

ملخصات مفيدة قبل البكالوريا

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

المراجعة النهائية

★ قواعد الحساب ★

① الجداءات الشهيرة

الجداءات الشهيرة من الدرجة الثالثة	الجداءات الشهيرة من الدرجة الثانية
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	

② حل المعادلات من الدرجة الثانية

حساب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$			
$\Delta < 0$: إذا كان	$\Delta = 0$: إذا كان	$\Delta > 0$: إذا كان	حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$
المعادلة لا تقبل حلول	المعادلة تقبل حل مضاعف هو : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	المعادلة تقبل حلين متميزين هما : $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	
لا يمكن تحليل $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	تحليل $ax^2 + bx + c$
$-\infty \xrightarrow{a \text{ إشارة}} +\infty$	$-\infty \xrightarrow{a \text{ إشارة}} x_0 \xrightarrow{a \text{ إشارة}} +\infty$	$-\infty \xrightarrow{a \text{ إشارة}} x_1 \xrightarrow{(-a) \text{ إشارة}} x_2 \xrightarrow{a \text{ إشارة}} +\infty$	إشارة $ax^2 + bx + c$

③ خواص القيمة المطلقة

إذا كان x و y عدنان حقيقيان فإن :

$\sqrt{x^2} = x $	$ -x = x $	$ x \geq 0$
$ x+y \leq x + y $	$y \neq 0$ مع $\left \frac{x}{y}\right = \frac{ x }{ y }$	$ x \times y = x \times y $
$ x-a = \begin{cases} x-a & ; x \geq a \\ -x+a & ; x \leq a \end{cases}$	$ x+a = \begin{cases} x+a & ; x \geq -a \\ -x-a & ; x \leq -a \end{cases}$	$ x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$
	إذا كان $ x \geq a$ فإن $x \geq a$ أو $x \leq -a$	إذا كان $ x \leq a$ فإن $-a \leq x \leq a$

④ قواعد الحصر

لتكن a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تماماً .

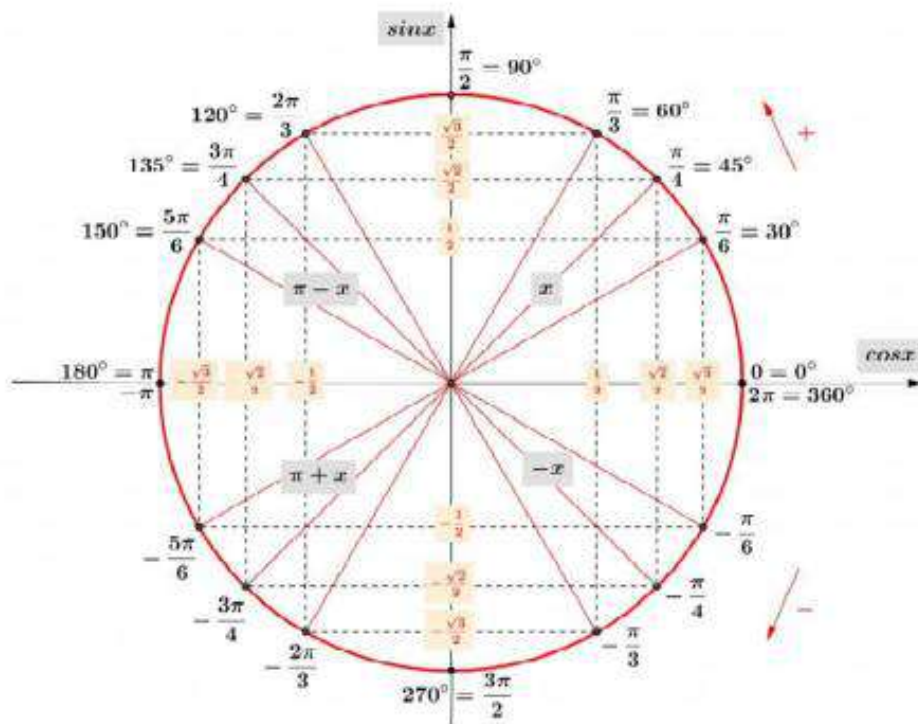
خاصية الـ				
قسمة	ضرب	طرح	جمع	
$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$	$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$	$a - d \leq x - y \leq b - c$	$a + c \leq x + y \leq b + d$	$a \leq x \leq b$ $c \leq y \leq d$

