الأستاذة: تسنيم سمية(م.ف)

mebarki.math32@gmail.com

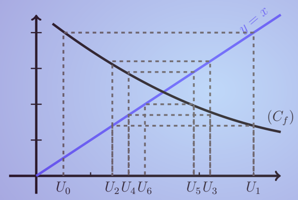
السنة الثالثة تسيير و اقتصاد

المتتاليات العددية:

- ملخص مع أمثلة تطبيقية
- اختبر معلوماتك
- حلول تمارين المتتاليات في بكالوريا التسيير 2008-2025
- 42 تمرين محلول
- 18 تمرين مقترح

$u_n = 7n + 4$

$u_n = 4n^2 + 4n$



$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(n) \end{cases}$$

إعداد الأستاذة:

- مباركي فاطمة

الموسم الدراسي: 2025-2026

هذا العمل:

صدقة جارية على ا لأخ

"مصطفى. ش"

رحمه الله وطيَّب ثراه

ويرحم جميع موتانا

وموتى المسلمين

بسم الله الرحمن الرحيم

الى تلاميذ شعبة التسيير

لا تنتظروا من العالم أن يمنحكم مكانتكم، اصنعوها أنتم بخطواتكم. أنتم طاقة قادرة على قلب الموازين، فقط آمنوا أن تعب اليوم هو مجد الغد."

الاستاذة: مباركي

ملخص مع أمثلة تطبيقية

عموميات على المتتاليات

- متتالية معطاه بعبارة من الشكل: $u_n = f(n)$

يمكن تعريف متتالية بعبارة صريحة (دستور) تسمح بحساب كل حد بدلالة n مباشرة

- متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

يمكن تعريف متتالية u بإعطاء الحد الأول وعلاقة تسمح بتعيين كل حد انطلاقا من الحد السابق وتسمى علاقة تراجعية

اتجاه تغيّر متتالية

لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

1) ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$

2) نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و1 (حدود المتتالية (u_n) من نفس الإشارة)

3) إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

التقـــــــــارب

- إذا كانت متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى $(u_n \le a)$ فإن هذه لمتتالية متقاربة.
- إذا كانت متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n \ge a)$ فإن هذه لمتتالية متقاربة.
- المتتالية u_n متقاربة وتتقارب نحو العدد الحقيقي l معناه: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

البرهـان بالتراجع

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n . n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي:

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P\ n_0$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P\ n+1$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حـســـاب الحدود

مثال تطبيقي 01

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــــ: $u_n = 4n-3$

- احسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_5 و u_{80}

الاجـــــابة

- حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_5 و u_{80}

$u_0 = 4(0)-3 = 0-3 = -3$ ، $u_1 = 4(1)-3 = 4-3 = 1$ ، $u_5 = 4(5)-3 = 20-3 = 17$

$u_{80} = 4(80)-3 = 320-3 = 317$

مثال تطبيقي 02

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــــ: $u_n = 6\times 2^n$

احسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_4 و u_7

الاجـــــابة

حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_4 و u_7

$u_0 = 6\times 2^0 = 6\times 1 = 6$ ، $u_1 = 6\times 2^1 = 6\times 2 = 12$ ، $u_4 = 6\times 2^4 = 96$ ، $u_7 = 6\times 2^7 = 768$

مثال تطبيقي 03

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــــ: $u_n = \dfrac{1}{2n+3} - 4$

- احسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{10}

الاجـــــابة

- حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{10}

$u_0 = \dfrac{1}{2(0)+3} - 4 = \dfrac{1}{3} - 4 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4\times 3}{3} = \dfrac{1-12}{3} = \dfrac{-11}{3}$ ، $u_1 = \dfrac{1}{2(1)+3} - 4 = \dfrac{1}{5} - 4 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{4\times 5}{5} = \dfrac{-19}{5}$

$u_2 = \dfrac{1}{2(2)+3} - 4 = \dfrac{1}{7} - 4 = \dfrac{1}{7} - \dfrac{4\times 7}{7} = \dfrac{-27}{7}$ ، $u_{10} = \dfrac{1}{2(10)+3} - 4 = \dfrac{1}{23} - 4 = \dfrac{1}{23} - \dfrac{4\times 23}{23} = \dfrac{-91}{23}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

مثال تطبيقي 04

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــــحدها الأول: $u_0=-2$ وبالعلاقة التراجعية: $u_{n+1}=2u_n+3$

- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

الاجــــــابة

- حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$u_1=2u_0+3=2\times(-2)+3=-1$ ، $u_2=2u_1+3=2\times(-1)+3=1$ ، $u_3=2u_2+3=2\times1+3=5$

مثال تطبيقي 05

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=-3n^2+1$.

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20}.

2) أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n}.

الاجــــــابة

1) حساب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20}.

$u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$.

2) كتابة بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} .

$u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

مثال تطبيقي 06

نعتبر المتتالية u_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n=\dfrac{2n^2-5n+1}{n^2+5}$.

- بين المتتالية u_n متقاربة.

Email : mebarki.math32@gmail.com

الاجـــــــابة

نلاحظ أن $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بِ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5}$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$ نستنتج أن المتتالية u_n متقاربة وتتقارب نحو العدد 2

مثال تطبيقي 07

نعتبر المتتالية u_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = 2n + \dfrac{1}{n+2}$.

- هل المتتالية u_n متقاربة؟

الاجـــــــابة

لاحظ أن $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بِ $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$. نستنتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ وبالتالي فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

نستنتج أن المتتالية u_n غير متقاربة.

مثال تطبيقي 08

u_n و (v_n) متتاليتين عدديتين معرفتين كمايلي: $u_n = 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n - 7$ ، $v_n = -6 \times 9^n + 8$

احسب $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ ، $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$. ماذا تستنتج؟

الاجـــــــابة

حساب $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ ، $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 7\right] = -7 \quad ، \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \left[-6 \times 9^n + 8\right] = -\infty$$

نستنتج أن: المتتالية u_n متقاربة والمتتالية (v_n) متباعدة

اتـــــجاه التــــــــغير

مثال تطبيقي 01

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = n^2 - n$.

- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الاجـــــــابة

- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

$u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - (n+1)\right] - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n$ ومنه $u_{n+1} - u_n = 2n$.

من أجل كل عدد طبيعي n، $2n \geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n \geq 0$. إذا: المتتالية (u_n) متزايدة.

مثال تطبيقي 02

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ، ادرس اتجاه تغيرها في كل حالة:

1) $u_n = -2n + 3$.
2) $u_n = (n+5)^2$.
3) $u_n = 5 \times 4^n$.
4) $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = u_n + 2n$.

الاجـــــــابة

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) في كل حالة:

1) $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n+3) = -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2 \prec 0$ ومنه: المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

2) $u_{n+1} - u_n = (n+1+5)^2 - (n+5)^2 = n^2 + 12n + 36 - n^2 - 10n - 25 = 2n + 11 \succ 0$ ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3) طريقة 01:

لدينا: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5 \times 4^{n+1}}{5 \times 4^n} = 4 \succ 1$ و $u_0 = 5 \times 4^0 = 5 \succ 0$ ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

طريقة 02:

$u_{n+1} - u_n = 5 \times 4^{n+1} - 5 \times 4^n = 5 \times 4^n (4-1) = 5 \times 4^n \times 3 = 15 \times 4^n \succ 0$ ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

4) لدينا: $u_{n+1} = u_n + 2n$ ومنه: $u_{n+1} - u_n = 2n \succ 0$ ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

البرهـــــان بالتراجـــع

مثال تطبيقي 01

(u_n) متتالية حدها الأول $u_0=4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

1) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 $(u_n\geq -2)$ ما ذا تستنتج؟

الاجـــــابة

1) البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة معناه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}\leq u_n$ $(u_{n+1}-u_n\leq 0)$.

- لدينا $u_1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ ومنه: $u_1\leq u_0$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_{n+1}\leq u_n$
- ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}\leq u_n$ ومنه: $\frac{1}{2}u_{n+1}-1\leq \frac{1}{2}u_n-1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$ ومنه: فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\leq u_n$. ومنه المتتالية (u_n) متناقصة.

2) البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 $(u_n\geq -2)$

لدينا $u_0=4$ ومنه: $u_0\geq -2$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n : أي $u_n\geq -2$

ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\geq -2$.

لدينا $u_n\geq -2$ ومنه: $\frac{1}{2}u_n-1\geq \frac{1}{2}(-2)-1$ أي $u_{n+1}\geq -2$ ومنه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq -2$ ومنه: المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2.

Email : mebarki.math32@gmail.com

مثال تطبيقي 02

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ وبالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

1) نضع $\alpha=3$

- برهن بالتراجع ان المتتالية (u_n) ثابتة

2) نضع $\alpha=2$

- برهن بالتراجع ان $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$

الاجـــــابة

1) نضع $\alpha=3$ ، البرهان بالتراجع ان المتتالية (u_n) ثابتة

لدينا: $u_1=\frac{1}{3}u_0+2=\frac{1}{3}(3)+2=3$ ومنه: $u_1=u_0=3$ إذا: الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n : أي $u_n=3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ ومنه $u_{n+1}=3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذا: حسب مبدأ البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. إذن (u_n) ثابتة.

2) نضع $\alpha=2$ ، البرهان بالتراجع ان $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$

لدينا: $u_0=-\left(\frac{1}{3}\right)^0+3=-1+3=2$ ومنه: الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n : أي $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3$

لدينا: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ ومنه: $u_{n+1}=\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\right]+2$ ومنه: $u_{n+1}=-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)+2$

ومنه: $u_{n+1}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1+2$ ومنه: $u_{n+1}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذا: حسب مبدأ البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي أي: $\boxed{u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

المتتـــــاليات الحســــــــــابية

	المتتاليات الحسابية
التعريف	من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$
عبارة الحد العام	الحد الأول: $u_0 \leftarrow u_n=u_0+nr$ الحد الأول: $u_1 \leftarrow u_n=u_1+(n-1)r$ الحالة العامة: $u_n=u_p+(n-p)r$
اتجـاه التغيــــــــــــــر	$r<0$: المتتالية متناقصة، $r>0$: المتتالية متزايدة، $r=0$: المتتالية ثابتة
خاصية ثلاثة حدود متتابعة	a، b، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية بهذا لترتيب تكافئ: $2b=a+c$
مجموع حدود متتابعة	$S=u_0+u_1+\ldots+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$ $S=$ عدد الحدود $\times \frac{\text{الحد الاخير}+\text{الحد الاول}}{2}$

عدد الحدود = الدليل الأخير - الدليل الأول +1

Email : mebarki.math32@gmail.com

مثال تطبيقي 01

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -7n + 12$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

الاجـــــابة

- اثبات أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$u_{n+1} - u_n = -7(n+1) + 12 - (-7n+12) = -7$.

ومنه المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = -7}$ وحدها الأول $\boxed{u_0 = -7(0) + 12 = 12}$.

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $r = -7 \prec 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

مثال تطبيقي 02

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -3n + 2$.

1) أحسب u_0 و u_1.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3) أحسب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

الاجـــــابة

1) حساب u_0 و u_1.

$\boxed{u_0 = -3(0) + 2 = 2}$ و $\boxed{u_1 = -3(1) + 2 = -1}$.

2) اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

لدينا $u_{n+1} - u_n = \left[-3(n+1)+2\right] - \left[-3n+2\right] = -3$ ومنه المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

3) حساب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

$S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$ ومنه: $\boxed{S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}}$.

مثال تطبيقي 03

(v_n) متتالية حسابية حيث: $v_4 = 5$ و $v_8 = 7$.

1) عين أساس المتتالية وحدها الأول v_0.

2) أحسب v_n بدلالة n. ثم عين العدد الطبيعي n حيث: $v_n = 50$.

Email : mebarki.math32@gmail.com

الاجـــــــابة

1) تعيين أساس المتتالية وحدها الأول v_0.

$\boxed{r=\frac{v_8-v_4}{8-4}=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$ لدينا: $v_4=v_0+\frac{1}{2}(4)$ ومنه : $v_0=5-2=3$

2) عبارة v_n بدلالة n

$$\boxed{v_n=v_0+nr=3+\frac{1}{2}n}$$

تعيين العدد الطبيعي n حيث: $v_n=50$.

$v_n=50$ تعني: $3+\frac{1}{2}n=50$ ومنه: $\frac{1}{2}n=47$ إذا: $\boxed{n=47\times 2=94}$

مثال تطبيقي 04

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين على الترتيب: $u_0=3$ و $u_{n+1}=u_n-5n-1$ ، $v_n=u_{n+1}-u_n$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).

الاجـــــــابة

1) اثبات أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا $v_n=u_{n+1}-u_n=-5n-1$ و $v_{n+1}-v_n=-5(n+1)-1-(-5n-1)=-5$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-5$ وحدها الأول $v_0=u_1-u_0=3-5(0)-1-3=-1$

2) كتابة v_n بدلالة n ثم حساب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).

- من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=-1-5n$.
- $S=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}=\frac{n}{2}\ 5+5-5n\ =\frac{n}{2}\ -2-5n$.

مثال تطبيقي 05

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، أساسها $r=-2$ ، وحدها الأول $u_0=204$.

- أحسب $S=u_{10}+u_{11}+\dots\dots+u_{216}+u_{217}$.

Email : mebarki.math32@gmail.com

الاجـــــــابة

عدد الحدود هو: $217-10+1=208$.

لدينا: $u_{10}=u_0+10r=204-20=184$ و $u_{217}=u_0+217(-2)=-230$ ومنه:

$$S=\frac{208}{2}\left(u_{10}+u_{217}\right)$$
$$=104(184-230)$$
$$=-4784$$

مثال تطبيقي 06

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1.

1) احسب حدها الثاني u_2 علما أنّ: $u_1+u_3=12$.

2) احسب الحد الرابع u_4 علما أن: $u_3+u_4+u_5=30$.

3) عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1.

4) اكتب الحد العام u_n بدلالة n

الاجـــــــابة

1) حساب حدها الثاني u_2 علما أنّ: $u_1+u_3=12$.

لدينا حسب خاصية الوسط الحسابي: $u_1+u_3=2u_2=12$ ومنه: $\boxed{u_2=\frac{12}{2}=6}$

2) حساب الحد الرابع u_4 علما أن: $u_3+u_4+u_5=30$.

لدينا حسب خاصية الوسط الحسابي: $u_3+u_5=2u_4$

ومنه: $u_3+u_4+u_5=30$ تعني: $u_4+2u_4=30$ ومنه: $3u_4=30$ ومنه: $\boxed{u_4=\frac{30}{3}=10}$

3) تعيين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1.

$\boxed{r=\frac{u_4-u_2}{4-2}=\frac{10-6}{2}=2}$　　$\boxed{u_1=u_2-r=6-2=4}$

4) كتابة الحد العام u_n بدلالة n

لدينا: $u_n=u_p+(n-p)r$ ومنه: $u_n=u_1+(n-1)(2)$ ومنه: $u_n=4+(n-1)(2)$

ومنه: $u_n=4+2n-2$ إذا: $\boxed{u_n=2+2n}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

المتتـــــاليات الهندســـــية

	المتتاليات الهندسية
التعريف	من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{u_{n+1}=u_n\times q}$
عبارة الحد العام	الحد الأول: $u_0 \leftarrow u_n=u_0\times q^n$ الحد الأول: $u_1 \leftarrow u_n=u_1\times q^{n-1}$ الحالة العامة: $u_n=u_p\times q^{n-p}$
خاصية ثلاثة حدود متتابعة	a، b، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية بهذا الترتيب تكافئ: $b^2=a\times c$
اتجـــــاه التغير	• إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. • إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة. • إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة. • إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. • إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة. • إذا كان $q<0$ فإن الفرق $u_{n+1}-u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة ومنه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.
مجموع حدود متتابعة	$S=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $S=\text{الحد الاول}\times\dfrac{1-\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

مثال تطبيقي 01

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ وأساسها $q=2$.

1) أحسب v_2 و v_3.

2) أكتب بدلالة n، الحد العام v_n.

3) أحسب، بدلالة n، المجموع $S=v_1+v_2+........+v_n$.

الاجـــــــابة

1) حساب v_2 و v_3.

$\boxed{v_2=v_1\times q=3\times 2=6}$ $\boxed{v_3=v_2\times q=6\times 2=12}$.

2) عبارة الحد العام

$\boxed{v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}}$.

3) $S=v_1+v_2+........+v_n=v_1\times\dfrac{1-q^n}{1-q}$ ومنه: $\boxed{S=3\times\dfrac{1-2^n}{1-2}=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)}$

مثال تطبيقي 02

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{3^n}{2^{n+1}}$.

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

2) ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

الاجـــــــابة

1) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

$v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}}=\dfrac{3\times 3^n}{2\times 2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3^n}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}v_n$ ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{1}{2}$

2) اتجاه تغير المتتالية (v_n)

بما أن $\dfrac{3}{2}>1$ و $v_0>0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة $\left(v_{n+1}-v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\succ 0\right)$.

Email : mebarki.math32@gmail.com

مثال تطبيقي 03

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) معرفتين كمايلي على الترتيب: $u_0=3$ ، $u_{n+1}=4u_n+6$ و $v_n=u_n+2$

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

الاجـــــابة

اثبات أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1}=u_{n+1}+2=4u_n+8=4(u_n+2)=4v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $v_0=u_0+2=5$

مثال تطبيقي 04

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $q=\frac{1}{2}$ ، و $u_5=\frac{1}{32}$.

1) أحسب u_{2007} .

2) أحسب $S=u_0+u_1+........+u_{28}+u_{29}$.

الاجـــــابة

1) حساب u_{2007}

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

إذا: $\boxed{u_{2007}=u_5\times q^{2007-5}=\frac{1}{32}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}=\frac{1}{2^{2007}}}$.

2) حساب $S=u_0+u_1+........+u_{28}+u_{29}$.

لدينا: $S=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ و $u_5=u_0\times q^5$ ومنه: $u_0=\frac{\frac{1}{32}}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=1$

ومنه: $S=1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{30}}{1-\frac{1}{2}}\right)$ إذا: $\boxed{S=2\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

مثال تطبيقي 05

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: بـ: $u_0+u_1=6$ و $u_0\times u_2=16$

1) أحسب u_1 ، u_0 والأساس q لهذه المتتالية

2) بين أن من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=2^{n+1}$

الاجـــــــابة

1) حساب u_1 ، u_0 والأساس q لهذه المتتالية

- لدينا: $u_0\times u_2=16$ ومنه: حسب خاصية الوسط الهندسي نجد: $u_0\times u_2=u_1^2=16$ ومنه: $\boxed{u_1=\sqrt{16}=4}$
- لدينا: $u_0+u_1=6$ ومنه: $u_0+4=6$ إذا: $\boxed{u_0=6-4=2}$
- نعلم أن: $u_1=u_0\times q$ ومنه: $\boxed{q=\frac{u_1}{u_0}=\frac{4}{2}=2}$

2) تبيان أن من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=2^{n+1}$

لدينا: $u_n=u_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{u_n=2\times 2^n=2^{n+1}}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

اختبر معلوماتك

اختر الإجابة الصحيحة مع تبرير اختيارك في كل سؤال

1) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 2$ والعبارة: $u_{n+1} = (2\alpha - 1)u_n$، قيمة α حتى تكون (u_n) ثابتة هي:

$\boxed{a}$ $\alpha = 2$ $\boxed{b}$ $\alpha = -3$ $\boxed{c}$ $\alpha = 1$

2) (u_n) متتالية معرفة بـالعبارة: $u_n = -3^n + n$ إذا: $u_{n+1} - u_n = ...$

$\boxed{a}$ $-2(3)^n + 1$ $\boxed{b}$ $-3^n + 1$ $\boxed{c}$ $3^n + 1$

3) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 2$ هي متتالية .....

$\boxed{a}$ متزايدة $\boxed{b}$ متناقصة $\boxed{c}$ غير رتيبة

4) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n = 2^n + 4$ إذا الحد السابع للمتتالية (v_n) هو:

$\boxed{a}$ 132 $\boxed{b}$ 68 $\boxed{c}$ 260

5) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$ إذا: $\lim_{n\to+\infty} v_n = ...$

$\boxed{a}$ 0 $\boxed{b}$ 4 $\boxed{c}$ $+\infty$

6) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 3n^2 - n + 1$ هي متتالية .....

$\boxed{a}$ متقاربة $\boxed{b}$ متباعدة $\boxed{c}$ لا نعلم

7) (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 7n - 1$ إذا: (w_n) هي متتالية:

$\boxed{a}$ هندسية $\boxed{b}$ لا هندسية ولا حسابية $\boxed{c}$ حسابية

8) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4 قيمة n ا لتي من أجلها يكون $v_n = 2025$ هي....

$\boxed{a}$ 507 $\boxed{b}$ 504 $\boxed{c}$ 506

9) (u_n) متتالية حسابية علم منها الحدان: $u_2 = 11$ و $u_8 = 41$ إذا عبارة u_n بدلالة n هي:

$\boxed{a}$ $u_n = 5n + 1$ $\boxed{b}$ $u_n = 11 + 5n$ $\boxed{c}$ $u_n = 1 - 5n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

10) (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=-5$ و $u_4+u_7+u_{10}=174$ إذا أساس المتتالية (u_n) هو:

$\boxed{a}$ 7 $\boxed{b}$ -9 $\boxed{c}$ 9

11) (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_2+u_3+u_4=75$ و $u_5+u_7=86$ إذا: أساس المتتالية (v_n) هو:

$\boxed{a}$ 7 $\boxed{b}$ 6 $\boxed{c}$ -6

12) a , b , c بهذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متناقصة أساسها r وتحقق: $b^2=ac+4$ إذا: $r=.......$

$\boxed{a}$ -3 $\boxed{b}$ 2 $\boxed{c}$ -2

13) قيمة المجموع S حيث: $S=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+...+20$ هـــــــي:

$\boxed{a}$ 3630 $\boxed{b}$ 1210 $\boxed{c}$ 605

14) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=2\times4^n$ إذا الحد الرابع للمتتالية هو:

$\boxed{a}$ 128 $\boxed{b}$ 512 $\boxed{c}$ 2048

15) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة بالحدين: $v_9=2560$ ، $v_7=640$ إذا أساس المتتالية (v_n) هو:

$\boxed{a}$ $q=2$ $\boxed{b}$ $q=-2$ $\boxed{c}$ $q=5$

16) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $v_2\times v_4=186624$ و $v_0+v_3=434$ إذا أساس المتتالية (v_n) هو:

$\boxed{a}$ $q=2$ $\boxed{b}$ $q=6$ $\boxed{c}$ $q=12$

17) u_1، u_2 و u_3 ثلاث حدود من متتالية عددية (u_n) إذا كان: $u_1=-1$ ، $u_2=\frac{5}{2}$ ، $u_3=\frac{7}{3}$ إذا (u_n) هي متتالية....

$\boxed{a}$ هندسية $\boxed{b}$ لا هندسية ولا حسابية $\boxed{c}$ حسابية

18) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n=5(-7)^n$ إذا (v_n) هي متتالية ....

$\boxed{a}$ متزايدة $\boxed{b}$ متناقصة $\boxed{c}$ غير رتيبة

19) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3^{-2n}$ إذا أساس المتتالية هو ....

$\boxed{a}$ $q=\frac{1}{9}$ $\boxed{b}$ $q=-9$ $\boxed{c}$ $q=9$

Email : mebarki.math32@gmail.com

20) (u_n) متتالية هندسية حيث: $u_3 = 384$ و $u_0 = 6$ إذا عبارة u_n بدلالة n هي:

a $u_n = 6\times 4^n$ | b $u_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ | c $u_n = 6\times 3^n$

21) (u_n) متتالية هندسية أساسها $q \succ 0$ وحدها الأول $u_0 = \frac{30}{7}$ إذا علمت أن: $u_0 + u_1 + u_2 = 30$ فإن: $q = ...$

a 2 | b 3 | c 8

22) a , b , c اعداد حقيقية ولتكن $3c$, $2b$, a حدود متعاقبة من متتالية هندسية تحقق $a\times b\times c = \frac{32}{3}$ اذا: $b = ...$

a 8 | b 2 | c $\sqrt{\frac{32}{3}}$

23) (u_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $u_0 = 3$ إذا قيمة المجموع: $S_n = u_0 + u_2 + ... + u_{2n}$ هي:

a $1-4^n$ | b $1-4^{n+1}$ | c $-1+4^{n+1}$

24) أودع خالد مبلغ قدره $20000\ DA$ في البنك بفائدة بسيطة قدرها 3% إذا بعد سنتين يصبح هذا المبلغ:

a 20600 | b 21200 | c 21218

25) وضع شخص مبلغ قدره $50000\ DA$ في البنك بفائدة مركبة قدرها 2% إذا بعد ثلاث سنوات يصبح هذا المبلغ:

a لا يمكن الحساب | b 50300 | c 53060.4

26) قام أحمد بتأجير سكن لمدة 8 سنوات حيث يدفع $5000\ DA$ في السنة الأولى ثم يزداد كل سنة بقيمة ثابتة قدرها $150DA$ إذا ثمن الكرا لمدة 8 سنوات هو:

a 44200 | b 6050 | c 6200

Email : mebarki.math32@gmail.com

الاجــــــــــــابة

1) الاختيار $\boxed{c}$ لأن :

(u_n) متتالية ثابتة معناه: $u_{n+1}=u_n=u_0=2$ ومنه: $2=(2\alpha-1)\times 2$ ومنه: $2\alpha-1=1$ ومنه: $2\alpha=2$ إذا: $\boxed{\alpha=1}$

2) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

$$u_{n+1}-u_n=\left(-3^{n+1}+n+1\right)-\left(-3^n+n\right)=-3^{n+1}+n+1+3^n-n=3^n\left(-3+1\right)+1=-2\times 3^n+1$$

3) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

$u_{n+1}-u_n=(n+1)^2-2-\left(n^2-2\right)=n^2+2n+1-2-n^2+2=2n+1\succ 0$ ومنه: (u_n) متتالية متزايدة

4) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

$$\boxed{v_6=2^6+4=68}$$

5) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=0$ إذا : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\right]=4$

6) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n^2-n+1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}3n^2=+\infty$ ومنه: (u_n) متتالية متباعدة

7) الاختيار $\boxed{c}$ لأن:

$w_{n+1}-w_n=7(n+1)-1-(7n-1)=7n+7-1-7n+1=7$ ومنه: المتتالية (w_n) حسابية أساسها $\boxed{r=7}$

8) الاختيار $\boxed{c}$ لأن:

عبارة v_n بدلالة n هي: $\boxed{v_n=1+4n}$

$v_n=2025$ تعني: $1+4n=2025$ ومنه: $\boxed{n=\frac{2025-1}{4}=506}$

9) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

لدينا: $\boxed{r=\frac{u_8-u_2}{8-2}=\frac{41-11}{6}=5}$ و $u_2=u_0+5\times 2$ ومنه: $\boxed{u_0=11-10=1}$ إذا: $\boxed{u_n=1+5n}$

10) الاختيار $\boxed{c}$ لأن:

لدينا: $u_4+u_7+u_{10}=174$ تعني: $u_0+4r+u_0+7r+u_0+10r=174$ ومنه: $3u_0+21r=174$

ومنه: $\boxed{r=\frac{174-3u_0}{21}=\frac{174-3(-5)}{21}=9}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

11) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

لدينا: $u_2+u_3+u_4=75$ و $u_5+u_7=86$ وحسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $u_2+u_4=2u_3$ و $u_5+u_7=2u_6$

ومنه: $2u_3+u_3=75$ ومنه: $3u_3=75$ إذا: $\boxed{u_3=\frac{75}{3}=25}$

$u_5+u_7=2u_6=86$ ومنه: $\boxed{u_6=\frac{86}{2}=43}$ إذا: $\boxed{r=\frac{u_6-u_3}{6-3}=\frac{43-25}{3}=6}$

12) الاختيار $\boxed{c}$ لأن:

a , b , c بهذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية معناه: $b=a+r$ و $c=b+r=a+2r$ ولدينا: $b^2=ac+4$

بالتعويض نجد: $(a+r)^2=a(a+2r)+4$ ومنه: $a^2+2ar+r^2=a^2+2ar+4$ ومنه: $r^2=4$

إذا: $\boxed{r=-2}$ أو $r=2$ (مرفوض لأن المتتالية (u_n) متناقصة)

13) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{6}$ وحدها الأول $u_0=\frac{1}{6}$ أي: $u_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}n$

$u_n=20$ تعني: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}n=20$ ومنه: $\frac{1}{6}n=\frac{20\times 6}{6}-\frac{1}{6}$ ومنه: $\frac{1}{6}n=\frac{119}{6}$ ومنه: $\boxed{n=\frac{119}{6}\times 6=119}$

إذا: $S=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+...+20=u_0+u_1+...+u_{119}=\frac{120}{2}(u_0+u_{119})=60\left(\frac{1}{6}+20\right)=1210$

14) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

الحد الرابع للمتتالية (v_n) هو: $\boxed{v_3=2\times 4^3=2\times 64=128}$

15) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

لدينا: $v_9=v_7\times q^2$ ومنه: $q^2=\frac{v_9}{v_7}=\frac{2560}{640}=4$ ومنه: $q=-2$ مرفوض لأن حدود المتتالية موجبة أو $\boxed{q=2}$

إذا أساس المتتالية (u_n) هو: $\boxed{q=2}$

16) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

لدينا: $v_2\times v_4=186624$ ومنه حسب خاصية الوسط الهندسي: $v_3^2=186624$ ومنه: $\boxed{v_3=\sqrt{186624}=432}$

ولدينا: $v_0+v_3=434$ ومنه: $\boxed{v_0=434-v_3=434-432=2}$

ومنه: $v_3=v_0\times q^3$ ومنه: $q^3=\frac{v_3}{v_0}=\frac{432}{2}=216$ ونعلم أن: $6^3=216$ إذا: $\boxed{q=6}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

17) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

لدينا: $u_1+u_3=-1+\frac{7}{3}=\frac{4}{3}$ و $2u_2=2\times\frac{5}{2}=5$ ومنه: $u_1+u_3\neq 2u_2$ ومنه: المتتالية (u_n) ليست حسابية.

