محور: الإشتقاقية والإستمرارية

ثانوية الشهيد مصطفى بن بولعيد - المعاضيد - المسيلة

يسرني أن أتقدم لكم بهذا العمل المتواضع والمتمثل في مذكرات مادة الرياضيات لسنة ثالثة ثانوي شعبة:

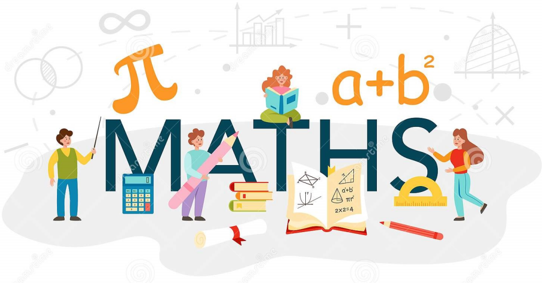
علوم تجريبية ⋆ رياضيات ⋆ تقني رياضي

يتضمن هذه العمل:

- **مذكرة 01:** حساب مشتقة دالة.
- **مذكرة 02:** الإستمرارية.
- **مذكرة 03:** مبرهنة القيم المتوسطة.
- **مذكرة 04:** قابلية الإشتقاق دالة عند عدد.
- **مذكرة 05:** حساب مشتقة دالة.
- **مذكرة 06:** حساب مشتق الدالة مركب.
- **مذكرة 07:** تطبيقات الإشتقاقية.
- **مذكرة 08:** تطبيقات الإشتقاقية (تابع).
- **مذكرة 09:** التقريب التآلفي.
- **مذكرة 10:** توظيف المشتقات لحل المشكلات.
- **مذكرة 11:** دراسة الدوال المثلثية.
- **مذكرة 12:** دراسة الدوال المثلثية (تابع).

أستاذ التعليم الثانوي
فراحتية المحفوظ
MATH
مادة الرياضيات

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبكم في الله الأستاذ: فراحتية المحفوظ



آخر تحديث: 13 / 09 / 2025

السنة الدراسية: 2025 / 2026

للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي

الأستاذ فراحتية المحفوظ للرياضيات | فراحتية المحفوظ | prof.mahfoud.ferahtia

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد — المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حساب مشتقة دالة

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
الكفاءات المستهدفة : تذكير: حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**مناقشة نشاط 01 صفحة 40** **1** حساب الأعداد المشتقة : لدينا: $f'(-1)=0$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 نختار نقطتين من المماس مثلا: $A(-1;2)$ و $B(-2;2)$ ومنه $f'(-1)=\frac{2-2}{-1+2}=\frac{0}{1}=0$ • $g'(-1)=\frac{-1-0}{-1-2}=\frac{1}{3}$ • $f'(2)=\frac{0-2}{2-0}=-1$ • $g'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$ • $(f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=\frac{1}{3}$ • $(fg)'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=-2$ • $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)=-\frac{3f'(-1)}{(f'(-1))^2}$ • $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)\times g(2)-g'(2)\times f(2)}{(g(2))^2}=-\frac{1}{2}$ **2** من أجل كل x من $[0;2]$ نضع : $h(x)=f(2x-1)$ -حساب $h'(0)$: لدينا: $h'(x)=2f'(2x-1)$ ومنه: $h'(0)=2f'(-1)=0$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'(2)=-2$	
مرحلة بـنـاء معـارف	**العدد المشتق - الدالة المشتقة** **تعريف** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. x_0 و x_0+h عددان حقيقيان من I مع : $h\neq 0$. نقول أنّ f تقبل الإشتقاق عند x_0 إذا قبلت النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0. تسمى هذه النهاية : العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$. نكتب إذن : $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ أو نكتب : $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (بوضع $x=x_0+h$) **مـلاحظة:** إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I فهي تقبل الإشتقاق على I ونرمز لدالتها المشتقة بـ: f'	

مثـــال

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x^2 + x$

1 برهن أنّ f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

2 عيّن $f'(x)$

✍ ليكن x_0 عدد حقيقي كيفي

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2+x-x_0^2-x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0+1)}{x-x_0}$$

ومنه $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x+x_0+1) = 2x_0+1$

إذن $2x_0+1$ عدد حقيقي ومنه f دالة قابلة للإشتقاق عند x_0 . لكن x_0 يمسح $\mathbb{R}$ ومنه f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

✍ لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f .إذن يكون لدينا : $f'(x) = 2x+1$

التفسيرالبياني (مماس منحنى دالة)

