leq u_n < 4$

لدينا: $u_0 = 2$ و $4 > 2 \geq 2$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}: 2 \leq u_n < 4$ صحيحة ونثبت صحة $2 \leq u_{n+1} < 4$

$$\text{لدينا: } 2 \leq u_n < 4 \text{ ومنه: } 2 \leq \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5} < 4 \left(\frac{3}{5} \right) + \frac{8}{5} \text{ ومنه: } 2 \leq \frac{14}{5} \leq u_{n+1} < 4 \text{ ومنه:}$$

$2 \leq u_{n+1} < 4$ هي صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $2 \leq u_n < 4$ صحيحة

ج) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5} - u_n = \frac{-2}{5}u_n + \frac{8}{5} = \frac{-2}{5}(u_n + 4) > 0$$

ومنه: $\frac{-2}{5}(u_n + 4) > 0$ إذا (u_n) متزايدة

$$(2) \quad (v_n) \text{ لمتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } v_n = u_n - 4$$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5} - 4 = \frac{3}{5}u_n - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}(u_n - 4) = \frac{3}{5}v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 4 = 2 - 4 = -2$

- كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

(ب) استنتاج كتابة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-2 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4 \right] = 4 \quad , \quad u_n = v_n + 4 = -2 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4$$

(3) تبيان أن: $S_n = 5 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} + 4n - 1$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 + 4 + v_1 + 4 + \dots + v_n + 4 \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (4 + 4 + \dots + 4) \\ &= -2 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} + 4(n+1) \\ &= -2 \times \frac{5}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} \right] + 4(n+1) \\ &= -5 + 5 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} + 4n + 4 \\ &= 5 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} + 4n - 1 \end{aligned}$$

بكالوريا 2025 الموضوع الثاني

التمرين 38

(1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2}{5}x + 1$

- حدد اتجاه تغير الدالة f ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = x$

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$

أ) أحسب u_1 ثم عين اتجاه تغير (u_n)

ب) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < \frac{5}{3}$

(3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

(ب) استنتج كتابة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

بين أن: $S_n = \frac{4}{9} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{9}$

حل التمرين 38

(1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2}{5}x + 1$

- تحديد اتجاه تغير الدالة f

لدينا: $a = \frac{2}{5} > 0$ ومنه الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = x$

$$f(x) = x \text{ تعني: } f(x) - x = 0 \text{ ومنه: } \frac{2}{5}x + 1 - x = 0 \text{ ومنه: } \frac{-3}{5}x + 1 = 0 \text{ ومنه: } \frac{-3}{5}x = -1$$

$$\text{وعليه: } x = \frac{5}{3} \text{ إذا: } S = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$

أ) حساب u_1 ثم تعيين اتجاه تغير (u_n)

$$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1 = \frac{2}{5} \times 1 + 1 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}$$

- بما أن f متزايدة و $u_1 - u_0 > 0$ إذا (u_n) متزايدة

ب) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < \frac{5}{3}$

لدينا: $u_0 = 1$ و $1 \leq 1 < \frac{5}{3}$ إذا الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n < \frac{5}{3}$ صحيحة ونثبت صحة $1 \leq u_{n+1} < \frac{5}{3}$

$$\text{لدينا: } 1 \leq u_n < \frac{5}{3} \text{ ومنه: } \left(\frac{2}{5}\right)1 + 1 \leq \left(\frac{2}{5}\right)u_n + 1 < \left(\frac{2}{5}\right)\frac{5}{3} + 1 \text{ ومنه: } \frac{7}{5} \leq \left(\frac{2}{5}\right)u_n + 1 < \frac{5}{3} \text{ ومنه: } 1 \leq u_{n+1} < \frac{5}{3}$$

$1 \leq u_n < \frac{5}{3}$ هي صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $1 \leq u_n < \frac{5}{3}$ صحيحة

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{5}v_n$$

$$v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 1 - \frac{5}{3} = \frac{-2}{3}$$

- كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$$



ب) استنتاج كتابة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{-2}{3} \right) \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{5}{3} \right] = \frac{5}{3} \quad , \quad u_n = v_n + \frac{5}{3} = \left(\frac{-2}{3} \right) \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{5}{3}$$

4) تبين أن: $S_n = \frac{4}{9} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{9}$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 + \frac{5}{3} + v_1 + \frac{5}{3} + \dots + v_n + \frac{5}{3} \\ &= v_0 + v_1 + \dots + v_n + \frac{5}{3}(n+1) \\ &= \frac{-2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} \\ &= \frac{-2}{3} \times \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right] + \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} \\ &= \frac{-10}{9} + \frac{10}{9} \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{9} \end{aligned}$$



42 ماریں محلول

التمرين 01

- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n$.
- أحسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_5 ، u_7 .
 - أثبت أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.
 - هل العدد $\frac{193}{6}$ حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ ما رتبته؟
 - أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 01

- (1) حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_5 ، u_7 .

$$u_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(7) = \frac{3+14}{6} = \frac{17}{6} , \quad u_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(5) = \frac{3+10}{6} = \frac{13}{6} , \quad u_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1) = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} , \quad u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(0) = \frac{1}{2}$$

- (2) اثبات أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

$$r = \frac{1}{3} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(n+1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}$$

- (3) هل العدد $\frac{193}{6}$ حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ ما رتبته؟

$$u_n = \frac{193}{6} \text{ تعني: } \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n = \frac{193}{6} \text{ ومنه: } \frac{1}{3}n = \frac{193}{6} - \frac{1 \times 3}{2 \times 3} \text{ ومنه: } \frac{1}{3}n = \frac{190}{6} \text{ ومنه: } n = \frac{190}{6} \times 3 = 95$$

ومنه: العدد $\frac{193}{6}$ حد من حدود (u_n) رتبته 96

- (4) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n \right) = \frac{n+1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}n \right)$$

التمرين 02

- (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_1 = 5$ و $r = -2$

- أكتب عبارة u_n بدلالة n .
- هل العدد (-171) حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ ما رتبته؟
- أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$



حل التمرين 02

(1) عبارة u_n بدلالة n .

$$u_n = u_p + (n-p)r \quad \text{تعني: } u_n = u_1 + (n-1)(-2) = 5 - 2n + 2 \quad \text{إذا: } \boxed{u_n = 7 - 2n}$$

(2) هل العدد (-171) حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ ما رتبته؟

$$u_n = -171 \quad \text{تعني: } 7 - 2n = -171 \quad \text{ومنه: } n = \frac{-171 - 7}{-2} = 89 \quad \text{إذا العدد } (-171) \text{ حد من حدود المتتالية } (u_n) \text{ رتبته } 89$$

(3) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(5 + 7 - 2n) = \frac{n}{2}(12 - 2n) = \frac{n}{2} \times 2(6 - n) = 6n - n^2$$

التمرين 03



(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_{22} = -65$ و $u_{35} = -104$

(1) عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول.

(2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب المجموع: $S = u_5 + u_6 + \dots + u_n$

حل التمرين 03

(1) تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول.

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p} = \frac{u_{35} - u_{22}}{35 - 22} = \frac{-104 + 65}{13} = -3 \quad \text{لدينا: } u_n = u_p + (n-p)r \quad \text{ومنه: } u_n = u_p + (n-p)(-3)$$

$$u_0 = u_{22} - 22r = -65 - 22(-3) = 1 \quad \text{ومنه: } u_{22} = u_0 + 22r$$

(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

$$\boxed{u_n = 1 - 3n} \quad \text{تعني: } u_n = u_0 + nr$$

(3) حساب المجموع: $S = u_5 + u_6 + \dots + u_n$

$$S = u_5 + u_6 + \dots + u_n = \frac{n-5+1}{2}(u_5 + u_n) = \frac{n-4}{2}(-14 + 1 - 3n) = \frac{n-4}{2}(-13 - 3n)$$

التمرين 04

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $3u_7 + u_{20} = 275$ و $r = 7$

(1) عين الحد الأول للمتتالية (u_n)

(2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 04

(1) تعيين الحد الأول للمتتالية (u_n)

$$u_{20} = u_0 + 20(7) = u_0 + 140 \quad , \quad u_7 = u_0 + 7 \times 7 = u_0 + 49 \quad \text{ومنه:} \quad u_n = u_0 + nr$$

نعوض قيمة الحدين في المعادلة نجد:

$$4u_0 + 287 = 275 \quad \text{ومنه:} \quad 3u_0 + 147 + u_0 + 140 = 275 \quad \text{ومنه:} \quad 3(u_0 + 49) + u_0 + 140 = 275$$

$$u_0 = \frac{275 - 287}{4} = -3 \quad \text{ومنه:}$$

(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

$$u_n = -3 + 7n$$

(3) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)}{2}(-3 - 3 + 7n) = \frac{(n+1)}{2}(-6 + 7n)$$

التمرين 05

 (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_5 + u_9 + u_{11} = 105$ و $u_1 = -9$ (1) عين أساس المتتالية (u_n) (2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .(3) أحسب المجموع: $S = u_1 + \dots + u_{n-1}$

حل التمرين 05

(1) تعيين أساس المتتالية (u_n)

$$u_{11} = u_1 + (11-1)r = -9 + 10r$$

،

$$u_9 = u_1 + (9-1)r = -9 + 8r$$

،

$$u_5 = u_1 + (5-1)r = -9 + 4r$$

ومنه: $u_n = u_p + (n-p)r$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$-9 + 4r - 9 + 8r - 9 + 10r = 105 \quad \text{ومنه:} \quad 22r = 105 + 27 \quad \text{ومنه:} \quad r = \frac{132}{22} = 6$$

(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

$$u_n = -9 + (n-1)(6) \quad \text{ومنه:} \quad u_n = -15 + 6n$$

(3) حساب المجموع: $S = u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$S = u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n-1+1}{2}(-9 - 15 + 6(n-1)) = \frac{n}{2}(-30 + 6n) = n(-15 + 3n)$$

التمرين 06

$$\begin{cases} u_5 + u_{13} = 40 \\ u_{10} + u_{17} = 49 \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية حسابية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ:}$$

- (1) عين أساس المتتالية r وحدها الأول u_0 .
- (2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .
- (3) أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

حل التمرين 06

- (1) تعيين أساس المتتالية r وحدها الأول u_0 .

لدينا: $u_5 = u_0 + 5r$ ، $u_{13} = u_0 + 13r$ ، $u_{10} = u_0 + 10r$ ، $u_{17} = u_0 + 17r$ بالتعويض في المعادلتين نجد:

$$\begin{cases} 2u_0 + 18r = 40 \\ 2u_0 + 27r = 49 \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} u_0 + 5r + u_0 + 13r = 40 \\ u_0 + 10r + u_0 + 17r = 49 \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } -9r = -9 \quad \text{إذا: } \boxed{r=1}$$

$$\text{نعوض قيمة الأساس في المعادلة نجد: } 2u_0 + 18 = 40 \quad \text{ومنه: } 2u_0 = 22 \quad \text{إذا: } \boxed{u_0 = 11}$$

- (2) نكتب عبارة u_n بدلالة n .

$$\boxed{u_n = 11 + n} \quad \text{يعني: } u_n = u_0 + nr$$

- (3) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(12 + 11 + n) = \frac{n}{2}(23 + n)$$

التمرين 07

$$\begin{cases} u_6 + u_7 + u_8 = 15 \\ u_9 + u_{11} = 22 \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية حسابية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ:}$$

- (1) عين أساس المتتالية r وحدها الأول u_0 .
- (2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .
- (3) أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

حل التمرين 07

- (1) تعيين أساس المتتالية r وحدها الأول u_0 .

$$\bullet \text{ لدينا: } u_6 + u_7 + u_8 = 15$$

$$\text{وحسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: } u_6 + u_8 = 2u_7 \quad \text{ومنه: } 2u_7 + u_7 = 15 \quad \text{ومنه: } 3u_7 = 15 \quad \text{إذا: } \boxed{u_7 = 5}$$

$$\text{ولدينا: } u_9 + u_{11} = 2u_{10} = 22 \quad \text{ومنه: } \boxed{u_{10} = 11} \quad \text{إذا: } \boxed{r = \frac{u_{10} - u_7}{10 - 7} = \frac{11 - 5}{3} = 2}$$

$$\bullet \text{ لدينا: } u_7 = u_0 + 7r = 5 \quad \text{ومنه: } u_0 + 7(2) = 5 \quad \text{إذا: } \boxed{u_0 = 5 - 14 = -9}$$