ولدينا: $u_1\times u_3=-1\times\frac{7}{3}=\frac{-7}{3}$ و $u_2^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ ومنه: $u_1\times u_3=u_2^2$ ومنه: المتتالية (u_n) ليست هندسية.

18) الاختيار $\boxed{c}$ لأن:

$v_{n+1}-v_n=5(-7)^{n+1}-5(-7)^n=5(-7)^n(-7-1)=-40(-7)^n$ ومنه:

- من أجل: n عدد زوجي فإن: $v_{n+1}-v_n\prec 0$
- من أجل: n عدد زوجي فإن: $v_{n+1}-v_n\succ 0$

19) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{3^{-2n-2}}{3^{-2n}}=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

20) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

لدينا: $u_3=u_0\times q^3$ ومنه: $q^3=\frac{u_3}{u_0}=\frac{384}{6}=64$ ولدينا: $4^3=64$ ومنه: $\boxed{q=4}$ إذا: $\boxed{u_n=6\times 4^n}$

21) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

لدينا: $u_0+u_1+u_2=30$ ولدينا: $u_1=u_0\times q=\frac{30}{7}q$ و $u_2=u_0\times q^2=\frac{30}{7}q^2$ بتعويض القيم في المعادلة نجد:

$\frac{30}{7}+\frac{30}{7}q+\frac{30}{7}q^2=30$ ومنه: $\frac{30}{7}\left(1+q+q^2\right)=30$ ومنه: $1+q+q^2=30\times\frac{7}{30}$ ومنه: $q^2+q-6=0$

ومنه: $\Delta=25$ إذا: $q=-3$ مرفوض لان $q\succ 0$ أو: $\boxed{q=2}$ إذا أساس المتتالية (u_n) هو: $\boxed{q=2}$

22) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

a , $2b$, $3c$ ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه: $3ac=4b^2$ ومنه: $\boxed{ac=\frac{4}{3}b^2}$ بالتعويض في المعادلة $a\times b\times c=\frac{32}{3}$

نجد: $\frac{4}{3}b^2\times b=\frac{32}{3}$ ومنه: $b^3=\frac{32}{3}\times\frac{3}{4}$ ومنه : $b^3=8$ إذا: $\boxed{b=2}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

23) الاختيار $\boxed{c}$ لأن:

لدينا: $u_n = 3\times 2^n$ ومنه: $u_{2n} = 3\times 2^{2n} = 3\times 4^n$ نضع: $v_n = 3\times 4^n$

حيث: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول: $v_0 = 3\times 4^0 = 3$ إذا:

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_2 + \dots + u_{2n} \\ &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= 3\times\frac{1-4^{n+1}}{1-4} = -1\left(1-4^{n+1}\right) = 4^{n+1}-1 \end{aligned}$$

24) الاختيار $\boxed{b}$ لأن:

مقدار الزيادة هو: $20000\times\frac{3}{100} = 600$ ومنه: مقدار الزيادة بعد سنتين هو: $\boxed{20000+600+600 = 21\,200}$

25) الاختيار $\boxed{c}$ لأن:

المبلغ الذي يصبح عنده بعد ثلاث سنوات: $50000\left(1+\frac{2}{100}\right)\left(1+\frac{2}{100}\right)\left(1+\frac{2}{100}\right) = 53060.4\ DA$

26) الاختيار $\boxed{a}$ لأن:

ليكن ثمن الكراء في السنة n هو u_n إذا: $u_{n+1} = u_n + 150$

إذا: (u_n) متتالية حسابية أساسها 150 وحدها الأول: $u_1 = 5000$ ومنه: $u_n = u_1 + (n-1)r = 5000 + 150n - 150 = 4850 + 150n$

ثمن الكراء في العام الثامن هو: $u_8 = 4850 + 150\times 8 = 6050$ إذا: ثمن الكراء لمدة 8 سنوات هو:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= u_1 + u_2 + \dots + u_8 \\ &= \frac{8}{2}(u_1+u_8) \\ &= 4(5000+6050) \\ &= 44\,200 \end{aligned}}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حلول تمارين المتتاليات في بكالوريا التسيير 2008-2025

التمـــرين 01

بكالـــوريا 2008 الموضـــوع الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = \alpha & ;(\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} & ;(n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة

2) في كل ما يلي $\alpha = 2$، ونعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ) أحسب u_1, u_2.

ب) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

ت) أكتب عبارة u_n بدلالة n، وأحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

حل التمـــرين 01

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = \alpha & ;(\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} & ;(n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) البرهان بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة

لدينا: $u_0 = -\frac{8}{3}$ ، إذا الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -\frac{8}{3}$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$

لدينا: $u_n = -\frac{8}{3}$ ومنه: $u_{n+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{-8}{3}\right) - \frac{8}{9} = -\frac{24}{9} = -\frac{8}{3}$ ومنه: $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع المتتالية (u_n) ثابتة في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$

2) في كل ما يلي $\alpha = 2$, ونعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ) حساب u_1 ، u_2 .

$\boxed{u_1 = \frac{2}{3}(2) - \frac{8}{9} = \frac{4}{9}}$ ، $\boxed{u_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{9} = -\frac{16}{27}}$

ب) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

لدينا: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{8}{3}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} + \frac{8}{3}$ ومنه $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{16}{9}$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}v_n$ وعليه: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{2}{3}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = u_0 + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}}$

ت) كتابة عبارة u_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

ومنه $v_n = u_n + \frac{8}{3}$ $\boxed{u_n = v_n - \frac{8}{3} = \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{8}{3}}$ ، $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\frac{8}{3}}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــرين 02

بكالـــوريا 2008 الموضـــوع الثاني

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$

1) أحسب u_1، u_2 و u_3.

2) أ) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq -2$.

ب) جد اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_n+2$

أ) بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية.

ب) عبر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n.

ت) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

ث) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$

حل التمـــرين 02

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$

1) حساب u_1، u_2 و u_3.

$$u_1=\frac{1}{2}(1)-1=-\frac{1}{2} \quad , \quad u_1=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{5}{4} \quad , \quad u_1=\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}\right)-1=-\frac{13}{8}$$

2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq -2$

لدينا: $u_0=1$ و $1\geq -2$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq -2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}\geq -2$

لدينا: $u_n\geq -2$ ومنه: $\frac{1}{2}u_n-1\geq\frac{1}{2}(-2)-1$ ومنه: $u_{n+1}\geq -2$ ومنه: $u_{n+1}\geq -2$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\geq -2$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n-1-u_n=\frac{-1}{2}u_n-1$ ولدينا: $u_n\geq -2$ ومنه: $\frac{-1}{2}u_n-1\leq\frac{-1}{2}\times(-2)-1$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\leq 0$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة تماما

الاستنتاج: المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 $(u_n\geq -2)$ إذن فهي متقاربة

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n+2$.

أ) تبيان ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية

لدينا: $v_n=u_n+2$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}+2$ ومنه: $v_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1+2$ ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$

ومنه: $v_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+2)=\frac{1}{2}v_n$ وعليه: $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{2}}$

وحدها الأول $\boxed{v_0=u_0+2=1+2=3}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) التعبير عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

$\boxed{v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ ، لدينا: $v_n = u_n + 2$ ومنه $\boxed{u_n = v_n - 2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}$

ت) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right) = -2}$$

د) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

لدينا: $v_n = u_n + 2$ ومنه: $u_n = v_n - 2$ إذا: $S_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \dots + (v_n - 2)$

يعني: $S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 2(n+1)$ ومنه: $S_n = 3 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2(n+1)$

ومنه: $S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 2(n+1)$ إذا: $\boxed{S_n = 4 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2n}$

التمـــرين 03 — بكالـــوريا 2009 الموضـــوع الأول

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1} = u_n + 4$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le 2$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ت) استنتج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n.

ت) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

ث) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$

حل التمـــرين 03

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1} = u_n + 4$

أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le 2$

لدينا: $u_0 = -1$ و $-1 \le 2$ إذا الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \le 2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} \le 2$

لدينا: $u_n \le 2$ ومنه: $\frac{1}{3}u_n - \frac{4}{3} \le \frac{1}{3}(2) - \frac{4}{3}$ ومنه: $u_{n+1} \le -\frac{2}{3}$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \le 2$ محققة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \le 2$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة.

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}-u_n=\frac{-2}{3}u_n+\frac{4}{3}$ ولدينا: $u_n\le 2$ ومنه: $\frac{-2}{3}u_n+\frac{4}{3}\ge\frac{-2}{3}\times(2)+\frac{4}{3}$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\ge 0$ إذا المتتالية (u_n) متزايدة تماما

ت) استنتاج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 $(u_n\le 2)$ إذن فهي متقاربة

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-2$.

أ) تبيان ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا: $v_n=u_n-2$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-2$ ومنه: $v_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}-2$ ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-\frac{2}{3}$ ومنه: $v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-2)$

وعليه: $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{3}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=u_0-2=-1-2=-3}$

ب) كتابة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج الحد العام u_n بدلالة n.

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n=-3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ و لدينا: $v_n=u_n-2$ ومنه: $u_n=v_n+2$ أي: $\boxed{u_n=-3\left(\frac{1}{3}\right)^n+2}$

ت) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(-3\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right)=2}$$

ث) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$

لدينا: $v_n=u_n-2$ ومنه: $u_n=v_n+2$ إذا: $S_n=(v_0+2)+(v_1+2)+...+(v_n+2)$ يعني:

$S_n=(v_0+v_1+...+v_n)-2(n+1)$ ومنه: $S_n=-3\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}+2(n+1)$ ومنه: $\boxed{S_n=-\frac{9}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+2(n+1)}$

التمـــرين 04 — بكالـــوريا 2009 الموضـــوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3u_n-2$

1) أحسب u_1 ، u_2.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n=u_n-1$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=(-4)\times 3^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_0+u_1+...+u_n=n-79$

حل التمـــرين 04

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n-2$

Email : mebarki.math32@gmail.com

1) حساب u_1 ، u_2.

$\boxed{u_1=3(-1)-2=-5}$ ، $\boxed{u_1=3(-5)-2=-17}$

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n=u_n-1$

أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

لدينا: $v_n=u_n-1$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-1$ ومنه: $v_{n+1}=3u_n-2-1$ ومنه $v_{n+1}=3u_n-3$ ومنه: $v_{n+1}=3(u_n-1)$

وعليه: $v_{n+1}=3v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=3}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=u_0-1=-2}$

ب) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n=-2\times 3^n}$

3) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=(-4)\times 3^n$

لدينا: $v_n=u_n-1$ ومنه: $u_n=v_n+1$ أي: $\boxed{u_n=-2\times 3^n+1}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=-2\times 3^{n+1}-(-2\times 3^n)=-6\times 3^n+2\times 3^n$ إذا: $u_{n+1}-u_n=(-4)\times 3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا $u_{n+1}-u_n=(-4)\times 3^n$ ومنه $u_{n+1}-u_n\prec 0$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة تماما

4) تعين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_0+u_1+...+u_n=n-79$

نضع $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$

لدينا: $v_n=u_n-1$ ومنه: $u_n=v_n+1$ إذا: $S_n=(v_0+1)+(v_1+1)+...+(v_n+1)$

يعني: $S_n=(v_0+v_1+...+v_n)-(n+1)$ ومنه: $S_n=-2\times\dfrac{1-3^{n+1}}{1-3}+(n+1)$

ومنه $S_n=1-3^{n+1}+n+1=-3^{n+1}+n+2$ وعليه $u_0+u_1+...+u_n=n-79$ تكافئ

$-3^{n+1}+n+2=n-79$ ومنه $-3\times 3^n=-81$ ومنه: $3^n=27=3^3$ إذا $\boxed{n=3}$

التمـــــرين 05 بكالـــوريا 2010 الموضـــوع الأول

1) n عدد طبيعي، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=1+e+e^2+...+e^n$ (S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1، و e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

2) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=2n+4+e^n$

- بين ان: $w_n=u_n+v_n$ حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول والأساس لكل منهما.

3) أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n : $4+6+8+...+(2n+4)=(n+1)(n+4)$

4) استنتج المجموع S بدلالة n حيث: $S=w_0+w_1+...+w_n$

حل التمرين 05

1) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\boxed{S_n=1+e+e^2+...+e^n=\frac{1-e^{n+1}}{1-e}}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) اثبات ان: $w_n = u_n + v_n$

لدينا $w_n = 2n + 4 + e^n$ ومنه $u_n = 4 + 2n$ و $v_n = e^n$ إذا (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $u_0 = 4$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e$ وحدها الأول $v_0 = 1$

3) اثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n: $4+6+8+...+(2n+4)=(n+1)(n+4)$

$$4+6+8+...+(2n+4)=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$$

ومنه: $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=(n+1)\dfrac{(u_0+u_n)}{2}=(n+1)\dfrac{(4+4+2n)}{2}$

وعليه فانه من أجل كل عدد طبيعي n: $4+6+8+...+(2n+4)=(n+1)(n+4)$

4) استنتاج المجموع S بدلالة n حيث: $S = w_0 + w_1 + ... + w_n$

لدينا: $S = (u_0+v_0)+(u_1+v_1)+...+(u_n+v_n)$ ومنه $S = u_0+u_1+..u_n+v_0+v_1+...+v_n$

ومنه $S=(n+1)(n+4)+S_n$ إذا: $\boxed{S=(n+1)(n+4)+\dfrac{1-e^{n+1}}{1-e}}$

التمـــرين 06 — بكالـــوريا 2010 الموضـــوع الثاني

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{4}$

1) أحسب الحدود u_1, u_2 و u_3.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 2$.

ت) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ث) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 2$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n.ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

ج) ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_0 + u_1 + ... + u_n = 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

حل التمـــرين 06

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{4}$

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$\boxed{u_1 = \dfrac{3u_0+2}{4} = \dfrac{3(1)+2}{4} = \dfrac{5}{4}}$ ، $\boxed{u_2 = \dfrac{3u_1+2}{4} = \dfrac{3\left(\frac{5}{4}\right)+2}{4} = \dfrac{23}{16}}$ ، $\boxed{u_3 = \dfrac{3u_2+2}{4} = \dfrac{3\left(\frac{23}{16}\right)+2}{4} = \dfrac{101}{64}}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 2$

لدينا: $u_0 = 1 \prec 2$ ومنه الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي n أي: $u_n < 2$ ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} \prec 2$

لدينا: $u_n < 2$ ، $\frac{1}{4}(3u_n + 2) < \frac{1}{4}(2 \times 3 + 2)$ ومنه: $u_{n+1} \prec 2$

ومنه الخاصية صحيحة من اجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{4} - u_n = \frac{2 - u_n}{4}$ وبما أن $u_n < 2$ فإن: $u_{n+1} - u_n \succ 0$ ، إذا المتتالية (u_n) متزايدة تماما

ج) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 $(u_n < 2)$ فإنها متقاربة

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها

لدينا $v_n = u_n - 2$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4} - 2 = \frac{3u_n + 2 - 8}{4} = \frac{3u_n - 6}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 2)$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{3}{4} v_n$ إذا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -1$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n.ثم استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

لدينا: $v_n = v_0 q^n$ ومنه $\boxed{v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ ولدينا: $v_n = u_n - 2$ ومنه $u_n = v_n + 2$ إذا: $\boxed{u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

ج) نهاية المتتالية (u_n)

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left[2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 2}$$

4) حساب بدلالة n المجموع S_n واستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0 + u_1 + ... + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

- $S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ومنه $S_n = -\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = -4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = -4 + 4 \times \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ إذا: $\boxed{S_n = -4 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

لدينا: $u_n = v_n + 2$ ومنه $u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \cdots + (v_n + 2)$

ومنه: $u_0 + u_1 + ... + u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + 2(n+1) = S_n + 2(n+1) == -4 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n + 2$

$\boxed{u_0 + u_1 + ... + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2}$ وهو المطلوب

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 07 — بكالـــــوريا 2011 الموضـــوع الثاني

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}$

1) أحسب u_1, u_2.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>\frac{1}{3}$.

3) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-\frac{1}{3}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

ت) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمـــرين 07

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}$

1) حساب u_1, u_2.

$\boxed{u_1=\frac{2}{5}u_0+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}}$ ، $\boxed{u_2=\frac{2}{5}u_1+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{5}=\frac{9}{25}}$

2) تبان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>\frac{1}{3}$.

لدينا: $u_0=\frac{1}{2}\succ\frac{1}{3}$ ومنه الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي n أي: $u_n\succ\frac{1}{3}$ ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1}\succ\frac{1}{3}$

لدينا: $u_n\succ\frac{1}{3}$ ومنه: $\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}\succ\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\succ\frac{1}{3}$ ومنه: $u_{n+1}\succ\frac{1}{3}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$

إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

3) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة.

* لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}-u_n=\frac{1-3u_n}{5}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي $u_n>\frac{1}{3}$ فإن: $u_{n+1}-u_n\prec 0$

إذا المتتالية (u_n) متناقصة تماما

* بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{3}$ $\left(u_n>\frac{1}{3}\right)$ فإنها متقاربة

4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-\frac{1}{3}$

أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

لدينا: $v_n=u_n-\frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3}$ أي: $v_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$ ومنه: $v_{n+1}=\frac{2}{5}u_n-\frac{2}{15}$ ومنه: $v_{n+1}=\frac{2}{5}\left(u_n-\frac{1}{3}\right)$

وعليه: $v_{n+1}=\frac{2}{5}v_n$ إذا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{2}{5}}$ وحدها الأول $v_0=u_0-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ومنه: $\boxed{v_0=\frac{1}{6}}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n.

ومنه: $v_n = v_0\, q^n$ $\boxed{v_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ لدينا: $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ ومنه $u_n = v_n + \frac{1}{3}$ أي: $\boxed{u_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}}$

ت) حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}}$$

التمرين 08 — بكالوريا 2012 الموضوع الأول

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > \frac{2}{3}$.

ب-بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$

ث) ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

حل التمرين 08

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$

1) أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > \frac{2}{3}$.

لدينا: $u_0 = 1 \succ \frac{2}{3}$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي n أي: $u_n \succ \frac{2}{3}$ ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} \succ \frac{2}{3}$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$ ومنه: $\frac{1}{9}(3u_n + 4) \succ \frac{1}{9}\left(3 \times \frac{2}{3} + 4\right)$ ومنه: $\frac{1}{9}(3u_n + 4) \succ \frac{2}{3}$ ومنه $u_{n+1} \succ \frac{2}{3}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4}{9} - u_n = \frac{3u_n + 4 - 9u_n}{9} = \frac{4 - 6u_n}{9} \prec 0$ لأن $u_n \succ \frac{2}{3}$ تعني $4 - 6u_n \prec 0$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9} - \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3u_n - 2}{9} = \frac{3}{9}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}$ ومنه $v_0=\frac{1}{3}$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]$

- $v_n=v_0\ q^n$ ومنه $\boxed{v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$
- لدينا: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ ومنه $u_n=v_n+\frac{2}{3}$ ومنه: $\boxed{u_n=v_n+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]}$ وهو المطلوب

ج) نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]=\frac{2}{3}$$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$

لدينا: $u_n=v_n+\frac{2}{3}$ ومنه: $S_n=\left(v_0+\frac{2}{3}\right)+\left(v_1+\frac{2}{3}\right)+\left(v_2+\frac{2}{3}\right)+......+\left(v_n+\frac{2}{3}\right)$

ومنه: $S_n=v_0+v_1+v_2+......+v_n+\frac{2}{3}(n+1)$ $\boxed{S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)+\frac{2}{3}(n+1)=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2}+\frac{2}{3}(n+1)}$

التمـــرين 09 — بكالـــوريا 2012 الموضـــوع الثاني

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغ من المال قدره $50000DA$ في صندوق التوفير والاحتياط يقدّم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا . يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000DA$ (بعد حساب الفوائد).

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008+n$

1) أ) أحسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2

ب) هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ برر إجابتك.

ج) بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا: $u_{n+1}=1.05u_n-5000$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-100000$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية، حدّد أساسها وحدّها الأول.

ب) أكتب v_n بدلالة n،ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=-50000\times(1.05)^n+100000$

3) أ) ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

ب) ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

حل التمـــرين 09

1) أ) حساب كلا من u_0 ، u_1 و u_2

$\boxed{u_0=50000}$ ، $\boxed{u_1=\left(u_0+\frac{5}{100}u_0\right)-5000=47500}$ ، $\boxed{u_2=\left(u_1+\frac{5}{100}u_1\right)-5000=44875}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ برر إجابتك.

المتتالية (u_n) ليست حسابية ولا هندسية لأنّ:

$\begin{cases} u_0+u_2=94875 \\ 2u_1=95000 \end{cases}$ ومنه $u_0+u_2\neq 2u_1$ إذن (u_n) ليست حسابية

$\begin{cases} u_0\times u_2=2243750000 \\ u^2{}_1=2256250000 \end{cases}$ ومنه $u_0\times u_2\neq u^2{}_1$ إذن (u_n) ليست هندسية

ح) اثبات لماذا من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا: $u_{n+1}=1.05u_n-5000$

لدينا: $u_1=\left(u_0+\frac{5}{100}u_0\right)-5000$ و $u_2=\left(u_1+\frac{5}{100}u_1\right)-5000$

اذن: $u_{n+1}=\left(u_n+\frac{5}{100}u_n\right)-5000=\left(1+\frac{5}{100}\right)u_n-5000=1,5u_n-5000$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-100000$

أ) اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية، حدّد أساسها وحدّها الأول.

لدينا: $v_n=u_n-100000$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-100000=1.05u_n-5000-100000=1.05u_n-105000$

ومنه: $v_{n+1}=1,05(u_n-100000)=1,05v_n$، اذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,05$ وحدها الأول

$v_0=u_0-100000=50000-100000=-50000$

ب) كتابة v_n بدلالة n، ثم استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=-50000\times(1.05)^n+100000$

* لدينا $v_n=v_0q^n$ ومنه $\boxed{v_n=-50000(1,05)^n}$

* لدينا $v_n=u_n-100000$ ومنه $u_n=v_n+100000$ ومنه: $\boxed{v_n=-50000(1,05)^n+100000}$

3) أ) حساب المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 (بداية جانفي 2016)

ومنه $\boxed{u_8=-50000(1,05)^8+100000=26127,23DA}$

ب) ايجاد السنة التي لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة

نضع $u_n\prec 5000$ ومنه $-50000(1,05)^n+100000\prec 5000$ ومنه: $-50000(1,05)^n\prec -95000$

نجد $(1,05)^n\succ\frac{-95000}{-50000}$ ومنه $n\succ\frac{\ln(1,9)}{\ln(1,05)}$ وبالتالي $\boxed{n=14}$

اذن ابتداء من سنة $(2008+14)$ اي سنة 2022 لا يسمح لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد

التمـــــرين 10 بكالـــوريا 2013 الموضـــوع الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\left(\frac{2\alpha+1}{3}\right)u_n-\frac{2\alpha+4}{3}$ حيث α وسيط حقيقي.

1) عين قيمة α التي تكون من اجلها (u_n) ثابتة.

2) نفرض $\alpha\neq\frac{5}{2}$. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ثم احسب عندئذ u_n مجموع n حدا الأولى من المتتالية.

3) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

4) نفرض $\alpha=4$. برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n=3^n+2$ ثم بين أن: $u_0+u_1+...+u_n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+4n+3\right)$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 10

1) تعين قيمة α التي تكون من اجلها (u_n) ثابتة.

(u_n) ثابتة معناه: $u_0 = u_n = u_{n+1} = 3$

ومنه $3 - \frac{2\alpha+4}{3} = \left(\frac{2\alpha+1}{3}\right)3$ وعليه $\frac{6\alpha+3-2\alpha-4}{3} = 3$ ومنه $4\alpha - 1 = 9$ أي $\alpha = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

2) نفرض $\alpha \neq \frac{5}{2}$. تعين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ثم حساب عندئذ u_n مجموع n حدا الأولى من المتتالية.

