ملخص +تمارين

محور

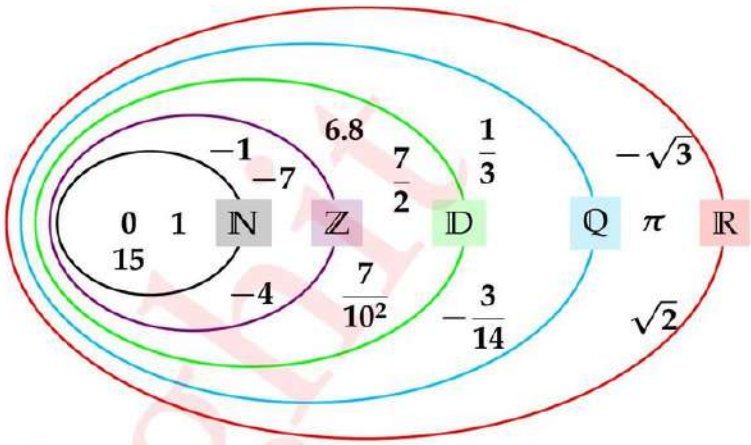
الأعداد والحساب

السنة أولى ثانوي

الأستاذ: بلغيث عبد الله

الجزء الأول-الأعداد والحساب

مقارنة مجموعات الأعداد



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

الانتقال من الكتابة العشرية الدورية إلى الكتابة الكسرية

$A = 3.\underline{245}...$

نكتب العدد على شكل مجموع جزئيه الصحيح والعشري

نفرض x الجزء العشري لهذا العدد

أي $A = 3 + 0.\underbrace{245245..}_{x}$

$$A = 3 + x \cdots\cdots (1)$$

نضرب x في 10^n حيث n عدد أرقام الدور

$10^3 x = 0.245245... \times 10^3$ أي $10^3 x = 245.245245...$

نكتب العدد $10^n x$ كمجموع لجزأيه الصحيح والعشري

$1000x = 245 + \underbrace{0.245245...}_{x}$ أي $1000x = 245 + x$

نحصل على معادلة ذات المجهول x

أي $1000x - x = 245$

نقوم بحل المعادلة المتحصل عليها فنجد : $x = \frac{245}{999}$

نعوّض قيمة x في العبارة (1) فنجد

$$A = 3 + \frac{245}{999}$$

نوحد المقامات فنتحصل على العدد الناطق مكتوبا على شكل كسر

$$A = \frac{3242}{999}$$

طريقة إنشاء عدد ناطق

لإنشاء عدد ناطق $\frac{p}{q}$ يمكن ان نستعمل نظرية طالس ونتبع الخطوات التالية:

1. نرسم (d) مستقيم مزود بمعلم $(O;I)$ ، ثم نعين نقطة J تقع خارج (d)
2. نعلم على المستقيم (OJ) النقطتين C و D فاصلتيهما p و q على الترتيب
3. نرسم المستقيم (CM) الذي يوازي المستقيم (DI)، بتطبيق نظرية طالس نجد $\frac{OM}{OI} = \frac{OC}{OD}$

ولدينا : $OI = 1$ و $OD = q$ و $OC = p$ إذن نتحصل على

$$OM = \frac{p}{q}$$

طريقة إنشاء عدد أصم

لإنشاء عدد أصم $\sqrt{x}$ يمكن أن نتبع الخطوات التالية:

1. نرسم (d) مستقيم مزود بمعلم $(O;I)$
2. نعين النقطة D من المستقيم (d) ذات الفاصلة $x+1$
3. نرسم الدائرة (C) ذات القطر $[OD]$ والمركز M
4. نرسم المستقيم (d') العمودي على (OD) في I ، لتكن A إحدى نقط تقاطع الدائرة (C) و (d')

ومنه حسب نظرية فيتاغورث لدينا :

$$(AM)^2 = (IM)^2 + (IA)^2$$

أي

$$(IA)^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$

إذن $IA = \sqrt{x}$ وباستعمال المدور ننقل الطول IA على المحور (d)

البرهان بالخلف

للبرهنة على ان العبارة P صحيحة (في بعض الحالات)، نفرض أنها خاطئة وبإجراء جملة من العمليات سنصل الى تناقض.