⑤ الدائرة المثلثية وحساب المثلثات

x عدد حقيقي :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

$\begin{cases} \cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \end{cases}$	$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$	$\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$
--	--	---



★ النهايات ★

① نهايات بعض الدوال المرجعية

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	الدالة مقلوب
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	الدالة جذر
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ مع n فردي	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ مع n زوجي	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	الدالة x^n $n \in \mathbb{N}^*$

② حالات عدم التعيين وطرق إزالتها

$+\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	حالات عدم التعيين
$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{\ell}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\ell}{0} = \infty$	حالات يمكن التعيين
بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط و المقام بالنسبة لدوال جذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب و نقسم في المرافق عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك				طرق الإزالة

③ مبرهنات في النهايات

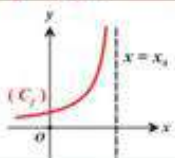
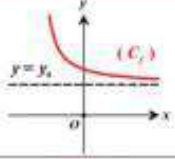
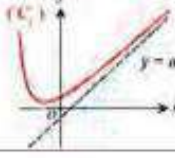
نعتبر u, v, f ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ ، و لتكن a, b, c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$	مبرهنة التركيب
إذا كان $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ حيث $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	مبرهنة الحصر
إذا كان $f(x) \geq g(x)$ حيث $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ إذا كان $f(x) \leq g(x)$ حيث $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ إذا كان $f(x) - \ell \leq g(x)$ حيث $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	مبرهنات المقارنة

④ نهايات الدوال المثلثية

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
---	---	--	---	---

المستقيمات المقاربة *

لتكن f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

التمثيل البياني	التفسير الهندسي	النهاية
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = y_0$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ ، ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(y'y)$



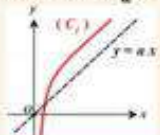
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0)$$

ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$$

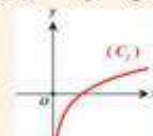
(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه

المستقيم الذي معادلته $y = ax$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(x'x)$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل

معادلته $y = ax + b$ بجوار ∞



* الاستمرارية و مبرهنة القيم المتوسطة *

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a .

① الاستمرارية

	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f عند a
إذا كان $\ell_1 = \ell_2$ فإن f مستمرة عند a	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \ell_1$ حيث $\ell_1 \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f على يمين a
	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \ell_2$ حيث $\ell_2 \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f على يسار a

② صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

f دالة متناقصة تماماً على I	f دالة متزايدة تماماً على I	المجال I
$f(I)$	$f(I)$	$[a; b]$
$[f(b); f(a)]$	$[f(a); f(b)]$	$[a; b[$
$\left] \lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right[$	$]a; b]$
$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b) \right]$	$]a; b[$
$\left] \lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right]$	

③ مبرهنة القيم المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a; b[$	مبرهنة ①
إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[a; b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a; b[$	مبرهنة ②
إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور بين a و b بحيث $f(\alpha) = 0$.	مبرهنة ③
إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[a; b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a; b[$	مبرهنة ④

* الاشتقاقية *

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ و a عدد من D_f .

① الاشتقاقية

	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f عند a
إذا كان $f'_a(a) = f'_g(a)$ فإن f قابلة للاشتقاق عند a	$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_a(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f على يمين a
	$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f على يسار a

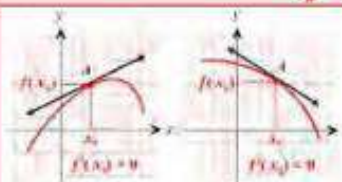
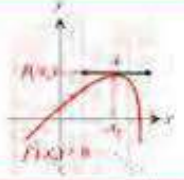
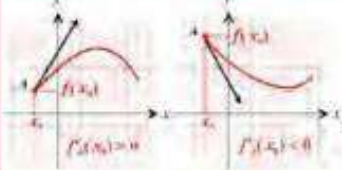
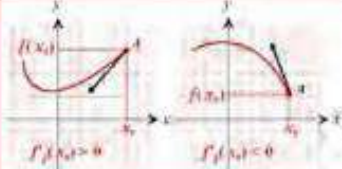
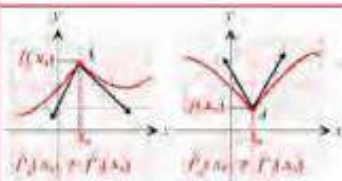
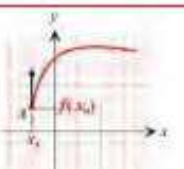
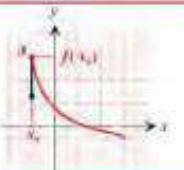
② مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
$a \in \mathbb{R}$ حيث a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^n حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