(u_n) حسابية معناه: $\frac{2\alpha+1}{3} = 1$ ومنه: $\boxed{\alpha = 1}$

أساسها $r = -\frac{2+4}{3} = -2$ ومنه $u_n = u_0 + nr$ أي $\boxed{u_n = 3 - 2n}$

-حساب مجموع n حدا الأولى من المتتالية

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = (n-1-0+1)\left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right) = n\left(\frac{3+3-2(n-1)}{2}\right)$$

ومنه $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = n(4-n)$

3) تعين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثم تعين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

(u_n) متتالية هندسية معناه: $\frac{2\alpha+4}{3} = 0$ أي: $\boxed{\alpha = -2}$

أساسها $q = \frac{2(-2)+1}{3} = -1$ ومنه $\boxed{u_n = u_0 q^n = 3(-1)^n}$ و $\boxed{u_{50} = 3(-1)^{50} = 3}$

تعين مجموع 50 حدا الأولى $\boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_{49} = 3\frac{1-(-1)^{50}}{1-(-1)} = 0}$

4) نفرض $\alpha = 4$. البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = 3^n + 2$

لدينا: $u_0 = 3^0 + 2 = 3$ إذا الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n + 2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} = 3^{n+1} + 2$

لدينا: $u_{n+1} = 3u_n - 4 = 3(3^n + 2) - 4 = 3^{n+1} + 2$ ومنه: $u_{n+1} = 3^{n+1} + 2$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n $u_n = 3^n + 2$

-إثبات أن: $u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + 4n + 3\right)$

لدينا

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + ... + u_n &= \left(3^0 + 2\right) + \left(3^1 + 2\right) + \cdots \left(3^n + 2\right) \\ &= \left(3^0 + 3^1 + \cdots + 3^n\right) + 2(n+1) \\ &= \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1-3}\right) + 2(n+1) = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 2n + 2 \end{aligned}$$

ولدينا: $\frac{3^{n+1} - 1}{2} + 2n + 2 = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1 + 4n + 4\right) = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + 4n + 3\right)$

اذن: $\boxed{u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + 4n + 3\right)}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــرين 11

بكالـــوريا 2013 الموضـــوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+6$

1) أ) أحسب كلا من u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

ب) هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$؟برر اجابتك

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-4=-\frac{1}{2}(u_n-4)$

ب) استنتج ان المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n-4$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ج) اكتب كلا من v_n ثم u_n بدلالة n. د) بين ان (u_n) متقاربة

3) باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب

حل التمـــرين 11

1) أ) حساب كلا من u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

$\boxed{u_1=-\frac{1}{2}u_0+6=-\frac{1}{2}\times 6+6=3}$ ، $\boxed{u_2=-\frac{1}{2}u_1+6=-\frac{1}{2}\times 3+6=\frac{9}{2}}$ ، $\boxed{u_3=-\frac{1}{2}u_2+6=-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)+6=\frac{15}{4}}$

$\boxed{u_4=-\frac{1}{2}u_3+6=-\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\right)+6=\frac{33}{8}}$

ب) لا المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$ لأن الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ليست مرتبة

2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-4=-\frac{1}{2}(u_n-4)$

لدينا: $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+6$ ومنه $u_{n+1}-4=-\frac{1}{2}u_n+6-4=-\frac{1}{2}u_n+2=-\frac{1}{2}(u_n-4)$

ب) استنتاج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n-4$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا: $v_n=u_n-4$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}-4=-\frac{1}{2}u_n+6-4=-\frac{1}{2}u_n+2=-\frac{1}{2}(u_n-4)$

ومنه: $v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=-\frac{1}{2}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=u_0-4=6-4=2}$

ج) كتابة كلا من v_n ثم u_n بدلالة n.

لدينا: $\boxed{v_n=v_0q^n=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ ولدينا: $v_n=u_n-4$ ومنه: $\boxed{u_n=v_n+4=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+4}$

د) إثبات أن (u_n) متقاربة

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+4\right]=4}$ ومنه المتتالية (u_n) متقاربة

3) التأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب باستعمال عبارة u_n

لدينا: $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+6-u_n=-\frac{3}{2}u_n+6=-\frac{3}{2}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+4\right]+6=-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ بما أن: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ متغير الاشارة

فإن إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ غير ثابتة وبالتالي المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــرين 12 بكالـــوريا 2014 الموضـــوع الأول (س1)

أجب بصح او خطأ مع التبرير في كل حالة:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln u_n$

أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فإن (v_n) متقاربة

ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فإن (v_n) متناقصة

ت) إذا كانت (u_n) هندسية فإن (v_n) حسابية

حل التمـــرين 12

الاجابة بصح او خطأ مع التبرير في كل حالة:

أ) خطأ لان: نأخذ مثلا: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ نجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = 0^n$ ، أي أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا: $v_n = \ln u_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = -n\ln 2$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-n\ln 2) = -\infty$ ، أي أن المتتالية (v_n) متباعدة

ب) صحيح لأن: (u_n) متناقصة معناه: $u_{n+1} - u_n \le 0$ أي: $u_{n+1} \le u_n$ ومنه $\ln u_{n+1} \le \ln u_n$ ومنه: $v_{n+1} \le v_n$

$v_{n+1} - v_n \le 0$ إذن المتتالية (v_n) متناقصة

ت) صحيح لأن: (u_n) متتالية هندسية معناه: $u_{n+1} = qu_n$ ومنه $\ln u_{n+1} = \ln(qu_n)$ أي: $\ln u_{n+1} = \ln q + \ln u_n$

ومنه: $v_{n+1} = \ln q + v_n$ ، إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln q$

التمـــرين 13 بكالـــوريا 2014 الموضـــوع الثاني

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

1) أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -3$.

ب-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$

أ- بيّن أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

ب-أحسب الأساس q ثم عين عبارة v_n بدلالة n.

ت- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n

حل التمـــرين 13

1) أ-إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -3$.

لدينا $u_0 = 3$ ومنه $3 \succ -3$ الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أنه من أجل العدد طبيعي n : $u_n > -3$ صحيحة ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $u_{n+1} > -3$

Email : mebarki.math32@gmail.com

لدينا: $u_n > -3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n - 1 > -3\left(\frac{2}{3}\right) - 1$ ومنه: $\frac{2}{3}u_n - 1 > -3$ إذن: $u_{n+1} > -3$ صحيحة

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -3$

ب-اثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n - 1$

لدينا $u_n > -3$ ومنه $-\frac{1}{3}u_n - 1 \prec -3\left(-\frac{1}{3}\right) - 1$ ومنه: $-\frac{1}{3}u_n - 1 \prec 0$ إذن $u_{n+1} - u_n \prec 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة

ج- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا: المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3- $(u_n > -3)$ فهي متقاربة

2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = 18$

أ- اثبات أن: $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right] = \frac{v_0}{1-q}}$$

لأن المتتالية (v_n) متقاربة وهذا يعني أن $-1 \prec q \prec 1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$

ب- حساب الأساس q ثم تعين عبارة v_n بدلالة n.

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = 18$ وبما أن $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$ فإن $\frac{v_0}{1-q} = 18$

ومنه $\frac{6}{1-q} = 18$ ، $18 - 18q = 6$ ومنه $-18q = 6 - 18$ إذن: $q = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$

- تعين عبارة v_n بدلالة n

$v_n = v_0\ q^n$ ومنه $\boxed{v_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

ت- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = v_n - 3$ واستنتاج عبارة u_n بدلالة n (نستعمل البرهان بالتراجع)

لدينا: $u_0 = v_0 - 3 = 6 - 3 = 3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أنه من أجل العدد طبيعي n $u_n = v_n - 3$

ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي نبرهن أن: $u_{n+1} = v_{n+1} - 3$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 = \frac{2}{3}(v_n - 3) - 1 = \frac{2}{3}v_n - 2 - 1 = v_{n+1} - 3$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = v_n - 3$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $u_n = v_n - 3$ ومنه $\boxed{u_n = v_n - 3 = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــرين 14 بكالـــوريا 2015 الموضـــوع الأول (س1)

اقترح الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الاتية:

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بحدها العام $u_n=5\times 2^n\times 3^{n-1}$

أ) (u_n) حسابية ب) (u_n) هندسية ج) (u_n) لا حسابية لا هندسية.

2) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0=1$ وأساسها 4، قيمة n التي من اجلها يكون: $v_1+v_2+...+v_n=2015$ هي:

أ) $n=31$ ب) $n=32$ ج) $n=33$

حل التمـرين 14

اختيار الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل حالة:

1) الاختيار "ب" لأن: لدينا: $u_n=5\times 2^n\times 3^{n-1}=5\times 2^n\times 3^n\times 3^{-1}=\frac{5}{3}\times 6^n$

ومنه: $u_{n+1}=\frac{5}{3}\times 6^{n+1}=6\left(\frac{5}{3}\times 6^n\right)=6\times u_n$ إذا: (u_n) متتالية هندسية أساسها 6

2) الاختيار "ب" لأن: لدينا: $v_1+v_2+...+v_n=\frac{n(5+1+4n)}{2}=\frac{4n^2+6n}{2}=2n^2+3n$

$v_1+v_2+...+v_n=2015$ تعني: $2n^2+3n-2015=0$ ومنه: $\Delta=16129$ ومنه: $n=-32.5$ (مرفوض لأنه عدد غير طبيعي)، $\boxed{n=31}$

التمـــرين 15 بكالـــوريا 2015 الموضـــوع الثاني

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا و بالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا. علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000. نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز ب : u_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي: $u_0=50$

1) أوجد u_1 و u_2

2) أ- بين أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=0.95u_n+3$

ب- بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية.

3) من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=60-u_n$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب-أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ث- قدر عدد العمال سنة 2017.

ج- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ح- احسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمــرين 15

1) إيجاد u_1 و u_2

$\boxed{u_1=50\left(1-\frac{5}{100}\right)+3=50.5}$ ، $\boxed{u_1=50\left(1-\frac{5}{100}\right)+3=50.975}$

2) أ) تبيان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=0.95u_n+3$

$$\boxed{u_{n+1}=u_n\left(1-\frac{5}{100}\right)+3=0.95u_n+3}$$

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية.

لدينا: $\begin{cases}u_1-u_0=50.5-50=0.5\\ u_2-u_1=50.975-50.5=0.475\end{cases}$ ومنه: $u_1-u_0\neq u_2-u_1$ اذا: المتتالية (u_n) ليست حسابية

لدينا: $\begin{cases}\frac{u_1}{u_0}=\frac{50.5}{50}=1.01\\ \frac{u_2}{u_1}=\frac{50.975}{50.5}=1.009\end{cases}$ ومنه: $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$ اذا: المتتالية (u_n) ليست هندسية

3) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=60-u_n$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول

$v_{n+1}=60-u_{n+1}=60-0.95u_n-3=57-0.95u_n=0.95(60-u_n)=0.95v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.95

وحدها الأول $v_0=60-u_0=60-50=10$

ب- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n

$\boxed{v_n=v_0\times q^n=10(0.95)^n}$ ، $\boxed{u_n=60-v_n=60-10(0.95)^n}$

ت- تقدير عدد العمال سنة 2017.

لدينا: $2017=2012+5$ إذا: $n=5$ ومنه: $\boxed{u_5=60-10(0.95)^5=52.262}$

ث- تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

$u_{n+1}-u_n=60-10(0.95)^{n+1}-60+10(0.95)^n=10(0.95)^n(-0.95+1)=-8.5(0.95)^n\prec 0$ ومنه: (u_n) متناقصة تماما

ج- حساب نهاية المتتالية (u_n) .

$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[60-10(0.95)^n\right]=60}$ وبالتالي لا يمكن أن يصل عدد عمال لمصنع إلى 60000 عامل

التمـــرين 16 بكالـــوريا 2016 الموضـــوع الأول

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0=18$ والعلاقة: $v_0+v_1+v_2=18$

1) بين ان أساس المتتالية (v_n) هو $q=\frac{2}{3}$

2) أ- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n)

ج-أحسب نهاية (v_n)

3) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

أ- أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$

ب- جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = \frac{3510}{81}$

حل التمــرين 16

1) تبيان ان أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$

لدينا: $v_0 + v_1 + v_2 = 38$ تعني: $v_0 + v_0 \times q + v_0 \times q^2 = 38$ ومنه : $18 + 18q + 18q^2 = 38$ ومنه: $18q^2 + 18q - 20 = 0$

$\Delta = 1764$ ومنه: $q = \frac{-5}{3}$ (مرفوض لان الحدود موجبة) أو: $q = \frac{2}{3}$ إذا: أساس المتتالية (v_n) هو $\boxed{q = \frac{2}{3}}$

2) أ) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n)

$v_{n+1} - v_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 18\left(\frac{2}{3}\right)^n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n\left[\frac{2}{3} - 1\right] = -6\left(\frac{2}{3}\right)^n \prec 0$ ومنه المتتالية (v_n) متزايدة

ج) حساب نهاية (v_n)

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty}\left[18\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 0}$$

3) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

أ- حساب S_n بدلالة n ثم استنتاج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$

ومنه: $\boxed{S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}}$ إذا: $S_n = 18 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$ ، $\boxed{S_n = 54\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$ ، $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 54\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 54}$

ب-إيجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = \frac{3510}{81}$

$S_n = \frac{3510}{81}$ تعني: $54\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \frac{3510}{81}$ ومنه: $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3510}{4374}$ ومنه: $-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3510}{4374} - 1$

وبالتالي: $-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-864}{4374}$ وعليه: $\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n = \ln\frac{864}{4374}$ ومنه: $n\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\frac{864}{4374}$ اذا: $\boxed{n = \frac{\ln\left(\frac{864}{4374}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 4}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 17

بكالـــــوريا 2016 الموضـــوع الثاني

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4}{7}u_n+\frac{3}{7}$

1) أحسب u_1 , u_2.

2) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>1$.

ب-بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ج- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n)

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n-1$

أ-بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

ب-اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=1+4\left(\frac{4}{7}\right)^n$

ت-أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمـــرين 17

1) حساب u_1 , u_2.

$\boxed{u_1=\frac{4}{7}u_0+\frac{3}{7}=\frac{4}{7}(5)+\frac{3}{7}=\frac{23}{7}}$ ، $\boxed{u_2=\frac{4}{7}u_1+\frac{3}{7}=\frac{4}{7}\left(\frac{23}{7}\right)+\frac{3}{7}=\frac{113}{49}}$

2) أ) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>1$.

لدينا: $u_0=5$ و $5>1$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n>1$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}>1$

لدينا: $u_n>1$ ومنه: $\frac{4}{7}u_n+\frac{3}{7}>1\left(\frac{4}{7}\right)+\frac{3}{7}$ ومنه: $u_{n+1}>1$ صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n>1$

ب) تبيّان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$u_{n+1}-u_n=\frac{4}{7}u_n+\frac{3}{7}-u_n=\frac{-3}{7}u_n+\frac{3}{7}=\frac{-3}{7}(u_n-1)\prec 0$ لان: $u_n>1$ تعني: $u_n-1>0$ ومنه: (u_n) متناقصة تماما

ج) ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n)

بما ان (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 $(u_n>1)$ فهي متقاربة نحو العدد l

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n-1$

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{4}{7}u_n+\frac{3}{7}-1=\frac{4}{7}u_n-\frac{4}{7}=\frac{4}{7}(u_n-1)=\frac{4}{7}v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{7}$ وحدها الأول $v_0=u_0-1=5-1=4$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=1+4\left(\frac{4}{7}\right)^n$

$$\boxed{v_n=v_0\times q^n=4\left(\frac{4}{7}\right)^n} \quad ، \quad \boxed{u_n=v_n+1=4\left(\frac{4}{7}\right)^n+1}$$

ت- حساب نهاية المتتالية (u_n) .

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[4\left(\frac{4}{7}\right)^n+1\right]=1}$$

التمـــرين 18 — بكالـــوريا 2017 الموضـــوع الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

1) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\prec 3$.

ب-بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة

2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3-u_n$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ ثم عين حدها الأول.

ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n=3(n-1)+2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

حل التمـــرين 18

1) أ- البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\prec 3$.

لدينا: $u_0=-1$ و $-1\prec 3$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\prec 3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}\prec 3$

لدينا: $u_n\prec 3$ ومنه: $\frac{1}{3}u_n+2\prec\frac{1}{3}\times 3+2$ ومنه: $u_{n+1}\prec 3$ صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\prec 3$

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج انها متقاربة

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+2-u_n=\frac{-2}{3}u_n+2=\frac{-2}{3}(u_n-3)\succ 0$ لان: لدينا $u_n\prec 3$ تعني: $u_n-3\prec 0$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- بما ان (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 $(u_n\prec 3)$ فهي متقاربة نحو العدد الحقيقي l

2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3-u_n$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ ثم تعيين حدها الأول.

$v_{n+1}=3-u_{n+1}=3-\frac{1}{3}u_n-2=1-\frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}(3-u_n)=\frac{1}{3}v_n$ ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول: $v_0=3-u_0=3+1=4$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n=3(n-1)+2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ومنه: $S_n=3-v_0+3-v_1+...+3-v_n$ ومنه: $S_n=(3+3+...+3)-(v_0+v_1+...+v_n)$

وعليه: $S_n=3(n+1)-4\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=3n+3-4\times\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

إذا: $\boxed{S_n=3n+3-6+2\left(\frac{1}{3}\right)^n=3(n-1)+2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

التمـــــرين 19 — بكالــــوريا 2017 الموضــــوع الثاني

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n-2$

1) أحسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_{n+1}-u_n$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) عين v_n بدلالة n ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3) نضع من أجل كل عدد n غير معدوم: $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$

أ) أحسب S_n بدلالة n.

ب) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=S_n+u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n

حل التمــرين 19

1) حساب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 ثم تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$\boxed{u_1=3u_0-2=3(2)-2=4}$ ، $\boxed{u_2=3u_1-2=3(4)-2=10}$ ، $\boxed{u_3=3u_2-2=3(10)-2=28}$

نلاحظ ان $u_0\prec u_1\prec u_2\prec u_3$ ومنه: (u_n) متزايدة

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_{n+1}-u_n$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=3u_{n+1}-2-3u_n+2=3(u_{n+1}-u_n)=3v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 وحدها الأول: $v_0=u_1-u_0=4-2=2$

ب) تعيين v_n بدلالة n واستنتاج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

$\boxed{v_n=v_0\times q^n=2\times 3^n}$ لدينا: $u_{n+1}-u_n=v_n=2\times 3^n\succ 0$ ومنه: (u_n) متزايدة.

3) نضع من أجل كل عدد n غير معدوم: $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$

أ) حساب S_n بدلالة n.

$$\boxed{S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=2\times\frac{1-3^n}{1-3}=3^n-1}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) تبيان أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n = S_n + u_0$

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ و $v_n = u_{n+1} - u_n$ ومنه: $S_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + ... + u_n - u_{n-1}$

إذا: $S_n = -u_0 + u_n$ وبالتالي نجد: $\boxed{u_n = S_n + u_0}$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $u_n = S_n + u_0$ ومنه: $\boxed{u_n = 3^n - 1 + 2 = 3^n + 1}$

التمـــــرين 20 بكالــــوريا 2017 الموضـــوع الأول (الدورة الاستثنائية)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ حدها الأول u_0 حيث: $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1) أ) بين ان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \prec 2$.

ب) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 2u_n - 4$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

ب) جد عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

حل التمـــرين 20

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ حدها الأول u_0 حيث: $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1) أ) تبيان ان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \prec 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $-2 \prec 2$ إذا الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \prec 2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} \prec 2$

لدينا: $u_n \prec 2$ ومنه: $\frac{1}{2}u_n + 1 \prec \frac{1}{2} \times 2 + 1$ ومنه: $u_{n+1} \prec 2$ صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n \prec 2$

ب) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتاج انها متقاربة

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{-1}{2}(u_n - 2) \succ 0$ لان لدينا: $u_n \prec 2$ تعني: $u_n - 2 \prec 0$

ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- بما ان (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 $(u_n \prec 2)$ فهي متقاربة نحو العدد l

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 2u_n - 4$

أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 = u_n + 2 - 4 = u_n - 2 = \frac{1}{2}(2u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 2u_0 - 4 = -4 - 4 = -8$

ب) عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ لدينا: $v_n = 2u_n - 4$ ومنه: $u_n = \frac{1}{2}v_n + 2$ اذا: $\boxed{u_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ ومنه: $S_n = \frac{1}{2}v_0 + 2 + \frac{1}{2}v_1 + 2 + \ldots + \frac{1}{2}v_n + 2$ ومنه: $S_n = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \ldots + v_n) + (2 + 2 + \ldots + 2)$

ومنه: $S_n = \frac{1}{2}(-8)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) + 2(n+1)$ إذا: $\boxed{S_n = -8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + 2(n+1)}$

التمـــرين 21

بكالـــوريا 2017 الموضـــوع الثاني (الدورة الاستثنائية)

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ ، $u_n = w_n - v_n$

بين أن: المتتالية (u_n) حسابية، حدد أساسها r وحدها الأول u_0

3) أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n، $4 + 6 + 8 + \ldots + (2n+4) = (n+1)(n+4)$

4) استنتج المجموع T_n بدلالة n حيث: $T_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$

حل التمـرين 21

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

$$\boxed{S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2}}$$

2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ ، $u_n = w_n - v_n$

تبيان أن: المتتالية (u_n) حسابية، وتحديد أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا: $u_n = w_n - v_n$ ومنه: $w_n = u_n + v_n$ إذا : $\boxed{u_n = 2n + 4}$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 4 - (2n+4) = 2n + 2 + 4 - 2n - 4 = 2$ إذا: المتتالية (u_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول $u_0 = 4$

3) اثبات أن: من أجل كل عدد طبيعي n، $4 + 6 + 8 + \ldots + (2n+4) = (n+1)(n+4)$

$$\begin{aligned} 4 + 6 + 8 + \ldots + (2n+4) &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) \\ &= \frac{n+1}{2}(4 + 2n + 4) \\ &= \frac{n+1}{2}(8 + 2n) = (n+1)(4+n) \end{aligned}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

4) استنتاج المجموع T_n بدلالة n حيث: $T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

$$\begin{aligned} T_n &= w_0 + w_1 + ... + w_n \\ &= u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + ... + u_n + v_n \\ &= (u_0 + u_1 + ... + u_n) + (v_0 + v_1 + ... + v_n) \\ &= (n+1)(n+4) + \frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2} \end{aligned}$$

التمــــرين 22 بكالـــوريا 2018 الموضـــوع الأول

I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي:

$u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$.

1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.7 يطلب تعيين حدها الأول وأكتب عبارة v_n بدلالة n

2) أ-أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n.

ب- عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016.بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة ونرمز بـــ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016+n$ أي $u_0 = 50$.

1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017؟ ثم في سنة 2018؟

2) أ- برر العبارة: $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$

ب- ابتداءا من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك؟

حل التمــرين 22

I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي: $u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي: $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$

1) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.7 يطلب تعيين حدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0.7u_n + 6 - 20 = 0.7u_n - 14 = 0.7(u_n - 20) = 0.7v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.7 وحدها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - 20 = 50 - 20 = 30}$

كتابة عبارة v_n بدلالة n

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 30(0.7)^n}$$

2) أ) كتابة بدلالة n عبارة الحد العام u_n.

لدينا: $v_n = u_n - 20$ ومنه: $\boxed{u_n = v_n + 20 = 30(0.7)^n + 20}$

ب) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 30(0.7)^{n+1} + 20 - 30(0.7)^n - 20 \\ &= 30(0.7)^n[0.7 - 1] \\ &= -9(0.7)^n \prec 0 \end{aligned}$$

ومنه: المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[30(0.7)^n+20\right]=20}$$

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016.بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

1) عدد المشتركين في سنة 2017؟ ثم في سنة 2018؟

$$\boxed{u_1=50\left(1-\frac{30}{100}\right)+6=41} \text{ ، } \boxed{u_2=41\left(1-\frac{30}{100}\right)+6=34.7}$$

إذا عدد المشتركين سنة 2017 هو 4100 وفي سنة 2018 هو 3470

2) أ) تبرير العبارة: $u_{n+1}=0.7u_n+6$

لدينا: $u_{n+1}=u_n\left(1-\frac{30}{100}\right)+6$ ومنه: $\boxed{u_{n+1}=0.7u_n+6}$

ب) ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك؟

معناه: $u_n \prec 24$ أي: $30(0.7)^n+20\prec 24$ ومنه: $(0.7)^n \prec \frac{24-20}{30}$ ومنه: $(0.7)^n \prec \frac{4}{30}$

ومنه: $\ln(0.7)^n \prec \ln\frac{4}{30}$ ومنه: $n\ln(0.7)\prec \ln\frac{4}{30}$ ومنه: $n \succ \frac{\ln\frac{4}{30}}{\ln(0.7)}$ وعليه: $n\succ 5.64$ إذا: $\boxed{n=6}$

وبالتالي يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك سنة: $\boxed{2016+6=2022}$

التمــــرين 23 بكالـــوريا 2018 الموضـــوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $u_0=-1$ و $2u_{n+1}=u_n+6$.

1) أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \prec 6$.

ب-ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-6$.

أ- بين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) أحسب بدلالة n ما يلي: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$

حل التمــرين 23

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $u_0=-1$ و $2u_{n+1}=u_n+6$.

لدينا: $2u_{n+1}=u_n+6$ تعني: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\prec 6$

لدينا: $u_0=-1$ و $-1\prec 6$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\prec 6$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}\prec 6$

لدينا: $u_n\prec 6$ ومنه: $\frac{1}{2}u_n+3\prec\frac{1}{2}\times 6+3$ ومنه: $u_{n+1}\prec 6$ صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\prec 6$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+3-u_n=\frac{-1}{2}u_n+3=\frac{-1}{2}(u_n+6)\succ 0$ لان: $u_n\prec 6$ تعني: $u_n-6\prec 0$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- بما ان (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 $(u_n\prec 6)$ فهي متقاربة نحو العدد الحقيقي l

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-6$.

أ) تبيان ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0

$$v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{1}{2}u_n+3-6=\frac{1}{2}u_n-3=\frac{1}{2}(u_n-6)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{\frac{1}{2}}$ وحدها الأول: $\boxed{v_0=u_0-6=-1-6=-7}$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$\boxed{v_n=v_0\times q^n=-7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ ، $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}[v_n+6]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-7\left(\frac{1}{2}\right)^n+6\right]=6}$

3) حساب بدلالة n ما يلي: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$

$$\begin{aligned}S_n&=u_0+u_1+...+u_n\\&=v_0+6+v_1+6+...+v_n+6\\&=-7\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}+6(n+1)\\&=-14\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+6(n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_n&=v_0\times v_1\times...\times v_n\\&=-7\left(\frac{1}{2}\right)^0\times-7\left(\frac{1}{2}\right)^1\times...\times-7\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=(-7\times-7\times...\times-7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+...+n}\\&=(-7)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

التمـــرين 24 — بكالـــوريا 2019 الموضـــوع الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $u_0=-4$ و $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1) أ- أحسب كلا من u_1 و u_2

ب-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\prec 8$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

3) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n-\frac{1}{4}\alpha+2$

ب- عين قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0

ج-نضع $\alpha=8$ ، عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من اجل كل طبيعي n: $u_n=-12\left(\frac{3}{4}\right)^n+8$

4) أحسب المجموع S_n بدلالة n: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

الأستاذة : مباركي فاطمة مادة الرياضيات — ثانوية حميتو الحاج علي الشلالة ولاية البيض

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 24

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $u_0=-4$ و $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1) أ- حساب كلا من u_1 و u_2

$\boxed{u_1=\frac{3}{4}u_0+2=\frac{3}{4}(-4)+2=-3+2=-1}$ ، $\boxed{u_2=\frac{3}{4}u_1+2=\frac{3}{4}(-1)+2=\frac{-3}{4}+2=\frac{5}{4}}$

ب-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\prec 8$

لدينا: $u_0=-4$ و $-4\prec 8$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\prec 8$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}\prec 8$

لدينا: $u_n\prec 8$ ومنه: $\frac{3}{4}u_n+2\prec\frac{3}{4}\times 8+2$ ومنه: $u_{n+1}\prec 8$ صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\prec 8$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة.