الجزء الأول-الأعداد والحساب

تمرين 1

ضع مكان الفراغ الرمز المناسب : $\in, \notin, \subset, \not\subset$

$\mathbb{Q} \cdots\cdots \mathbb{Z}$ ؛ $\mathbb{R}^+ \cdots\cdots \mathbb{R}$ ؛ $\mathbb{R} \cdots\cdots \mathbb{R}^-$

$\frac{2}{3} \cdots\cdots \mathbb{D}$ ، $\mathbb{Z} \cdots\cdots \mathbb{R}$ ، $\Pi \cdots\cdots \mathbb{Q}$

$-7 \cdots\cdots \mathbb{N}$ ، $\mathbb{N} \cdots\cdots \mathbb{D}$ ، $\sqrt{2} \cdots\cdots \mathbb{R}$

$2,10 \cdots\cdots \mathbb{Q}$ ، $\frac{3}{10} \cdots\cdots \mathbb{D}$

تمرين 2

ضع علامة $(\times)$ في الخانة المناسبة.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
6					
$5,14$					
$\frac{2}{5}$					
$\sqrt{3}$					
$-\sqrt{64}$					
$\frac{1}{3}$					

تمرين 3

1 من بين الأعداد التالية عين الأعداد التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

$\sqrt{49}$ ، $-\sqrt{16}$ ، 8^2 ، $3\sqrt{4}$ ، $\frac{10}{2}$ ، $2\sqrt{5}$

2 من بين الأعداد التالية عين الأعداد التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$:

$\sqrt{2,12}$ ، $-\sqrt{0,01}$ ، 7 ، $-9,3$ ، $\frac{5}{2}$ ، $2\sqrt{25}$

3 من بين الأعداد التالية عين الأعداد التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$: $\sqrt{0,72}$ ، $-\sqrt{0,01}$ ، -1 ، $\sqrt{36}$ ، $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ، 2π

4 من بين الأعداد التالية عين الأعداد الناطقة غير العشرية

$\sqrt{0,49}$ ، $\frac{11}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ، $-\sqrt{4}$ ، $\frac{1}{7}$

تمرين 4

درست العديد من مجموعات الأعداد أذكرها مع تعريف مختصر ومضبوط لكل منها ، وفي مخطط مثل العلاقة بين هذه المجموعات وترجم هذه العلاقة رياضياتيا .

تمرين 5

أنشئ الاعداد الناطقة والصماء التالية مع شرح خطوات الإنشاء :

1 $\frac{5}{7}$ ؛ $\frac{2}{5}$ ، $\frac{7}{3}$ ، $-\frac{6}{2}$.

2 $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{7}$.

تمرين 6

جد الكتابة الكسرية للأعداد التالية :

1 $A = 3.\underline{5}...$

2 $A = 6.\underline{23}...$

3 $A = 15.\underline{245}...$

4 $A = 17.\underline{6531}...$

تمرين 7

برهن أن الأعداد التالية اعداد صماء .

1 $\sqrt{2}$

2 $\sqrt{3}$

3 $\sqrt{5}$

B-A
Math-Belghit
2024

Math-Belghit

الجزء الثاني-الأعداد والحساب

1 الأعداد الأولية

تعريف

نسمي عددا أوليا كل عدد طبيعي يقبل، بالضبط، قاسمين مختلفين هما : 1 والعدد نفسه .

أمثلة

- الاعداد 2 ،3 ، 5، 7 ، 11 ، 13 هي أعداد أولية.
- العدد 9 ليس أوليا لأنه يقبل أكثر من قاسمين (1 ،3 ، 9)

ملاحظة

- ❖ العدد 1 ليس أوليا لأنه يقبل قاسما واحدا فقط .
- ❖ العدد 0 ليس أوليا لأنه لا يقسم نفسه .
- ❖ العدد 2 العدد الزوجي الوحيد الأولي .

إختبار أولية العدد الطبيعي

طريقة

☜ نختبر قابلية قسمة العدد على كلّ من الأعداد الأولية حسب ترتيبها التصاعدي .

☜ نتوقف عن عمليات القسمة عند أوّل باق معدوم أو عندما نصادف أوّل حاصل قسمة أصغر من المقسوم عليه .