(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

$$u_n = -9 + 2n$$

(3) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(-7 - 9 + 2n) = \frac{n}{2}(-16 + 2n) = n(-8 + n)$$

التمرين 08

(1) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ وأساسها 2.أ- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .ب- احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.(2) (v_n) متتالية هندسية حيث $v_5 = 32$ و $v_8 = 256$.أ- عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول v_0 ، ثم اكتب حدها العام v_n بدلالة n .ب- احسب المجموع $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.(3) نعتبر المتتالية العددية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2^n + 2n + 1$.احسب بدلالة n ، المجموع $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

حل التمرين 08

(1) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ وأساسها 2.أ) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$u_n = u_0 + nr = 1 + 2n$$

ب) حساب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(1 + 1 + 2n) = (n+1)^2$$

(2) (v_n) متتالية هندسية حيث $v_5 = 32$ و $v_8 = 256$.أ) تعيين أساس هذه المتتالية وحدها الأول v_0 .

$$\text{لدينا: } v_8 = v_5 \times q^3 \text{ ومنه: } q^3 = \frac{v_8}{v_5} = \frac{256}{32} = 8 \text{ اذا: } q = 2$$

$$\text{ولدينا: } v_5 = v_0 \times q^5 \text{ ومنه: } v_0 = \frac{v_5}{q^5} = \frac{32}{32} = 1$$

* كتابة حدها العام v_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \times q^n \text{ أي: } v_n = 2^n$$

ب) حساب المجموع $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$



(3) نعتبر المتتالية العددية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2^n + 2n + 1$

حساب بدلالة n ، المجموع $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

$$\boxed{T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = S_n + S'_n = (n+1)^2 + 2^{n+1} - 1}$$

نلاحظ أن: $w_n = u_n + v_n$ أي أن:

التمرين 09

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 40 \\ u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 150 \end{cases}$

(1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) أحسب الأساس r وال حد الأول u_0 ثم أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) هل 2015 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟

(4) أ- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ب- عين قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 330$

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{2n+1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أحسب بدلالة n المجموع: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$



حل التمرين 09

(1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 .

لدينا: $u_1 + 2u_2 + u_3 = 40$ وحسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $u_1 + u_3 = 2u_2$ بالتعويض في المعادلة نجد:

$$\boxed{u_2 = 10} \text{ ومنه: } 4u_2 = 40$$

بتعويض قيمة u_2 في جملة المعادلتين نجد: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 & \dots\dots\dots(1) \\ u_1^2 + u_3^2 = 250 & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$ من (1) نجد: $\boxed{u_3 = 20 - u_1}$ بالتعويض في (2) نجد:

$$2u_1^2 - 40u_1 - 150 = 0 \text{ ومنه: } u_1^2 + 400 - 40u_1 + u_1^2 - 250 = 0 \text{ ومنه: } u_1^2 + (20 - u_1)^2 = 250$$

$$\text{ومنه: } u_1^2 - 20u_1 - 75 = 0 \text{ تعني: } 2(u_1^2 - 20u_1 - 75) = 0$$

ومنه: $\Delta = 100$ إذا: $\boxed{u_1 = 5}$ أو $u_1 = 15$ مرفوض لان المتتالية متزايدة

نعوض قيمة u_1 في (1) نجد: $u_3 = 20 - u_1 = 20 - 5$ أي: $\boxed{u_3 = 15}$

(2) حساب الأساس r وال حد الأول u_0 ثم كتابة عبارة u_n بدلالة n .

$$\boxed{u_n = 5n} \text{ ، } \boxed{u_0 = u_1 - r = 4 - 5 = 0} \text{ ، } \boxed{r = u_2 - u_1 = 10 - 5 = 5}$$

(3) هل 2015 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟

$u_n = 2015$ تعني: $5n = 2015$ ومنه: $n = \frac{2015}{5} = 403$ ومنه: العدد 2015 حد من حدود المتتالية (u_n)

(4) أ) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1) \times 5n}{2} = \frac{5n^2 + 5n}{2}$$

(ب) تعيين قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 330$

$$S_n = 330 \text{ تعني: } \frac{5n^2 + 5n}{2} = 330 \text{ أي: } 5n^2 + 5n - 660 = 0 \text{ ومنه: } 5(n^2 + n - 132) = 0 \text{ ومنه:}$$

$$n^2 + n - 132 = 0 \text{ ومنه: } \Delta = 529 \text{ ومنه: } n = -12 \text{ (مرفوض) أو } n = 11$$

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{2n+1}$ (أ) تبيان أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_n = u_{2n+1} = 5(2n+1) = 10n+5$$

$$v_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+2+1} = u_{2n+3} = 5(2n+3) = 10n+15 = 10n+5+10 = v_n + 10$$

$$\text{ومنه: } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } r=10 \text{ وحدها الأول } v_0 = u_{2(0)+1} = u_1 = 5$$

(ب) حساب بدلالة n المجموع: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{n+1}{2}(5+10n+5) = (n+1)(5+5n)$$

التمرين 10



$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بالعلاقة: } u_n = -6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(1) أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.(2) أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_5 .(3) أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 10

(1) اثبات أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$u_0 = -6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 = -6 \text{ وحدها الأول } q = \frac{1}{3} \text{ ومنه: } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{3} \text{ وحدها الأول } u_0 = -6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 = -6$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{-6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$$

(2) حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_5 .

$$u_5 = -6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = -6 \times \frac{1}{243} = \frac{-6}{243} = \frac{-2}{81} , u_2 = -6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -6 \times \frac{1}{9} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3} , u_1 = -6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = -2$$

(3) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = -2 \times \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = -3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

التمرين 11

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $q=2$ و $v_0=8$

(1) أحسب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 .

(2) أكتب عبارة v_n بدلالة n .

(3) أحسب المجموع: $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

حل التمرين 11

(1) حساب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 .

$$v_3 = v_2 \times q = 32 \times 2 = 64 \quad , \quad v_2 = v_1 \times q = 16 \times 2 = 32 \quad , \quad v_1 = v_0 \times q = 8 \times 2 = 16$$

(2) كتابة عبارة v_n بدلالة n .

$$v_n = 8 \times 2^n \quad \text{تعي: } v_n = v_0 \times q^n$$

(3) حساب المجموع: $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = 16 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -16(1-2^n)$$

التمرين 12

لتكن (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بحيث: $u_2 = \frac{9}{2}$ و $u_5 = \frac{243}{2}$

(1) عين أساس المتتالية q وحدها الأول u_0 .

(2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 12

(1) تعيين أساس المتتالية q وحدها الأول u_0 .

$$q^3 = \frac{243}{2} \times \frac{2}{9} = 27 \quad \text{ومنه: } q^3 = 27 \quad \text{ومنه: } q = 3$$

$$u_5 = u_2 \times q^{5-2} \quad \text{ومنه: } u_5 = \frac{9}{2} \times q^3 = \frac{9}{2} \times 27 = \frac{243}{2}$$

(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

$$u_n = \frac{3}{2} \times 3^n$$

(3) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3} \right) = \frac{-3}{4} (1-3^{n+1})$$

التمرين 13

(w_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_0 \times w_2 = 64$ و $w_0 + w_1 = 12$

- (1) أحسب w_1 ثم w_0 .
- (2) استنتج أساس المتتالية (w_n) .
- (3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: w_n = 4 \times 2^n$ ثم أحسب الحد الخامس للمتتالية (w_n) .
- (4) أحسب المجموع: $S = w_2 + w_3 + \dots + w_n$

حل التمرين 13

(1) حساب w_1 ثم w_0

لدينا: $w_0 \times w_2 = 64$ ومنه حسب خاصية الوسط الهندسي نجد: $w_0 \times w_2 = w_1^2 = 64$ ومنه: $w_1 = \sqrt{64} = 8$ (لان الحدود موجبة)

لدينا: $w_0 + w_1 = 12$ ومنه: $w_0 = 12 - w_1 = 12 - 8 = 4$

(2) استنتاج أساس المتتالية (w_n) .

$$q = \frac{w_1}{w_0} = \frac{8}{4} = 2$$

(3) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: w_n = 4 \times 2^n$ ثم حساب الحد الخامس للمتتالية (w_n) .

$$w_4 = 4 \times 2^4 = 64 \quad , \quad w_n = w_0 \times q^n = 4 \times 2^n$$

(4) حساب المجموع: $S = w_2 + w_3 + \dots + w_n$

$$S = w_2 + w_3 + \dots + w_n = w_2 \left(\frac{1 - 2^{n-2+1}}{1 - 2} \right) = 16 \left(\frac{1 - 2^{n-1}}{-1} \right) = -16(1 - 2^{n-1})$$

التمرين 14

نعتبر (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_0 = e$ و $v_7 - 8v_4 = 0$

(1) أثبت أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = 2$ ثم أكتب v_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

(2) أحسب بدلالة n الجداء A_n حيث: $A_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

(3) نعتبر (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \ln(v_n)$

أ- برهن أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة w_n بدلالة n .

ج- أحسب المجموع: $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

حل التمرين 14

نعتبر (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_0 = e$ و $v_7 - 8v_4 = 0$

(1) اثبات أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = 2$

لدينا: $v_7 - 8v_4 = 0$ ونعلم أن: $v_n = v_0 \times q^n = e \times q^n$ ومنه: $v_7 = e \times q^7$ و $v_4 = e \times q^4$ بالتعويض نجد:

$$e \times q^7 - 8 \times e \times q^4 = 0 \quad \text{ومنه:} \quad e \times q^4 (q^3 - 8) = 0 \quad \text{ومنه:} \quad q^3 - 8 = 0 \quad \text{ومنه:} \quad q^3 = 8 \quad \text{إذا:} \quad \boxed{q = 2}$$

- كتابة v_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e \times 2^n = +\infty$$

$$v_n = v_0 \times q^n = e \times 2^n$$

(2) حساب بدلالة n الجداء A_n حيث: $A_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$\begin{aligned} A_n &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ &= e \times 2^0 \times e \times 2^1 \times \dots \times e \times 2^n \\ &= e \times e \times \dots \times e \times 2^{0+1+2+\dots+n} \\ &= e^{n+1} \times 2^{\frac{(n+1)n}{2}} \end{aligned}$$

(3) نعتبر (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \ln(v_n)$

أ- برهان أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \\ &= \ln(e \times 2^{n+1}) - \ln(e \times 2^n) \\ &= \ln e + \ln 2^{n+1} - \ln e - \ln 2^n \\ &= 1 + \ln 2^n + \ln 2 - 1 - \ln 2^n \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

ومنه (w_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول $w_0 = \ln(v_0) = \ln e = 1$

ب- كتابة عبارة w_n بدلالة n .

$$w_n = w_0 + nr = 1 + n \ln 2$$

ج- حساب المجموع: $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{n+1}{2} (w_0 + w_n) \\ &= \frac{n+1}{2} (1 + 1 + n \ln 2) \\ &= \frac{n+1}{2} (2 + n \ln 2) \end{aligned}$$



التمرين 15

نعتبر المتتالية (u_n) الهندسية حدودها موجبة حيث: $\ln(u_2) - \ln(u_4) = 4$ و $\ln(u_1) + \ln(u_5) = -12$

(1) بين أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = \frac{1}{e^2}$ ثم عين حدها الأول u_0 .

(2) اكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

ب) احسب المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

حل التمرين 15

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $\ln(u_2) - \ln(u_4) = 4$ و $\ln(u_1) + \ln(u_5) = -12$

(1) تبين أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = \frac{1}{e^2}$

لدينا: $\ln(u_2) - \ln(u_4) = 4$ ومنه: $\ln\left(\frac{u_2}{u_4}\right) = 4$ ومنه: $\frac{u_2}{u_4} = e^4$ ومنه: $\frac{u_2}{u_2 \times q^2} = e^4$ ومنه: $\frac{1}{q^2} = e^4$ ومنه: $q^2 = \frac{1}{e^4}$

إذا: $q = \frac{1}{e^2}$ ، $q = \frac{-1}{e^2}$ (مرفوض)

تعيين حدها الأول u_0 .

لدينا: $\ln(u_1) + \ln(u_5) = -12$ ومنه: $\ln(u_1 \times u_5) = -12$ ومنه: $u_1 \times u_5 = e^{-12}$ ومنه: $u_0 \times q \times u_0 \times q^4 = e^{-12}$

ومنه: $u_0^2 \times q^5 = e^{-12}$ ومنه: $u_0^2 \times \frac{1}{e^{10}} = e^{-12}$ ومنه: $u_0^2 = 1$ إذا: $u_0 = 1$ أو $u_0 = -1$ (مرفوض)

(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_n = \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$$

(3) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}$$

(4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

أ) تبين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.