$u_{n+1}-u_n=\frac{3}{4}u_n+2-u_n=\frac{-1}{4}u_n+2=\frac{-1}{4}(u_n-8)\succ 0$ لان $u_n\prec 8$ تعني: $u_n-8\prec 0$ ومنه: (u_n) متتالية متزايدة - -

بما (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 8 $(u_n\prec 8)$ فهي متقاربة نحو l

3) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n-\frac{1}{4}\alpha+2$

$v_{n+1}=u_{n+1}-\alpha=\frac{3}{4}u_n+2-\alpha$ ولدينا: $u_n=v_n+\alpha$ بالتعويض نجد: $v_{n+1}=\frac{3}{4}(v_n+\alpha)+2-\alpha$

ومنه: $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+\frac{3}{4}\alpha+2-\alpha$ إذا: $\boxed{v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n-\frac{1}{4}\alpha+2}$

ب-تعيين قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0

(v_n) هندسية تعني: $-\frac{1}{4}\alpha+2=0$ ومنه: $-\frac{1}{4}\alpha=-2$ ومنه: $\boxed{\alpha=8}$

ج-نضع $\alpha=8$ ، التعبير عن v_n بدلالة n ثم استنتاج أنه من اجل كل طبيعي n: $u_n=-12\left(\frac{3}{4}\right)^n+8$

$\boxed{v_n=v_0\times q^n=-12\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ $\boxed{u_n=v_n+8=-12\left(\frac{3}{4}\right)^n+8}$

4) حساب المجموع S_n

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+\ldots+u_n\\&=(v_0+v_1+\ldots+v_n)+8(n+1)\\&=-12\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}+8(n+1)\\&=-12\times 4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]+8n+8\end{aligned}$$

إذا: $\boxed{S=-48\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]+8n+8}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 25

بكالـــوريا 2019 الموضـــوع الثاني

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_2+2u_5=27 \\ u_1=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

1) أحسب حدها الأول u_0 وأساسها r

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) بين أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية ثم أحسب كلا من المجموعين: S_1 و S_2 حيث:

$S_1=u_1+u_2+u_3+...+u_{1344}$ ، $S_2=u_2+u_4+u_6+...+u_{1344}$

- استنتج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3=u_1+u_3+u_5+...+u_{1344}$

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=e^{6-2u_n}$

- أحسب المجموع: $S_n=\dfrac{1}{v_0}+\dfrac{1}{v_1}+...+\dfrac{1}{v_n}$

حل التمـــرين 26

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_2+2u_5=27 \\ u_1=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

1) حساب الأساس r

لدينا: $u_2=u_1+r$ ، $u_5=u_1+4r$ وبالتالي: $u_1+r+2u_1+8r=27$ ومنه: $3u_1+9r=27$

نعوض قيمة u_1 في المعادلة نجد: $3\left(\dfrac{9}{2}\right)+9r=27$ ومنه: $9r=27-\dfrac{27}{2}$ ومنه: $9r=\dfrac{27}{2}$ إذا: $\boxed{r=\dfrac{27}{18}=\dfrac{3}{2}}$

حساب الحد الأول u_0

لدينا: $u_1-u_0=r$ ومنه: $u_0=u_1-r=\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}=3$

2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

$$\boxed{u_n=u_0+nr=3+\dfrac{3}{2}n}$$

3) تبيان أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية

$u_n=2019$ تعني: $3+\dfrac{3}{2}n=2019$ ومنه: $\dfrac{3}{2}n=2016$ ومنه: $n=2016\times\dfrac{2}{3}=1344$ ومنه: العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية

- حساب كلا من المجموعين: S_1 و S_2

$$S_1=u_1+u_2+u_3+...+u_{1344}=\frac{1344-1+1}{2}(u_1+u_{1344})=672\left(2019+\frac{9}{2}\right)=1359792$$

$$S_2=u_2+u_4+u_6+...+u_{1344}=\frac{1344}{4}(u_2+u_{1344})=336(6+2009)=680400$$

- استنتاج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3=u_1+u_3+u_5+...+u_{1344}$

نلاحظ ان: $S_1=S_2+S_3$ ومنه: $\boxed{S_3=S_1-S_2=1359792-680400=679392}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{6-2u_n}$

- حساب المجموع: $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + ... + \frac{1}{v_n}$

لدينا: $v_n = e^{6-2u_n}$ ومنه: $\frac{1}{v_n} = \frac{1}{e^{6-6-3n}} = e^{3n} = \left(e^3\right)^n$

نضع: $w_n = \left(e^3\right)^n$ حيث (w_n) متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها e^3 إذا: $\boxed{S_n = \frac{1-e^{3(n+1)}}{1-e^3}}$

التمـــرين 26 — بكالـــوريا 2020 الموضـــوع الأول

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ $70000DA$ ، في شهر جانفي استهلك منه 80% وابتداءا من شهري فيفري قرر تخفيض مبلغ الاستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله.

1) أ- ما هو المبلغ المستهلك في شهر جانفي؟

ب- حدد المبلغ المستهلك في شهر فيفري

2) نضع u_1 المبلغ المستهلك في شهر جانفي و u_n المبلغ المستهلك في شهر n ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

- عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n واستنتج ان (u_n) هندسية أساسها 0.95

3) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

4) أ- احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019

ب- أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة.

حل التمـرين 26

1) أ) حساب المبلغ المستهلك في شهر جانفي: $70\,000 \times \frac{80}{100} = 56\,000\ DA$

ب) المبلغ المستهلك في شهر فيفري: $56\,000\left(1-\frac{5}{100}\right) = 53200\ DA$

2) التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n

لدينا: $u_2 = u_1(1-0.05) = 0.95u_1$ ، $u_3 = u_2(1-0.05) = 0.95u_2$ و $u_4 = u_3(1-0.05) = 0.95u_3$

ومنه: $\boxed{u_{n+1} = 0.95u_n}$ إذا: المتتالية (u_n) هندسية أساسها 0.95

3) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

لدينا: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ومنــــــه: $\boxed{u_n = 56000 \times (0.95)^{n-1}}$

4) أ- احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019

لدينا: $S = u_1 + u_2 + ... + u_{12}$ ومنه: $S = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 56000\left(\frac{1-0.95^{12}}{1-0.95}\right) = 514796.7018\ DA$

إذا المبلغ المستهلك خلال سنة 2019 هو $\boxed{514796.7018\ DA}$

ب) إيجاد المبلغ المدخر خلال هذه السنة: $\boxed{70\,000 \times 12 - S = 325203.2982\ DA}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــرين 26

بكالـــوريا 2020 الموضـــوع الأول

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــحدها الأول $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{3}{2}$.

1) أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \prec \frac{9}{2}$

ب-ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-\frac{9}{2}$.

أ- بين ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب حساب حدها الأول v_0

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، أحسب بدلالة n المجموع S_n.

حل التمــرين 26

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــحدها الأول $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{3}{2}$.

1) أ-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \prec \frac{9}{2}$

لدينا: $u_0=1$ و $1\prec\frac{9}{2}$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\prec\frac{9}{2}$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}\prec\frac{9}{2}$

لدينا: $u_n\prec\frac{9}{2}$ ومنه: $\frac{2}{3}u_n+\frac{3}{2}\prec\frac{9}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$ ومنه: $u_{n+1}\prec 3+\frac{3}{2}$ ومنه: $u_{n+1}\prec\frac{9}{2}$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\prec\frac{9}{2}$

ب-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة.

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{3}{2}-u_n=\frac{-1}{3}u_n+\frac{3}{2}$ ولدينا: $u_n\prec\frac{9}{2}$ ومنه: $\frac{-1}{3}u_n+\frac{3}{2}\succ\frac{-1}{3}\times\frac{9}{2}+\frac{3}{2}$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\succ 0$ إذا (u_n) متزايدة

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{9}{2}$ $\left(u_n\prec\frac{9}{2}\right)$ فهي متقاربة نحو العدد l

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-\frac{9}{2}$.

أ- تبيان ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب حساب حدها الأول v_0

لدينا: $v_n=u_n-\frac{9}{2}$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{9}{2}$ ومنه: $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{3}{2}-\frac{9}{2}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-3$

ومنه: $v_{n+1}=\frac{2}{3}\left(u_n-\frac{9}{2}\right)=\frac{2}{3}v_n$ وعليه: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0-\frac{9}{2}=1-\frac{9}{2}=\frac{-7}{2}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = \frac{-7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ ، $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0}$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

حساب بدلالة n المجموع S_n.

لدينا: $v_n = u_n - \frac{9}{2}$ ومنه: $u_n = v_n + \frac{9}{2}$ إذا: $S_n = \left(v_0 + \frac{9}{2}\right) + \left(v_1 + \frac{9}{2}\right) + ... + \left(v_n + \frac{9}{2}\right)$

يعني: $S_n = (v_0 + v_1 + ... + v_n) + \frac{9}{2}(n+1)$ ومنه: $S_n = \frac{-7}{2} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{9}{2}(n+1)$

ومنه: $S_n = \frac{-7}{2} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} + \frac{9}{2}(n+1)$: إذا $\boxed{S_n = \frac{-21}{2} \times \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{9}{2}(n+1)}$

التمـــرين 27

بكالـــوريا 2020 الموضـــوع الثاني

المتتالية الهندسية (v_n) حدها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما: $\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8\ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2\ln 2 \end{cases}$

1) بين ان: $v_5 = 32$ و $v_3 = 8$

2) أ- بين ان: $q = 2$ و $v_0 = 1$

ب-أكتب v_n بدلالة n

ج-هل العدد 1024 حد من حدود المتتالية (v_n)؟

3) المتتالية (w_n) معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n - 3 + 2^n$

أ- تحقق ان: $w_n = u_n + v_n$ حيث (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_0

ب- من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

حل التمـــرين 27

المتتالية الهندسية (v_n) حدها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما: $\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8\ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2\ln 2 \end{cases}$

1) تبيان ان: $v_5 = 32$ و $v_3 = 8$

لدينا: $\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8\ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2\ln 2 \end{cases}$ بالجمع نجد: $2\ln v_5 = 10\ln 2$ ومنه: $\ln v_5 = 5\ln 2$ ومنه: $\ln v_5 = \ln 2^5$ إذا: $\boxed{v_5 = 2^5 = 32}$

لدينا: $\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8\ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2\ln 2 \end{cases}$ بالطرح نجد: $2\ln v_3 = 6\ln 2$ ومنه: $\ln v_3 = 3\ln 2$ ومنه: $\ln v_3 = \ln 2^3$ إذا: $\boxed{v_3 = 2^3 = 8}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) أ- تبيان ان: $q=2$ و $v_0=1$

لدينا: $v_5=v_3\times q^2$ ومنه: $q^2=\frac{v_5}{v_3}=\frac{32}{8}=4$ ومنه: $\boxed{q=2}$ لان الحدود موجبة.

ولدينا: $v_3=v_0\times q^3$ ومنه: $\boxed{v_0=\frac{v_3}{q^3}=\frac{8}{2^3}=1}$

ب- كتابة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n=2^n}$

ج-هل العدد 1024 حد من حدود المتتالية (v_n)؟

$v_n=2024$ تعني: $2^n=2024$ ومنه: $\ln 2^n=\ln 2024$ ومنه: $n\ln 2=\ln 2024$ ومنه: $\boxed{n=\frac{\ln 2024}{\ln 2}=10}$

ومنه: العدد 1024 حد من حدود المتتالية (v_n)

3) المتتالية (w_n) معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=2n-3+2^n$

أ- التحقق ان: $w_n=u_n+v_n$ حيث (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_0

لدينا: $v_n=2^n$ ، نضع: $u_n=2n-3$ ومنه: $w_n=u_n+v_n$

لدينا: $u_n=2n-3$ من الشكل $u_n=u_0+nr$ إذا (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=-3$

ب- تبيان أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $S_n=(n+1)(n-3)+2^{n+1}-1$

لدينا: $S_n=w_0+w_1+...+w_n$ تعني: $S_n=(u_0+v_0)+(u_1+v_1)+...+(u_n+v_n)$

ومنه: $S_n=(u_0+u_1+...+u_n)+(v_0+v_1+...+v_n)$ ومنه: $S_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)+v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

ومنه: $S_n=(n+1)\left(\frac{-3+2n-3}{2}\right)+1\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ ومنه: $S_n=(n+1)\left(\frac{-6+2n}{2}\right)+\left(-1+2^{n+1}\right)$

ومنه: $S_n=(n+1)\left(\frac{2(-3+n)}{2}\right)+2^{n+1}-1$ إذا: $\boxed{S_n=(n+1)(n-3)+2^{n+1}-1}$

التمـــرين 28 بكالـــوريا 2020 الموضــوع الثاني

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الاول u_0 حيث: $u_0=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{5}{7}u_n+\frac{6}{7}$

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>3$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-3$

أ-بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب-اكتب عبارة v_n بدلالة n

ج- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n+3$ وأحسب نهاية (u_n) .

4) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n\prec\frac{7}{2}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 28

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الاول u_0 حيث: $u_0=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{5}{7}u_n+\frac{6}{7}$

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>3$

لدينا: $u_0=5$ و $5>3$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n>3$ صحيح ونثبت صحة $u_{n+1}>3$

لدينا: $u_n>3$ ومنه: $\frac{5}{7}u_n+\frac{6}{7}>3\left(\frac{5}{7}\right)+\frac{6}{7}$ ومنه: $u_{n+1}\succ\frac{15}{7}+\frac{6}{7}$ ومنه: $u_{n+1}>3$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n>3$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انها متقاربة

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{5}{7}u_n+\frac{6}{7}-u_n=\frac{-2}{7}u_n+\frac{6}{7}$ ولدينا: $u_n>3$ ومنه: $\frac{-2}{7}u_n+\frac{6}{7}\prec 3\left(\frac{-2}{7}\right)+\frac{6}{7}$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\prec 0$ إذا (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 $(u_n>3)$ فهي متقاربة نحو العدد l

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-3$

أ-تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا: $v_n=u_n-3$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-3$ ومنه: $v_{n+1}=\frac{5}{7}u_n+\frac{6}{7}-\frac{3\times 7}{7}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{5}{7}u_n-\frac{15}{7}$

ومنه: $v_{n+1}=\frac{5}{7}(u_n-3)=\frac{5}{7}v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{5}{7}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=u_0-3=5-3=2}$

ب-كتابة عبارة v_n بدلالة n

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n=2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n}$

ج- استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n+3$ وحساب نهاية (u_n) .

لدينا: $v_n=u_n-3$ ومنه: $u_n=v_n+3$ إذا: $\boxed{u_n=2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n+3}$ و $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n+3\right]=3}$

4) تعيين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n\prec\frac{7}{2}$

$u_n\prec\frac{7}{2}$ تعني: $2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n+3\prec\frac{7}{2}$ تعني: $2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n\prec\frac{7}{2}-3$ تكافئ: $2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n\prec\frac{1}{2}$ ومنه: $\left(\frac{5}{7}\right)^n\prec\frac{1}{4}$

ومنه: $\ln\left(\frac{5}{7}\right)^n\prec\ln\frac{1}{4}$ ومنه: $n\ln\left(\frac{5}{7}\right)\prec\ln\frac{1}{4}$ ومنه: $n\succ\frac{-\ln 4}{\ln\frac{5}{7}}$ ومنه: $n\succ 4.12$ إذا: $n\geq 5$

إذا: أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n\prec\frac{7}{2}$ هي: $\boxed{n=5}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــرين 29

بكالـــوريا 2021 الموضـــوع الأول

المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ: $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+1$.

1) أ- أحسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2.

ب- تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ج-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-1$.

أ- أحسب v_0 ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n.

ب- بين ان (v_n) متتالية هندسية $\frac{1}{4}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ-حسب بدلالة n المجموع S_n.

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $S'_n=n+\frac{11}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

حل التمـــرين 29

المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ: $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+1$.

1) أ- حساب الحدود u_0 ، u_1 و u_2.

$\boxed{u_0=2\left(\frac{1}{4}\right)^0+1=3}$ ، $\boxed{u_1=2\left(\frac{1}{4}\right)^1+1=\frac{2}{4}+1=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}}$ ، $\boxed{u_2=2\left(\frac{1}{4}\right)^2+1=\frac{2}{16}+1=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}}$

ب-التحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$u_{n+1}-u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+1-2\left(\frac{1}{4}\right)^n-1=2\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{-3}{4}\times2\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{-3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ج-استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\prec0$ ومنه: (u_n) متناقصة

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-1$.

أ- حساب v_0 ثم كتابة عبارة v_n بدلالة n.

لدينا: $v_n=u_n-1$ ومنه: $v_0=u_0-1=3-1=2$ و $\boxed{v_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+1-1=2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب- تبيان ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{4}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}=\frac{1}{4}$$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{4}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ-حساب بدلالة n المجموع S_n.

$$S_n=v_0+v_1+...+v_n=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}=2\times\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]=\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

ب- استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $S'_n=n+\frac{11}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا: $v_n=u_n-1$ ومنه: $u_n=v_n+1$ ولدينا: $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$ ومنه: $S'_n=v_0+1+v_1+1+...+v_n+1$ اذا:

$$S'_n=v_0+v_1+...+v_n+1(n+1)$$
$$=S_n+n+1=\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]+n+1$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+n+1=\frac{11}{3}+n-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

التمـــــرين 30 بكالـــوريا 2021 الموضـــوع الثاني

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــحدها الأول u_0 حيث: $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ج-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-3$.

أ- أحسب v_0 ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n.

ب- بين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ-أحسب بدلالة n عبارة S_n.

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $S'_n=3n+6-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 30

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــحدها الأول u_0 حيث: $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$.

1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$

لدينا: $u_0=2\left(\frac{1}{3}\right)^0+3=2+3=5$ ومنه الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي n أي: $u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$ ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3$

لدينا: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ ومنه: $u_{n+1}=\frac{1}{3}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\right]+2$ ومنه: $u_{n+1}=\frac{1}{3}\times2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1+2=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3$

ومنه الخاصية صحيحة من اجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل n

ب- تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$u_{n+1}-u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3-2\left(\frac{1}{3}\right)^n-3=2\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{-2}{3}\times2\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ج-استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1}-u_n=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\prec0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-3$.

أ- حساب v_0 ثم كتابة عبارة v_n بدلالة n.

لدينا: $v_n=u_n-3$ ومنه: $v_0=u_0-3=5-3=2$ و $v_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3-3=2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ب- بتيان ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

لدينا: $v_{n+1}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=2\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ-حساب بدلالة n عبارة S_n.

$$S_n=v_0+v_1+...+v_n=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}=2\times\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]=3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

ب- استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $S'_n=3n+6-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا: $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$ ومنه: $S'_n=v_0+3+v_1+...+v_n+3=(v_0+v_1+...+v_n)+3(n+1)$ ومنه:

Email : mebarki.math32@gmail.com

$$S'_n = 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]+3n+3$$
$$=3-3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3n+3$$
$$=-3\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{3}\right)+3n+6$$

اذا: $\boxed{S'_n = 3n+6-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}$

التمـــــرين 31 — بكالـــوريا 2022 الموضـــوع الأول

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r حيث: $\begin{cases} u_2+u_3+u_4=21 \\ u_4+u_5=20 \end{cases}$

1) أ-بين ان: $u_3=7$ و $r=2$ ثم استنتج قيمة u_0

ب-أكتب u_n بدلالة n

ج-أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3\times 2^{2n}$

أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=4$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n).

ب-أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $w_n=\frac{2}{3}v_n$

أ- تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n: $w_n=2^{u_n}$

ب-أحسب P_n حيث: $P_n=w_0\times w_1\times\ldots\times w_{n-1}$

حل التمـــرين 31

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r حيث: $\begin{cases} u_2+u_3+u_4=21 \\ u_4+u_5=20 \end{cases}$

1) أ-تبيان ان: $u_3=7$ و $r=2$

- لدينا: $u_2+u_3+u_4=21$ يعني حسب خاصية الوسط الحسابي نجد: $2u_3+u_3=21$ ومنه: $3u_3=21$ إذا: $u_3=\frac{21}{3}=7$

- لدينا: $u_4+u_5=20$ تعني: $u_3+r+u_3+2r=20$ ومنه: $2u_3+3r=20$ ومنه: $\boxed{r=\frac{20-2u_3}{3}=\frac{20-2\times 7}{3}=2}$

استنتاج قيمة u_0

لدينا: $u_3=u_0+3r$ ومنه: $\boxed{u_0=u_3-3r=7-3\times 2=1}$

ب-كتابة u_n بدلالة n

$u_n=u_0+nr$ تعني: $\boxed{u_n=1+2n}$

ج-حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$

$$\boxed{S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}=n\left(\frac{u_0+u_{n-1}}{2}\right)=n\left(\frac{2+2(n-1)}{2}\right)=n^2}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3\times 2^{2n}$

أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=4$ ثم استنتاج طبيعة المتتالية (v_n).

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{3\times 2^{2(n+1)}}{3\times 2^{2n}}=\frac{3\times 2^{2n}\times 2^2}{3\times 2^{2n}}=4$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$

ب-حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0+v_1+...+v_{n-1}$

$$\boxed{S'_n = v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=3\times\frac{1-4^n}{1-4}=4^n-1}$$

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $w_n=\frac{2}{3}v_n$

أ- التحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n: $w_n=2^{u_n}$

لدينا: $w_n=\frac{2}{3}v_n$ تعني: $w_n=\frac{2}{3}\left(3\times 2^{2n}\right)=2\times 2^{2n}=2^{2n+1}=2^{u_n}$

ب- حساب P_n :

$$\begin{aligned}P_n &= w_0\times w_1\times...\times w_{n-1}\\ &=2^{u_0}\times 2^{u_1}\times...\times 2^{u_{n-1}}\\ &=2^{u_0+u_1+...+u_{n-1}}=2^{S_n}=2^{n^2}\end{aligned}$$

التمـــرين 32 — بكالـــوريا 2022 الموضـــوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=-2$ و $u_{n+1}=5u_n+20$

1) أ- أحسب u_1 و u_2

ب- تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+5=5(u_n+5)$

2) أ-برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>-5$

ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ $v_n=u_n+5$

تحقق أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 5 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

حل التمـــرين 32

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=-2$ و $u_{n+1}=5u_n+20$

1) أ- حساب u_1 و u_2

$\boxed{u_1=5u_0+20=5(-2)+20=10}$ ، $\boxed{u_2=5u_1+20=5(10)+20=70}$

ب- التحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+5=5(u_n+5)$

$$u_{n+1}+5=5u_n+20+5=5u_n+25=5(u_n+5)$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) أ-برهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -5$

لدينا: $u_0 = -2$ و $-2 \succ -5$ اذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل العدد الطبيعي n أي $u_n > -5$ و نثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} > -5$

$u_{n+1} > -5$ تعني: $u_{n+1}+5>0$ و $u_{n+1}+5=5(u_n+5)$ و: $u_n+5>0$ اذا: $u_{n+1} > -5$

وعليه الخاصية صحيحة من اجل $(n+1)$ فهي صحيحة من اجل n

ب-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$u_{n+1}-u_n = 5u_n+20-u_n = 4u_n+20 = 4(u_n+5) \succ 0$ لأنّ: $u_n+5>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 5$

التحقق أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 5

$v_{n+1} = u_{n+1}+5 = 5u_n+20+55u_n+25 = 5(u_n+5) = 5v_n$ ومنه: (v_n) هندسية أساسها 5 وحدها الأول $v_0 = u_0+5 = 3$

كتابة عبارة v_n بدلالة n:

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 3\times 5^n}$$

4) حساب بدلالة n المجموع S_n: $S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0-5+v_1-5+\ldots+v_n-5 \\ &= (v_0+v_1+\ldots+v_n)-(5+5+\ldots+5) \\ &= 3\times\frac{1-5^{n+1}}{1-5}-5(n+1) \\ &= \frac{-3}{4}\left(1-5^{n+1}\right)-5n-5 \end{aligned}$$

التمـــــرين 33 — بكالـــوريا 2023 الموضـــوع الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5}$

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -5$

2) بين أن (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ $v_n = u_n + 3$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0.

ب-عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3$

ج-أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0+v_1+\ldots+v_n$ ، $T_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$

أحسب S_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = \frac{19}{2} - 3n - \frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

حل التمـــرين 33

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3}{5}u_n-\frac{6}{5}$

1) برهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>-3$

لدينا: $u_0=2$ و $2>-3$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n>-3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}>-3$

لدينا: $u_n>-3$ ومنه: $\frac{3}{5}u_n-\frac{6}{5}>-3\left(\frac{3}{5}\right)-\frac{6}{5}$ ومنه: $u_{n+1}>-3$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n>-3$

2) تبيان أن (u_n) متناقصة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{5}u_n-\frac{6}{5}-u_n=\frac{-2}{5}u_n-\frac{6}{5}$ ولدينا: $u_n>-3$ ومنه: $\frac{-2}{5}u_n-\frac{6}{5}\prec-3\left(\frac{-2}{5}\right)-\frac{6}{5}$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\prec 0$ إذا (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -3 $(u_n>-3)$ فهي متقاربة نحو العدد l

3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n=u_n+3$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0.

$v_{n+1}=u_{n+1}+3=\frac{3}{5}u_n-\frac{6}{5}+3=\frac{3}{5}u_n+\frac{9}{5}=\frac{3}{5}(u_n+3)=\frac{3}{5}v_n$ ومنه: (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ وحدها الأول: $v_0=u_0+3=5$

ت- عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=5\left(\frac{3}{5}\right)^n-3$

$$\boxed{v_n=v_0\times q^n=5\left(\frac{3}{5}\right)^n} \quad ، \quad \boxed{u_n=v_n-3=5\left(\frac{3}{5}\right)^n-3}$$

ج-أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\left[5\left(\frac{3}{5}\right)^n-3\right]=-3}$$

4) حساب S_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n=\frac{19}{2}-3n-\frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$\boxed{S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n=5\left(\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}}\right)=5\times\frac{5}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]=\frac{25}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]}$$

لدينا: $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=v_0-3+v_1-3+\ldots+v_n-3=S_n-3(n+1)$ ومنه:

Email : mebarki.math32@gmail.com

$$T_n=\frac{25}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]-3n-3$$
$$=\frac{25}{2}-\frac{25}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}-3n-3$$
$$=\frac{25}{2}-\frac{6}{2}-\frac{25}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left(\frac{3}{5}\right)-3n$$
$$=\frac{19}{2}-\frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-3n$$

التمـــــرين 34 — بكالـــــوريا 2023 الموضـــوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \prec 4$

2) بين أن (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ $v_n=u_n-4$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0.

ب-عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$

ج-أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، $T_n=u_0+u_1+...+u_n$

أحسب S_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n=4n+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

حل التمــرين 34

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \prec 4$

لدينا: $u_0=2$ و $2\prec 4$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\prec 4$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}\prec 4$

لدينا: $u_n\prec 4$ ومنه: $\frac{1}{4}u_n+3\prec 4\left(\frac{1}{4}\right)+3$ ومنه: $u_{n+1}\prec 4$ صحيحة

إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_{n+1}\prec 4$

2) تبيان أن (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+3-u_n=\frac{-3}{4}u_n+3$ ولدينا: $u_n\prec 4$ ومنه: $\frac{-3}{4}u_n+3\succ 4\left(\frac{-3}{4}\right)+3$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\succ 0$ إذا (u_n) متزايدة

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 $(u_n\prec 4)$ فهي متقاربة نحو العدد l

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 4$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$ ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 4 = 2 - 4 = -2$

ب - تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n} \quad ، \quad \boxed{u_n = v_n + 4 = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4}$$

ج-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty}\left[-2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4\right] = 4}$$

4) حساب S_n بدلالة n

$$\boxed{S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = -2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right) = -2\times\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] = \frac{-8}{3} + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-8}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 4n + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$\boxed{T_n = v_0 + 4 + v_1 + 4 + ... + v_n + 4 = S_n + 4(n+1) = \frac{-8}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4n + 4 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4n}$$

التمـــــرين 35 بكالـــوريا 2024 الموضـــوع الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3}$

1) أحسب u_1 و u_2.

2) أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 \prec u_n \leq 0$

ب) بين أن (u_n) متناقصة تماما.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 2$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$

ب-اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2$

ج-أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

- احسب S_n بدلالة n ثم استنتج T_n بدلالة n

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 35

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3}$

1) حساب u_1 و u_2

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{6}u_0 - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}(0) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{5}{6}u_1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\left(\frac{-1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{-5}{18} - \frac{6}{18} = \frac{-11}{18}}$$

2) أ) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 \prec u_n \leq 0$

لدينا: $u_0 = 0$ و $-2 \prec 0 \leq 0$ إذا الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $-2 \prec u_n \leq 0$ صحيحة ونثبت صحة $-2 \prec u_{n+1} \leq 0$

لدينا: $-2 \prec u_n \leq 0$ ومنه: $-2\left(\frac{5}{6}\right) - \frac{1}{3} \prec \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3} \leq 0\left(\frac{5}{6}\right) - \frac{1}{3}$ ومنه: $-2 \prec u_{n+1} \leq \frac{-1}{3} \prec 0$

ومنه: $-2 \prec u_{n+1} \leq 0$ إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $-2 \prec u_n \leq 0$

ب) تبيان أن (u_n) متناقصة تماما.

لدينا: $u_{n+1} - u = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3} - u_n = \frac{-1}{6}u_n - \frac{1}{3} = \frac{-1}{6}(u_n + 2) \prec 0$ لأن: $u_n \succ -2$ تعني $u_n + 2 \succ 0$

ومنه: (u_n) متناقصة تماما.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 2$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$

$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{6}u_n + \frac{5}{3} = \frac{5}{6}(u_n + 2) = \frac{5}{6}v_n$ ومنه: (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ وحدها الأول

$v_0 = u_0 + 2 = 0 + 2 = 2$

ب- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2$

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n} \quad ، \quad \boxed{u_n = v_n - 2 = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

ج- حساب $\lim\limits_{n \to +\infty}$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty}\left[2\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2\right] = -2}$$

4) حساب S_n بدلالة n

$$\boxed{S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{6}} = 2 \times 6\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right] = 12 - 12\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n = 12 - 10\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

استنتاج T_n بدلالة n

$$\begin{aligned}T_n &= u_0+u_1+\ldots+u_n\\ &= v_0-2+v_1-2+\ldots+v_n-2\\ &= S_n-2(n+1)\\ &= 12-10\left(\frac{5}{6}\right)^n-2n-2\\ &= 10-10\left(\frac{5}{6}\right)^n-2n\end{aligned}$$

التمـــــرين 36 — بكالـــوريا 2024 الموضـــوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-\frac{1}{2}$

1) أحسب u_1 و u_2.

2) أ-برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>-2$

ب- أثبت أن (u_n) متناقصة تماما.

3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n=u_n+2$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

ب-اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم بين انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=6\left(\frac{3}{4}\right)^n-2$

ج-أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

4) احسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و T_n بدلالة حيث: $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ ، $T_n=\frac{1}{2+u_0}+\frac{1}{2+u_1}+\ldots+\frac{1}{2+u_n}$

حل التمـــرين 36

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-\frac{1}{2}$

1) حساب u_1 و u_2.

$\boxed{u_1=\frac{3}{4}u_0-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times4-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}}$

$\boxed{u_2=\frac{3}{4}u_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{15}{8}-\frac{1}{2}=\frac{11}{8}}$

2) أ-البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\succ-2$

لدينا: $u_0=4$ و $4>-2$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n>-2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}>-2$

لدينا: $u_n>-2$ ومنه: $\frac{3}{4}u_n-\frac{1}{2}>-2\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}$ ومنه: $u_{n+1}>-2$ إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n>-2$

ب) اثبات أن (u_n) متناقصة تماما.

$u_{n+1}-u_n=\frac{3}{4}u_n-\frac{1}{2}-u_n=\frac{-1}{4}u_n-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(u_n+2)\prec0$ لأن: $u_n>-2$ يعني: $u_n+2>0$

إذا: المتتالية (u_n) متناقصة تماما

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 2$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}(u_n + 2) = \frac{3}{4}v_n$ ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

وحدها الأول: $v_0 = u_0 + 2 = 4 + 2 = 6$

ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم تبيان انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n} \quad ، \quad \boxed{u_n = v_n - 2 = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2}$$

ج-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\right] = -2}$$

4) حساب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و T_n :

$$\boxed{S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = 6\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) = 6\times 4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right] = 24\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]}$$

-حساب: $T_n = \frac{1}{2+u_0} + \frac{1}{2+u_1} + \ldots + \frac{1}{2+u_n}$

لدينا: $\frac{1}{2+u_n} = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{6\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

نضع: $w_n = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ حيث المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{4}{3}$ وحدها الأول: $w_0 = \frac{1}{6}$ نجد:

$$\boxed{T_n = \frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{3}} = \frac{1}{6}\times(-3)\left[1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{-1}{2}\left[1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

التمـــــرين 37 — بكالــــوريا 2025 الموضــــوع الأول

1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5}$

أ) أحسب u_1 و u_2 ثم خمن اتجاه تغير (u_n)

ب) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $2 \le u_n \prec 4$

ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ $v_n = u_n - 4$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ب) استنتج كتابة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

بين أن: $S_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 4n - 1$

حل التمـــرين 37

1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بــ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5}$

أ) حساب u_1 و u_2 ثم تخمين اتجاه تغير (u_n)

$\boxed{u_1 = \frac{3}{5}u_0 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5} \times 2 + \frac{8}{5} == \frac{6}{5} + \frac{8}{5} = \frac{14}{5}}$ ، $\boxed{u_2 = \frac{3}{5}u_1 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5}\left(\frac{14}{5}\right) + \frac{8}{5} = \frac{42}{25} + \frac{8 \times 5}{5 \times 5} = \frac{82}{25}}$

نلاحظ أن: $u_0 \prec u_1 \prec u_2$ ومنه: (u_n) متزايدة

ب) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $2 \le u_n \prec 4$

لدينا: $u_0 = 2$ و $2 \le 2 \prec 4$ إذا الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$: $2 \le u_n \prec 4$ صحيحة ونثبت صحة $2 \le u_{n+1} \prec 4$

لدينا: $2 \le u_n \prec 4$ ومنه: $2\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{8}{5} \le \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5} \prec 4\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{8}{5}$ ومنه: $2 \prec \frac{14}{5} \le u_{n+1} \prec 4$ ومنه:

$2 \le u_{n+1} \prec 4$ هي صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $2 \le u_n \prec 4$ صحيحة

ج) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5} - u_n = \frac{-2}{5}u_n + \frac{8}{5} = \frac{-2}{5}(u_n + 4) \succ 0$ لان: $u_n \prec 4$ تعني: $u_n - 4 \prec 0$ ولدينا: $\frac{-2}{5} \prec 0$

ومنه: $\frac{-2}{5}(u_n + 4) \succ 0$ إذا (u_n) متزايدة

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 4$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5} - 4 = \frac{3}{5}u_n - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}(u_n - 4) = \frac{3}{5}v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 4 = 2 - 4 = -2$

- كتابة v_n بدلالة n

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = -2\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) استنتاج كتابة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{u_n = v_n + 4 = -2\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4} \quad ، \quad \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-2\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4\right] = 4}$$

3) تبيان أن: $S_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 4n - 1$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= v_0 + 4 + v_1 + 4 + \ldots + v_n + 4 \\ &= \left(v_0 + v_1 + \ldots + v_n\right) + \left(4 + 4 + \ldots + 4\right) \\ &= -2 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} + 4\left(n+1\right) \\ &= -2 \times \frac{5}{2}\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right] + 4\left(n+1\right) \\ &= -5 + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 4n + 4 \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 4n - 1 \end{aligned}$$

التمـــــرين 38 — بكالـــوريا 2025 الموضــــوع الثاني

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{2}{5}x + 1$

- حدد اتجاه تغير الدالة f ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = x$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بــ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$

أ) أحسب u_1 ثم عين اتجاه تغير (u_n)

ب) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \prec \frac{5}{3}$

3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ب) استنتج كتابة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

بين أن: $S_n = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{9}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 38

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{2}{5}x+1$

- تحديد اتجاه تغير الدالة f

لدينا: $a=\frac{2}{5}\succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=x$

$f(x)=x$ تعني: $f(x)-x=0$ ومنه: $\frac{2}{5}x+1-x=0$ ومنه: $\frac{-3}{5}x+1=0$ ومنه: $\frac{-3}{5}x=-1$

وعليه: $x=\frac{5}{3}$ إذا: $\boxed{S=\left\{\frac{5}{3}\right\}}$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+1$

أ) حساب u_1 ثم تعيين اتجاه تغير (u_n)

$$u_1=\frac{2}{5}u_0+1=\frac{2}{5}\times 1+1=\frac{2}{5}+1=\frac{7}{5}$$

- بما أن f متزايدة و $u_1-u_0\succ 0$ اذا (u_n) متزايدة

ب) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $1\le u_n\prec\frac{5}{3}$

لدينا: $u_0=1$ و $1\le 1\prec\frac{5}{3}$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1\le u_n\prec\frac{5}{3}$ صحيحة ونثبت صحة $1\le u_{n+1}\prec\frac{5}{3}$

لدينا: $1\le u_n\prec\frac{5}{3}$ ومنه: $\left(\frac{2}{5}\right)1+1\le\left(\frac{2}{5}\right)u_n+1\prec\left(\frac{2}{5}\right)\frac{5}{3}+1$ ومنه: $1\prec\frac{7}{5}\le\left(\frac{2}{5}\right)u_n+1\prec\frac{5}{3}$ ومنه:

$1\le u_n\prec\frac{5}{3}$ هي صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $1\le u_n\prec\frac{5}{3}$ صحيحة

3) (v_n) لمتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ $v_n=u_n-\frac{5}{3}$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}u_n+1-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}u_n-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\left(u_n-\frac{5}{3}\right)=\frac{2}{5}v_n$ ومنه: (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وحدها الأول

$$v_0=u_0-\frac{5}{3}=1-\frac{5}{3}=\frac{-2}{3}$$

- كتابة v_n بدلالة n

$$\boxed{v_n=v_0\times q^n=\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) استنتاج كتابة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{u_n = v_n + \frac{5}{3} = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}} \quad ، \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}\right] = \frac{5}{3}}$$

4) تبيان أن: $S_n = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{9}$

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\
&= v_0 + \frac{5}{3} + v_1 + \frac{5}{3} + \ldots + v_n + \frac{5}{3} \\
&= v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \frac{5}{3}(n+1) \\
&= \frac{-2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} \\
&= \frac{-2}{3} \times \frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right] + \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} \\
&= \frac{-10}{9} + \frac{10}{9}\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}n + \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

الأستاذة : مباركي فاطمة مادة الرياضيات

ثانوية حميتو الحاج علي الشلالة ولاية البيض

Email : mebarki.math32@gmail.com

42 تمرين محلول

التمـــرين 01

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n$.

1) أحسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_5 ، u_7.

2) أثبت أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

3) هل العدد $\frac{193}{6}$ حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ ما رتبته؟

4) أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

حل التمـــرين 01

1) حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_5 ، u_7.

$\boxed{u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(0) = \frac{1}{2}}$ ، $\boxed{u_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1) = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}}$ ، $\boxed{u_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(5) = \frac{3+10}{6} = \frac{13}{6}}$ ، $\boxed{u_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(7) = \frac{3+14}{6} = \frac{17}{6}}$

2) اثبات أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

$u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(n+1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}$ ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = \frac{1}{3}}$

3) هل العدد $\frac{193}{6}$ حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ ما رتبته؟

$u_n = \frac{193}{6}$ تعني: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n = \frac{193}{6}$ ومنه: $\frac{1}{3}n = \frac{193}{6} - \frac{1\times 3}{2\times 3}$ ومنه: $\frac{1}{3}n = \frac{190}{6}$ ومنه: $\boxed{n = \frac{190}{6} \times 3 = 95}$

ومنه: العدد $\frac{193}{6}$ حد من حدود (u_n) رتبته 96

4) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n\right) = \frac{n+1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}n\right)}$$

التمـــرين02

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $u_1 = 5$ و $r = -2$

1) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

2) هل العدد (-171) حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ ما رتبته؟

3) أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 02

1) عبارة u_n بدلالة n.

$u_n = u_p + (n-p)r$ تعني: $u_n = u_1 + (n-1)(-2) = 5 - 2n + 2$ إذا: $\boxed{u_n = 7 - 2n}$

2) هل العدد (-171) حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ ما رتبته؟

$u_n = -171$ تعني: $7 - 2n = -171$ ومنه: $n = \dfrac{-171-7}{-2} = 89$ إذا العدد (-171) حد من حدود المتتالية (u_n) رتبته 89

3) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(5 + 7 - 2n) = \frac{n}{2}(12 - 2n) = \frac{n}{2} \times 2(6 - n) = 6n - n^2$$

التمـــرين 03

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $u_{22} = -65$ و $u_{35} = -104$

1) عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول.

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع: $S = u_5 + u_6 + ... + u_n$

حل التمـــرين 03

1) تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول.

- لدينا: $u_n = u_p + (n-p)r$ ومنه: $r = \dfrac{u_n - u_p}{n-p} = \dfrac{u_{35} - u_{22}}{35 - 22} = \dfrac{-104 + 65}{13} = -3$

- $u_{22} = u_0 + 22r$ ومنه: $u_0 = u_{22} - 22r = -65 - 22(-3) = 1$

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n.

$u_n = u_0 + nr$ تعني: $\boxed{u_n = 1 - 3n}$

3) حساب المجموع: $S = u_5 + u_6 + ... + u_n$

$$S = u_5 + u_6 + ... + u_n = \frac{n-5+1}{2}(u_5 + u_n) = \frac{n-4}{2}(-14 + 1 - 3n) = \frac{n-4}{2}(-13 - 3n)$$

التمـــرين 04

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $3u_7 + u_{20} = 275$ و $r = 7$

1) عين الحد الأول للمتتالية (u_n)

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 04

1) تعيين الحد الأول للمتتالية (u_n)

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_7 = u_0 + 7\times 7 = u_0 + 49$ ، $u_{20} = u_0 + 20(7) = u_0 + 140$

نعوض قيمة الحدين في المعادلة نجد:

$3(u_0+49)+u_0+140=275$ ومنه: $3u_0+147+u_0+140=275$ ومنه: $4u_0+287=275$

ومنه: $\boxed{u_0 = \frac{275-287}{4} = -3}$

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n.

$\boxed{u_n = -3+7n}$

3) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{(n+1)}{2}(-3-3+7n) = \frac{(n+1)}{2}(-6+7n)$$

التمـــــرين 05

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $u_5 + u_9 + u_{11} = 105$ و $u_1 = -9$

1) عين أساس المتتالية (u_n)

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع: $S = u_1 + ... + u_{n-1}$

حل التمـــرين 05

1) تعيين أساس المتتالية (u_n)

$u_n = u_p + (n-p)r$ ومنه: $\boxed{\begin{aligned} u_5 &= u_1 + (5-1)r \\ &= -9+4r \end{aligned}}$ ، $\boxed{\begin{aligned} u_9 &= u_1 + (9-1)r \\ &= -9+8r \end{aligned}}$ ، $\boxed{\begin{aligned} u_{11} &= u_1 + (11-1)r \\ &= -9+10r \end{aligned}}$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$-9+4r-9+8r-9+10r=105$ ومنه: $22r = 105+27$ ومنه: $\boxed{r = \frac{132}{22} = 6}$

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n.

$u_n = -9 + (n-1)(6)$ ومنه: $\boxed{u_n = -15+6n}$

3) حساب المجموع: $S = u_1 + ... + u_{n-1}$

$$S = u_1 + ... + u_{n-1} = \frac{n-1+1}{2}(-9-15+6(n-1)) = \frac{n}{2}(-30+6n) = n(-15+3n)$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 06

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $\begin{cases} u_5+u_{13}=40 \\ u_{10}+u_{17}=49 \end{cases}$

1) عين أساس المتتالية r وحدها الأول u_0 .

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع: $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$

حل التمـــرين 06

1) تعيين أساس المتتالية r وحدها الأول u_0 .

لدينا: $u_5=u_0+5r$ ، $u_{13}=u_0+13r$ ، $u_{10}=u_0+10r$ ، $u_{17}=u_0+17r$ بالتعويض في المعادلتين نجد:

$\begin{cases} u_0+5r+u_0+13r=40 \\ u_0+10r+u_0+17r=49 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 2u_0+18r=40 \\ 2u_0+27r=49 \end{cases}$ بالطرح نجد: $2u_0+18r-2u_0-27r=40-49$

ومنه: $-9r=-9$ إذا: $\boxed{r=1}$

نعوض قيمة الأساس في المعادلة نجد: $2u_0+18=40$ ومنه: $2u_0=22$ إذا: $\boxed{u_0=11}$

2) كتاب عبارة u_n بدلالة n.

$u_n=u_0+nr$ تعني: $\boxed{u_n=11+n}$

3) حساب المجموع: $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$

$$S=u_1+u_2+u_3+...+u_n=\frac{n}{2}(12+11+n)=\frac{n}{2}(23+n)$$

التمـــــرين 07

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $\begin{cases} u_6+u_7+u_8=15 \\ u_9+u_{11}=22 \end{cases}$

1) عين أساس المتتالية r وحدها الأول u_0 .

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع: $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$

حل التمـــرين 07

1) تعيين أساس المتتالية r وحدها الأول u_0 .

- لدينا: $u_6+u_7+u_8=15$

وحسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $u_6+u_8=2u_7$ ومنه: $2u_7+u_7=15$ ومنه: $3u_7=15$ إذا: $\boxed{u_7=5}$

ولدينا: $u_9+u_{11}=2u_{10}=22$ ومنه: $\boxed{u_{10}=11}$ إذا: $\boxed{r=\frac{u_{10}-u_7}{10-7}=\frac{11-5}{3}=2}$

- لدينا: $u_7=u_0+7r=5$ ومنه: $u_0+7(2)=5$ إذا: $\boxed{u_0=5-14=-9}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n.

$$\boxed{u_n=-9+2n}$$

3) حساب المجموع: $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$

$$S=u_1+u_2+u_3+...+u_n=\frac{n}{2}(-7-9+2n)=\frac{n}{2}(-16+2n)=n(-8+n)$$

التمـــــرين 08

1) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها 2.

أ- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ب- احسب المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

2) (v_n) متتالية هندسية حيث $v_5=32$ و $v_8=256$.

أ- عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول v_0 ، ثم اكتب حدها العام v_n بدلالة n.

ب- احسب المجموع $S'_n=v_0+v_1+...+v_n$.

3) نعتبر المتتالية العددية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=2^n+2n+1$

احسب بدلالة n ، المجموع $T_n=w_0+w_1+...+w_n$.

حل التمـــرين08

1) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها 2.

أ) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$\boxed{u_n=u_0+nr=1+2n}$$

ب) حساب المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

$$\boxed{S_n=u_0+u_1+...+u_n=\frac{n+1}{2}(1+1+2n)=(n+1)^2}$$

2) (v_n) متتالية هندسية حيث $v_5=32$ و $v_8=256$.

أ) تعيين أساس هذه المتتالية وحدها الأول v_0

لدينا: $v_8=v_5\times q^3$ ومنه: $q^3=\frac{v_8}{v_5}=\frac{256}{32}=8$ اذا: $\boxed{q=2}$

ولدينا: $v_5=v_0\times q^5$ ومنه: $\boxed{v_0=\frac{v_5}{q^5}=\frac{32}{32}=1}$

* كتابة حدها العام v_n بدلالة n.

$v_n=v_0\times q^n$ أي: $\boxed{v_n=2^n}$

ب) حساب المجموع $S'_n=v_0+v_1+...+v_n$.

$$\boxed{S'_n=v_0+v_1+...+v_n=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) نعتبر المتتالية العددية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2^n + 2n + 1$

حساب بدلالة n ، المجموع $T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$.

نلاحظ أن: $w_n = u_n + v_n$ أي أن: $\boxed{T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n = S_n + S_n^{'} = (n+1)^2 + 2^{n+1} - 1}$

التمـــــرين 09

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 40 \\ u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 150 \end{cases}$

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أحسب الأساس r وال حد الأول u_0 ثم أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) هل 2015 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟

4) أ- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ب- عين قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 330$

5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_{2n+1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n^{'} = v_0 + v_1 + ... + v_n$

حل التمـــرين 09

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 .

لدينا: $u_1 + 2u_2 + u_3 = 40$ وحسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $u_1 + u_3 = 2u_2$ بالتعويض في المعادلة نجد:

$4u_2 = 40$ ومنه: $\boxed{u_2 = 10}$

بتعويض قيمة u_2 في جملة المعادلتين نجد: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 & ....(1) \\ u_1^2 + u_3^2 = 250 & ....(2) \end{cases}$ من (1) نجد: $\boxed{u_3 = 20 - u_1}$ بالتعويض في (2) نجد:

$u_1^2 + (20 - u_1)^2 = 250$ ومنه: $u_1^2 + 400 - 40u_1 + u_1^2 - 250 = 0$ ومنه: $2u_1^2 - 40u_1 - 150 = 0$

ومنه: $2(u_1^2 - 20u_1 - 75) = 0$ تعني: $u_1^2 - 20u_1 - 75 = 0$

ومنه: $\Delta = 100$ إذا: $\boxed{u_1 = 5}$ أو $u_1 = 15$ مرفوض لان المتتالية متزايدة

نعوض قيمة u_1 في (1) نجد: $u_3 = 20 - u_1 = 20 - 5$ أي: $\boxed{u_3 = 15}$

2) حساب الأساس r وال حد الأول u_0 ثم كتابة عبارة u_n بدلالة n.

$\boxed{r = u_2 - u_1 = 10 - 5 = 5}$ ، $\boxed{u_0 = u_1 - r = 4 - 5 = 0}$ ، $\boxed{u_n = 5n}$

3) هل 2015 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟

$u_n = 2015$ تعني: $5n = 2015$ ومنه: $n = \frac{2015}{5} = 403$ ومنه: العدد 2015 حد من حدود المتتالية (u_n)

Email : mebarki.math32@gmail.com

4) أ) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{(n+1)\times 5n}{2} = \frac{5n^2 + 5n}{2}}$$

ب) تعيين قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 330$

$S_n = 330$ تعني: $\frac{5n^2+5n}{2} = 330$ أي: $5n^2 + 5n - 660 = 0$ ومنه: $5\left(n^2 + n - 132\right) = 0$ ومنه:

$n^2 + n - 132 = 0$ ومنه: $\Delta = 529$ ومنه: $n = -12$ (مرفوض) أو $\boxed{n = 11}$

5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_{2n+1}$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_n = u_{2n+1} = 5(2n+1) = 10n + 5$$

$$v_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+2+1} = u_{2n+3} = 5(2n+3) = 10n + 15 = 10n + 5 + 10 = v_n + 10$$

ومنه: (v_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = 10}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = u_{2(0)+1} = u_1 = 5}$

ب) حساب بدلالة n المجموع: $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

$$\boxed{S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = \frac{n+1}{2}(5 + 10n + 5) = (n+1)(5+5n)}$$

التمـــــرين 10

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $u_n = -6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

1) أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_5 .

3) أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$

حل التمــرين 10

1) اثبات أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-6\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{-6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$ ومنه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0 = -6\times\left(\frac{1}{3}\right)^0 = -6$

2) حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_5 .

$\boxed{u_1 = -6\times\left(\frac{1}{3}\right)^1 = -2}$ ، $\boxed{u_2 = -6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -6\times\frac{1}{9} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}}$ ، $\boxed{u_5 = -6\times\left(\frac{1}{3}\right)^5 = -6\times\frac{1}{243} = \frac{-6}{243} = \frac{-2}{81}}$

3) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = -2\times\frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = -3\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 11

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $q=2$ و $v_0=8$

1) أحسب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع: $S=v_1+v_2+...+v_n$

حل التمـــرين 11

1) حساب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 .

$\boxed{v_1=v_0\times q=8\times 2=16}$ ، $\boxed{v_2=v_1\times q=16\times 2=32}$ ، $\boxed{v_3=v_2\times q=32\times 2=64}$

2) كتابة عبارة v_n بدلالة n.

$v_n=v_0\times q^n$ تعني: $\boxed{v_n=8\times 2^n}$

3) حساب المجموع: $S=v_1+v_2+...+v_n$

$$\boxed{S=v_1+v_2+...+v_n=16\times\frac{1-2^n}{1-2}=-16\left(1-2^n\right)}$$

التمـــــرين 12

لتكن (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بحيث: $u_5=\frac{243}{2}$ و $u_2=\frac{9}{2}$

1) عين أساس المتتالية q وحدها الأول u_0 .

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع: $S=u_0+u_1+...+u_n$

حل التمـــرين 12

1) تعيين أساس المتتالية q وحدها الأول u_0 .

$u_n=u_p\times q^{n-p}$ ومنه: $u_5=u_2\times q^{5-2}$ ومنه: $\frac{243}{2}=\frac{9}{2}\times q^3$ ومنه: $q^3=\frac{243}{2}\times\frac{2}{9}=27$ ومنه: $\boxed{q=3}$

$u_2=u_0\times q^2$ ومنه: $u_0=\frac{u_2}{q^2}=\frac{\frac{9}{2}}{3}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n.

$$\boxed{u_n=\frac{3}{2}\times 3^n}$$

3) حساب المجموع: $S=u_0+u_1+...+u_n$

$$\boxed{S=u_0+u_1+...+u_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)=\frac{-3}{4}\left(1-3^{n+1}\right)}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 13

(w_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_0 \times w_2 = 64$ و $w_0 + w_1 = 12$

1) أحسب w_1 ثم w_0 .
2) استنتج أساس المتتالية (w_n) .
3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = 4\times 2^n$ ثم أحسب الحد الخامس للمتتالية (w_n) .
4) أحسب المجموع: $S = w_2 + w_3 + \ldots + w_n$

حل التمـــرين 13

1) حساب w_1 ثم w_0

لدينا: $w_0 \times w_2 = 64$ ومنه حسب خاصية الوسط الهندسي نجد: $w_0 \times w_2 = w_1^2 = 64$ ومنه: $w_1 = \sqrt{64} = 8$ (لان الحدود موجبة)

لدينا: $w_0 + w_1 = 12$ ومنه: $w_0 = 12 - w_1 = 12 - 8 = 4$

2) استنتاج أساس المتتالية (w_n) .

$$\boxed{q = \frac{w_1}{w_0} = \frac{8}{4} = 2}$$

3) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = 4\times 2^n$ ثم حساب الحد الخامس للمتتالية (w_n) .

$\boxed{w_n = w_0 \times q^n = 4\times 2^n}$ ، $\boxed{w_4 = 4\times 2^4 = 64}$

4) حساب المجموع: $S = w_2 + w_3 + \ldots + w_n$

$$\boxed{S = w_2 + w_3 + \ldots + w_n = w_2\left(\frac{1-2^{n-2+1}}{1-2}\right) = 16\left(\frac{1-2^{n-1}}{-1}\right) = -16\left(1-2^{n-1}\right)}$$

التمـــــرين 14

نعتبر (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_0 = e$ و $v_7 - 8v_4 = 0$

1) أثبت أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = 2$ ثم أكتب v_n بدلالة n وأحسب $\lim_{x\to+\infty} v_n$
2) أحسب بدلالة n الجداء A_n حيث: $A_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$
3) نعتبر (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \ln(v_n)$

أ- برهن أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول.