☜ نستخلص : إذا صادفنا الباقي المعدوم يكون العدد غير أولي وإلاّ فهو أولي .

مثال

هل العـدد 51 أولـي ؟

نختبر إن كان العدد يقبل القسمة على الأعداد الأولية حسب ترتيبها في قائمة الأعداد الأولية الأولى:

هل يقبل القسمة على	2	3	5	7
	لا	لا	لا	لا

2 تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل اولية

مبرهنة كل عدد طبيعي غير أولي اكبر من (2) يمكن كتابته على شكل جداء عوامل أولية.

طريقة

❶ قسم العددالمعطى على أصغر عدد أولي يكون قاسما له.

❷ قسم حاصل القسمة على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له

❸ كرّر عمليات القسمة حتى يكون الحاصل يساوي (1)

مثال: تحليل إلى جداء عوامل أولية العدد (84)

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

ومنه نجد $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

عدد قواسم عدد طبيعي

A عدد طبيعي غير اولي أكبر من 2 تحليله إلى جداء عوامل اولية هو من الشكل : $A = a_1^{n_1} \times a_2^{n_2} \times a_3^{n_3} \times ... \times a_k^{n_k}$

☜ عدد قواسم العدد الطبيعي هو

$$(n_1+1) \times (n_2+1) \times (n_3+1) \times ... \times (n_k+1)$$

استعمالات التحليل إلى جداء عوامل أولية

❶ يستعمل لتعيين الشكل غير القابل للإختزال للكسر وذلك بتحليل كل من بسطه ومقامه إلى جداء عوامل أولية ثم نطبق قواعد الحساب على القوى لاختزال الكسر.

❷ إيجاد عدد قواسم عدد طبيعي ما

❸ إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين $PGCD$، وذلك بحساب جداء كل العوامل المشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس

❹ إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين $PPCM$، وذلك بحساب جداء كل العوامل المشتركة وغير المشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأكبر أس

مثال تطبيقي: حلل العددين 48 و 154 الى جداء عوامل أولية

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

ومنه: $48 = 2^4 \times 3$

B-A
Math-Belghit
2024

$$\begin{array}{r|l} 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

ومنه: $154 = 2 \times 7 \times 11$

إذن :

❶ $\frac{154}{48} = \frac{2 \times 7 \times 11}{2^4 \times 3} = \frac{7 \times 11}{2^3 \times 3} = \frac{77}{24}$

❷ عدد قواسم العدد 154 هو : $(1+1)(1+1)(1+1) = 8$

❸ عدد قواسم العدد 48 هو : $(4+1)(1+1) = 10$

❹ القاسم المشترك الأكبر للعددين 48 و 154 هو:
$PGCD(154;48) = 2$

❺ المضاعف المشترك الأصغر للعدين 48 و 154 هو:
$PGCD(154;48) = 2^4 \times 3 \times 7 \times 11 = 3696$

3 الحساب على القوى

القوى الصحيحة

تعريف: a عدد حقيقي كيفي ، و n عدد طبيعي غير معدوم.
نسمي القوة ذات الرتبة n للعدد الحقيقي a العدد (a^n) حيث

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{عاملا n}}$$

★ من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم و nعدد طبيعي غير معدوم لدينا : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

★ من أجل كل عدد حقيقي a لدينا : $a^1 = a$

خواص: a و b عددان حقيقيان غير معدومين ، mو n عددان صحيحان نسبيان

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \ , \ (a^m)^n = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ , \ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$
$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

حالات خاصة:

① إذا كان n زوجيا فإن $(-1)^n = 1$

② إذا كان n فرديا فإن $(-1)^n = -1$

③ من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم و nعدد طبيعي غير معدوم لدينا: $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$

4 الحساب على الجذور التربيعية

تعريف: a عدد حقيقي موجب.
نسمي الجذر التربيعي للعدد الحقيقي a العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه يساوي a ونرمز له بالرمز $\sqrt{a}$

خواص: a و b عددان حقيقيان موجبان و b غير معدوم

$$\sqrt{a} \geq 0 \ , \ (\sqrt{a})^2 = a \ , \ \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ , \ \sqrt{a^2} = a$$

طريقة الضرب في المرافق:

① إذا كان المقام من الشكل $\sqrt{a}$ أو$-\sqrt{a}$ ، نضرب كلا من البسط و المقام في $-\sqrt{a}$ أو $\sqrt{a}$ على الترتيب.