تعريف

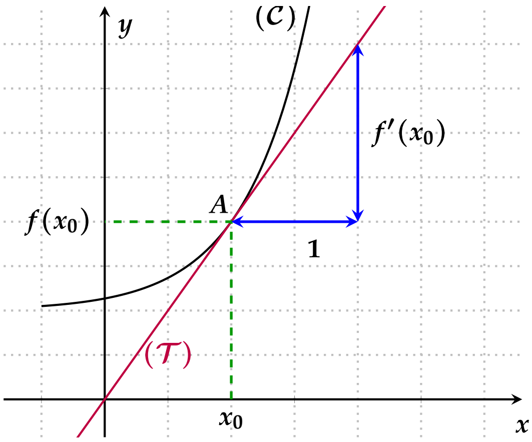
f دالة معرفة على مجال D من $\mathbb{R}$. و $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في مستوى منسوب الى معلم $\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 من D وَ $f'(x_0)$ العدد المشتق للدالة f عند x_0 فإن المستقيم الذي يشمل النقطة $A\,(x_0, f\,(x_0))$ ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ يسمى مماس المنحنى $(\mathcal{C})$ عند النقطة A
. معادلته هي: $y = f'(x_0)\,(x-x_0) + f\,(x_0)$.

البـرهـان

المماس $(\mathcal{T})$ هو عبارة عن مستقيم معامل توجيهه $f'(x_0)$.
إذن معادلة $(\mathcal{T})$ من الشكل $y = f'(x_0)\,x + b$ والنقطة $A(x_0; f(x_0))$ تنتمي إلى $(\mathcal{T})$ فإن
$f(x_0) = f'(x_0)\times x_0 + b$ ومنه بالتعويض
$b = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$.
وبالتالي $y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$
ومنه :

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

■



مثـــال

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 2$
معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$ هي :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي $y = 5x - 2$

تطبيق :
تمريـن 4 صفـحة 58

مرحلة تقويـم

الحـل

1 لدينا: $A(0;2)$ نقطة من (C_f) و بالتالي : $f(0)=2$ و -3 معامل توجيه مماس لـ (C_f) عند النقطة $A(0,2)$ وبالتالي $f'(0)=-3$

2 العدد $\dfrac{f(x)-2}{x}$ هو نسبة التزايدة للدالة f بين x و 0

3 لدينا: f قابلة للإشتقاق عند 0 ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$ موجودة لأن:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=-3$$

تمارين منزلية : تمرين 5 و 6 صفحة 58

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : الإستمرارية

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة : دراسة السلوك التقاربي للدالة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطـــلاق	(انظر المحتوى أدناه)	

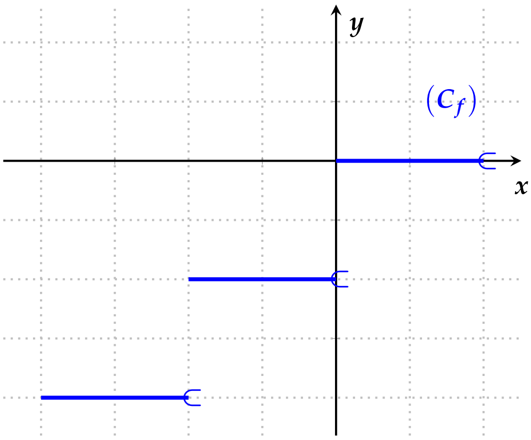
التهيئة النفسية :

مناقشة نشاط 03 صفحة 07

1 حساب $[-2.3]$ ، $E(-1)$ ، $[\sqrt{3}]$ و $E(11,01)$.

لدينا: $-2 < -2,3 \leq -3$ ومنه $[-2,3] = -3$ ، $E(-1) = -1$ ، $1 \leq \sqrt{3} < 2$ ومنه $1 = [\sqrt{3}]$ ،
$E(11,01) = 11$

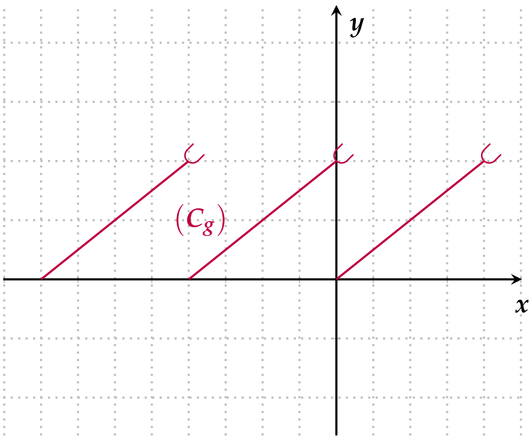
2 نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كمايلي :
$f(x) = [x]$ ، $g(x) = x - [x]$ ، $h(x) = x^2 + 1$ و لتكن (C_f) ، (C_g) و (C_h). تمثيلاتها البيانية على الترتيب