ب-أكتب عبارة w_n بدلالة n.

ج- أحسب المجموع: $T_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 14

نعتبر (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_0 = e$ و $v_7 - 8v_4 = 0$

1) اثبات أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = 2$

لدينا: $v_7 - 8v_4 = 0$ ونعلم أن: $v_n = v_0 \times q^n = e \times q^n$ ومنه: $v_7 = e \times q^7$ و $v_4 = e \times q^4$ بالتعويض نجد:

$e \times q^7 - 8 \times e \times q^4 = 0$ ومنه: $e \times q^4 \left(q^3 - 8\right) = 0$ ومنه: $q^3 - 8 = 0$ ومنه: $q^3 = 8$ إذا: $\boxed{q = 2}$

- كتابة v_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n$

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = e \times 2^n} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} v_n = \lim_{x \to +\infty} e \times 2^n = +\infty}$$

2) حساب بدلالة n الجداء A_n حيث: $A_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

$$\begin{aligned} A_n &= v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n \\ &= e \times 2^0 \times e \times 2^1 \times \ldots e \times 2^n \\ &= e \times e \times \ldots \times e \times 2^{0+1+2+\ldots+n} \\ &= e^{n+1} \times 2^{\frac{(n+1)n}{2}} \end{aligned}$$

3) نعتبر (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \ln(v_n)$

أ- برهان أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \\ &= \ln\left(e \times 2^{n+1}\right) - \ln\left(e \times 2^n\right) \\ &= \ln e + \ln 2^{n+1} - \ln e - \ln 2^n \\ &= 1 + \ln 2^n + \ln 2 - 1 - \ln 2^n \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

ومنه (w_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول $w_0 = \ln(v_0) = \ln e = 1$

ب- كتابة عبارة w_n بدلالة n.

$$\boxed{w_n = w_0 + nr = 1 + n\ln 2}$$

ج- حساب المجموع: $T_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{n+1}{2}\left(w_0 + w_n\right) \\ &= \frac{n+1}{2}(1 + 1 + n\ln 2) \\ &= \frac{n+1}{2}(2 + n\ln 2) \end{aligned}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 15

نعتبر المتتالية (u_n) الهندسية حدودها موجبة حيث: $\ln(u_2)-\ln(u_4)=4$ و $\ln(u_1)+\ln(u_5)=-12$

1) بين أن أساس المتتالية (u_n) هو $q=\frac{1}{e^2}$ ثم عين حدها الاول u_0.

2) اكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) احسب المجموع: $S=u_0+u_1+\ldots+u_n$

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها.

ب) احسب المجموع S_n' حيث: $S'_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$

حل التمـــرين 15

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $\ln(u_2)-\ln(u_4)=4$ و $\ln(u_1)+\ln(u_5)=-12$

1) تبيين أن أساس المتتالية (u_n) هو $q=\frac{1}{e^2}$

لدينا: $\ln(u_2)-\ln(u_4)=4$ ومنه: $\ln\left(\frac{u_2}{u_4}\right)=4$ ومنه: $\frac{u_2}{u_4}=e^4$ ومنه: $\frac{u_2}{u_2\times q^2}=e^4$ ومنه: $\frac{1}{q^2}=e^4$ ومنه: $q^2=\frac{1}{e^4}$

إذا: $\boxed{q=\frac{1}{e^2}}$ ، $q=\frac{-1}{e^2}$ (مرفوض)

تعيين حدها الأول u_0.

لدينا: $\ln(u_1)+\ln(u_5)=-12$ ومنه: $\ln(u_1\times u_5)=-12$ ومنه: $u_1\times u_5=e^{-12}$ ومنه: $u_0\times q\times u_0\times q^5=e^{-12}$

ومنه: $u_0^2\times q^6=e^{-12}$ ومنه: $u_0^2\times\frac{1}{e^{12}}=e^{-12}$ ومنه: $u_0^2=1$ إذا: $\boxed{u_0=1}$ أو $u_0=-1$ (مرفوض)

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n.

$u_n=u_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{u_n=\left(\frac{1}{e^2}\right)^n}$

3) حساب المجموع: $S=u_0+u_1+\ldots+u_n$

$$\boxed{S=u_0+u_1+\ldots+u_n=\frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e}}$$

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$

أ) تبيين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها.

Email : mebarki.math32@gmail.com

$$v_{n+1}-v_n=\ln u_{n+1}+\ln u_{n+2}-\ln u_n-\ln u_{n+1}$$
$$=\ln u_{n+1}-\ln u_{n+1}+\ln u_{n+2}-\ln u_n$$
$$=\ln\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}}+\ln\frac{u_{n+2}}{u_n}$$
$$=\ln\frac{u_n\times q^2}{u_n}=\ln q^2=\ln e^{-4}=-4$$

ب) حساب المجموع S_n' حيث: $S'_n=v_0+v_1+...+v_n$

$$S'_n=v_0+v_1+...+v_n$$
$$=(n+1)\frac{v_0+v_n}{2}=(n+1)\frac{-2-2-4n}{2}$$
$$=(n+1)(-2-2n)$$

التمـــــرين 16

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ وحدها الأول $u_0=2$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

2) برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $u_n\prec 3$

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-3$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0 .

ب- استنتج عبارة v_n بدلالة n ، ثم u_n .

ج- عيّن نهاية المتتالية (u_n) .

د-أحسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

حل التمـــرين 16

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$\boxed{u_1=\frac{1}{3}u_0+2=\frac{1}{3}(2)+2=\frac{2}{3}+\frac{2\times 3}{3}=\frac{8}{3}}\quad ، \quad \boxed{u_2=\frac{1}{3}u_1+2=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\right)+2=\frac{8}{9}+\frac{2\times 9}{9}=\frac{26}{9}}$$

$$\boxed{u_3=\frac{1}{3}u_2+2=\frac{1}{3}\left(\frac{26}{9}\right)+2=\frac{26}{27}+\frac{2\times 27}{27}=\frac{80}{27}}$$

2) البرهان بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $u_n\prec 3$

لدينا: $u_0=2$ و $2\prec 3$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\prec 3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}\prec 3$

لدينا: $u_n\prec 3$ ومنه: $\frac{1}{3}u_n+2\prec 3\left(\frac{1}{3}\right)+2$ ومنه: $u_{n+1}\prec 3$ صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\prec 3$

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة.

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+2-u_n=\frac{-2}{3}u_n+2=\frac{-2}{3}(u_n-3)\succ 0$ لأن: $u_n\prec 3$ تعني: $u_n-3\prec 0$ و $\frac{-2}{3}\prec 0$

- بما (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة نحو l

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-3$

أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0 .

$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n$ ومنه: (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول: $v_0=u_0-3=2-3=-1$

ب) استنتاج عبارة v_n بدلالة n ، ثم u_n .

$v_n=v_0\times q^n$ تعني: $\boxed{v_n=-1\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$v_n=u_n-3$ تعني: $u_n=v_n+3$ أي: $\boxed{u_n=-1\left(\frac{1}{3}\right)^n+3}$

ج) تعيين نهاية المتتالية (u_n) .

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-1\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\right]=3}$$

د) حساب المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

$$\begin{aligned}S_n&=u_0+u_1+...+u_n\\&=v_0+3+v_1+3+...+v_n+3\\&=(v_0+v_1+...+v_n)+3+3+...+3\\&=-1\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}+3(n+1)\\&=\frac{-2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]+3(n+1)\end{aligned}$$

التمـــــرين 17

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_{n+1}=0.6u_n-1.2$ و $u_0=2$

1) أ- برهن بالتراجع أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

ب- برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\succ -3$

ج- بيّن أنّ (u_n) متقاربة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n+3$.

أ- برهن أنّ (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها.

ب- أحسب بدلالة n عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n.

ب- استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ج- أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

حل التمـــرين 17

1) أ) البرهان بالتراجع أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة معناه: $u_{n+1} \prec u_n$

لدينا: $u_{n+1} = 0.6u_n - 1.2$ و $u_0 = 2$ ومنه: $u_1 = 0.6u_0 - 1.2 = 0.6\times 2 - 1.2 = 0$

ومنه: $u_0 \succ u_1$ الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض ان $u_{n+1} \prec u_n$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$أي: $u_{n+2} \prec u_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} \prec u_n$ ومنه: $0.6u_{n+1} - 1.2 \prec 0.6u_n - 1.2$ ومنه: $u_{n+2} \prec u_{n+1}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا هي صحيحة من أجل n وبالتالي (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

ب) البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ -3$

لدينا: $u_0 = 2$ و $2 \succ -3$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \succ -3$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} \succ -3$

لدينا: $u_n \succ -3$ ومنه: $0.6u_n - 1.2 \succ -3(0.6) - 1.2$ ومنه: $u_{n+1} \succ -3$ صحيحة إذا: حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n \succ -3$

ج) تبيان أنّ (u_n) متقاربة.

بمان (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3- فهي متقاربة نحو l

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 3$.

أ) البرهان أنّ (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 0.6u_n - 1.2 + 3 = 0.6u_n + 1.8 = 0.6(u_n + 3) = 0.6v_n$$

إذا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 0.6$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$

ب) حساب بدلالة n عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 5(0.6)^n}$$

3) من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

أ) حساب المجموع S_n بدلالة n.

$$\boxed{S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = 5\times\frac{1-(0.6)^{n+1}}{1-0.6} = 12.5\left[1-(0.6)^{n+1}\right]}$$

ت) استنتاج بدلالة n المجموع: $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$$\begin{aligned} S'_n &= v_0 - 3 + v_1 - 3 + ... + v_n - 3 \\ &= (v_0 + v_1 + ... + v_n) - 3 - 3 - ... - 3 \\ &= S_n - 3(n+1) \end{aligned}$$

إذا: $\boxed{S'_n = 12.5\left[1-(0.6)^{n+1}\right] - 3(n+1)}$

ج) حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

لدينا: $u_n = v_n - 3$ ومنه: $u_n = 5(0.6)^n - 3$ إذا: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[5(0.6)^n - 3\right] = -3}$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 3

التمـــــرين 18

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب المجموعين S_n و T_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

4) أحسب نهاية S_n و T_n لما n يؤول $+\infty$.

حل التمـــرين 18

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$\boxed{u_1 = -\frac{2}{3}u_0 + 5 = \frac{-2}{3}(5) + 5 = \frac{-10}{3} + \frac{5\times 3}{3} = \frac{5}{3}}$$ ، $$\boxed{u_2 = -\frac{2}{3}u_1 + 5 = \frac{-2}{3}\left(\frac{5}{3}\right) + 5 = \frac{-10}{9} + \frac{5\times 9}{9} = \frac{35}{9}}$$

$$\boxed{u_3 = -\frac{2}{3}u_2 + 5 = \frac{-2}{3}\left(\frac{35}{9}\right) + 5 = \frac{-70}{27} + \frac{5\times 27}{27} = \frac{65}{27}}$$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.

أ) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{-2}{3}u_n + 5 - 3 = \frac{-2}{3}u_n + 2 = \frac{-2}{3}(u_n - 3) = \frac{-2}{3}v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{-2}{3}$

وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$

ب) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتاج u_n بدلالة n .

$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}$ ، لدينا: $u_n = v_n + 3$ تعني: $\boxed{u_n = 2\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 3}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) حساب المجموعين S_n و T_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$$
$$= v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$= 2 \times \frac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{2}{3}}$$
$$= 2 \times \frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right]$$
$$= \frac{6}{5}\left[1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$
$$= v_0 + 3 + v_1 + 3 + ... + v_n + 3$$
$$= (v_0 + v_0 + ... + v_n) + (3+3+...+3)$$
$$= S_n + 3(n+1)$$
$$== \frac{6}{5}\left[1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right] + 3(n+1)$$

4) حساب نهاية S_n و T_n لما n يؤول $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{5}\left[1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{6}{5}}$$ ،
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{6}{5}\left[1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right] + 3(n+1)\right] = +\infty}$$

التمـــــرين 19

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ والعبارة $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) أحسب كلا من u_1 ، u_2 .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$

أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، فان $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

ب) استنتج طبيعة المتتالية (v_n) معينا اساسها وحدها الأول v_0

ت) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

3) أحسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ بدلالة n.

4) عبر عن u_n بدلالة S_n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -3 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$

5) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

حل التمــرين 19

1) حساب الحدين u_1 ، u_2

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3}u_0 - 1 = \frac{2}{3}\times 3 - 1 = 1}$$ ، $$\boxed{u_2 = \frac{2}{3}u_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = \frac{-1}{3}}$$

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$

أ) تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، فان $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n$ تعني:

$$\boxed{\begin{aligned} v_v &= u_n-u_{n-1}\\ &=\frac{2}{3}u_{n-1}-1-u_{n-1}\\ &=\frac{-1}{3}u_{n-1}-1\end{aligned}}$$

ولدينا: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1$ تعني:

$$\boxed{u_n=\frac{2}{3}u_{n-1}-1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-u_n\\ &=\frac{2}{3}u_n-1-u_n\\ &=\frac{-1}{3}u_n-1\\ &=\frac{-1}{3}\left(\frac{2}{3}u_{n-1}-1\right)-1\\ &=\frac{-2}{9}u_{n-1}-\frac{2}{3}\\ &=\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}u_{n-1}-1\right)=\frac{2}{3}v_n\end{aligned}$$

ب) استنتاج طبيعة المتتالية (v_n) معينا اساسها وحدها الأول v_0

لدينا: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2}{3}$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول:

$v_1=u_1-u_0=1-3=-2$ إذا: $v_0=\frac{v_1}{q}=\frac{-2}{\frac{2}{3}}=-2\times\frac{3}{2}=-3$

ت) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n

$$\boxed{v_n=v_0\times q^n=-3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

3) حساب المجموع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ بدلالة n.

$$S_n=v_0+v_1+...+v_n=-3\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=-3\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}=-9\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]=-9+9\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n=-9+6\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

4) التعبير عن u_n بدلالة S_n ثم استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=-3+6\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\begin{cases} v_0=-3\\ v_1=u_1-u_0\\ ....\\ v_n=u_n-u_{n-1}\end{cases}$ بالجمع طرفا بطرف نجد: $S=-3-u_0+u_n$ ومنه: $u_n=S+3+u_0$ ومنه: $\boxed{u_n=-3+6\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

5) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$ ، ماذا تستنتج؟

- $u_{n+1}-u_n=-3+6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+3-6\left(\frac{2}{3}\right)^n=6\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}-1\right)=-2\left(\frac{2}{3}\right)^n\prec 0$ ومنه: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$
- $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-3+6\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=-3$ ومنه نستنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 20

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=3$ و $u_{n+1}=3u_n-4$

1) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 2$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-2$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) أحسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n=\ln(u_n-2)$

أ) بين أن (w_n) متتالية حسابية ثم عبر عن w_n بدلالة n

ب) أحسب المجموع: $S'_n=w_0+w_1+...+w_n$

حل التمـــرين 20

1) تبيان أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 2$

نسمي $P(n)$ الخاصية: $u_n \succ 2$

لدينا: $u_0=3$ و $3 \succ 2$ ومنه الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n=0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من اجل العدد الطبيعي n

نفرض صحة الخاصية من أجل العدد الطبيعي (n) أي: $u_n \succ 2$

نثبت صحة الخاصية من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} \succ 2$

لدينا: $u_n \succ 2$ ومنه: $3u_n-4 \succ 3\times 2-4$ ومنه: $u_{n+1} \succ 2$ إذا الخاصية صحيحة من اجل $(n+1)$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل n أي: $u_n \succ 2$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

$u_{n+1}-u_n=3u_n-4-u_n=2u_n-4=2(u_n-2)\succ 0$ لأن: $u_n \succ 2$ أي: $u_n-2 \succ 0$ ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-2$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول

$v_{n+1}=u_{n+1}-2=3u_n-4-2=3u_n-6=3(u_n-2)=3v_n$ ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 وحدها الأول:

$v_0=u_0-2=3-2=1$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$\boxed{v_n=v_0\times q^n=3^n}$ ، $\boxed{u_n=v_n+2=3^n+2}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ج) حساب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &= v_0 + 2 + v_1 + 2 + ... + v_n + 2 \\ &= \frac{1-3^{n+1}}{1-3} + 2(n+1) \\ &= \frac{1-3^{n+1}}{-2} + 2(n+1) \end{aligned}$$

4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln(u_n - 2)$

أ) تبيان أن (w_n) متتالية حسابية ثم عبر عن w_n بدلالة n

$$w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\frac{3^{n+1}}{3^n} = \ln 3$$

ومنه: (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 3$ وحدها الأول $w_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln 1 = 0$ إذا: $\boxed{w_n = n\ln 3}$

ب) حساب المجموع: $S_n' = w_0 + w_1 + ... + w_n$

$$\boxed{S_n' = w_0 + w_1 + ... + w_n = \frac{n+1}{2}(n\ln 2)}$$

التمـــــرين 21

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{7}{10}u_n + 6$

1) احسب u_1 و u_2

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \succ 20$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج تقاربها

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي بــــ $v_n = u_n - 20$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم بين أن: $u_n = 30\left(\frac{7}{10}\right)^n + 20$

ج) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) ليكن المجموعين: S_n ، S_n' حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $S_n' = u_0 + u_1 + ... + u_n$

احسب المجموع S_n ثم بين أن: $S_n' = 100\left[1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n\right] + 20(n+1)$

حل التمـــرين 21

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{7}{10}u_n + 6$

1) حساب u_1 و u_2

$$\boxed{u_1 = \frac{7}{10}u_0 + 6 = \frac{7}{10}\times 50 + 6 = 41} \qquad \boxed{u_2 = \frac{7}{10}u_1 + 6 = \frac{7}{10}\times 41 + 6 = \frac{347}{10}}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 20$

لدينا: $u_0 = 50$ و $50 \succ 20$ إذا الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \succ 20$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1} \succ 20$

لدينا: $u_n \succ 20$ ومنه: $\frac{7}{10}u_n + 6 \succ \frac{7}{10}\times 20 + 6$ إذا: $u_{n+1} \succ 20$ ومنه حسب مبدا الاستدلال بالتراجع

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج تقاربها

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{10}u_n + 6 - u_n = \frac{-3}{10}u_n + 6$ ولدينا: $u_n \succ 20$ ومنه: $\frac{-3}{10}u_n + 6 \leq \frac{-3}{10}(20) + 6$

ومنه: $u_{n+1} - u_n \prec 0$ إذا (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 20 فهي متقاربة نحو العدد l

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بــ: $v_n = u_n - 20$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا: $v_n = u_n - 20$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 20$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{7}{10}u_n + 6 - 20$ ومنه $v_{n+1} = \frac{7}{10}(v_n + 20) + 6 - 20$

وعليه: $v_{n+1} = \frac{7}{10}v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{7}{10}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 20 = 50 - 20 = 30$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم تبيان أن: $u_n = 30\left(\frac{7}{10}\right)^n + 20$

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 30\left(\frac{7}{10}\right)^n$ ، ولدينا: $u_n = v_n + 20$ ومنه: $u_n = 30\left(\frac{7}{10}\right)^n + 20$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty}\left[30\left(\frac{7}{10}\right)^n + 20\right] = 20}$$

4) حساب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

$$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= 30 \times \frac{1-\left(\frac{7}{10}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{7}{10}\right)}$$

$$= 30 \times \frac{10}{3}\left[1-\left(\frac{7}{10}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 100 \times \left[1-\left(\frac{7}{10}\right)^{n+1}\right]$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 22

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}$

1) أحسب u_1 ، u_2 .

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$

3) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n + 1)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

- هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 1$

أ- بين ان (v_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول

ب- عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

5) أحسب المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

حل التمـــــرين 22

1) حساب الحدود

$\boxed{u_1 = \frac{1}{4}u_0 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 7 - \frac{3}{4} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1}$ ، $\boxed{u_2 = \frac{1}{4}u_1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 1 - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}}$

2) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$

نسمي　$P(n)$ الخاصية: $u_n \geq -1$

لدينا: $u_0 = 7$ و　$u_n \geq -1$ ومنه الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n = 0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من اجل العدد الطبيعي n ونفرض صحة الخاصية من أجل $(n+1)$ أي: $u_{n+1} \geq -1$

لدينا: $u_n \geq -1$ ومنه: $\frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4} \geq -1\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}$ ومنه: $u_{n+1} \geq -1$ إذا الخاصية صحيحة من اجل $(n+1)$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل n أي: $u_n \geq -1$

3) تبيان انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n + 1)$ ثم استنتاج اتجاه تغير (u_n)

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4} - u_n = \frac{-3}{4}u_n - \frac{3}{4} = \frac{-3}{4}(u_n + 1) \leq 0$ لأن $u_n \geq -1$ تعني: $u_n + 1 \geq 0$ ومنه: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- نعم المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -1

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 1$

أ) تبيان ان (v_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول

$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(u_n + 1) = \frac{1}{4}v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 + 1 = 7 + 1 = 8$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) التعبير عن v_n و u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 8\left(\frac{1}{4}\right)^n}$ ، $\boxed{u_n = v_n - 1 = 8\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$ ، $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[8\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right] = -1}$

5) حساب المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$$
$$= 8 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= 8 \times \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$
$$= \frac{32}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$
$$= v_0 - 1 + v_1 - 1 + ... + v_n - 1$$
$$= (v_0 + v_1 + ... + v_n) + (-1-1-...-1)$$
$$= S_n - 1(n+1)$$
$$= \frac{32}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] - (n+1)$$

التمـــــرين 23

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي: $u_0 = \alpha$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

I. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. نضع: $\alpha = 12$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 < u_n \leq 12$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟

2) (v_n) متتالية عددية حيث من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 4$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

3) أحسب المجموع S_n حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_{2024} + u_{2025} + ... + u_n$

حل التمـــرين 23

I.تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(u_n) ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ ومنه: $\alpha = \frac{1}{4}\alpha + 3$ ومنه: $\alpha - \frac{1}{4}\alpha = 3$ ومنه: $\frac{3}{4}\alpha = 3$ إذا: $\boxed{\alpha = 4}$

II. نضع: $\alpha = 12$

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 < u_n \leq 12$.

نسمي $P(n)$ الخاصية: $4 < u_n \leq 12$

لدينا: $u_0 = 12$ و $4 < 12 \leq 12$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n = 0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل العدد الطبيعي n أي: $4 < u_n \leq 12$ ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$ أي: $4 < u_{n+1} \leq 12$

Email : mebarki.math32@gmail.com

لدينا: $4<u_n\le 12$ ومنه: $4\left(\frac{1}{4}\right)<\frac{1}{4}u_n\le 12\left(\frac{1}{4}\right)$ ومنه: $1+3<\frac{1}{4}u_n+3\le 3+3$ ومنه: $4<u_{n+1}\le 6\le 12$

إذا الخاصية صحيحة من اجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من اجل n

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+3-u_n=\frac{-3}{4}u_n+3$$

لدينا: $4<u_n\le 12$ ومنه: $4\left(\frac{-3}{4}\right)\succ\frac{-3}{4}u_n\ge 12\left(\frac{-3}{4}\right)$ ومنه: $0\succ\frac{-3}{4}u_n+3\ge -6$ إذا: $u_{n+1}-u_n\prec 0$

إذا: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

الاستنتاج: لدينا (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد4 إذا هي متقاربة نحو العدد l

2) لدينا: $v_n=u_n-4$ أي: $u_n=v_n+4$

أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$v_{n+1}=u_{n+1}-4=\frac{1}{4}(v_n+4)-1=\frac{1}{4}v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=u_0-4=12-4=8$

ب) كتابة عبارتي v_n و u_n بدلالة n ثم استنتاج $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

$\boxed{v_n=v_0\times q^n=8\left(\frac{1}{4}\right)^n}$ ، $\boxed{u_n=v_n+4=8\left(\frac{1}{4}\right)^n+4}$ ، $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[8\left(\frac{1}{4}\right)^n+4\right]=4}$

3) حساب المجموع S_n حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_{2024}+u_{2025}+\ldots+u_n$

$$\begin{aligned}S_n&=u_{2024}+u_{2025}+\ldots+u_n\\&=v_{2024}+4+v_{2025}+4+\ldots+v_n+4\\&=(v_{2024}+v_{2025}+\ldots+v_n)+(4+4+\ldots+4)\\&=v_{2024}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2023}}{1-\frac{1}{4}}+4(n-2023)\\&=8\times\left(\frac{1}{4}\right)^{2024}\times\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2023}\right]+4(n-2023)\end{aligned}$$

الأستاذة : مباركي فاطمة مادة الرياضيات
ثانوية حميتو الحاج علي الشلالة ولاية البيض

التمـــــرين 24

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ: $u_n\prec 3$

2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(-u_n+3)$

أ) بين أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\ln 3$ ثم احسب حدها الأول استنتج، اتجاه تغيرها

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3-\frac{3}{3^n}$، احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=\ln(-u_{2023}+3)+\ln(-u_{2024}+3)+...+\ln(-u_n+3)$

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n

ب) احسب T_n حيث: $T_n=e^{v_0}+e^{v_1}+...+e^{v_n}$

حل التمـــرين 24

(u_n) متتالية عددية بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ: $u_n \prec 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n \prec 3$ لدينا: $u_0=0$ و $0\prec 3$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية $u_n\prec 3$ صحيحة من اجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$: $u_{n+1}\prec 3$

لدينا: $u_n \prec 3$ "ومنه $\frac{1}{3}u_n+2\prec 3\times\frac{1}{3}+2$ ومنه: $u_{n+1}\prec 3$ إذا حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\prec 3$

2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+2-u_n=\frac{-2}{3}u_n+2$$

ولدينا: $u_n\prec 3$ ومنه: $\frac{-2}{3}u_n+2\succ 3\left(\frac{-2}{3}\right)+2$ ومنه: $u_{n+1}-u_n\succ 0$ إذا (u_n) متزايدة

-بما ان (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 إذا هي متقاربة

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(-u_n+3)$

أ) بين أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\ln 3$ ثم احسب حدها الأول واستنتج اتجاه تغيرها

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=\ln(-u_{n+1}+3)\\&=\ln\left(\frac{-1}{3}u_n-2+3\right)\\&=\ln\left(\frac{-1}{3}u_n+1\right)\\&=\ln\left[\frac{1}{3}(-u_n+3)\right]=\ln\frac{1}{3}+\ln(-u_n+3)\\&=-\ln 3+v_n\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\ln 3$ وحدها الأول $v_0=\ln(-u_0+3)=\ln(3)$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم تبيان أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3-\frac{3}{3^n}$، وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

- $v_n=v_0+nr=\ln 3-n\ln 3=\ln 3-\ln 3^n=\ln\frac{3}{3^n}$

لدينا: $v_n=\ln(-u_n+3)$ ومنه: $e^{v_n}=-u_n+3$ ومنه: $u_n=3-e^{v_n}$ ومنه: $u_n=3-e^{\ln\frac{3}{3^n}}=3-\frac{3}{3^n}$

إذا: $u_n=3-3^{1-n}=3-3\times 3^{-n}=3-\frac{3}{3^n}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{3}{3^n}\right)=3}$$

4) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n=\ln(-u_{2023}+3)+\ln(-u_{2024}+3)+\ldots+\ln(-u_n+3)$$
$$=v_{2023}+v_{2024}+\ldots+v_n$$
$$=\frac{n-2023+1}{2}(v_{2023}+v_n)$$
$$=-1011+\frac{n}{2}(-2022\ln 3+\ln 3-n\ln 3)$$
$$=-1011+\frac{n}{2}(-2021\ln 3-n\ln 3)$$

ب) أحسب T_n حيث: $T_n=e^{v_0}+e^{v_1}+\ldots+e^{v_n}$

لدينا: $\frac{3}{3^n}=e^{v_n}$ ومنه:

$$T_n=\frac{3}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\ldots+\frac{3}{3^n}$$
$$=3\left(\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$
$$=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{9}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

التمـــــرين 25

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\alpha$ حيث α عدد حقيقي ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$

I) عيّن قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة

II) فيما يلي نفرض أنّ: $u_0=3$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $u_n\geq -4$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) هل (u_n) متقاربة؟

3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+4$

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

ب) عيّن عبارة v_n بدلالة n .