② إذا كان المقام من الشكل $a+\sqrt{b}$ أو $a-\sqrt{b}$، نضرب كلا من البسط و المقام في$a-\sqrt{b}$ أو $a+\sqrt{b}$ على الترتيب

③ ذا كان المقام من الشكل $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ أو$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ، نضرب كلا من البسط و المقام في$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ أو $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. على الترتيب

المطابقات الشهيرة:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Math Belghit

تمرين 5

n عدد طبيعي غير معدوم

1 بين أن : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.

2 إستنتج ابسط قيمة ممكنة للمجموع S التالي :

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{2023\times 2024}$$

تمرين 6

x عدد حقيقي غير معدوم

1 بين أن مقلوب العدد $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ هو العدد $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

2 إستنتج ابسط قيمة ممكنة للمجموع S التالي :

$$S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

3 العدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ يسمى العدد الذهبي نرمز له بالرمز φ

أ) أحسب $1-\varphi$ و $\frac{1}{\varphi}$ ،ثم قارن بين النتيجتين المحصل عليهما .

ب) إستنتج أن φ هو حل للمعادلة : $x^2=x+1$ ثم إستنتج φ^2 .

تمرين 7

إذا كان α عدد حقيقي غير معدوم يحقق :

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{5}$$

◄ أثبت أن $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$ عدد طبيعي .

تمرين 8

إذا كان α عدد حقيقي غير معدوم يحقق :

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}=1$$

1 أثبت أن : $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{5}$

2 أستنتج أن : $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

تمرين 9

ليكن a وb عددان حيث : $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و

$$b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1 احسب ab و $a+b$.

2 أستنتج قيمة كل من : a^2+b^2 و a^4+b^4 .

3 بين أن : $a^2=a+1$ و $a^3=2a+1$.

السلسلة الثانية -الأعداد والحساب

تمرين 1

1 عين الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية : 117 ; 59 ; 307 ; 357

2 حلل الأعداد التالية إلى جداء عوامل اولية : 42 ; 2024 ; 1962 ; 310

تمرين 2

1 بسط الأعداد التالية ، ثم أذكر طبيعة كل منها :

$\left(\sqrt{\sqrt{11}}\right)^4$ ، $\frac{2\pi+4}{3\pi+6}$ ، $\sqrt{\sqrt{3^8}}$

$\sqrt{5-2\sqrt{6}}\times\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$(2^3\times 3^{-2})^{-2}\times 3^{-2}\times 2^4$

$\frac{(-2)^6\times 15^3\times(-3)^6}{64\times 10^4\times 27^3}$

$\sqrt{6-\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{300}}}}$

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

2 نعتبر العددين الحقيقيين : $x=6-3\sqrt{5}$ و

$y=\sqrt{81-36\sqrt{5}}$

أحسب كلا من x^2 و y^2 ثم استنتج علاقة بين x و y.

3 ليكن a عدد حقيقي حيث $a\geq 0$.
قارن بين العددين $\sqrt{a+1}$ و $1+\frac{a}{2}$ ثم استنتج مقارنة بين العددين $\sqrt{\sqrt{2}+2}$ و $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

تمرين 3

ليكن العددين الطبيعين a و b حيث : $a=126$ و $b=396$.

1 حلل كلا من a و b إلى جداء عوامل أولية ، وأوجد عدد قواسم كل منهما .

2 اختزل الكسر $\frac{b}{a}$.

3 أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

4 أحسب المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ، ثم أحسب الفرق $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$.

تمرين 4

1 جد الكتابة الكسرية للعدد 12.74565656.... .

2 هل العدد 103 عدد أولي .

ليكن C و D عددان طبيعيان حيث : $C=1125$ و $D=540$.

1 حلل العددين C و D إلى جداء عوامل أولية.

2 باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية :

أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين C و D.

ب) عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين C و D.

ج) اكتب الكسر $\frac{540}{1125}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

د) عين الكتابة المختصرة لـ $\sqrt{C}$ و $\sqrt{D}$.