③ المشتقات والعمليات على الدوال

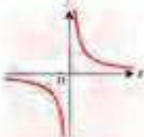
$u \circ v$	u^n	$\sqrt{u}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{1}{v}$	$u \times v$	au	$u \pm v$	الدالة
$v' \cdot u'(v)$	$n \times u^{n-1} \times u'$ $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$u'v + v'u$	au'	$u' \pm v'$	الدالة المشتقة

④ التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

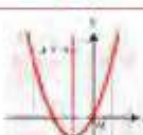
التفسير الهندسي	الاستنتاج	النهاية
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماساً معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0) = a$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماساً موازياً لحور الفواصل معادلته: $y = f(x_0)$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0) = 0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف معادلته: $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 و $f'_d(x_0) = a$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف معادلته: $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 و $f'_g(x_0) = b$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصفين معادلته: $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ و $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 (C_f) يقبل على يمين x_0 نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
 (C_f) يقبل على يمين x_0 نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
 (C_f) يقبل على يسار x_0 نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
 (C_f) يقبل على يسار x_0 نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

★ شفعية دالة - مركز تناظر و محور تناظر ★

① شفعية دالة

التمثيل البياني	التفسير الهندسي	التعريف	
	(C_f) يقبل محور الترتيب كمحور تناظر	f دالة زوجية يعني من أجل كل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فإن: $f(-x) = f(x)$	الدالة الزوجية
	(C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر	f دالة فردية يعني من أجل كل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فإن: $f(-x) = -f(x)$	الدالة الفردية

② مركز تناظر و محور تناظر دالة

التمثيل البياني	التعريف	
	$\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن: $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$	مركز تناظر
	$x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن: $f(2\alpha - x) = f(x)$	محور تناظر

★ الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم ★

(C_f) التمثيل البياني للدالة f و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$.

الوضعية النسبية	إشارة الفرق $f(x) - y$
(C_f) يقع فوق (Δ)	$f(x) - y > 0$
(C_f) يقع تحت (Δ)	$f(x) - y < 0$
(C_f) و (Δ) يتقاطعان	$f(x) - y = 0$

* إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر معلوم *

ليكن (C_f) و (C_g) منحنين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الدالة	التمثيل البياني
$f(x) = g(x) + b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$
$f(x) = g(x + a)$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$
$f(x) = g(x + a) + b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a; b)$
$f(x) = -g(x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$f(x) = g(-x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الترتيب
$f(x) = -g(-x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$f(x) = g(x)$	- إذا كان $x \geq 0$ فإن $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) - إذا كان $x \leq 0$ فإن $f(x) = g(-x)$ منه (C_f) هو نظير (C_g) المرسوم في المجال الموجب بالنسبة لمحور الترتيب (f دالة زوجية)
$f(x) = g(x) $	- إذا كان $g(x) \geq 0$ فإن $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) - إذا كان $g(x) \leq 0$ فإن $f(x) = -g(x)$ منه (C_f) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل

* المناقشة البيانية *

ليكن (C_f) منى الدالة f و (Δ) مستقيم مائل (مماس أو مستقيم مقارب) معادلته $y = ax + b$.

المعادلة من الشكل	المناقشة البيانية ($m \in \mathbb{R}$)
$f(x) = m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الموازية لمحور الفواصل
$f(x) = ax + m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الموازية لـ (Δ)
$f(x) = mx + b$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الدورانية حول النقطة $(0; b)$
$f(x) = m^2$ أو $f(x) = m $	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الموازية لمحور الفواصل ($y = m $ أو $y = m^2$) لكن المناقشة تبدأ من محور الفواصل نحو الأعلى
$f(x) = f(m)$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الموازية لمحور الفواصل معادلته $y = f(m)$

ملاحظات: نقول أن للمعادلة حل موجب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يمين محور الترتيب.

نقول أن للمعادلة حل سالب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يسار محور الترتيب.

نقول أن للمعادلة حل مضاعف إذا كانت نقطة التقاطع هي نقطة المماس.