$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln u_{n+1} + \ln u_{n+2} - \ln u_n - \ln u_{n+1} \\ &= \ln u_{n+1} - \ln u_{n+1} + \ln u_{n+2} - \ln u_n \\ &= \ln \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}} + \ln \frac{u_{n+2}}{u_n} \\ &= \ln \frac{u_n \times q^2}{u_n} = \ln q^2 = \ln e^{-4} = -4 \end{aligned}$$

(ب) حساب المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$\begin{aligned} S'_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= (n+1) \frac{v_0 + v_n}{2} = (n+1) \frac{-2 - 2 - 4n}{2} \\ &= (n+1)(-2 - 2n) \end{aligned}$$



التمرين 16

تكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ وحدها الأول $u_0 = 2$.

- (1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3
- (2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 3$
- (3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.
- (4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$
 - أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0 .
 - ب- استنتج عبارة v_n بدلالة n ، ثم u_n .
 - ج- عين نهاية المتتالية (u_n) .
 - د- أحسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 16

(1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\right) + 2 = \frac{8}{9} + \frac{2 \times 9}{9} = \frac{26}{9}$$

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3}(2) + 2 = \frac{2}{3} + \frac{2 \times 3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{1}{3}\left(\frac{26}{9}\right) + 2 = \frac{26}{27} + \frac{2 \times 27}{27} = \frac{80}{27}$$

(2) البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 3$

لدينا: $u_0 = 2 < 3$ وإذا الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} < 3$

لدينا: $u_n < 3$ ومنه: $u_{n+1} < 3$ صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n < 3$

(3) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة.

$$\frac{-2}{3} < 0 \text{ و } u_n - 3 < 0 \text{ تعني: } u_n < 3 \text{ لأن: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \frac{-2}{3}u_n + 2 = \frac{-2}{3}(u_n - 3) > 0$$

• بمان (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة نحو 3

(4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$

أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0 .

$$q = \frac{1}{3} \text{ أساسها } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{3} \text{ ومنه: } v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$$

$$v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1 \text{ وحدها الأول:}$$

ب) استنتاج عبارة v_n بدلالة n ، ثم u_n .

$$v_n = v_0 \times q^n \text{ تعني: } v_n = -1 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$u_n = v_n + 3 \text{ تعني: } v_n = u_n - 3 \text{ أي: } u_n = -1 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3$$

ج) تعيين نهاية المتتالية (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-1 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3 \right] = 3$$

د) حساب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 + 3 + v_1 + 3 + \dots + v_n + 3 \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 3 + 3 + \dots + 3 \\ &= -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + 3(n+1) \\ &= \frac{-2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right] + 3(n+1) \end{aligned}$$

التمرين 17

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_{n+1} = 0.6u_n - 1.2$ و $u_0 = 2$

1) أ- برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -3$

ج- بين أن (u_n) متقاربة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 3$.

أ- برهن أن (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها.

ب- أحسب بدلالة n عبارة الحد العام v_n بدلالة n .



(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n .

ب- استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ج- أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

حل التمرين 17

(1) أ) البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة معناه: $u_{n+1} < u_n$

لدينا: $u_{n+1} = 0.6u_n - 1.2$ و $u_0 = 2$ ومنه: $u_1 = 0.6u_0 - 1.2 = 0.6 \times 2 - 1.2 = 0$

$u_0 > u_1$ ومنه: الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض ان $u_{n+1} < u_n$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+2} < u_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} < u_n$ ومنه: $0.6u_{n+1} - 1.2 < 0.6u_n - 1.2$ ومنه: $u_{n+2} < u_{n+1}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا هي صحيحة من أجل n وبالتالي (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -3$

لدينا: $u_0 = 2 > -3$ و إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > -3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} > -3$

لدينا: $u_n > -3$ ومنه: $0.6u_n - 1.2 > -3(0.6) - 1.2 = -3$ ومنه: $u_{n+1} > -3$ صحيحة إذا: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n > -3$

ج) تبين أن (u_n) متقاربة.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -3 فهي متقاربة نحو l

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 3$

أ) البرهان أن (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 0.6u_n - 1.2 + 3 = 0.6u_n + 1.8 = 0.6(u_n + 3) = 0.6v_n$$

إذا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 0.6$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$

ب) حساب بدلالة n عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \times q^n = 5(0.6)^n$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

أ) حساب المجموع S_n بدلالة n .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 5 \times \frac{1 - (0.6)^{n+1}}{1 - 0.6} = 12.5 [1 - (0.6)^{n+1}]$$

ب) استنتاج بدلالة n المجموع: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S'_n = v_0 - 3 + v_1 - 3 + \dots + v_n - 3$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 3 - 3 - \dots - 3$$

$$= S_n - 3(n+1)$$

$$S'_n = 12.5 [1 - (0.6)^{n+1}] - 3(n+1) \quad \text{إذا:}$$



(ج) حساب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [5(0.6)^n - 3] = -3 \quad \text{إذنا: } u_n = 5(0.6)^n - 3 \quad \text{ومنه: } u_n = v_n - 3$$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 3

التمرين 18

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$ (1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.(ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .(3) أحسب المجموعين S_n و T_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ (4) أحسب نهاية S_n و T_n لما n يؤول $+\infty$.

حل التمرين 18

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$ (1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_2 = -\frac{2}{3}u_1 + 5 = -\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right) + 5 = \frac{-10}{9} + \frac{5 \times 9}{9} = \frac{35}{9} \quad , \quad u_1 = -\frac{2}{3}u_0 + 5 = -\frac{2}{3}(5) + 5 = \frac{-10}{3} + \frac{5 \times 3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = -\frac{2}{3}u_2 + 5 = -\frac{2}{3}\left(\frac{35}{9}\right) + 5 = \frac{-70}{27} + \frac{5 \times 27}{27} = \frac{65}{27}$$

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.(أ) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$\frac{-2}{3} \quad \text{ومنه: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{-2}{3}$$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$$

(ب) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \left(\frac{-2}{3}\right)^n \quad , \quad \text{لدينا: } u_n = v_n + 3 \quad \text{تعني: } u_n = 2 \left(\frac{-2}{3}\right)^n + 3$$

(3) حساب المجموعين S_n و T_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned}
 S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\
 &= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{2}{3}} \\
 &= 2 \times \frac{3}{5} \left[1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} \right] \\
 &= \frac{6}{5} \left[1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\
 &= v_0 + 3 + v_1 + 3 + \dots + v_n + 3 \\
 &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (3 + 3 + \dots + 3) \\
 &= S_n + 3(n+1) \\
 &= \frac{6}{5} \left[1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} \right] + 3(n+1)
 \end{aligned}$$

(4) حساب نهاية S_n و T_n لما n يؤول $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{6}{5} \left[1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} \right] + 3(n+1) \right] = +\infty , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{5} \left[1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} \right] = \frac{6}{5}$$

التمرين 19

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ والعلاقة $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

(1) أحسب كلا من u_1 ، u_2 .

(2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$

(أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، فإن $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

(ب) استنتج طبيعة المتتالية (v_n) معينا أساسها وحددها الأول v_0

(ت) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

(3) أحسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ بدلالة n .

(4) عبر عن u_n بدلالة S_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -3 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(5) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

حل التمرين 19

(1) حساب الحدين u_1 ، u_2

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 - 1 = \frac{2}{3} \times 3 - 1 = \frac{-1}{3} , \quad u_1 = \frac{2}{3}u_0 - 1 = \frac{2}{3} \times 3 - 1 = 1$$

(2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$

(أ) تبين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، فإن $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$



لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ تعني:

$$\begin{aligned} v_n &= u_n - u_{n-1} \\ &= \frac{2}{3}u_{n-1} - 1 - u_{n-1} \\ &= -\frac{1}{3}u_{n-1} - 1 \end{aligned}$$

ولدينا: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$ تعني:

$$u_n = \frac{2}{3}u_{n-1} - 1$$

ومنه:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}u_{n-1} - 1\right) - 1 \\ &= -\frac{2}{9}u_{n-1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}u_{n-1} - 1\right) = \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

(ب) استنتاج طبيعة المتتالية (v_n) معيناً أساسها وحدها الأول v_0 لدينا: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{v_1}{q} = \frac{-2}{\frac{2}{3}} = -2 \times \frac{3}{2} = -3 \quad \text{إذا:} \quad v_1 = u_1 - u_0 = 1 - 3 = -2$$

(ت) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = -3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3) حساب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ بدلالة n .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = -3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = -3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = -9 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] = -9 + 9 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n = -9 + 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(4) التعبير عن u_n بدلالة S_n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -3 + 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$u_n = -3 + 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

بالجمع طرفاً بطرف نجد: $S = -3 - u_0 + u_n$ ومنه: $S = -3 - u_0 + u_n$ ومنه: $u_n = S + 3 + u_0$ ومنه: $u_n = -3 + 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (5) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

$$\bullet \quad u_{n+1} - u_n = -3 + 6 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 3 - 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -2 \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0$$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-3 + 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = -3$$



التمرين 20

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 3u_n - 4$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 2$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) أحسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln(u_n - 2)$

(أ) بين أن (w_n) متتالية حسابية ثم عبر عن w_n بدلالة n

(ب) أحسب المجموع: $S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

حل التمرين 20

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 2$

نسمي $P(n)$ الخاصية: $u_n > 2$

لدينا: $u_0 = 3$ و $3 > 2$ ومنه الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n=0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل العدد الطبيعي n

نفرض صحة الخاصية من أجل العدد الطبيعي (n) أي: $u_n > 2$

نثبت صحة الخاصية من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} > 2$

لدينا: $u_n > 2$ ومنه: $3u_n - 4 > 3 \times 2 - 4 = 2$ و $u_{n+1} = 3u_n - 4 > 2$ إذا الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ ومنه حسب مبدأ

الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل n أي: $u_n > 2$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0$ لأن: $u_n > 2$ أي: $u_n - 2 > 0$ ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$

(أ) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 وحدها الأول:

$$v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$$

(ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = v_n + 2 = 3^n + 2 \quad , \quad v_n = v_0 \times q^n = 3^n$$

(ج) حساب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned}
 S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\
 &= v_0 + 2 + v_1 + 2 + \dots + v_n + 2 \\
 &= \frac{1-3^{n+1}}{1-3} + 2(n+1) \\
 &= \frac{1-3^{n+1}}{-2} + 2(n+1)
 \end{aligned}$$

(4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln(u_n - 2)$
 أ) تبين أن (w_n) متتالية حسابية ثم عبر عن w_n بدلالة n

$$w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln \frac{3^{n+1}}{3^n} = \ln 3$$

ومنه: (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 3$ وحدها الأول $w_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln 1 = 0$ إذا: $w_n = n \ln 3$

(ب) حساب المجموع: $S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

$$S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = \frac{n+1}{2} (n \ln 2)$$

التمرين 21

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{7}{10}u_n + 6$

(1) احسب u_1 و u_2 (2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > 20$ (ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج تقاربها(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ $v_n = u_n - 20$ (أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.(ب) أكتب v_n بدلالة n ثم بين أن: $u_n = 30 \left(\frac{7}{10}\right)^n + 20$ (ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (4) ليكن المجموعين: S_n , S'_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$, $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ احسب المجموع S_n ثم بين أن: $S'_n = 100 \left[1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \right] + 20(n+1)$

حل التمرين 21

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{7}{10}u_n + 6$

(1) حساب u_1 و u_2

$$u_2 = \frac{7}{10}u_1 + 6 = \frac{7}{10} \times 41 + 6 = \frac{347}{10}$$

$$u_1 = \frac{7}{10}u_0 + 6 = \frac{7}{10} \times 50 + 6 = 41$$

(2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > 20$

لدينا: $u_0 = 50 > 20$ و إذا انحصارية محققة من اجل $n = 0$

نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 20$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} > 20$

لدينا: $u_n > 20$ ومنه: $\frac{7}{10}u_n + 6 > \frac{7}{10} \times 20 + 6$ إذا: $u_{n+1} > 20$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج تقاربها

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{10}u_n + 6 - u_n = -\frac{3}{10}u_n + 6$ ولدينا: $u_n > 20$ ومنه: $-\frac{3}{10}u_n + 6 \leq -\frac{3}{10}(20) + 6$

ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$ إذا (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 20 فهي متقاربة نحو العدد l

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = u_n - 20$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا: $v_n = u_n - 20$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 20$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{7}{10}u_n + 6 - 20$ ومنه $v_{n+1} = \frac{7}{10}(v_n + 20) + 6 - 20$

وعليه: $v_{n+1} = \frac{7}{10}v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{7}{10}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 20 = 50 - 20 = 30$

(ب) كتابة v_n بدلالة n ثم تبيان أن: $u_n = 30\left(\frac{7}{10}\right)^n + 20$

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 30\left(\frac{7}{10}\right)^n$ ، ولدينا: $u_n = v_n + 20$ ومنه: $u_n = 30\left(\frac{7}{10}\right)^n + 20$

(ج) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[30\left(\frac{7}{10}\right)^x + 20 \right] = 20$$

(4) حساب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 30 \times \frac{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{7}{10}\right)} \\ &= 30 \times \frac{10}{3} \left[1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{n+1} \right] \\ &= 100 \times \left[1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$



التمرين 22

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كإيلي: $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}$

(1) أحسب u_1 ، u_2 .