Math-Belghit

مدور عدد حقيقي

A عدد حقيقي مكتوب في شكله العشري ، وليكن d رقمه العشري ذو الرتبة $p+1$.

نسمي مدور A إلى 10^{-p} العدد الذي نحصل عليه كما يلي:

- إذا كان $d \geq 5$ نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p، ونضيف 1 إلى هذا الرقم
- إذا كان $d < 5$ نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p .

أمثلة:

1. مدور العدد الحقيقي 3.1235 إلى 10^{-3} هو 3.124
2. مدور العدد الحقيقي 3.1235 إلى 10^{-2} هو 3.12

الكتابة العلمية

كتابة عدد عشري على الشكل العلمي، يعني التعبير عنه على الشكل $a \times 10^n$ (أو $-a \times 10^n$) حيث a عدد عشري يحقق $1 \leqslant a < 10$ و n عدد صحيح نسبي .

أمثلة:

العـــدد	الكتابة العلمية	إزاحة الفاصلة
352 000 000	$3,52 \times 10^8$	8 مراتب نحو اليسار
$-0,00000075$	$-7,5 \times 10^{-7}$	7 مراتب نحو اليمين

ملاحظة: الكتابة $32.1 \times 10^{-5} = 0.000321$ ليست بكتابة علمية لأن $32.1 > 10$

رتبة مقدار عدد

رتبة مقدار عدد عشري مكتوب على الشكل العلمي هو العدد $k \times 10^n$ (أو $-k \times 10^n$) حيث k هو مدور العدد a إلى الوحدة.

طريقة إيجاد رتبة مقدار عدد

لإيجاد رتبة مقدار عدد:

- نكتب العدد على الشكل العلمي.
- ندور العدد العشري في كتابته العلمية إلى العدد الصحيح الأقرب منه ونحتفظ بقوة 10

أمثلة:

1. رتبة مقدار العدد $9,2 \times 10^{12}$ هـــي 9×10^{12}
2. رتبة مقدار العدد $-5,7 \times 10^7$ هـــي -6×10^7

ملاحظة: لإيجاد رتبة مقدار جداء عددين أو حاصل قسمتهما، نحسب أولا رتبة مقدار كل عدد ثم نحسب رتبة مقدار الناتج

تطبيقات

تمرين 1

عين مدور الأعداد التالية إلى 10^{-2} و 10^{-3} .

1. $A = 2.35460$
2. $B = -32.54711$

تمرين 2

اكتب الاعداد التالية على الشكل العلمي ثم اعط رتبة مقدار كل منها :

1. $A = 3458730$
2. $B = 0,00000456$
3. $C = 8562,2365$
4. $D = -3365,235 \times 10^4$

تمرين 3

x و y عددان معرفان كمايلي :

$x = 0.00005734$ و $y = 245365,62$

1. اكتب كل من x و y على الشكل العلمي .
2. حدد رتبة مقدار كل من x و y .
3. استنتج رتبة مقدار كل من $x \times y$ و $\frac{x}{y}$.

دروس - سلاسل - تمارين - فروض
B-A
Math-Belghit
2024

1 المقارنة و الترتيب في $\mathbb{R}$

تعريف

a و b عددان حقيقيان
القول أن a أكبر من أو يساوي b معناه : $a-b$ عدد موجب و نكتب $a \geq b$.

مـــلاحظات

- ⋆ $a \geq b$ معناه $a-b \geq 0$
- ⋆ $a \leq b$ معناه $a-b \leq 0$ و معناه $b-a \geq 0$
- ⋆ العبارة $a > b$ تقرء: a أكبر من b و تعني $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$ أي $a-b > 0$
- ⋆ العبارة $a < b$ تقرء: a أصغر من b و تعني $(a-b) \in \mathbb{R}_-^*$ أي $a-b < 0$
- ⋆ إذا كان : $a > 0$ و $b < 0$ فإن : $a > b$ و العكس غير صحيح .