ج) أثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$ ثم أحسب نهاية (u_n) .

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 25

I) تعيين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة

(u_n) متتالية ثابتة معناه: $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$ ومنه: $\alpha=\frac{1}{2}\alpha-2$ ومنه: $\alpha-\frac{1}{2}\alpha=-2$ ومنه: $\frac{1}{2}\alpha=-2$ ومنه: $\boxed{\alpha=4}$

II) فيما يلي نفرض أنّ: $u_0=3$.

1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$\boxed{u_1=\frac{1}{2}u_0-2=\frac{1}{2}(3)-2=\frac{3-4}{2}=\frac{-1}{2}}$$

$$\boxed{u_2=\frac{1}{2}u_1-2=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)-2=\frac{-1}{4}-2=\frac{-9}{4}}$$

$$\boxed{u_3=\frac{1}{2}u_2-2=\frac{1}{2}\left(\frac{-9}{4}\right)-2=\frac{-25}{8}}$$

نلاحظ ان: $u_0\succ u_1\succ u_2\succ u_3$ ومنه (u_n) متناقصة

2) أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $u_n\geq -4$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n\geq -4$

لدينا: $u_0=3$ و $u_n\geq -4$ إذا الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية $u_n\geq -4$ صحيحة من اجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$: $u_{n+1}\geq -4$

لدينا: $u_n\geq -4$ ومنه: $\frac{1}{2}u_n-2\geq -4\left(\frac{1}{2}\right)-2$ ومنه: $u_{n+1}\geq -4$ إذا حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\geq -4$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) هل (u_n) متقاربة؟

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n-2-u_n=\frac{-1}{2}u_n-2=\frac{-1}{2}(u_n+4)\leq 0$ لان: $u_n\geq -4$ تعني: $u_n+4\geq 0$

ومنه: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- نعم المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأسفل بالعدد -4 ومتناقصة

3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+4$

أ) البرهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{1}{2}u_n-2+4=\frac{1}{2}u_n+2=\frac{1}{2}(u_n+4)=\frac{1}{2}v_n$ ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=u_0+4=3+4=7}$

ب) تعيين عبارة v_n بدلالة n .

$$\boxed{v_n=v_0\times q^n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ج) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$ ثم حساب نهاية (u_n) .

لدينا: $u_n=v_n-4$ ومنه: $\boxed{u_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n-4}$ ، $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[7\left(\frac{1}{2}\right)^n-4\right]=-4}$

د) حساب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

$S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ومنه: $S_n=v_0-4+v_1-4+...+v_n-4$ ومنه: $S_n=(v_0+v_1+...+v_n)-(4+4+...+4)$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ومنه: $S_n = 7 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 4(n+1)$ إذا: $\boxed{S_n = 14\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1)}$

التمـــــرين 26

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها الأول $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2$

1) أحسب الحدين u_1 ، u_2

2) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le \frac{8}{3}$

ب) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــــــ: $v_n = u_n - \frac{8}{3}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n.

4) أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ثم الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$

حل التمـــــرين 26

1) حساب الحدين u_1 ، u_2

$\boxed{u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 2 = \frac{1}{4}(0)} + 2 = 2$ ، $\boxed{u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 2 = \frac{1}{4}(2) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}}$

2) أ) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le \frac{8}{3}$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n \le \frac{8}{3}$ لدينا: $u_0 = 0$ و $u_n \le \frac{8}{3}$ إذا الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن الخاصية $u_n \le \frac{8}{3}$ صحيحة من اجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$: $u_{n+1} \le \frac{8}{3}$

لدينا: $u_n \le \frac{8}{3}$ ومنه: $\frac{1}{4}u_n + 2 \le \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + 2$ ومنه: $u_{n+1} \le \frac{2}{3} + 2$ أي: $u_{n+1} \le \frac{8}{3}$ إذا حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n \le \frac{8}{3}$

ب) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

لان: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 2 - u_n = \frac{-3}{4}u_n + 2 = \frac{-3}{4}\left(u_n - \frac{8}{3}\right) \ge 0$ تعني: $u_n \le \frac{8}{3}$ إذا: $u_n - \frac{8}{3} \le 0$ إذا: (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- بما ان (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{8}{3}$ فهي متقاربة نحو العدد الحقيقي l

3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــــــ: $v_n = u_n - \frac{8}{3}$

أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{8}{3} = \frac{1}{4}u_n + 2 - \frac{8}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4}v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول: $v_0 = -\frac{8}{3}$

ب) كتابة عبارتي v_n و u_n بدلالة n.

$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = \frac{-8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$ ، ولدينا: $u_n = v_n + \frac{8}{3}$ أي: $\boxed{u_n = \frac{-8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

4) حساب المجموع: $S=u_0+u_1+...+u_n$ ثم الجداء: $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$

$$\begin{aligned}S&=u_0+u_1+...+u_n\\&=\left(v_0+v_1+...+v_n\right)+\frac{8}{3}(n+1)\\&=\frac{-8}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{8}{3}(n+1)\\&=\frac{-8}{3}\times\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]+\frac{8}{3}(n+1)\\&=\frac{-32}{9}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]+\frac{8}{3}(n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_n&=v_0\times v_1\times...\times v_n\\&=\frac{-8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^0\times\frac{-8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^1\times...\times\frac{-8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\\&=\left(\frac{-8}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+...+n}\\&=\left(\frac{-8}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

التمـــــرين 27

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـالحد: $u_0=0$ وبالعبارة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-1)$.

1) أ) أحسب الحدود u_1 ، u_2

ب) خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم برهن هذا التخمين.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــــــــــــــــ: $v_n=2u_n+1$

أ- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n .

3) عين نهاية المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

4) أحسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

حل التمـــرين 27

1) أ) حساب الحدود u_1 ، u_2

$$\boxed{u_1=\frac{1}{3}(u_0-1)=\frac{1}{3}(0-1)=\frac{-1}{3}}\qquad\boxed{u_2=\frac{1}{3}(u_1-1)=\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}-1\right)=\frac{1}{3}\times\frac{-4}{3}=\frac{-4}{9}}$$

ب) تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

نلاحظ ان: $u_0\succ u_1\succ u_2$ ومنه: المتتالية (u_n) متناقصة

برهان هذا التخمين.

(u_n) متناقصة معناه: $u_{n+1}\prec u_n$ ، $u_0\succ u_1$ ومنه: الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض ان $u_{n+1}\le u_n$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$أي: $u_{n+2}\le u_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1}\le u_n$ ومنه: $\frac{1}{3}(u_{n+1}-1)\le\frac{1}{3}(u_n-1)$ ومنه: $u_{n+2}\prec u_{n+1}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا هي صحيحة من أجل n وبالتالي (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــــــــ: $v_n=2u_n+1$

أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

$v_{n+1}=2u_{n+1}+1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(2u_n+1)=\frac{1}{3}v_n$ ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=2u_0+1=1}$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n .

$\boxed{v_n=v_0\times q^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ ، لدينا: $u_n=\frac{1}{2}(v_n-1)$ ومنه: $\boxed{u_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]}$

3) تعيين نهاية المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟

$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]=-\frac{1}{2}}$ نستنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة

4) حساب المجموع:

$S_n=u_0+u_1+...+u_n$ تعني: $S_n=\frac{1}{2}(v_0-1)+\frac{1}{2}(v_1-1)+...+\frac{1}{2}(v_n-1)$

ومنه: $S_n=\frac{1}{2}\left[(v_0-1)+(v_1-1)+...+(v_n-1)\right]$ ومنه: $S_n=\frac{1}{2}\left[(v_0+v_1+...+v_n)+(-1-1-...-1)\right]$

ومنه: $S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}-(n+1)\right]$ ومنه: $S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]-(n+1)\right]$ إذا: $\boxed{S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-(n+1)\right]}$

التمـــــرين 28

امتلكت شركة نقل المسافرين 6000 حافلة في جانفي 2008، بفعل حوادث المرور وتعطل هذه الحافلات جعل 5% في كل سنة من هذه الحافلات غير قابلة للاستعمال وللحفاظ على معدات الشركة قرر المسؤول شراء 350 حافلة سنويا واضافتها الى الحافلات الموجودة.

نرمز بالرمز u_n الى عدد الحافلات **بالمئات** سنة $2008+n$

1) عين u_0 ثم أحسب u_1.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=0.95u_n+3.5$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: $v_n=70-u_n$

أ) أحسب v_0 و v_1.

ب) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها

ج) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n=70-10(0.95)^n$

4) ما هو عدد الحافلات سنة 2022 (تعطى النتيجة مدورة الى الوحدة)

5) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=0.5\times(0.95)^n$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)

الأستاذة : مباركي فاطمة مادة الرياضيات
ثانوية حميتو الحاج علي الشلالة ولاية البيض

Email : mebarki.math32@gmail.com

حل التمـــرين 28

1) تعيين u_0 ثم حساب u_1.

$\boxed{u_0 = 60}$ ، $\boxed{u_1 = 60\left(1-\frac{5}{100}\right)+3.5 = 60.5}$

2) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 0.95u_n + 3.5$

لدينا: $u_1 = u_0\left(1-\frac{5}{100}\right)+3.5$ ، $u_2 = u_1\left(1-\frac{5}{100}\right)+3.5$ ومنه: $u_{n+1} = u_n\left(1-\frac{5}{100}\right)+3.5$ إذا: $\boxed{u_{n+1} = 0.95u_n + 3.5}$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: $v_n = 70 - u_n$

أ) حساب v_0 و v_1.

$\boxed{v_0 = 70 - u_0 = 70 - 60 = 10}$ ، $\boxed{v_1 = 70 - u_1 = 70 - 60.5 = 9.5}$

ب) اثبات ان (v_n) هندسية وتعيين أساسها

$$v_{n+1} = 70 - u_{n+1} = 70 - 0.95u_n - 3.5 = 66.5 - 0.95u_n = 0.95(70 - u_n) = 0.95v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 0.95

ج) التعبير عن v_n بدلالة n ثم استنتاج أن: $u_n = 70 - 10(0.95)^n$

$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 10(0.95)^n}$ ، لدينا: $u_n = 70 - v_n$ أي: $\boxed{u_n = 70 - 10(0.95)^n}$

4) حساب عدد الحافلات سنة 2022 (تعطى النتيجة مدورة الى الوحدة)

$2008 + n = 2022$ تعني: $n = 2022 - 2008 = 14$ ومنه: $\boxed{u_8 = 70 - 10(0.95)^8 \cong 63}$

5) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 0.5 \times (0.95)^n$

$$u_{n+1} - u_n = 70 - 10(0.95)^{n+1} - 70 + 10(0.95)^n = 10(0.95)^n[-0.95+1] = \frac{1}{2}(0.95)^n$$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم حساب نهاية المتتالية (u_n)

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = 0.5 \times (0.95)^n \succ 0$ ومنه: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[70 - 10(0.95)^n\right] = 0$

التمـــــرين 29

في سنة 2005 بلغ سكان مدينة 100000 نسمة.

قدم مكتب دراسات دراسة توقيعية ابتداءا من 1 جانفي 2005

- عدد سكان هذه المدينة يتزايد كل سنة بـ: 5 % مع الأخذ بعين الاعتبار المواليد الجديدة والموتى.
- هناك 4000 مهاجر يمكنهم الإقامة كل سنة في هذه المدينة.
- من أجل كل عدد طبيعي n يرمز بـ u_n لعدد سكان هذه المدينة في 1 جانفي سنة $2005+n$ ونعلم أنّ $u_0 = 100000$

1) أحسب u_1 ، u_2

2) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 1.05u_n + 4000$

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 80000$

أ) أحسب v_0.

ب) بيّن أنّ (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ج) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج أنّ: $u_n = 180000 \times (1.05)^n - 80000$ وأحسب نهـاية المتتالية (u_n)

4) كم يصبح عدد سكان هذه المدينة في 1 جانفي 2020؟

5) في أي سنة سيصبح عدد سكان هذه المدينة يفوق 200000 نسمـــة؟

حل التمــرين 29

1) حساب u_1 ، u_2

$\boxed{u_1 = 100000\left(1+\frac{5}{100}\right)+4000 = 109000}$ ، $\boxed{u_1 = 109000\left(1+\frac{5}{100}\right)+4000 = 118450}$

2) تبرير أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 1.05u_n + 4000$

لدينا: $u_1 = u_0\left(1+\frac{5}{100}\right)+4000$ ، $u_2 = u_1\left(1+\frac{5}{100}\right)+4000$ ومنه: $u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{5}{100}\right)+4000$

إذا: $\boxed{u_{n+1} = 1.05u_n + 4000}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + 80000$

أ) حساب v_0 .

$$\boxed{v_0 = u_0 + 80000 = 100\,000 + 80000 = 180\,000}$$

ب) تبيان أنّ (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$v_{n+1} = u_{n+1} + 80000$ ومنه: $v_{n+1} = 1.05u_n + 4000 + 80000$ ومنه: $v_{n+1} = 1.05u_n + 84000$ ومنه:

$v_{n+1} = 1.05(u_n + 80\,000)$ اذا: $\boxed{v_{n+1} = 1.05v_n}$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{1.05}$ وحدها الأول $\boxed{180\,000}$

ج) التعبير عن v_n بدلالة n ثم استنتاج أنّ: $u_n = 180000 \times (1.05)^n - 80000$

$\boxed{v_n = 180\,000(1.05)^n}$ ، لدينا: $u_n = v_n - 80\,000$ تعني: $\boxed{u_n = 180\,000(1.05)^n - 80000}$

- حسب نهـاية المتتالية (u_n)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[180\,000(1.05)^n - 80000\right] = +\infty}$$

4) عدد سكان هذه المدينة في 1 جانفي 2020؟

$$\boxed{u_{15} = 180\,000(1.05)^{15} - 80000 = 294207}$$

5) في أي سنة سيصبح عدد سكان هذه المدينة يفوق 200000 نسمـــة؟

$u_n \succ 200000$ تعني: $180000 \times (1.05)^n - 80000 \succ 200000$ ومنه: $180000 \times (1.05)^n \succ 280000$ ومنه: $(1.05)^n \succ 1.55$

ومنه: $\ln(1.05)^n \succ \ln 1.55$ ومنه: $n\ln(1.05) \succ \ln 1.55$ ومنه: $n \succ \frac{\ln 1.55}{\ln(1.05)}$ ومنه: $n \succ 8.98$ أي: $n = 9$

إذا: سيصبح عدد سكان هذه المدينة يفوق 200000 نسمـــة ابتداءا من السنة $\boxed{2005 + 9 = 2014}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمــــرين 30

في 1 جانفي 2001 أودع زكريا رصيد 10000DA ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أنّ مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ 1500DA في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد). نرمز بـ u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$

1) عيّن u_0 ثم احسب u_1

2) كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003؟

3) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1.05u_n-1500$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-30000$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) ماهي نهاية المتتالية (u_n).

5) ابتداءا من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائنا؟

حل التمــرين 30

1) تعيين u_0 ثم احسب u_1

$\boxed{u_0=10000}$ $\boxed{u_1=10000\left(1+\frac{5}{100}\right)-1500=9000}$

2) رصيد زكرياء في أول جانفي 2003؟

$$\boxed{u_2=9000\left(1+\frac{5}{100}\right)-1500=7950}$$

3) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1.05u_n-1500$

لدينا: $u_1=u_0\left(1+\frac{5}{100}\right)-1500$ ، $u_2=u_1\left(1+\frac{5}{100}\right)-1500$ بالتعميم نجد: $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{5}{100}\right)-1500$

إذا: $\boxed{u_{n+1}=1.05u_n-1500}$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-30000$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1}=u_{n+1}-30000=1.05u_n-1500-30000=1.05u_n-31500=1.05(u_n-30000)=1.05v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها 1.05 وحدها الأول: $v_0=u_0-30000=10000-30000=-20000$

ب) نهاية المتتالية (u_n).

لدينا: $u_n=v_n+30000$ تعني: $u_n=-20000(1.05)^n+30000$ اذا: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-20000(1.05)^n+30000\right]=-\infty}$

5) ابتداءا من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائنا؟

$u_n\prec 0$ تعني: $-20000(1.05)^n+30000\prec 0$ ومنه: $-20000(1.05)^n\prec -30000$ ومنه: $(1.05)^n\succ\frac{-30000}{-20000}$

ومنه: $(1.05)^n\succ 1.5$ ومنه: $\ln(1.05)^n\succ\ln 1.5$ ومنه: $n\ln(1.05)\succ\ln 1.5$ ومنه: $n\succ\frac{\ln 1.5}{\ln(1.05)}$ ومنه: $n\succ 8.31$

إذا: يكون رصيد زكرياء دائنا ابتداء من $n=9$ أي: $\boxed{2001+9=2010}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 31

في أول جانفي 2020 أودع نبيل $10000DA$ ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 5% سنويا. بالإضافة إلى ذلك فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ $2000DA$. نرمز بِـ u_n إلى رصيد نبيل في أول جانفي من السنة 2020+n.

1) عين u_0 ثم احسب u_1 و u_2.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,05u_n+2000$.

3) بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n+40000$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 1,05 عين حدها الأول.

ب) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

ت) كم يكون رصيد نبيل في سنة 2030 ؟

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ و $S'_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$

- أحسب S_n بدلالة n ثم أستنتج S'_n بدلالة n

حل التمـــرين 31

1) تعيين u_0 ثم حساب u_1 و u_2.

$\boxed{u_0=10000}$ ، $\boxed{u_1=10000\left(1+\frac{5}{100}\right)+2000=12500}$ ، $\boxed{u_2=12500\left(1+\frac{5}{100}\right)+2000=15125}$

2) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,05u_n+2000$.

لدينا: $u_1=u_0\left(1+\frac{5}{100}\right)+2000$ ، $u_2=u_1\left(1+\frac{5}{100}\right)+2000$ بالتعميم نجد: $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{5}{100}\right)+2000$

إذا: $\boxed{u_{n+1}=1.05u_n+2000}$

3) تبيان أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

لدينا: $\begin{cases} u_1-u_0=12500-10000=2500 \\ u_2-u_1=15125-12500=2625 \end{cases}$ ومنه: $u_1-u_0\neq u_2-u_1$ إذا المتتالية (u_n) ليست حسابية

لدينا: $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0}=\frac{12500}{10000}=1.25 \\ \frac{u_2}{u_1}=\frac{15125}{12500}=1.21 \end{cases}$ ومنه: $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$ إذا المتتالية (u_n) ليست هندسية

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n+40000$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 1.05 عين حدها الأول.

$$v_{n+1}=u_{n+1}+40000=1,05u_n+2000+40000=1,05u_n+42000=1.05(u_n+40000)=1.05v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 1,05 وحدها الأول $\boxed{v_0=10000+40000=50000}$

ب) حساب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

$\boxed{v_n=50000(1.05)^n}$ ، لدينا: $u_n=v_n-40000$ ومنه: $\boxed{u_n=50000(1.05)^n-40000}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ت) كم يكون رصيد نبيل في سنة 2030 ؟

$2020+n=2030$ ومنه: دليل السنة 2030 هو $n=10$ إذا: $\boxed{u_{10}=50000(1.05)^{10}-40000=41444.73}$

رصيد نبيل في سنة 2030 هو $41444.73\ DA$

5) حساب S_n بدلالة n ثم استنتاج S'_n بدلالة n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ و $S'_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$

$$S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}$$
$$=50\ 000\times\frac{1-(1.05)^n}{1-1.05}$$
$$=50\ 000\times\frac{1-(1.05)^n}{-0.05}$$
$$=1\ 000\ 000\left[1-(1.05)^n\right]$$

$$S'_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$$
$$=v_0-40000+v_1-40000+...+v_{n-1}-40000$$
$$=(v_0+v_1+...+v_{n-1})+(-40000-...-40000)$$
$$=S_n-40000n$$
$$= \quad =1\ 000\ 000\left[1-(1.05)^n\right]-40000n$$

التمـــــرين 32

لـوحظ أن 80% من أعضاء جمعية يجددون انخراطهم سنويا كما أن 500 منخرط يضافون سنويا. نـــرمز بـ u_n لعدد المنخرطين بعدد مرور n سنة ونفرض أن $u_0=1000$.

1) عبّر عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=2500-u_n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=0.8v_n$ واذكر نوع المتتالية (v_n).

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3) بعد كم سنة يفوق عدد المنخرطين 2200؟

حل التمــرين 32

1) التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

$$\boxed{u_{n+1}=\frac{80}{100}u_n+500=0.8u_n+500}$$

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=2500-u_n$

أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=0.8v_n$ وذكر نوع المتتالية (v_n).

$$v_{n+1}=2500-u_{n+1}=2500-0.8u_n-500=2000-0.8u_n=0.8(2500-u_n)=0.8v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=0.8$ وحدها الأول: $\boxed{v_0=2500-u_0=2500-1000=1500}$

ب- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n.

$\boxed{v_n=1500(0.8)^n}$ ، لدينا: $u_n=2500-v_n$ ومنه: $\boxed{u_n=2500-1500(0.8)^n}$

3) بعد كم سنة يفوق عدد المنخرطين 2200؟

$u_n\succ 2200$ ومنه: $2500-1500(0.8)^n\succ 2200$ ومنه: $-1500(0.8)^n\succ 2200-2500$ ومنه: $-1500(0.8)^n\succ -300$

ومنه: $(0.8)^n\prec\frac{-300}{-1500}$ ومنه: $(0.8)^n\prec 0.2$ ومنه: $\ln(0.8)^n\prec\ln 0.2$ ومنه: $n\ln(0.8)\prec\ln 0.2$ ومنه: $n\succ\frac{\ln 0.2}{\ln(0.8)}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ومنه: $n \succ 7.21$ إذا: $\boxed{n=8}$ وعليه يفوق عدد المنخرطين 2200 منخرطا بعد 7 سنوات

التمــــرين 34

في سنة 2000 كان عدد سكان قرية 562 نسمة ولأسباب معينة بدأ يتقلص بنسبة 2% في كل سنة، نضع $u_0=526$ ، u_1 عدد السكان في سنة 2001 و u_n عدد السكان بعد n سنـــــة. (تعطى النتائج مدورة الى الوحدة)

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) أ- عبّر عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كل عدد طبيعي n

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n

3) ما هو عدد سكان القرية سنة 2009؟

4) ماهي السنة التي يصبح فيها عدد السكان أقل من النصف؟

5) أ) أحسب u_{310} و u_{311} .

ب) ابتداء من أي سنة تصبح القرية فارغة من السكان؟

حل التمــرين 34

1) حساب u_1 و u_2 .

$\boxed{u_0=526}$ ، $\boxed{u_1=526\left(1-\frac{2}{100}\right)=515}$ ، $\boxed{u_2=515\left(1-\frac{2}{100}\right)=505}$

2) أ- التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كل عدد طبيعي n

$\boxed{u_{n+1}=u_n\left(1-\frac{2}{100}\right)=0.98u_n}$ ومنه: (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.98 وحدها الأول $u_0=526$

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$\boxed{u_n=526(0.98)^n}$$

3) عدد سكان القرية سنة 2009

$$\boxed{u_9=526(0.98)^9=439}$$

4) السنة التي يصبح فيها عدد السكان أقل من النصف

تعني: $u_n \prec \frac{526}{2}$: $526(0.98)^n \prec 263$ ومنه: $(0.98)^n \prec \frac{263}{526}$ ومنه: $(0.98)^n \prec 0.5$ ومنه: $\ln(0.98)^n \prec \ln(0.5)$

ومنه: $\ln(0.98)^n \prec \ln(0.5)$ ومنه: $n\ln(0.98) \prec \ln(0.5)$ ومنه: $n \succ \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)}$ ومنه: $n \succ 34.3$ ومنه: $n=35$

إذا ابتداء من السنة 2035 يصبح فيها عدد السكان أقل من النصف

5) أ) حساب u_{310} و u_{311}

$\boxed{u_{310}=526(0.98)^{310}=1}$ $\boxed{u_n=526(0.98)^{311}=0}$

ب) ابتداء من أي سنة تصبح القرية فارغة من السكان؟

تصبح القرية فارغة من السكان بعد 311 سنة أي سنة 2311

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 35

بلغ أحد مستورد السيارات 100 زبون سنه 2020 لاحظ المستورد في السنة الموالية انه احتفظ بنسبه 40% من زبائنه واضيف إليهم بفضل الاشهار 630 زبون جديد.

نفرض ان تطور الزبائن يتواصل بنفس الكيفية السابقة خلال السنوات العشر الموالية

نرمز بـ u_n الى عدد الزبائن خلال السنة $2020+n$ حيث n عدد طبيعي.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 1050$

أ) أحسب v_0 ، v_1 ، v_2 ثم خمن طبيعة المتتالية.

ب) بيّن أنّ (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ج) عبر عن v_n بدلالة n. استنتج أن: $u_n = -50(0.4)^n + 1050$

4) ما هو عدد الزبائن المتوقع سنة 2029؟ يتم تدوير النتيجة الى الوحدة.

5) هل يمكن أن يبلغ عدد زبائن هذا المستورد في سنة ما 1100 زبون إذا تطور الزبائن بنفس المنوال

حل التمـــرين 35

1) حساب u_1 و u_2 .

$\boxed{u_1 = \frac{40}{100}u_0 + 60 = 0.4(100) + 630 = 670}$ ، $\boxed{u_2 = \frac{40}{100}u_1 + 60 = 0.4(670) + 630 = 898}$

2) التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n .

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{40}{100}u_n + 60 = 0.4u_n + 630}$$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 1050$

أ) حساب v_0 ، v_1 ، v_2

$\boxed{v_0 = u_0 - 1050 = 100 - 1050 = -950}$ ، $\boxed{v_1 = u_1 - 1050 = 670 - 1050 = -380}$ ، $\boxed{v_2 = u_2 - 1050 = -152}$

تخمين طبيعة المتتالية.