(2) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq -1$

(3) بين انه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n + 1)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

- هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل

(4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 1$

أ- بين ان (v_n) متتالية هندسية معيننا أساسها وحدها الأول

ب- عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) أحسب المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 22

(1) حساب الحدود

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 7 - \frac{3}{4} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{4}u_1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 1 - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(2) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq -1$

نسمي $P(n)$ الخاصية: $u_n \geq -1$

لدينا: $u_0 = 7$ و $u_n \geq -1$ ومنه الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n=0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من

أجل العدد الطبيعي n ونفرض صحة الخاصية من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} \geq -1$

لدينا: $u_n \geq -1$ ومنه: $\frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4} \geq -1 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{3}{4}$ ومنه: $u_{n+1} \geq -1$ إذا الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ ومنه

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل n أي: $u_n \geq -1$

(3) تبين انه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n + 1)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

$\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4} - u_n = \frac{-3}{4}u_n - \frac{3}{4} = \frac{-3}{4}(u_n + 1) \leq 0$ لأن $u_n \geq -1$ تعني: $u_n + 1 \geq 0$ ومنه: (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$

- نعم المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -1

(4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 1$

أ) تبين ان (v_n) متتالية هندسية معيننا أساسها وحدها الأول

$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(u_n + 1) = \frac{1}{4}v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها

الأول: $v_0 = u_0 + 1 = 7 + 1 = 8$

ب) التعبير عن v_n و u_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[8 \left(\frac{1}{4} \right)^n - 1 \right] = -1, \quad u_n = v_n - 1 = 8 \left(\frac{1}{4} \right)^n - 1, \quad v_n = v_0 \times q^n = 8 \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

(5) حساب المجموعين: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 - 1 + v_1 - 1 + \dots + v_n - 1 \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (-1 - 1 - \dots - 1) \\ &= S_n - 1(n+1) \\ &= \frac{32}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right] - (n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 8 \times \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right] \\ &= \frac{32}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

التمرين 23



تكن (u_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي: $u_0 = \alpha$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

I. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. نضع: $\alpha = 12$

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 < u_n \leq 12$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

(2) (v_n) متتالية عددية حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 4$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(3) أحسب المجموع S_n حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_{2024} + u_{2025} + \dots + u_n$

حل التمرين 23

I. تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(u_n) ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ ومنه: $\alpha = \frac{1}{4}\alpha + 3$ ومنه: $\alpha - \frac{1}{4}\alpha = 3$ ومنه: $\frac{3}{4}\alpha = 3$ إذا: $\boxed{\alpha = 4}$

II. نضع: $\alpha = 12$

(1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 < u_n \leq 12$.

نسمي $P(n)$ الخاصية: $4 < u_n \leq 12$

لدينا: $u_0 = 12$ و $4 < 12 \leq 12$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n = 0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل العدد الطبيعي n أي: $4 < u_n \leq 12$ ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$ أي: $4 < u_{n+1} \leq 12$

لدينا: $4 < u_n \leq 12$ ومنه: $4\left(\frac{1}{4}\right) < \frac{1}{4}u_n \leq 12\left(\frac{1}{4}\right)$ ومنه: $1+3 < \frac{1}{4}u_n + 3 \leq 3+3$ ومنه: $4 < u_{n+1} \leq 6 \leq 12$

إذا الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل n
(ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$$

لدينا: $4 < u_n \leq 12$ ومنه: $4\left(\frac{-3}{4}\right) > -\frac{3}{4}u_n \geq 12\left(\frac{-3}{4}\right)$ ومنه: $-\frac{3}{4}u_n + 3 \geq -6$ إذا: $0 > u_{n+1} - u_n$

إذا: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

الاستنتاج: لدينا (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 4 إذا هي متقاربة نحو العدد l

(2) لدينا: $v_n = u_n - 4$ أي: $u_n = v_n + 4$

(أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 4 = 12 - 4 = 8$

(ب) كتابة عبارتي u_n و v_n بدلالة n ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 \right] = 4, \quad u_n = v_n + 4 = 8\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4, \quad v_n = v_0 \times q^n = 8\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(3) حساب المجموع S_n حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_{2024} + u_{2025} + \dots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= u_{2024} + u_{2025} + \dots + u_n \\ &= v_{2024} + 4 + v_{2025} + 4 + \dots + v_n + 4 \\ &= (v_{2024} + v_{2025} + \dots + v_n) + (4 + 4 + \dots + 4) \\ &= v_{2024} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2023}}{1 - \frac{1}{4}} + 4(n-2023) \\ &= 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2024} \times \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2023} \right] + 4(n-2023) \end{aligned}$$

التمرين 24

(u_n) متتالية عددية معرفة بجدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(-u_n + 3)$

(أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\ln 3$ ثم احسب حدها الأول استنتج، اتجاه تغيرها

(ب) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - \frac{3}{3^n}$ ، احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$



$$(4) \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n : S_n = \ln(-u_{2023} + 3) + \ln(-u_{2024} + 3) + \dots + \ln(-u_n + 3)$$

(أ) احسب بدلالة n المجموع S_n

$$(ب) \text{ احسب } T_n \text{ حيث: } T_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_n}$$

حل التمرين 24

$$(u_n) \text{ متتالية عددية بحدها الأول } u_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n < 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n < 3$ لدينا: $u_0 = 0$ و $0 < 3$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية $u_n < 3$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$: $u_{n+1} < 3$

لدينا: $u_n < 3$ ومنه " $\frac{1}{3}u_n + 2 < 3 \times \frac{1}{3} + 2$ ومنه: $u_{n+1} < 3$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n < 3$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \frac{-2}{3}u_n + 2$$

ولدينا: $u_n < 3$ ومنه: $2 > 3 \left(\frac{-2}{3} \right) + 2$ ومنه: $\frac{-2}{3}u_n + 2 > 0$ إذا $u_{n+1} - u_n > 0$ إذا (u_n) متزايدة

- بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 إذا هي متقاربة

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(-u_n + 3)$

(أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $- \ln 3$ ثم احسب حدها الأول واستنتج اتجاه تغيرها

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(-u_{n+1} + 3) \\ &= \ln\left(\frac{-1}{3}u_n - 2 + 3\right) \\ &= \ln\left(\frac{-1}{3}u_n + 1\right) \\ &= \ln\left[\frac{1}{3}(-u_n + 3)\right] = \ln \frac{1}{3} + \ln(-u_n + 3) \\ &= -\ln 3 + v_n \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $- \ln 3$ وحدها الأول $v_0 = \ln(-u_0 + 3) = \ln(3)$

(ب) كتابة v_n بدلالة n ثم تبين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - \frac{3}{3^n}$ ، وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$v_n = v_0 + nr = \ln 3 - n \ln 3 = \ln 3 - \ln 3^n = \ln \frac{3}{3^n} -$$

لدينا: $v_n = \ln(-u_n + 3)$ ومنه: $e^{v_n} = -u_n + 3$ ومنه: $u_n = 3 - e^{v_n}$ ومنه: $u_n = 3 - e^{\ln \frac{3}{3^n}} = 3 - \frac{3}{3^n}$

$$\text{إذا: } u_n = 3 - 3^{1-n} = 3 - 3 \times 3^{-n} = 3 - \frac{3}{3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{3}{3^n} \right) = 3$$

(4) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(-u_{2023} + 3) + \ln(-u_{2024} + 3) + \dots + \ln(-u_n + 3) \\ &= v_{2023} + v_{2024} + \dots + v_n \\ &= \frac{n - 2023 + 1}{2} (v_{2023} + v_n) \\ &= -1011 + \frac{n}{2} (-2022 \ln 3 + \ln 3 - n \ln 3) \\ &= -1011 + \frac{n}{2} (-2021 \ln 3 - n \ln 3) \end{aligned}$$

(ب) أحسب T_n حيث: $T_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_n}$

لدينا: $e^{v_n} = \frac{3}{3^n}$ ومنه:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{3}{3^0} + \frac{3}{3^1} + \dots + \frac{3}{3^n} \\ &= 3 \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) \\ &= 3 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^0 + \left(\frac{1}{3} \right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] \\ &= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)} = \frac{9}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$



التمرين 25

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = \alpha$ حيث α عدد حقيقي ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$

(I) عيّن قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة

(II) فيما يلي نفرض أن: $u_0 = 3$.

(1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم اعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \geq -4$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) هل (u_n) متقاربة؟

(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) عيّن عبارة v_n بدلالة n .

(ج) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 4$ ثم أحسب نهاية (u_n) .

(I) تعيين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة

$$(u_n) \text{ متتالية ثابتة معناه: } u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha \text{ ومنه: } \alpha = \frac{1}{2}\alpha - 2 \text{ ومنه: } \alpha - \frac{1}{2}\alpha = -2 \text{ ومنه: } \frac{1}{2}\alpha = -2 \text{ ومنه: } \alpha = -4$$

(II) فيما يلي نفرض أن: $u_0 = 3$.

(1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-9}{4}\right) - 2 = \frac{-25}{8}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) - 2 = \frac{-1}{4} - 2 = \frac{-9}{4}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 2 = \frac{1}{2}(3) - 2 = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}$$

نلاحظ ان: $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ومنه (u_n) متناقصة

(2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \geq -4$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n \geq -4$

لدينا: $u_0 = 3$ و $u_n \geq -4$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية $u_n \geq -4$ صحيحة من اجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$: $u_{n+1} \geq -4$

لدينا: $u_n \geq -4$ ومنه: $\frac{1}{2}u_n - 2 \geq -4\left(\frac{1}{2}\right) - 2$ ومنه: $u_{n+1} \geq -4$ إذا حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n \geq -4$

(ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) هل (u_n) متقاربة؟

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 2 - u_n = \frac{-1}{2}u_n - 2 = \frac{-1}{2}(u_n + 4) \leq 0$$

ومنه: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- نعم المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأسفل بالعدد -4 ومتناقصة

(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 = \frac{1}{2}(u_n + 4) = \frac{1}{2}v_n$$

$$v_0 = u_0 + 4 = 3 + 4 = 7 \text{ الأول}$$

(ب) تعيين عبارة v_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \times q^n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ج) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$ ثم حساب نهاية (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \right] = -4$$

$$u_n = v_n - 4 \text{ ومنه: } u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$$

(د) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (4 + 4 + \dots + 4) \text{ ومنه: } S_n = v_0 - 4 + v_1 - 4 + \dots + v_n - 4$$

$$S_n = 14 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] - 4(n+1) \quad \text{إذًا: } S_n = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 4(n+1) \quad \text{ومنه:}$$

التمرين 26

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها الأول $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2$

(1) أحسب الحدين u_1 ، u_2

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \leq \frac{8}{3}$

ب) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

(3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{8}{3}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n .