مثال

لنبين أن : $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 > 2\sqrt{6}$
لدينا :

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$$

$$= 3+2+2\sqrt{6}-2\sqrt{6} = 5$$

بماأن 5 موجب تماما فإن :

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} > 0$$

معناه :

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 > 2\sqrt{6}$$

تعريف

مقارنة عددين a و b معناه التصريح بإحدى الحالات التالية :

$$a = b \qquad a > b \qquad a < b$$

مبرهنة

ليكن a , b , c، أعداد حقيقية ،إذا كان [$a \leq b$ و $b \leq c$] فإن $a \leq c$

مثال

لدينا : $2 < 3$ و $3 < 5$ إذن : $2 < 5$

2 الترتيب و الجمع

مبرهنة

لتكن a ، b و c أعداد حقيقية ، إذا كان $a \leq b$ فإن :
$a+c \leq b+c$

مثال

إذا كان $a-3 \leq b+2$ فإن $a-3+3 \leq b+2+3$ وهذا يعني أن $a \leq b+5$

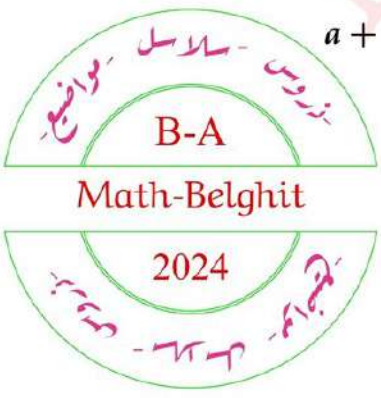
مبرهنة

ليكن a,b,c,d أعداد حقيقية إذا كان : $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن : $a+c \leq b+d$

مثال

$$\begin{cases} a \leq 5 \\ b \leq -3 \end{cases} \longleftarrow \text{أجمع طرف لطرف} \longrightarrow$$

$$a+b \leq 2$$



3 الترتيب و الضرب

مبرهنة

ليكن a, b, c, d احداد حقيقية
* من أجل $c > 0$ لدينا : $a \leq b$ فإن $ac \leq bc$
* من أجل $c < 0$ لدينا : $a \leq b$ فإن $ac \geq bc$

مثال

$0,02 \leq 0,03$ ⟵ أضرب في 100 ⟵ $2 \leq 3$

$2 < 5$ ⟵ أضرب في -3 ⟵ $-15 < -6$.

مبرهنة

ليكن a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تماما ، إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ ، فإن : $ac \leq bd$.

مثال

$a \leq 5$ و $b \leq 2$ ⟵ أظرب طرفا بطرف ⟵

$ab \leq 10$

4 المتباينات و التربيع

دروس - سلاسل - مواضيع
B-A
Math-Belghit
2024

مبرهنة

a و b عددان حقيقيان موجبان .
* من أجل $a \geq 0$ و $b \geq 0$ لدينا : $a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$
* من أجل $a \leq 0$ و $b \leq 0$ لدينا : $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$

مثال

* لدينا : $3 < 5$ ومنه : $9 < 25$
* لدينا : $-4 < -2$ ومنه : $16 > 4$

5 المتباينات و الجذر

مبرهنة

a و b عددان حقيقيان موجبان
لدينا : $a \leq b$ يعني $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

مثال

* لدينا : $2 \leq 3$ ومن $\sqrt{2} \leq \sqrt{3}$

6 المتباينات والمقلوب

مبرهنة

a و b عددان حقيقيان غير معدومين ومن نفس الإشارة
لدينا : $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

مثال

* لدينا : $2 < 4$ ومنه $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{5}$
لدينا : $-8 < -4$ ومنه $\frac{1}{-8} \geq \frac{1}{-4}$

7 المتباينات والقوى

مبرهنة

a عدد حقيقي لدينا
إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإن $a^3 \leq a^2 \leq a$
إذا كان $a \geq 1$ فإن $a^3 \geq a^2 \geq a$

مثال

* لدينا : $\frac{1}{2} \leq 1$ ومنه : $\frac{1}{2^3} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$
* لدينا : $3 > 1$ ومنه : $3^3 > 3^3 > 3$

Math-Belghit

8 حصر عدد حقيقي

تعريف

حصر عدد حقيقي x يعني إيجاد عددين a و b بحيث: $a \leq x \leq b$.

ملاحظة

إذا كان $a < x < b$ نقول أن العدد x محصور تماما بين a و b.

مثال

* لدينا: $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ هو حصر العدد $\sqrt{2}$ بالتقريب إلى الوحدة.
* لدينا: $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$ هو حصر العدد $\sqrt{2}$ بالتقريب إلى 10^{-2}.