نلاحظ ان: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0} = 0.4$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 0.4$

ب) تبيان أنّ (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1050 = 0.4u_n + 630 - 1050 = 0.4u_n - 420 = 0.4(u_n - 1050) = 0.4v_n$$

ومنه (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 0.4}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = -950}$

ج) التعبير عن v_n بدلالة n واستنتاج أنّ: $u_n = -50(0.4)^n + 1050$

$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = -950(0.4)^n}$ ، لدينا: $u_n = v_n + 1050$ ومنه: $\boxed{u_n = -950(0.4)^n + 1050}$

4) عدد الزبائن المتوقع سنة 2029 هو: 1050

$$\boxed{u_9 = -950(0.4)^9 + 1050 = 1050}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

5) هل يمكن أن يبلغ عدد زبائن هذا المستورد في سنة ما 1100 زبون إذا تطور الزبائن بنفس المنوال

$u_n=1100$ تعني: $-950(0.4)^n+1050=1100$ ومنه: $-950(0.4)^n=1100-1050$ ومنه: $-950(0.4)^n=50$

ومنه: $(0.4)^n=\dfrac{50}{-950}$ ومنه: $(0.4)^n=-0.05$ وهذا غير ممكن (المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$)

إذا: لا يمكن أن يبلغ عدد زبائن هذا المستورد في سنة ما 1100 زبون إذا تطور الزبائن بنفس المنوال

التمـــــرين 36

اجتاح وباء كورونا-كوفيد-الجزائر سنة 2020 حيث في نهاية شهر مارس بلغ عدد المصابين 626 مصاب.

لاحظ الأطباء أن في نهاية كل شهر يزداد عدد المصابين بأربعة أضعاف عن الشهر السابق في حين بلغت عدد حالات الشفاء 1410 شخص. نرمز بـ u_n إلى عدد المصابين بالفيروس خلال نهاية كل شهر.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم بين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.

2) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=4u_n-1410$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=470-u_n$

أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

4) أ- ما هو عدد المصابين المتوقع خلال نهاية شهر سبتمبر 2020؟

ب- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ وفسر هذه النتيجة

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

حل التمـــرين 36

1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3

$\boxed{u_0=626}$ ، $\boxed{u_1=4\times626-1410=1094}$ ، $\boxed{u_2=4\times1094-1410=2966}$ ، $\boxed{u_3=4\times2966-1410=10454}$

تبين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

لدينا: $\begin{cases}u_2-u_1=2966-1094=1872\\ u_3-u_2=10454-2966=7488\end{cases}$ ومنه: $u_3-u_2\neq u_2-u_1$ إذا: (u_n) ليست حسابية

$\begin{cases}\dfrac{u_3}{u_2}=\dfrac{10454}{2966}=3.52\\ \dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{2966}{1094}=2.71\end{cases}$ ومنه: $\dfrac{u_3}{u_2}\neq\dfrac{u_2}{u_1}$ إذا: (u_n) ليست هندسية

2) تبين أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=4u_n-1410$

لدينا: $u_1=4u_0-1410$ ، $u_2=4u_1-1410$ ، $u_3=4u_2-1410$ ومنه: $\boxed{u_{n+1}=4u_n-1410}$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=470-u_n$

أ) تبين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا: $v_{n+1}=470-u_{n+1}$ ومنه: $v_{n+1}=470-4u_n+1410$ ولدينا: $u_n=470-v_n$ إذا: $v_{n+1}=470-1880+4v_n+1410$

ومنه: $v_{n+1}=4v_n$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $v_0=470-u_0=470-626=-156$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n.

$v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = -156 \times 4^n}$ ، $u_n = 470 - v_n$ ومنه: $\boxed{u_n = 470 + 156 \times 4^n}$

4) أ- عدد المصابين المتوقع خلال نهاية شهر سبتمبر 2020؟

رتبة 2020 هي 6: $\boxed{u_6 = 470 + 156 \times 4^6 = 639446}$

ب- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{x \to +\infty}\left(470 + 156 \times 4^n\right) = +\infty}$$

تفسير هذه النتيجة: المتتالية (u_n) متباعدة وعدد المصابين في تزايد مستمر.

5) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= 470 - v_1 + 470 - v_2 + \ldots + 470 - v_n \\ &= (470 + 470 + \ldots + 470) - (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) \\ &== 470n + 624 \times \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = 470n - 208\left(1 - 4^n\right) \end{aligned}$$

التمـــــرين 37

بلغ عدد سكان بلد مـا سنة 2000 ثلاثون مليون نسمة.

نفرض أنّ عدد السكان يرتفع سنويا بنسبة 1.5% وأنّ 0.045مليون شخص يغادرون هذا البلد سنويا بسبب الهجرة إلى الخارج نعتبر المليون هو الوحدة ونضع $u_0 = 30$ عدد السكان سنة 2000.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 1.015u_n - 0.045$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي: $v_n = u_n - 3$

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1.015$

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

4) كم يكون عدد سكان هذا البلد عام 2020؟

حل التمـــرين 37

1) حساب u_1 و u_2 .

$\boxed{u_1 = u_0\left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045 = 30 \times 1.015 - 0.045 = 30.405}$

$\boxed{u_2 = u_1\left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045 = 30.405 \times 1.015 - 0.045 = 30.816075}$

2) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 1.015u_n - 0.045$

لدينا: $u_1 = u_0\left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045$ ، $u_2 = u_1\left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045$ بالتعميم نجد: $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1.5}{100}\right) - 0.045$

إذا: $\boxed{u_{n+1} = 1.015u_n - 0.045}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي: $v_n = u_n - 3$

أ) تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1.015$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$ ومنه: $v_{n+1} = 1.015u_n - 0.045 - 3$ ومنه: $v_{n+1} = 1.015u_n - 3.045$ ومنه: $v_{n+1} = 1.015(u_n - 3)$

اذا: $v_{n+1} = 1.015\,v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 1.015}$ وحدها الأول: $\boxed{v_0 = u_0 - 3 = 27}$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n.

$\boxed{v_n = 27(1.015)^n}$ ، لدينا: $u_n = v_n + 3$ ومنه: $\boxed{u_n = 27(1.015)^n + 3}$

4) عدد سكان هذا البلد عام 2020 هو : 39.3651 مليون

$$\boxed{u_{20} = 27(1.015)^{20} + 3 = 39.3651}$$

التمـــــرين 38

لاحظ رئيس مركز رياضي أنه في كل سنة، المركز يحتفظ بـ75% من أعضاءه ويستقبل 800 عضوا جديدا.

في سنة 2005 أحصى هذا المركز الرياضي 1600 عضوا. نرمز بـ u_n إلى عدد الأعضاء في المركز في سنةn+ 2005 .

1) تحقق من أن: $u_1 = 2000$ ثم أحسب u_2

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 800$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $v_n = 3200 - u_n$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية. حدّد أساسها وحدّها الأول.

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

4) احسب مجموع أعضاء المركز الرياضي من سنة 2005 إلى سنة 2020

5) احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

حل التمـــرين 38

1) التحقق من أن: $u_1 = 2000$ ثم حساب u_2

$\boxed{u_1 = u_0 \times \frac{75}{100} + 800 = 1600 \times \frac{75}{100} + 800 = 2000}$ ، $\boxed{u_2 = u_1 \times \frac{75}{100} + 800 = 2000 \times \frac{75}{100} + 800 = 2300}$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 800$

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{75}{100}u_n + 800 = \frac{3}{4}u_n + 800}$$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $v_n = 3200 - u_n$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية وتحديد أساسها وحدّها الأول.

$$v_{n+1} = 3200 - u_{n+1} = 3200 - \frac{3}{4}u_n - 800 = 2400 - \frac{3}{4}u_n = \frac{3}{4}(3200 - u_n) = \frac{3}{4}v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\boxed{\frac{3}{4}}$ وحدها الأول: $\boxed{v_0 = 3200 - u_0 = 3200 - 1600 = 1600}$

ب) التعبير عن v_n ثم u_n بدلالة n .

$$\boxed{v_n = 1600\left(\frac{3}{4}\right)^n} \qquad \boxed{u_n = 3200 - 1600\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

4) حساب مجموع أعضاء المركز الرياضي من سنة 2005 إلى سنة 2020

$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{15}$ تعني: $S = 3200 - v_0 + 3200 - v_1 + \ldots + 3200 - v_{15}$

ومنه: $S = 3200 \times 16 - 1600 \times \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}{1-\frac{3}{4}}$ ومنه: $S = 51200 - 1600 \times 4 \times \left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{16}\right]$

ومنه: $S = 51200 - 6400\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{16}\right]$ إذا: $\boxed{S = 44864}$

5) حساب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 3200\,n - 6400\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}$$

التمـــــرين 39

بلغ عدد زبائن أحد المستودعات 1000 زبون خلال سنة 2000، انخفض عدد الزبائن بـ: 40 ٪ في السنة الموالية وأضيف إليهم 630 زبون جديد. نرمز إلى عدد الزبائن خلال السنة $2000+n$ بـ: u_n

1) أحسب u_0، u_1، u_2

2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n - 1050$

أ- أحسب v_0، v_1

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية.

ج- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n.

4) ما هو عدد الزبائن المتوقع خلال سنة 2016 (يعطى العدد مدور إلى الوحدة)

حل التمـــرين 39

1) حساب u_0، u_1، u_2

$$\boxed{u_1 = u_0\left(1-\frac{40}{100}\right)+630 = 1000\times 0.6 + 630 = 1230} \text{ ،} \quad \boxed{u_2 = u_1\left(1-\frac{40}{100}\right)+630 = 1230\times 0.6 + 630 = 1368}$$

2) التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n.

لدينا: $u_{n+1} = u_n\left(1-\dfrac{40}{100}\right)+630$ ومنه: $\boxed{u_{n+1} = 0.6\,u_n + 630}$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n - 1575$

أ) حساب v_0، v_1

$$\boxed{v_0 = u_0 - 1050 = 1000 - 1050 = -50} \text{ ،} \quad \boxed{v_1 = u_1 - 1050 = 1230 - 1050 = 180}$$

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية.

$$v_{n+1}=u_{n+1}-1050=0.6\,u_n+630-1575=0.6\,u_n-945=0.6(u_n-1575)=0.6v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.6

ج) التعبير عن v_n ثم u_n بدلالة n.

$$\boxed{v_n=-50(0.6)^n} \qquad \boxed{u_n=-50(0.6)^n+1575}$$

4) عدد الزبائن المتوقع خلال سنة 2016 (يعطى العدد مدور إلى الوحدة)

$$\boxed{u_{16}=-50(0.6)^{16}+1575=1575}$$

التمـــــرين 40

في أول جانفي 2005 بلغ عدد عمال إحدى المؤسسات 1500 عاملا. أثبتت دراسة انه خلال كل سنة من السنوات القادمة سيحال 10% من العمال على التقاعد وبهدف تعديل عدد عمالها مع احتياجاتها، توظف المؤسسة خلال السنة 100 شاب.

من اجل كل عدد طبيعي n، نرمز بـ u_n إلى عدد عمال المؤسسة في أول جانفي من السنة $2005+n$.

أجب بصحيح أول خاطئ مع تبرير جوابك في كل حالة:

1) في أول جانفي 2006 بلغ عدد عمال المؤسسة 1450 عاملا.
2) المتتالية (u_n) متتالية هندسية.
3) من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=0.9u_n+100$
4) من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) حيث: $v_n=u_n-1000$ متتالية هندسية.
5) من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=500(0.9)^n$
6) من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=500(0.9)^n-1000$
7) يرتفع عدد عمال المؤسسة من سنة لأخرى.
8) لن يقل أبدا عدد عمال المؤسسة عن 500.

حل التمـــرين 40

الإجابة بصح او خطا مع التبرير

1) صحيح لأن: $\boxed{u_1=u_0\left(1-\frac{10}{100}\right)+100=1500\times 0.9+100=1450}$

2) خطأ لأن: $\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_1}{u_0}$ ، $u_1=u_0\left(1-\frac{10}{100}\right)+100=1405$

3) صحيح لان: $u_{n+1}=u_n\left(1-\frac{10}{100}\right)+100=0.9u_n+100$

4) صحيح لان: $v_{n+1}=u_{n+1}-1000=0.9u_n-900=0.9\,(u_n-1000)=0.9\,v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها 0.9

وحدها الأول $v_0=u_0-1000=1500-1000=500$

5) صحيح لان: $v_n=v_0\times q^n=500(0.9)^n$

6) خطا لان: $u_n=v_n+1000=500(0.9)^n+1000$

Email : mebarki.math32@gmail.com

7) خطأ لان: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=500(0.9)^{n+1}+1000-500(0.9)^n-1000=500(0.9)^n(0.9-1)=-50(0.9)^n \prec 0$$

8) صحيح لان: $u_n \prec 500$ تعني: $500(0.9)^n+1000 \prec 500$ ومنه: $(0.9)^n \prec \frac{500-1000}{500}$ ومنه: $(0.9)^n \prec -1$ غير ممكن اذا لن يقل عدد العمال عن 500

تبرير اخر: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[500(0.9)^n+1000\right]=1000$

التمـــــرين 41

في أول سبتمبر 2014، بلغ عدد تلاميذ إحدى الثانويات 300 تلميذ وفي العام الموالي – اول سبتمبر 2015- لاحظ مدير الثانوية أن 75% من التلاميذ يواصلون دراستهم بالمؤسسة وكذلك يلتحق بها 150 تلميذ جديد.

بفرض أن تطور عدد التلاميذ يتواصل بنفس الكيفية في السنوات العشر القادمة.

نرمز لـ u_n إلى عدد التلاميذ سنة $2014+n$ حيث n عدد طبيعي.

1) أحسب u_1, u_2.

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_{n+1}=0.75u_n+150$.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-600=\frac{3}{4}(u_n-600)$

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــــــ: $v_n=u_n-600$

أ- بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب -عبر بدلالة n عن v_n و u_n

4) أحسب عدد تلاميذ هذه الثانوية المتوقع سنة 2017 وعدد بعد 10 سنوات.

حل التمـــرين 41

1) حساب u_1, u_2.

$\boxed{u_1=\frac{75}{100}u_0+150=0.75(300)+150=375}$ ، $\boxed{u_2=\frac{75}{100}u_1+150=0.75(375)+150=431}$

2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_{n+1}=0.75u_n+150$.

لدينا: $u_1=\frac{75}{100}u_0+150$ ، $u_2=\frac{75}{100}u_1+150$ بالتعميم نجد: $u_{n+1}=\frac{75}{100}u_n+150$ إذا: $\boxed{u_{n+1}=0.75u_n+150}$

ب- اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-600=\frac{3}{4}(u_n-600)$

$$\boxed{u_{n+1}-600=0.75u_n+150-600=0.75u_n-450=0.75(u_n-600)=\frac{3}{4}(u_n-600)}$$

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــــــ: $v_n=u_n-600$

أ- تبيان أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$v_{n+1}=u_{n+1}-600=\frac{3}{4}(u_n-600)=\frac{3}{4}v_n$ ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{\frac{3}{4}}$ وحدها الأول: $\boxed{v_0=u_0-600=-300}$

ب -التعبير بدلالة n عن v_n و u_n

$\boxed{v_n=-300\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ $\boxed{u_n=v_n+600=-300\left(\frac{3}{4}\right)^n+600}$

4) حساب عدد تلاميذ هذه الثانوية المتوقع سنة 2017 وعدد بعد 10 سنوات.

$\boxed{u_3=-300\left(\frac{3}{4}\right)^3+600=473}$ ، $\boxed{u_{10}=-300\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+600=583}$

إذا: عدد تلاميذ هذه الثانوية المتوقع سنة 2017 هو 473 تلميذ وبعد 10 سنوات 583 تلميذ

التمـــــرين 42

الجزء الأول

في سنة 1999 أنتج مصنع أحذية 20000 زوج من الأحذية من نوع A. ثم بدأ في تخفيض إنتاجه بـ 2500 زوج كل سنة حتى أصبح إنتاج النوع Aمنعدما. نسمي u_0 كمية الإنتاج في سنة 1999 و u_n كمية الإنتاج في سنة $1999+n$

1) بيّن أنّ $u_1=17500$ ثم أحسب u_2

2) بيّن أنّ (u_n) متتالية حسابية وعيّن أساسها ثم عبّر عن u_n بدلالة n.

3) في أي سنة انعدم إنتاج النوع A .

4) أحسب عدد أزواج الأحذية من النوع A التي أنتجت من سنة 1999 إلى سنة 2007.

الجزء الثاني

في سنة 1999 بدأ نفس المصنع في صناعة نوع جديد من الأحذية نرمز له بالرمز B، حيث بلغ إنتاج هذا النوع في هذه السنة 11000 زوج، وكمية الإنتاج لهذا النوع (النوع B) كان يزيد كل سنة بنسبة 8%. نسمي v_0 كمية الانتاج في السنة 1999 و v_n كمية الانتاج في السنة $1999+n$

1) بيّن أنّ $v_1=11880$ ، ثم أحسب v_2 (تدوّر النتائج الى الوحدة).

2) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها، عبّر عن v_n بدلالة n.

3) أحسب عدد أزواج الأحذية من النوع B التي أنتجت سنة 2007.

4) أحسب عدد أزواج الأحذية من النوع B التي أنتجت ابتداء من سنة 1999 إلى غاية 2007

حل التمـــرين 42

الجزء الأول

1) تبيان أنّ $u_1=17500$ ثم حساب u_2

$\boxed{u_1=20\,000-2500=17\,500}$ ، $\boxed{u_2=17\,500-2500=15\,000}$

2) تبيان أنّ (u_n) متتالية حسابية وأساسها

لدينا: $u_{n+1}=u_n-2500$ ومنه: $u_{n+1}-u_n=-2500$ إذا: (u_n) متتالية حسابية متتالية حسابية أساسها $\boxed{r=-2500}$

وحدها الأول: $\boxed{u_0=20\,000}$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التعبير عن u_n بدلالة n.

إذا: $u_n = u_0 + nr$ $\boxed{u_n = 20000 - 2500n}$

3) في أي سنة انعدم إنتاج النوع A .

$u_n = 0$ تعني: $20000 - 2500n = 0$ ومنه: $-2500n = -20000$ ومنه: $\boxed{n = \frac{-20000}{-2500} = 8}$

ومنه يصبح انتاج النوع A منعدما سنة: $1999 + 8 = 2007$

4) حساب عدد أزواج الأحذية من النوع A التي أنتجت من سنة 1999 إلى سنة 2007.

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = \frac{9}{2}(u_0 + u_8) = \frac{9}{2}(20000 + 0) = 90000}$$

الجزء الثاني

1) تبيان أنّ $v_1 = 11880$ ، ثم حساب v_2 (تدوّر النتائج الى الوحدة).

$\boxed{v_1 = v_0\left(1 + \frac{8}{100}\right) = 11000 \times 1.08 = 11880}$ ، $\boxed{v_2 = v_1 \times 1.08 = 11880 \times 1.08 = 12830}$

2) تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها

لدينا: $v_1 = v_0 \times 1.08$ و $v_2 = v_1 \times 1.08$ بالتعميم نجد: $v_{n+1} = v_n \times 1.08$ ومنه: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1.08$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 1.08}$ وحدها الأول: $\boxed{v_0 = 11000}$

- التعبير عن v_n بدلالة n.

$$\boxed{v_n = 11\,000(1.08)^n}$$

3) حساب عدد أزواج الأحذية من النوع B التي أنتجت سنة 2007.

$$\boxed{v_8 = 11\,000(1.08)^8 = 20360}$$

4) حساب عدد أزواج الأحذية من النوع B التي أنتجت ابتداءا من سنة 1999 إلى غاية 2007

$$\boxed{S = v_0 + v_1 + \ldots + v_8 = 11\,000 \times \frac{1-(1.08)^9}{1-1.08} = 11\,000 \times \frac{1-(1.08)^9}{-0.08} = 137363}$$

الأستاذة : مباركي فاطمة مادة الرياضيات
ثانوية حميتو الحاج علي الشلالة ولاية البيض

Email : mebarki.math32@gmail.com

18 تمرين مقترح

التمـــــرين 01

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ ، وبالعلاقة: $u_3 + u_6 + u_9 = 78$

1) أ) احسب الأساس r للمتتالية (u_n) .

ب) احسب الحد التاسع.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = 2 + 4n$

3) بين أن العدد (2010) هو حد من حدود (u_n) ثم حدد رتبته

4) احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 .... + u_{502}$

التمـــــرين 02

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول u_0 وأساسها r

1) علما أن: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ،عين u_1

2) علما أن: $2u_0 - 3u_1 = -10$ عين الحد الأول u_0 ،ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n)

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = -2 + 4n$

ب -عين قيمة n حتى يكون: $u_n = 2018$

ج -أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n)

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمـــــرين 03

I. (u_n) متتالية حسابية معرفة بالحدين: $u_9 = 22$ ، $u_{11} = 28$

1) عين أساس المتتالية (u_n) ثم استنتج اتجاه تغيرها.

2) اوجد قيمة الحد الأول u_0 ثم اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

3) هل العدد 6067 حد من حدود (u_n) ؟ ما رتبته؟

4) احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

II. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4 \times 6^n$

1) أثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) بين ان: $v_{n+1} - v_n = 20 \times 6^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

3) احسب المجموع: $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 04

لتكن المتتالية (v_n) هندسية حدودها موجبة تماما وهي معرفة على $\mathbb{N}$ بحيث: $v_1 \times v_2 \times v_3 = \frac{27}{64}$ و $v_1 - v_3 = \frac{7}{16}$

1) احسب الحد v_2 ثم الأساس q لهذه المتتالية واكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n

2) نعتبر المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{-2}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$

أ) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

ب) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ -2$

ت) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها

3) نضع $w_n = u_n - v_n$

أ) اثبت أنه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = -2$

ب) اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

ت) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \ldots + \frac{u_n}{v_n}$

التمـــــرين 05

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 \end{cases}$

1) أحسب v_1, v_2, v_3 و r أساس المتتالية.

2) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2}n$

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

4) (u_n) متتالية عددية حيث: $u_n = 2v_n$

أ- أحسب u_1, u_2, u_3

ب- أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

التمـــــرين 06

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدها الأول u_0 وأساسها r معرفة بـ: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1^2 + u_3^2 = 68 \end{cases}$

1) أ- أحسب الحد u_2 ثم الأساس r واستنتج قيمة u_0.

ب- تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n = -1 + 3n$

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم حدد رتبة الحد الذي قيمته 2021.

Email : mebarki.math32@gmail.com

3) أحسب المجموع: $S = u_2 + u_3 + \ldots + u_{674}$

4) نعتبر (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{u_n}$

أ- أثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أحسب المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

التمــــرين 07

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

1) أحسب كل من u_1, u_2 .

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $u_n \succ \frac{2}{3}$.

ب) برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ت) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ) بين أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب v_n ، ثم u_n بدلالة n .

ت) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ثم استنتج المجموع T_n حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

التمــــرين 08

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: بـ: $u_0 + u_1 = 6$ و $u_0 \times u_2 = 16$

1) أحسب u_1 ، u_0 والأساس q لهذه المتتالية

2) بين أن من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2^{n+1}$

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n + 3n$

أ- أحسب v_0 ، v_1 ، v_2

ب- أحسب بدلالة n المجموع: $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Email : mebarki.math32@gmail.com

التمـــــرين 09

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بــ: $u_2-5u_3+4u_4=-9$ و $u_2+u_3+u_4=-39$

1) عين u_3 ثم الأساس r والحد الأول u_0 .

2) أ- تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=-4-3n$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) أ- احسب الحد العشرون لهذه المتتالية.

ب- هل العدد (6070-) حد من حدود (u_n)؟ ما رتبته؟

4) أحسب المجموع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ ثم استنتج $S_{2022}=u_1+u_2+...+u_{2022}$

التمـــــرين 10

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$

1) برهن بالتراجع أنه ومن اجل كل عدد طبيعي n أن : $1\leq u_n \prec 4$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم

- عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

4) نضع $\alpha=-4$

- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=\frac{1}{u_0-4}+\frac{1}{u_1-4}+....+\frac{1}{u_n-4}$.

التمـــــرين 11

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=eu_n-e$ (يرمز العدد e إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أ) أُحسب u_1 و u_2

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<\frac{e}{e-1}$

ج) أُدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

Email : mebarki.math32@gmail.com

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{e}{e-1}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e يُطلب حساب حدّها الأول v_0

ب) أُكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ وَ $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

4) أُحسب S_n بدلالة n، ثمّ استنتج T_n بدلالة n

التمـــــرين 12

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــحدها الأول u_0 حيث: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

ج-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 5$.

أ- أحسب v_0 ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n.

ب- بين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{5}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

أ-أحسب بدلالة n عبارة S_n.

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $S'_n = 5n - 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

التمـــــرين 13

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}$

- حدد اتجاه تغير الدالة f ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = x$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + \frac{4}{9}$

أ) أحسب u_1 ثم عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n \geq 2$

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وَحدها الأول v_0

Email : mebarki.math32@gmail.com

ب) أُكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n، ثمّ استنتج أنّ: $u_n = 2\left(\frac{7}{9}\right)^n + 2$

ج) أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع من أجلّ كل عدد طبيعي n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

بيّن أنّ: $S_n = 2n + 11 - 9\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}$

التمــــرين 14

لتكن (u_n) متتالية معرفة على بِـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4u_{n+1} - 2u_n = 9$.

ولتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 9$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 .

2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

4) أحسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + ... + v_n$ ثمّ استنتج بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمــــرين 15

(u_n) هي المتتالية المعرفة بِـ $u_0 = \frac{1}{6}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بِـ: $v_n = 2u_n + \frac{5}{3}$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 و v_2 .

2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ـ أحسب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث: $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $t_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمــــرين 16

a عدد حقيقي كيفي. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بِـ $u_0 = a$ و $u_{n+1} = 2,5u_n - 1,5$ بين أنه:

أ ـ إذا كان $a = 0$ فإن المتتالية (u_n) تكون متناقصة.

ب ـ إذا كان $a = 1$ فإن المتتالية (u_n) تكون ثابتة.

ج ـ إذا كان $a = 2$ فإن المتتالية (u_n) تكون متزايدة.

التمرين 17

في 1 جانفي 2023 أودع مراد 20000 دج ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 6% سنويا، بالإضافة إلى ذلك فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ 3000 دج.

نرمز بـ u_n إلى رصيد مراد في أول جانفي من السنة $2023+n$.

1) عين u_0, u_1 و u_2 .

2) تحقق أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1{,}06u_n+3000$.

3) بين أنّ (u_n) متتالية ليست حسابية وليست هندسية.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+50000$.

أ) بين أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 1,06 ، عين حدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ت) كم يكون رصيد مراد في سنة 2030؟

التمرين 18

بلغ عدد الأساتذة المصابين بانهيارات عصبية حادة 50000 أستاذ خلال سنة 2017. لوحظ في السنة الموالية أنه ارتفع العدد بنسبة 20% من الأساتذة المرضى وأضيف إليهم بسبب ارتفاع الأسعار وغلاء المعيشة 6000 أستاذ جديد.

- نفرض أن تطور عدد الأساتذة المرضى يتواصل بنفس الكيفية السابقة خلال السنوات العشر الموالية.

نرمز بـ: u_n إلى عدد الأساتذة المصابين بانهيارات عصبية حادة خلال السنة $2017+n$ ، حيث n عدد طبيعي.

1) ما هو عدد الأساتذة الذين أصيبوا بانهيارات عصبية حادة خلال السنتين: 2018 و2019؟

2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n+30000$

أ) أحسب v_0 , v_1 , v_2 ثم خمن طبيعة المتتالية (v_n)

ب) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها

ج) عبر بدلالة n عن v_n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

د) ما هو عدد الأساتذة الذين سيصابون بانهيارات عصبية حادة المتوقع خلال سنة 2025؟ (تدور النتيجة إلى الوحدة)

Email : mebarki.math32@gmail.com

تم بحمد الله وشكره ان اصبنا فمن الله

وان أخطأنا فمن أنفسنا والشيطان

أي خطأ نبهونا لتصحيحه

https://www.facebook.com/mebarki.fatima32

mebarki.math32@gmail.com

t.me/mebarki_math