(4) أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

حل التمرين 26

(1) حساب الحدين u_1 ، u_2

$$u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 2 = \frac{1}{4}(2) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \quad , \quad u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 2 = \frac{1}{4}(0) + 2 = 2$$

(2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \leq \frac{8}{3}$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n \leq \frac{8}{3}$ لدينا: $u_0 = 0$ و $u_n \leq \frac{8}{3}$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية $u_n \leq \frac{8}{3}$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$: $u_{n+1} \leq \frac{8}{3}$

لدينا: $u_n \leq \frac{8}{3}$ ومنه: $\frac{1}{4}u_n + 2 \leq \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4} \right) + 2 = \frac{8}{3}$ ومنه: $u_{n+1} \leq \frac{8}{3} + 2$ أي: $u_{n+1} \leq \frac{8}{3}$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n \leq \frac{8}{3}$

ب) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

لأن: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 2 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 2 = -\frac{3}{4} \left(u_n - \frac{8}{3} \right) \geq 0$ تعني: $u_n \leq \frac{8}{3}$ إذا: $u_n - \frac{8}{3} \leq 0$ متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$

- بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{8}{3}$ فهي متقاربة نحو العدد الحقيقي l

(3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{8}{3}$

أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{8}{3} = \frac{1}{4}u_n + 2 - \frac{8}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \left(u_n - \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{4}v_n$ وحدها الأول: $v_0 = -\frac{8}{3}$

ب) كتابة عبارتي v_n و u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{8}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \quad , \quad \text{ولدينا: } u_n = v_n + \frac{8}{3} \quad \text{أي: } u_n = \frac{-8}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{8}{3}$$

(4) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ &= \frac{-8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \frac{-8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \dots \times \frac{-8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \left(\frac{-8}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+\dots+n} \\ &= \left(\frac{-8}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \frac{8}{3}(n+1) \\ &= \frac{-8}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{8}{3}(n+1) \\ &= \frac{-8}{3} \times \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + \frac{8}{3}(n+1) \\ &= \frac{-32}{9} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + \frac{8}{3}(n+1) \end{aligned}$$

التمرين 27

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحد: $u_0 = 0$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 1)$.

(1) أ) أحسب الحدود u_1 ، u_2

(ب) نحسب اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم برهن هذا التخمين.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2u_n + 1$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية محددًا أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n .

(3) عين نهاية المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟

(4) أحسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 27

(1) أ) حساب الحدود u_1 ، u_2

$$u_2 = \frac{1}{3}(u_1 - 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3} - 1\right) = \frac{1}{3} \times \frac{-4}{3} = \frac{-4}{9}$$

$$u_1 = \frac{1}{3}(u_0 - 1) = \frac{1}{3}(0 - 1) = \frac{-1}{3}$$

(ب) تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

نلاحظ أن: $u_0 > u_1 > u_2$ ومنه: المتتالية (u_n) متناقصة

برهان هذا التخمين.

(u_n) متناقصة معناه: $u_0 > u_1$ ، $u_{n+1} < u_n$ ومنه: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض أن $u_{n+1} \leq u_n$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} \leq u_n$ ومنه: $\frac{1}{3}(u_{n+1} - 1) \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$ ومنه: $u_{n+2} < u_{n+1}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا هي صحيحة من أجل n وبالتالي (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2u_n + 1$

أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(2u_n + 1) = \frac{1}{3}v_n$$

$$v_0 = 2u_0 + 1 = 1$$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n .

$$v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad , \quad \text{لدينا: } u_n = \frac{1}{2}(v_n - 1) \quad \text{ومنه: } u_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right]$$

(3) تعيين نهاية المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right] = -\frac{1}{2}$$

(4) حساب المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{تعني: } S_n = \frac{1}{2}(v_0 - 1) + \frac{1}{2}(v_1 - 1) + \dots + \frac{1}{2}(v_n - 1)$$

$$S_n = \frac{1}{2}[(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (-1 - 1 - \dots - 1)] \quad \text{ومنه: } S_n = \frac{1}{2}[(v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1)]$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\frac{3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n+1)}{1 - \frac{1}{3}} \right] \quad \text{ومنه: } S_n = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] - (n+1) \right] \quad \text{إذ: } S_n = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n+1) \right]$$

التمرين 28

امتلكت شركة نقل المسافرين 6000 حافلة في جانفي 2008، بفعل حوادث المرور وتعطل هذه الحافلات جعل 5% في كل سنة من هذه الحافلات غير قابلة للاستعمال وللحفاظ على معدات الشركة قرر المسؤول شراء 350 حافلة سنويا واضافتها الى الحافلات الموجودة.

نرمز بالرمز u_n الى عدد الحافلات بالمئات سنة $2008 + n$

(1) عين u_0 ثم أحسب u_1 .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0.95u_n + 3.5$

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كيلي: $v_n = 70 - u_n$

أ) أحسب v_0 و v_1 .

ب) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها

ج) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = 70 - 10(0.95)^n$

(4) ما هو عدد الحافلات سنة 2022 (تعطى النتيجة مدورة الى الوحدة)

(5) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 0.5 \times (0.95)^n$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)



حل التمرين 28

(1) تعيين u_0 ثم حساب u_1 .

$$u_1 = 60 \left(1 - \frac{5}{100}\right) + 3.5 = 60.5 \quad , \quad \boxed{u_0 = 60}$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = 0.95u_n + 3.5$

$$\text{لدينا: } u_1 = u_0 \left(1 - \frac{5}{100}\right) + 3.5 \quad , \quad u_2 = u_1 \left(1 - \frac{5}{100}\right) + 3.5 \quad \text{ومنه: } u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{5}{100}\right) + 3.5 \quad \text{إذا: } \boxed{u_{n+1} = 0.95u_n + 3.5}$$

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كإيلي: $v_n = 70 - u_n$ (أ) حساب v_0 و v_1 .

$$\boxed{v_1 = 70 - u_1 = 70 - 60.5 = 9.5} \quad , \quad \boxed{v_0 = 70 - u_0 = 70 - 60 = 10}$$

(ب) اثبات ان (v_n) هندسية وتعيين أساسها

$$v_{n+1} = 70 - u_{n+1} = 70 - 0.95u_n - 3.5 = 66.5 - 0.95u_n = 0.95(70 - u_n) = 0.95v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 0.95(ج) التعبير عن v_n بدلالة n ثم استنتاج أن: $u_n = 70 - 10(0.95)^n$

$$\boxed{u_n = 70 - 10(0.95)^n} \quad \text{لدينا: } u_n = 70 - v_n \quad \text{أي: } \boxed{v_n = v_0 \times q^n = 10(0.95)^n}$$

(4) حساب عدد الحفلات سنة 2022 (تعطى النتيجة مدورة الى الوحدة)

$$\boxed{u_8 = 70 - 10(0.95)^8 \cong 63} \quad \text{ومنه: } n = 2022 - 2008 = 14 \quad \text{تعني: } 2008 + n = 2022$$

(5) (أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} - u_n = 0.5 \times (0.95)^n$

$$u_{n+1} - u_n = 70 - 10(0.95)^{n+1} - 70 + 10(0.95)^n = 10(0.95)^n [-0.95 + 1] = \frac{1}{2}(0.95)^n$$

(ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم حساب نهاية المتتالية (u_n) - لدينا: $u_{n+1} - u_n = 0.5 \times (0.95)^n < 0$ ومنه: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [70 - 10(0.95)^n] = 0 \quad -$$

التمرين 29

في سنة 2005 بلغ سكان مدينة 100000 نسمة.

قدم مكتب دراسات دراسة توقيعية ابتداء من 1 جانفي 2005

- عدد سكان هذه المدينة يتزايد كل سنة بـ: 5 % مع الأخذ بعين الاعتبار المواليد الجديدة والموتى.

- هناك 4000 مهاجر يمكنهم الإقامة كل سنة في هذه المدينة.

- من أجل كل عدد طبيعي n يرمز بـ u_n لعدد سكان هذه المدينة في 1 جانفي سنة $2005 + n$ ونعلم أن $u_0 = 100000$ (1) أحسب u_1 ، u_2 (2) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = 1.05u_n + 4000$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 80000$

(أ) أحسب v_0 .

(ب) بين أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ج) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = 180000 \times (1.05)^n - 80000$ وأحسب نهاية المتتالية (u_n)

(4) كم يصبح عدد سكان هذه المدينة في 1 جانفي 2020؟

(5) في أي سنة سيصبح عدد سكان هذه المدينة يفوق 200000 نسمة؟

حل التمرين 29

(1) حساب u_1 ، u_2

$$u_1 = 109000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000 = 118450 \quad , \quad u_2 = 100000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000 = 109000$$

(2) تبرير أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1.05u_n + 4000$

لدينا: $u_1 = u_0 \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000$ ، $u_2 = u_1 \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000$ ومنه: $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 4000$

$$\boxed{u_{n+1} = 1.05u_n + 4000} \quad \text{إذا:}$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 80000$

(أ) حساب v_0 .

$$\boxed{v_0 = u_0 + 80000 = 100000 + 80000 = 180000}$$

(ب) تبيان أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$v_{n+1} = u_{n+1} + 80000$ ومنه: $v_{n+1} = 1.05u_n + 4000 + 80000$ ومنه: $v_{n+1} = 1.05u_n + 84000$ ومنه:

$$\boxed{v_{n+1} = 1.05v_n} \quad \text{إذا:}$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها 1.05 وحدها الأول 180000

(ج) التعبير عن v_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = 180000 \times (1.05)^n - 80000$

$$\boxed{v_n = 180000(1.05)^n} \quad , \quad \text{لدينا: } u_n = v_n - 80000 \quad \text{تعني: } \boxed{u_n = 180000(1.05)^n - 80000}$$

- حسب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [180000(1.05)^n - 80000] = +\infty$$

(4) عدد سكان هذه المدينة في 1 جانفي 2020؟

$$\boxed{u_{15} = 180000(1.05)^{15} - 80000 = 294207}$$

(5) في أي سنة سيصبح عدد سكان هذه المدينة يفوق 200000 نسمة؟

$u_n > 200000$ تعني: $180000 \times (1.05)^n - 80000 > 200000$ ومنه: $180000 \times (1.05)^n > 280000$ ومنه: $(1.05)^n > 1.55$

ومنه: $\ln(1.05)^n > \ln 1.55$ ومنه: $n \ln(1.05) > \ln 1.55$ ومنه: $n > \frac{\ln 1.55}{\ln(1.05)}$ ومنه: $n > 8.98$ أي: $n = 9$

إذا: سيصبح عدد سكان هذه المدينة يفوق 200000 نسمة ابتداء من السنة $\boxed{2005 + 9 = 2014}$

التمرين 30

في 1 جانفي 2001 أودع زكريا رصيد 10000DA ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ 1500DA في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد). نرسم بـ u_n إلى رصيد زكريا في أول جانفي من السنة $2001+n$

(1) عيّن u_0 ثم احسب u_1

(2) كم كان رصيد زكريا في أول جانفي 2003؟

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = 1.05u_n - 1500$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n, v_n = u_n - 30000$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.(ب) ماهي نهاية المتتالية (u_n) .

(5) ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكريا دائما؟

حل التمرين 30

(1) تعيين u_0 ثم احسب u_1

$$u_1 = 10000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) - 1500 = 9000$$

$$u_0 = 10000$$

(2) رصيد زكريا في أول جانفي 2003؟

$$u_2 = 9000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) - 1500 = 7950$$

(3) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = 1.05u_n - 1500$

لدينا: $u_1 = u_0 \left(1 + \frac{5}{100}\right) - 1500$ ، $u_2 = u_1 \left(1 + \frac{5}{100}\right) - 1500$ بالتعميم نجد: $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{5}{100}\right) - 1500$

إذا: $u_{n+1} = 1.05u_n - 1500$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n, v_n = u_n - 30000$

(أ) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 30000 = 1.05u_n - 1500 - 30000 = 1.05u_n - 31500 = 1.05(u_n - 30000) = 1.05v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها 1.05 وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 30000 = 10000 - 30000 = -20000$

(ب) نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا: $u_n = v_n + 30000$ تعني: $u_n = -20000(1.05)^n + 30000$ إذا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [-20000(1.05)^n + 30000] = -\infty$

(5) ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكريا دائما؟

$$u_n < 0 \text{ تعني: } -20000(1.05)^n + 30000 < 0 \text{ ومنه: } -20000(1.05)^n < -30000 \text{ ومنه: } (1.05)^n > \frac{-30000}{-20000}$$

ومنه: $(1.05)^n > 1.5$ ومنه: $\ln(1.05)^n > \ln 1.5$ ومنه: $n \ln(1.05) > \ln 1.5$ ومنه: $n > \frac{\ln 1.5}{\ln(1.05)}$ ومنه: $n > 8.31$

إذا: يكون رصيد زكريا دائما ابتداء من $n = 9$ أي: $2001 + 9 = 2010$

التمرين 31

في أول جانفي 2020 أودع نبيل 10000 DA ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 5% سنويا. بالإضافة إلى ذلك فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ 2000 DA. نرسم u_n إلى رصيد نبيل في أول جانفي من السنة 2020+n.