حصر المجموع و الجداء

نتائج

- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ فإن :
$$(a + c \leq x + c \leq b + c)$$
- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ و $c > 0$ فإن:
$$(a \times c \leq x \times c \leq b \times c)$$
- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ و $(c \leq y \leq d)$ فإن:
$$(a + c \leq x + y \leq b + d)$$

بفرض a و c موجبان :

- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ و $(c \leq y \leq d)$ فإن:
$$(a \times c \leq x \times y \leq b \times d$$
- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ معناه :
$$(\sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{b})$$
- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ معناه :
$$(a^2 \leq x^2 \leq b^2)$$

ملاحظات

- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ و $(c \leq y \leq d)$ فإن:
$$(a \leq x \leq b)$$
و $(-c \leq -y \leq -d)$
- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ و $(c \leq y \leq d)$ فإن:
$$(a - d \leq x - y \leq b - c)$$

بفرض a و c موجبان تماما :

- إذا كان : $(a \leq x \leq b)$ معناه :
$$(\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a})$$

مثال

x و y عددان حقيقيان حيث :

$$3 \leq x \leq 8 \text{ و } 1 \leq y \leq 7$$

حصر : $x+y$ ، $x-y$ ، $x \times y$ ، $\frac{x}{y}$

- $3+1 \leq x+y \leq 8+7$ ومنه
$$4 \leq x+y \leq 15$$
- $1-7 \leq x-y \leq 8-3$ ومنه
$$-4 \leq x-y \leq 5$$
- $1 \times 3 \leq x \times y \leq 8 \times 7$ ومنه
$$3 \leq x \times y \leq 56$$
- $\frac{3}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{8}{1}$ ومنه
$$\frac{3}{7} \leq \frac{x}{y} \leq 8$$

دروس - سلاسل - مواضيع
B-A
Math-Belghit
2024
تمارين - فروض

9 المجالات

تعريف

a و b عددان حقيقيان : حيث $a \leq b$.
نسمي مجالا مغلقا حداه a و b، مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $a \leq x \leq b$، ونرمز إليه بالرمز $[a,b]$

مثال

المجال $[-1;2]$ هي كل الأعداد الحقيقية التي تحقق $-1 \leq x \leq 2$.
مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق $0 \leq x \leq 3$ هي المجال $[0;3]$.

التمثيل الهندسي للمجال

يمثل المجال $[a,b]$ هندسيا بالشكل الآتي حيث A و B نقطتان فاصلتاهما a و b على الترتيب.

أنواع المجالات

الرمز	الحصر	يمثل على المستقيم العددي بـ
$[a,b]$	$a \preceq x \preceq b$	
$[a,b[$	$a \preceq x \prec b$	
$]a,b]$	$a \prec x \preceq b$	
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$	
$]-\infty,b]$	$x \preceq b$	
$]-\infty,b[$	$x \prec b$	
$[a,+\infty[$	$a \preceq x$	
$]a,+\infty[$	$a \prec x$	

ملاحظات

★ المجال المغلق من جهة a يشملها، والمفتوح من جهتها لا يشملها .
★ الحدان a و b ينتميان إلى المجال $[a,b]$ ولا ينتميان إلى المجال $]a,b[$.
★ الرمزان "$-\infty$ " و "$+\infty$ " يقرآن "ناقص مالانهاية ، زائد مالا نهاية على الترتيب" .

عناصر المجال

يتميز المجال $[a,b]$ بالعناصر الآتية :

1. مركزه، وهو العدد الحقيقي : $c = \frac{a+b}{2}$.
2. طوله، وهو العدد الحقيقي الموجب: $b-a$
3. نصف قطره، وهو العدد الحقيقي الموجب $r = \frac{b-a}{2}$.

تقاطع و إتحاد مجالين

تعريف

1. تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I و J ونرمز له بالرمز $I \cap J$
2. إتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J ونرمز له بالرمز $I \cup J$.

1 القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف

x عدد حقيقي ، M نقطة من مستقيم مزود بمعلم (O,I) فاصلتها x.
القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM، ونرمز لها بالرمز "$|x|$" ونكتب $|x| = OM$.

نتائج

من التعريف نستنتج أنه :
من أجل كل عدد حقيقي x :

$$|x| = \begin{cases} x & ;x \in [0;+\infty[\\ -x & ;x \in]-\infty;0] \end{cases}$$

مثال

✍ العدد $x = \sqrt{3}$ موجب ،ومنه $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
✍ العدد $x = 1-\sqrt{2}$ سالب،ومنه

$$|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$$

✍ القيمة المطلقة للصفر هي صفر ونكتب $|0| = 0$
تنبيه : $(-x)$ ليس دوما عددا سالبا .

خواص

x و y عددين حقيقيين لدينا :
❶ $|-x| = |x|$ ❷ $\sqrt{x^2} = |x|$
❸ $|xy| = |x| \times |y|$ ❹ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$
❺ $|x+y| \preceq |x| + |y|$ (المتباينة المثلثية) .

ملاحظة: إذا كان x و y من نفس الإشارة فإن المتباينة المثلثية تصبح مساواة.

تطبيق:

✾ العدد و معاكسه لهما نفس القيمة المطلقة:

$$|-7| = |7| = 7$$

✾ $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$.

2 المسافة بين نقطتين

مبرهنة

إذا كان A و B نقطتين من مستقيم مزود بمعلم $(O;I)$ فاصلتاهما a و b على الترتيب، فإن :

$$AB = |a-b| = |b-a|$$

3 المسافة بين عددين حقيقين

مبرهنة

المسافة بين عددين حقيقين a و b هي العدد :

$$d(a;b) = |a-b| = |b-a|$$

4 حل معادلات أومتراجحات هندسيا

نتائج

لحل معادلة أو متراجحة تتضمن قيمة مطلقة، نعبرعن القيمة المطلقة بعبارات المسافة على المستقيم العددي ونترجم المساويات أوالمتباينات بعبارات المسافة بين نقطتين .

تطبيق:

حل المعادلات والمتراجحات الأتية:
❶ $|x+3| = 4$
❷ $|x+3| = |x-5|$
❸ $|x+3| \prec |x-5|$

5 الحصـــر

تعريف

حصر العدد الحقيقي x يعني إيجاد عددين a و b حيث : $a \leqslant x \leqslant b$.

مبرهنة

c عدد حقيقي، r عدد حقيقي موجب.
من أجل كل عدد حقيقي x، $|x-c| \preceq r$ معناه $x \in [c-r;c+r]$.

نتائج

c عدد حقيقي كيفي و r عدد حقيقي موجب، من أجل كل عدد حقيقي x النصوص الآتية متكافئة:

- $x \in [c-r;c+r]$ (في صيغة مجال)
- $c-r \preceq x \preceq c+r$ (في صيغة حصر)
- $d(c;x) \preceq r$ (في صيغة مسافة)
- $|x-c| \preceq r$ (في صيغة قيمة مطلقة)

مثال:

التمثيل	المجال	الحصر	المسافة	القيمة المطلقة
	$x \in [-2;5]$	$-2 \preceq x \preceq 5$	$d\left(x;\frac{3}{2}\right) \preceq \frac{7}{2}$	$\left\|x-\frac{3}{2}\right\| \preceq \frac{7}{2}$

سلاسل - دروس - مواضيع
B-A
Math-Belghit
2024
تجميعات - وثائق

6 إشارة ثنائي حد من الدرجة الأولى

مبرهنة

a و b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$، إشارة ثنائي الحد $ax+b$ هي:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	إشارة عكس a	0	إشارة نفس a

7 حل معادلات و متراجحات جبريا

طريقة

① ندرس إشارة العبارة الموجودة داخل القيمة المطلقة.
② اعتمادا على إشارة العبارة نكتبها دون رمز القيمة المطلقة (نفصل الحالات حسب المجالات).
③ نحل المعادلة أو المتراجحة في الحالة الجديدة.
④ نتأكد من إنتماء الحلول إلى المجالات حسب الحالات.

مثال

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

❶ $|x|+2x-1=0$
❷ $|x-1|+2x-4=0$
❸ $|x-3|=|2-2x|$
❹ $|x-3| \prec |2-2x|$

سلاسل - دروس - مواضيع
B-A
Math-Belghit
2024
تجميعات - وثائق