- (1) عين u_0 ثم احسب u_1 و u_2 .
- (2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1,05u_n + 2000$.
- (3) بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.
- (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 40000$.
- (أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 1,05 عين حدها الأول.
- (ب) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
- (ت) كم يكون رصيد نبيل في سنة 2030 ؟

- (5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
- أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج S'_n بدلالة n .

حل التمرين 31

- (1) تعيين u_0 ثم حساب u_1 و u_2 .

$$u_2 = 12500 \left(1 + \frac{5}{100} \right) + 2000 = 15125 \quad , \quad u_1 = 10000 \left(1 + \frac{5}{100} \right) + 2000 = 12500 \quad , \quad u_0 = 10000$$

- (2) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1,05u_n + 2000$.

$$\text{لدينا: } u_1 = u_0 \left(1 + \frac{5}{100} \right) + 2000 \quad , \quad u_2 = u_1 \left(1 + \frac{5}{100} \right) + 2000 \quad \text{بالتعميم نجد: } u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{5}{100} \right) + 2000$$

$$\text{إذا: } u_{n+1} = 1,05u_n + 2000$$

- (3) تبيان أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

$$\text{لدينا: } \begin{cases} u_1 - u_0 = 12500 - 10000 = 2500 \\ u_2 - u_1 = 15125 - 12500 = 2625 \end{cases} \quad \text{ومنه: } u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \quad \text{إذا المتتالية } (u_n) \text{ ليست حسابية}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = \frac{12500}{10000} = 1.25 \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{15125}{12500} = 1.21 \end{cases} \quad \text{ومنه: } \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1} \quad \text{إذا المتتالية } (u_n) \text{ ليست هندسية}$$

- (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 40000$.

- (أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 1,05 عين حدها الأول.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 40000 = 1,05u_n + 2000 + 40000 = 1,05u_n + 42000 = 1,05(u_n + 40000) = 1,05v_n$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } 1,05 \text{ وحدها الأول } v_0 = 10000 + 40000 = 50000$$

- (ب) حساب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

$$\text{لدينا: } v_n = 50000(1,05)^n \quad , \quad u_n = v_n - 40000 \quad \text{ومنه: } u_n = 50000(1,05)^n - 40000$$

(ت) كم يكون رصيد نبيل في سنة 2030 ؟

$$u_{10} = 50000(1.05)^{10} - 40000 = 41444.73 \quad \text{إذا: } n=10 \text{ هو دليل السنة 2030 ومنه: } 2020+n=2030$$

رصيد نبيل في سنة 2030 هو 41444.73 DA

(5) حساب S_n بدلالة n ثم استنتاج S'_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \\ &= v_0 - 40000 + v_1 - 40000 + \dots + v_{n-1} - 40000 \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) + (-40000 - \dots - 40000) \\ &= S_n - 40000n \\ &= 1\,000\,000[1 - (1.05)^n] - 40000n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \times \frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1 - q} \\ &= 50\,000 \times \frac{1 - (1.05)^n}{1 - 1.05} \\ &= 50\,000 \times \frac{1 - (1.05)^n}{-0.05} \\ &= 1\,000\,000[1 - (1.05)^n] \end{aligned}$$

التمرين 32

لوحظ أن 80% من أعضاء جمعية يجددون انخراطهم سنويا كما أن 500 منخرط يضافون سنويا. نرمز بـ u_n لعدد المنخرطين بعد مرور n سنة ونفرض أن $u_0 = 1000$.

(1) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كل عدد طبيعي n .(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = 2500 - u_n$ أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 0.8v_n$ واذكر نوع المتتالية (v_n) .ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) بعد كم سنة يفوق عدد المنخرطين 2200 ؟

حل التمرين 32

(1) التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كل عدد طبيعي n .

$$u_{n+1} = \frac{80}{100}u_n + 500 = 0.8u_n + 500$$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = 2500 - u_n$ أ- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 0.8v_n$ وذكر نوع المتتالية (v_n) .

$$v_{n+1} = 2500 - u_{n+1} = 2500 - 0.8u_n - 500 = 2000 - 0.8u_n = 0.8(2500 - u_n) = 0.8v_n$$

$$v_0 = 2500 - u_0 = 2500 - 1000 = 1500 \quad \text{ومنه: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = 0.8 \text{ وحدها الأول:}$$

ب- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n .

$$v_n = 1500(0.8)^n \quad \text{لدينا: } u_n = 2500 - v_n \quad \text{ومنه: } u_n = 2500 - 1500(0.8)^n$$

(3) بعد كم سنة يفوق عدد المنخرطين 2200 ؟

$$u_n > 2200 \quad \text{ومنه: } 2500 - 1500(0.8)^n > 2200 \quad \text{ومنه: } -1500(0.8)^n > -300 \quad \text{ومنه: } -1500(0.8)^n > -300$$

$$\text{ومنه: } (0.8)^n < \frac{-300}{-1500} \quad \text{ومنه: } (0.8)^n < 0.2 \quad \text{ومنه: } \ln(0.8)^n < \ln 0.2 \quad \text{ومنه: } n \ln(0.8) < \ln 0.2 \quad \text{ومنه: } n > \frac{\ln 0.2}{\ln(0.8)}$$

ومنه: $n > 7.21$ إذا: $\boxed{n=8}$ وعليه يفوق عدد المنخرطين 2200 منخرطا بعد 7 سنوات

التمرين 34

في سنة 2000 كان عدد سكان قرية 562 نسمة ولأسباب معينة بدأ يتقلص بنسبة 2% في كل سنة، نضع $u_0 = 526$ ، u_1 عدد السكان في سنة 2001 و u_n عدد السكان بعد n سنة. (تعطى النتائج مدورة الى الوحدة)

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) أ- عبّر عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كل عدد طبيعي n

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) ما هو عدد سكان القرية سنة 2009؟

(4) ماهي السنة التي يصبح فيها عدد السكان أقل من النصف؟

(5) أ) أحسب u_{310} و u_{311} .

ب) ابتداء من أي سنة تصبح القرية فارغة من السكان؟

حل التمرين 34

(1) حساب u_1 و u_2 .

$$\boxed{u_0 = 526} , \quad \boxed{u_1 = 526 \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 515} , \quad \boxed{u_2 = 515 \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 505}$$

(2) أ- التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_0 = 526 \text{ وحدها الأول } 0.98 \text{ هندية أساسها } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } 0.98 \text{ ومنه: } \boxed{u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 0.98u_n}$$

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n

$$\boxed{u_n = 526(0.98)^n}$$

(3) عدد سكان القرية سنة 2009

$$\boxed{u_9 = 526(0.98)^9 = 439}$$

(4) السنة التي يصبح فيها عدد السكان أقل من النصف

$$u_n < \frac{526}{2} \text{ تعني: } 526(0.98)^n < 263 \text{ ومنه: } (0.98)^n < \frac{263}{526} \text{ ومنه: } (0.98)^n < 0.5 \text{ ومنه: } \ln(0.98)^n < \ln(0.5)$$

$$\text{ومنه: } \ln(0.98)^n < \ln(0.5) \text{ ومنه: } n \ln(0.98) < \ln(0.5) \text{ ومنه: } n > \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} \text{ ومنه: } n > 34.3 \text{ ومنه: } n = 35$$

إذا ابتداء من السنة 2035 يصبح فيها عدد السكان أقل من النصف

(5) أ) حساب u_{310} و u_{311}

$$\boxed{u_n = 526(0.98)^{311} = 0}$$

$$\boxed{u_{310} = 526(0.98)^{310} = 1}$$

ب) ابتداء من أي سنة تصبح القرية فارغة من السكان؟

تصبح القرية فارغة من السكان بعد 311 سنة أي سنة 2311

التمرين 35

بلغ أحد مستورد السيارات 100 زبون سنة 2020 لاحظ المستورد في السنة الموالية انه احتفظ بنسبه 40% من زبائنه واضيف إليهم بفضل الاشهار 630 زبون جديد.

نفرض ان تطور الزبائن يتواصل بنفس الكيفية السابقة خلال السنوات العشر الموالية

نرمز بـ u_n الى عدد الزبائن خلال السنة $2020+n$ حيث n عدد طبيعي.

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 1050$

أ) أحسب v_0 ، v_1 ، v_2 ثم نحن طبيعة المتتالية.

ب) بين أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ج) عبر عن v_n بدلالة n . استنتج أن: $u_n = -950(0.4)^n + 1050$

(4) ما هو عدد الزبائن المتوقع سنة 2029؟ يتم تدوير النتيجة الى الوحدة.

(5) هل يمكن أن يبلغ عدد زبائن هذا المستورد في سنة ما 1100 زبون إذا تطور الزبائن بنفس المنوال

حل التمرين 35

(1) حساب u_1 و u_2 .

$$u_2 = \frac{40}{100}u_1 + 60 = 0.4(670) + 630 = 898$$

$$u_1 = \frac{40}{100}u_0 + 60 = 0.4(100) + 630 = 670$$

(2) التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n .

$$u_{n+1} = \frac{40}{100}u_n + 60 = 0.4u_n + 630$$

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 1050$

أ) حساب v_0 ، v_1 ، v_2

$$v_2 = u_2 - 1050 = -152$$

$$v_1 = u_1 - 1050 = 670 - 1050 = -380$$

$$v_0 = u_0 - 1050 = 100 - 1050 = -950$$

تجنين طبيعة المتتالية.

نلاحظ ان: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0} = 0.4$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 0.4$

ب) تبيان أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1050 = 0.4u_n + 630 - 1050 = 0.4u_n - 420 = 0.4(u_n - 1050) = 0.4v_n$$

ومنه (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $q = 0.4$ وحدها الأول $v_0 = -950$

ج) التعبير عن v_n بدلالة n واستنتاج أن: $u_n = -50(0.4)^n + 1050$

$$u_n = -950(0.4)^n + 1050$$

لدينا: $u_n = v_n + 1050$ ومنه:

$$v_n = v_0 \times q^n = -950(0.4)^n$$

(4) عدد الزبائن المتوقع سنة 2029 هو: 1050

$$u_9 = -950(0.4)^9 + 1050 = 1050$$

(5) هل يمكن أن يبلغ عدد زبائن هذا المستورد في سنة ما 1100 زبون إذا تطور الزبائن بنفس المنوال

$$u_n = 1100 \text{ تعني: } -950(0.4)^n + 1050 = 1100 \text{ ومنه: } -950(0.4)^n = 1100 - 1050 \text{ ومنه: } -950(0.4)^n = 50$$

$$\text{ومنه: } (0.4)^n = \frac{50}{-950} \text{ ومنه: } (0.4)^n = -0.05 \text{ وهذا غير ممكن (المعادلة لا تقبل حلا في } \mathbb{R} \text{)}$$

إذا: لا يمكن أن يبلغ عدد زبائن هذا المستورد في سنة ما 1100 زبون إذا تطور الزبائن بنفس المنوال

التمرين 36

اجتاح وباء كورونا-كوفيد-الجزائر سنة 2020 حيث في نهاية شهر مارس بلغ عدد المصابين 626 مصاب.

لاحظ الأطباء أن في نهاية كل شهر يزداد عدد المصابين بأربعة أضعاف عن الشهر السابق في حين بلغت عدد حالات الشفاء 1410

شخص. نرسم بـ u_n إلى عدد المصابين بالفيروس خلال نهاية كل شهر.

(1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم بين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n - 1410$

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 470 - u_n$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(4) أ- ما هو عدد المصابين المتوقع خلال نهاية شهر سبتمبر 2020؟

ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ وفسر هذه النتيجة

(5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 36

(1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3

$$u_3 = 4 \times 2966 - 1410 = 10454 \text{ ، } u_2 = 4 \times 1094 - 1410 = 2966 \text{ ، } u_1 = 4 \times 626 - 1410 = 1094 \text{ ، } u_0 = 626$$

تبين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

$$\text{لدينا: } \begin{cases} u_2 - u_1 = 2966 - 1094 = 1872 \\ u_3 - u_2 = 10454 - 2966 = 7488 \end{cases} \text{ ومنه: } u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1 \text{ إذا: } (u_n) \text{ ليست حسابية}$$

$$\text{ومنه: } \frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1} \text{ إذا: } (u_n) \text{ ليست هندسية} \begin{cases} \frac{u_3}{u_2} = \frac{10454}{2966} = 3.52 \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{2966}{1094} = 2.71 \end{cases}$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n - 1410$

$$\text{لدينا: } u_1 = 4u_0 - 1410 \text{ ، } u_2 = 4u_1 - 1410 \text{ ، } u_3 = 4u_2 - 1410 \text{ ومنه: } u_{n+1} = 4u_n - 1410$$

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 470 - u_n$

أ) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$\text{لدينا: } v_{n+1} = 470 - u_{n+1} \text{ ومنه: } v_{n+1} = 470 - 4u_n + 1410 \text{ ولدينا: } u_n = 470 - v_n \text{ إذا: } v_{n+1} = 470 - 1880 + 4v_n + 1410$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = 4v_n \text{ إذا } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسه } q = 4 \text{ وحدها الأول } v_0 = 470 - u_0 = 470 - 626 = -156$$

(ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$u_n = 470 + 156 \times 4^n \quad \text{ومنهن: } u_n = 470 - v_n, \quad v_n = -156 \times 4^n \quad \text{ومنهن: } v_n = v_0 \times q^n$$

(4) أ- عدد المصابين المتوقع خلال نهاية شهر سبتمبر 2020؟

$$u_6 = 470 + 156 \times 4^6 = 639446 \quad \text{رتبة 2020 هي 6}$$

ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (470 + 156 \times 4^n) = +\infty$$

تفسير هذه النتيجة: المتتالية (u_n) متباعدة وعدد المصابين في تزايد مستمر.(5) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\begin{aligned} &= 470 - v_1 + 470 - v_2 + \dots + 470 - v_n \\ &= (470 + 470 + \dots + 470) - (v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\ &= 470n + 624 \times \frac{1-4^n}{1-4} = 470n - 208(1-4^n) \end{aligned}$$

التمرين 37



بلغ عدد سكان بلد ما سنة 2000 ثلاثون مليون نسمة.
نفرض أن عدد السكان يرتفع سنويا بنسبة 1.5% وأن 0.045 مليون شخص يغادرون هذا البلد سنويا بسبب الهجرة إلى الخارج نعتبر
المليون هو الوحدة ونضع $u_0 = 30$ عدد السكان سنة 2000.

(1) أحسب u_1 و u_2 .(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1.015u_n - 0.045$ (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي: $v_n = u_n - 3$ (أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1.015$ (ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(4) كم يكون عدد سكان هذا البلد عام 2020؟

حل التمرين 37

(1) حساب u_1 و u_2 .

$$u_2 = u_1 \left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045 = 30.405 \times 1.015 - 0.045 = 30.816075$$

$$u_1 = u_0 \left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045 = 30 \times 1.015 - 0.045 = 30.405$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1.015u_n - 0.045$

$$\text{لدينا: } u_1 = u_0 \left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045, \quad u_2 = u_1 \left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045 \quad \text{بالتعميم نجد: } u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045$$

$$\text{إذا: } u_{n+1} = 1.015u_n - 0.045$$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي: $v_n = u_n - 3$ (أ) تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1.015$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 \text{ ومنه: } v_{n+1} = 1.015u_n - 0.045 - 3 \text{ ومنه: } v_{n+1} = 1.015u_n - 3.045 \text{ ومنه: } v_{n+1} = 1.015(u_n - 3) \text{ ومنه: } v_{n+1} = 1.015v_n$$

$$\text{إدًا: } v_{n+1} = 1.015v_n \text{ ومنه: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = 1.015 \text{ وحدها الأول: } v_0 = u_0 - 3 = 27$$

(ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n = 27(1.015)^n \text{ ، لدينا: } u_n = v_n + 3 \text{ ومنه: } u_n = 27(1.015)^n + 3$$

(4) عدد سكان هذا البلد عام 2020 هو: 39.3651 مليون

$$u_{20} = 27(1.015)^{20} + 3 = 39.3651$$

التمرين 38

لاحظ رئيس مركز رياضي أنه في كل سنة، المركز يحتفظ بـ 75% من أعضائه ويستقبل 800 عضوا جديدا.
في سنة 2005 أحصى هذا المركز الرياضي 1600 عضوا. نرسم u_n إلى عدد الأعضاء في المركز في سنة $2005 + n$.

(1) تحقق من أن: $u_1 = 2000$ ثم أحسب u_2 (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 800$ (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 3200 - u_n$ (أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية. حدد أساسها وحدها الأول.(ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

(4) احسب مجموع أعضاء المركز الرياضي من سنة 2005 إلى سنة 2020

(5) احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 38

(1) التحقق من أن: $u_1 = 2000$ ثم حساب u_2

$$u_1 = u_0 \times \frac{75}{100} + 800 = 1600 \times \frac{75}{100} + 800 = 2000 \text{ ، } u_2 = u_1 \times \frac{75}{100} + 800 = 2000 \times \frac{75}{100} + 800 = 2300$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 800$

$$u_{n+1} = \frac{75}{100}u_n + 800 = \frac{3}{4}u_n + 800$$

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 3200 - u_n$ (أ) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = 3200 - u_{n+1} = 3200 - \left(\frac{3}{4}u_n + 800\right) = 3200 - \frac{3}{4}u_n - 800 = 2400 - \frac{3}{4}u_n = \frac{3}{4}(3200 - u_n) = \frac{3}{4}v_n$$

$$\text{ومنه: المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{3}{4} \text{ وحدها الأول: } v_0 = 3200 - u_0 = 3200 - 1600 = 1600$$

(ب) التعبير عن v_n ثم u_n بدلالة n .

$$u_n = 3200 - 1600 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$v_n = 1600 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

(4) حساب مجموع أعضاء المركز الرياضي من سنة 2005 إلى سنة 2020

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15} \quad \text{تعني: } S = 3200 - v_0 + 3200 - v_1 + \dots + 3200 - v_{15}$$

$$\text{ومنه: } S = 3200 \times 16 - 1600 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{16}}{1 - \frac{3}{4}} \quad \text{ومنه: } S = 51200 - 1600 \times 4 \times \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{16} \right]$$

$$\text{ومنه: } S = 51200 - 6400 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{16} \right] \quad \text{إذا: } S = 44864$$

(5) حساب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 3200n - 6400 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]$$

التمرين 39

بلغ عدد زبائن أحد المستودعات 1000 زبون خلال سنة 2000، انخفض عدد الزبائن بـ 40 % في السنة الموالية وأضيف إليهم 630 زبون جديد. نرسم إلى عدد الزبائن خلال السنة $2000+n$ بـ u_n

(1) أحسب u_0, u_1, u_2 (2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n .(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n - 1050$ أ- أحسب v_0, v_1 أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية.ج- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

(4) ما هو عدد الزبائن المتوقع خلال سنة 2016 (يعطى العدد مدور إلى الوحدة)

حل التمرين 39

(1) حساب u_0, u_1, u_2

$$u_2 = u_1 \left(1 - \frac{40}{100} \right) + 630 = 1230 \times 0.6 + 630 = 1368$$

$$u_1 = u_0 \left(1 - \frac{40}{100} \right) + 630 = 1000 \times 0.6 + 630 = 1230$$

(2) التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n .

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{40}{100} \right) + 630 \quad \text{ومنه: } u_{n+1} = 0.6 u_n + 630$$

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n - 1575$ أ- حساب v_0, v_1

$$v_1 = u_1 - 1050 = 1230 - 1050 = 180$$

$$v_0 = u_0 - 1050 = 1000 - 1050 = -50$$

(ب) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1050 = 0.6 u_n + 630 - 1575 = 0.6 u_n - 945 = 0.6(u_n - 1575) = 0.6 v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.6(ج) التعبير عن v_n ثم u_n بدلالة n .

$$u_n = -50(0.6)^n + 1575$$

$$v_n = -50(0.6)^n$$

(4) عدد الزبائن المتوقع خلال سنة 2016 (يعطى العدد مدور إلى الوحدة)

$$u_{16} = -50(0.6)^{16} + 1575 = 1575$$

التمرين 40

في أول جانفي 2005 بلغ عدد عمال إحدى المؤسسات 1500 عاملا. أثبتت دراسة انه خلال كل سنة من السنوات القادمة سيحال 10% من العمال على التقاعد وبهدف تعديل عدد عمالها مع احتياجاتها، توظف المؤسسة خلال السنة 100 شاب. من اجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بـ u_n إلى عدد عمال المؤسسة في أول جانفي من السنة $2005+n$.

أجب بصحيح أول خاطئ مع تبرير جوابك في كل حالة:

(1) في أول جانفي 2006 بلغ عدد عمال المؤسسة 1450 عاملا.

(2) المتتالية (u_n) متتالية هندسية.(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 0.9u_n + 100$ (4) من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) حيث: $v_n = u_n - 1000$ متتالية هندسية.(5) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 500(0.9)^n$ (6) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 500(0.9)^n - 1000$

(7) يرتفع عدد عمال المؤسسة من سنة لأخرى.

(8) لن يقل أبدا عدد عمال المؤسسة عن 500.

حل التمرين 40

الإجابة بصح او خطأ مع التبرير

$$(1) \text{ صحيح لأن: } u_1 = u_0 \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 100 = 1500 \times 0.9 + 100 = 1450$$

$$(2) \text{ خطأ لأن: } \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}, \quad u_1 = u_0 \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 100 = 1405$$

$$(3) \text{ صحيح لان: } u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 100 = 0.9u_n + 100$$

$$(4) \text{ صحيح لان: } v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = 0.9u_n - 900 = 0.9(u_n - 1000) = 0.9v_n \text{ ومنه } (v_n) \text{ هندسية أساسها } 0.9$$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = u_0 - 1000 = 1500 - 1000 = 500$$

$$(5) \text{ صحيح لان: } v_n = v_0 \times q^n = 500(0.9)^n$$

$$(6) \text{ خطأ لان: } u_n = v_n + 1000 = 500(0.9)^n + 1000$$



(7) خطأ لان: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = 500(0.9)^{n+1} + 1000 - 500(0.9)^n - 1000 = 500(0.9)^n (0.9 - 1) = -50(0.9)^n < 0$$

(8) صحيح لان: $u_n < 500$ تعني: $500(0.9)^n + 1000 < 500$ ومنه: $(0.9)^n < \frac{500-1000}{500}$ ومنه: $(0.9)^n < -1$ غير

يمكن اذا لن يقل عدد العمال عن 500

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [500(0.9)^n + 1000] = 1000 \text{ تبرير اخر:}$$

التمرين 41

في أول سبتمبر 2014، بلغ عدد تلاميذ إحدى الثانويات 300 تلميذ وفي العام الموالي - أول سبتمبر 2015 - لاحظ مدير الثانوية أن 75% من التلاميذ يواصلون دراستهم بالمؤسسة وكذلك يلتحق بها 150 تلميذ جديد. بفرض أن تطور عدد التلاميذ يتواصل بنفس الكيفية في السنوات العشر القادمة. نرسم u_n إلى عدد التلاميذ سنة $2014+n$ حيث n عدد طبيعي.



(1) أحسب u_1, u_2 .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_{n+1} = 0.75u_n + 150$.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 600 = \frac{3}{4}(u_n - 600)$.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 600$.

أ- بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب - عبر بدلالة n عن u_n و v_n

(4) أحسب عدد تلاميذ هذه الثانوية المتوقع سنة 2017 وعدد بعد 10 سنوات.

حل التمرين 41

(1) حساب u_1, u_2 .

$$u_2 = \frac{75}{100}u_1 + 150 = 0.75(375) + 150 = 431, \quad u_1 = \frac{75}{100}u_0 + 150 = 0.75(300) + 150 = 375$$

(2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_{n+1} = 0.75u_n + 150$.

$$\text{لدينا: } u_1 = \frac{75}{100}u_0 + 150, \quad u_2 = \frac{75}{100}u_1 + 150 \text{ بالتعميم نجد: } u_{n+1} = \frac{75}{100}u_n + 150 \text{ إذا: } u_{n+1} = 0.75u_n + 150$$

ب- اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 600 = \frac{3}{4}(u_n - 600)$.

$$u_{n+1} - 600 = 0.75u_n + 150 - 600 = 0.75u_n - 450 = 0.75(u_n - 600) = \frac{3}{4}(u_n - 600)$$

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 600$.

أ- تبيان أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 600 = \frac{3}{4}(u_n - 600) = \frac{3}{4}v_n \text{ ومنه: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها وحدها الأول: } v_0 = u_0 - 600 = -300$$

ب - التعبير بدلالة n عن u_n و v_n

$$u_n = v_n + 600 = -300 \left(\frac{3}{4} \right)^n + 600$$

$$v_n = -300 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

(4) حساب عدد تلاميذ هذه الثانوية المتوقع سنة 2017 وعدد بعد 10 سنوات.

$$u_{10} = -300 \left(\frac{3}{4} \right)^{10} + 600 = 583$$

$$u_3 = -300 \left(\frac{3}{4} \right)^3 + 600 = 473$$

إذا: عدد تلاميذ هذه الثانوية المتوقع سنة 2017 هو 473 تلميذ وبعد 10 سنوات 583 تلميذ

التمرين 42

الجزء الأول

في سنة 1999 أنتج مصنع أحذية 20000 زوج من الأحذية من نوع A. ثم بدأ في تخفيض إنتاجه بـ 2500 زوج كل سنة حتى أصبح إنتاج النوع A منعدما. نسمي u_0 كمية الإنتاج في سنة 1999 و u_n كمية الإنتاج في سنة $1999+n$

(1) بين أن $u_1 = 17500$ ثم أحسب u_2

(2) بين أن (u_n) متتالية حسابية وعين أساسها ثم عبر عن u_n بدلالة n .

(3) في أي سنة انعدم إنتاج النوع A.

(4) أحسب عدد أزواج الأحذية من النوع A التي أنتجت من سنة 1999 إلى سنة 2007.

الجزء الثاني

في سنة 1999 بدأ نفس المصنع في صناعة نوع جديد من الأحذية نرسم له بالرمز B، حيث بلغ إنتاج هذا النوع في هذه السنة 11000 زوج، وكمية الإنتاج لهذا النوع (النوع B) كان يزيد كل سنة بنسبة 8%. نسمي v_0 كمية الإنتاج في السنة 1999 و v_n كمية الإنتاج في السنة $1999+n$

(1) بين أن $v_1 = 11880$ ، ثم أحسب v_2 (تدور النتائج الى الوحدة).

(2) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها، عبر عن v_n بدلالة n .

(3) أحسب عدد أزواج الأحذية من النوع B التي أنتجت سنة 2007.

(4) أحسب عدد أزواج الأحذية من النوع B التي أنتجت ابتداء من سنة 1999 إلى غاية 2007

حل التمرين 42

الجزء الأول

(1) تبين أن $u_1 = 17500$ ثم احسب u_2

$$u_2 = 17500 - 2500 = 15000$$

$$u_1 = 20000 - 2500 = 17500$$

(2) تبين أن (u_n) متتالية حسابية وأساسها

لدينا: $u_{n+1} = u_n - 2500$ ومنه: $u_{n+1} - u_n = -2500$ إذا: (u_n) متتالية حسابية متتالية حسابية أساسها $r = -2500$

وحدها الأول: $u_0 = 20000$

التعبير عن u_n بدلالة n .

$$u_n = 20000 - 2500n \quad \text{إذًا: } u_n = u_0 + nr$$

(3) في أي سنة انعدم إنتاج النوع A.

$$u_n = 0 \quad \text{تعني: } 20000 - 2500n = 0 \quad \text{ومنه: } -2500n = -20000 \quad \text{ومنه: } n = \frac{-20000}{-2500} = 8$$

ومنه يصبح إنتاج النوع A منعدما سنة: $1999 + 8 = 2007$

(4) حساب عدد أزواج الأحذية من النوع A التي أنتجت من سنة 1999 إلى سنة 2007.

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_8 = \frac{9}{2}(u_0 + u_8) = \frac{9}{2}(20000 + 0) = 90000$$

الجزء الثاني

(1) تبيان أن $v_1 = 11880$ ، ثم حساب v_2 (تدور النتائج الى الوحدة).

$$v_2 = v_1 \times 1.08 = 11880 \times 1.08 = 12830 \quad , \quad v_1 = v_0 \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 11000 \times 1.08 = 11880$$

(2) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

لدينا: $v_1 = v_0 \times 1.08$ و $v_2 = v_1 \times 1.08$ بالتعميم نجد: $v_{n+1} = v_n \times 1.08$ ومنه: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1.08$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1.08$ وحدها الأول: $v_0 = 11000$

- التعبير عن v_n بدلالة n .

$$v_n = 11000(1.08)^n$$

(3) حساب عدد أزواج الأحذية من النوع B التي أنتجت سنة 2007.

$$v_8 = 11000(1.08)^8 = 20360$$

(4) حساب عدد أزواج الأحذية من النوع B التي أنتجت ابتداء من سنة 1999 إلى غاية 2007

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_8 = 11000 \times \frac{1 - (1.08)^9}{1 - 1.08} = 11000 \times \frac{1 - (1.08)^9}{-0.08} = 137363$$



18 تھریں مقررہ

التمرين 01

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ ، وبالعلاقة: $u_3 + u_6 + u_9 = 78$

(1) أ) احسب الأساس r للمتتالية (u_n) .

ب) احسب الحد التاسع.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = 2 + 4n$

(3) بين أن العدد (2010) هو حد من حدود (u_n) ثم حدد رتبته

(4) احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{502}$

التمرين 02

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول u_0 وأساسها r

(1) علما أن: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، عين u_1

(2) علما أن: $2u_0 - 3u_1 = -10$ عين الحد الأول u_0 ، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n)

(3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -2 + 4n$

ب- عين قيمة n حتى يكون: $u_n = 2018$

ج- احسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n)

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين 03

I. (u_n) متتالية حسابية معرفة بالحددين: $u_9 = 22$ ، $u_{11} = 28$

(1) عين أساس المتتالية (u_n) ثم استنتج اتجاه تغيرها.

(2) اوجد قيمة الحد الأول u_0 ثم اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

(3) هل العدد 6067 حد من حدود (u_n) ؟ ما رتبته؟

(4) احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

II. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4 \times 6^n$

(1) أثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) بين ان: $v_{n+1} - v_n = 20 \times 6^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

(3) احسب المجموع: $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$



التمرين 04

لتكن المتتالية (v_n) هندسية حدودها موجبة تماما وهي معرفة على $\mathbb{N}$ بحيث: $v_1 \times v_2 \times v_3 = \frac{27}{64}$ و $v_1 - v_3 = \frac{7}{16}$

(1) احسب الحد v_2 ثم الأساس q لهذه المتتالية واكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n

(2) نعتبر المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{-2}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$

أ) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

ت) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها

(3) نضع $w_n = u_n - v_n$

أ) اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = -2$

ب) اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ت) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

التمرين 05

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 \end{cases}$$

(1) احسب v_1, v_2, v_3 و r أساس المتتالية.

(2) تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2}n$

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(4) (u_n) متتالية عددية حيث: $u_n = 2v_n$

أ- احسب u_1, u_2, u_3

ب- احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين 06

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1^2 + u_3^2 = 68 \end{cases}$$

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدها الأول u_0 وأساسها r معرفة بـ:

(1) أ- احسب الحد u_2 ثم الأساس r واستنتج قيمة u_0 .

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -1 + 3n$

(2) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم حدد رتبة الحد الذي قيمته 2021.

$$(3) \text{ أحسب المجموع: } S = u_2 + u_3 + \dots + u_{674}$$

$$(4) \text{ نعتبر } (v_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{u_n}$$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$\text{ب- أحسب المجموع: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

التمرين 07

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

(1) أحسب كل من u_1, u_2 .

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n > \frac{2}{3}$.

ب) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ت) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب v_n ، ثم u_n بدلالة n .

ت) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم استنتج المجموع T_n حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 08

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 + u_1 = 6$ و $u_0 \times u_2 = 16$

(1) أحسب u_1 ، u_0 والأساس q لهذه المتتالية

(2) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{n+1}$

(3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 3n$

أ- أحسب v_0 ، v_1 ، v_2

ب- أحسب بدلالة n المجموع: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين 09

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_2 - 5u_3 + 4u_4 = -9$ و $u_2 + u_3 + u_4 = -39$

(1) عين u_3 ثم الأساس r والحد الأول u_0 .

(2) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4 - 3n$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) أ- احسب الحد العشرون لهذه المتتالية.

ب- هل العدد (-6070) حد من حدود (u_n)؟ ما رتبته؟

(4) أحسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ثم استنتج $S_{2022} = u_1 + u_2 + \dots + u_{2022}$

التمرين 10

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$

(1) برهن بالتراجع أنه ومن أجل كل عدد طبيعي n أن: $1 \leq u_n < 4$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم

- عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

(4) نضع $\alpha = -4$

- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{u_0 - 4} + \frac{1}{u_1 - 4} + \dots + \frac{1}{u_n - 4}$

التمرين 11

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = eu_n - e$ (يرمز العدد e إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) أ- أحسب u_1 و u_2

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n < \frac{e}{e-1}$

ج) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{e}{e-1}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e يُطلب حساب حدّها الأول v_0

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(4) أحسب S_n بدلالة n ، ثم استنتج T_n بدلالة n

التمرين 12

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

ج- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 5$

أ- أحسب v_0 ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ب- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{5}$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أ- أحسب بدلالة n عبارة S_n .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = 5n - 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

التمرين 13

(1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}$

- حدد اتجاه تغير الدالة f ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = x$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + \frac{4}{9}$

أ) أحسب u_1 ثم عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$

(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

(ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن: $u_n = 2\left(\frac{7}{9}\right)^n + 2$

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

$$S_n = 2n + 11 - 9\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} \quad \text{بين أن:}$$

التمرين 14

لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4u_{n+1} - 2u_n = 9$.

ولتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 9$.

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 .

(2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) أحسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 15

(u_n) هي المتتالية المعرفة بـ $u_0 = \frac{1}{6}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = 2u_n + \frac{5}{3}$.

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم v_0 ، v_1 و v_2 .

(2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث: $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 16

a عدد حقيقي كفي. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = a$ و $u_{n+1} = 2,5u_n - 1,5$ بين أنه:

أ - إذا كان $a = 0$ فإن المتتالية (u_n) تكون متناقصة.

ب - إذا كان $a = 1$ فإن المتتالية (u_n) تكون ثابتة.

ج - إذا كان $a = 2$ فإن المتتالية (u_n) تكون متزايدة.

التمرين 17

في 1 جانفي 2023 أودع مراد 20000 دج ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 6% سنويا، بالإضافة إلى ذلك فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ 3000 دج.

نرمز بـ u_n إلى رصيد مراد في أول جانفي من السنة $2023+n$.

(1) عين u_0, u_1 و u_2 .

(2) تحقق أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1,06u_n + 3000$.

(3) بين أن (u_n) متتالية ليست حسابية وليست هندسية.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 50000$.

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 1,06 ، عين حدها الأول.

(ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ت) كم يكون رصيد مراد في سنة 2030؟



التمرين 18

بلغ عدد الأساتذة المصابين بانهيارات عصبية حادة 50000 أستاذ خلال سنة 2017. لوحظ في السنة الموالية أنه ارتفع العدد

بنسبة 20% من الأساتذة المرضى وأضيف إليهم بسبب ارتفاع الأسعار وغلاء المعيشة 6000 أستاذ جديد.

- نفرض أن تطور عدد الأساتذة المرضى يتواصل بنفس الكيفية السابقة خلال السنوات العشر الموالية.

نرمز بـ u_n إلى عدد الأساتذة المصابين بانهيارات عصبية حادة خلال السنة $2017+n$ ، حيث n عدد طبيعي.

(1) ما هو عدد الأساتذة الذين أصيبوا بانهيارات عصبية حادة خلال السنتين: 2018 و 2019؟

(2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 30000$.

(أ) أحسب v_0, v_1, v_2 ثم نحن طبيعة المتتالية (v_n) .

(ب) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها

(ج) عبر بدلالة n عن v_n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(د) ما هو عدد الأساتذة الذين سيصابون بانهيارات عصبية حادة المتوقع خلال سنة 2025؟ (تدور النتيجة إلى الوحدة)

تم بحمد الله وشكره ان اصبنا فمن الله

وان اخطأنا فمن أنفسنا والشيطان

أي خطأ نبهونا لتصحيحه



<https://www.facebook.com/mebarki.fatima32>



mebarki.math32@gmail.com



t.me/mebarki_math