رسم (C_f)

- من أجل $x \in [-2;-1[$: $f(x) = -2$
- من أجل $x \in [-1;0[$: $f(x) = -1$
- من أجل $x \in [0;1[$: $f(x) = 0$

إذن
$$f(x) = \begin{cases} -2; x \in [-2;-1[\\ -1; x \in [-1;0[\\ 0; x \in [0;1[\end{cases}$$

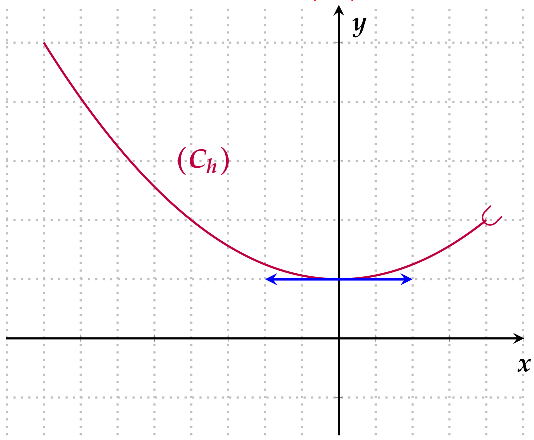


رسم (C_g)

- من أجل $x \in [-2;-1[$: $g(x) = x + 2$
- من أجل $x \in [-1;0[$: $g(x) = x + 1$
- من أجل $x \in [0;1[$: $g(x) = x$

إذن
$$f(x) = \begin{cases} x+2; x \in [-2;-1[\\ x+1; x \in [-1;0[\\ x; x \in [0;1[\end{cases}$$

رسم (C_h)



✍ هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (C_h) دون رفع القلم (اليد)

- لايمكن رسم المنحنيين (C_f) و (C_g) دون رفع القلم (اليد)
- بينما يمكن رسم المنحنى (C_h) دون رفع القلم (اليد)

✍ هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟

- الدالتان f و g لا تقبلان نهاية عند -1 وكذا عند الصفر .
- الدالة h تقبل نهاية عند -1 و عند 0 لأنها معرفة عندهما : $h(-1) = 2$ و $h(0) = 1$

خلاصة

✍ يمكن رسم المنحنى (C_h) دون رفع القلم (اليد) ، فنقول أن الدالة h مستمرة على المجال $[-2;1]$.

✍ أما f ، g فهما غير مستمرتين على المجال $[-2;1]$

ملاحظة:

✍ الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها

✍ مجموع و جداء دوال مستمرة عند a هي دالة مستمرة عند a .

✍ الدوال كثيرات الحدود و الدوال $\cos$ ، $\sin$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

✍ الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها

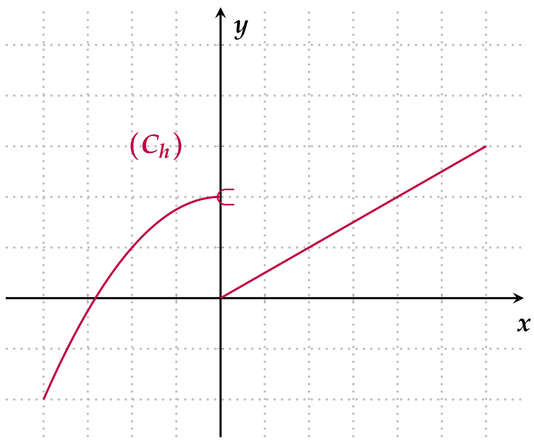
مثال

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-2;3]$ بـ: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2; x \in [-2;0[\\ x; x \in [0;3] \end{cases}$.

1 مثل بيانيا الدالة f.

2 هل الدالة f مستمرة على المجال : $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون فيه الدالة مستمرة .

الحل



1 الدالة f غير مستمرة عند 0 و بالتالي فهي غير مستمرة على المجال : $[-2;3]$.

2 الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1;2[$ كما يلي : $f(x)=x+1+E(x)$ حيث $x \mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح.

1 أكتب حسب قيم x عبارة $f(x)$ بدون الرمز $E(x)$.

2 أرسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس .

3 هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;2[$ ؟

4 عين المجالات التي تكون فيها f مستمرة.

التقويم

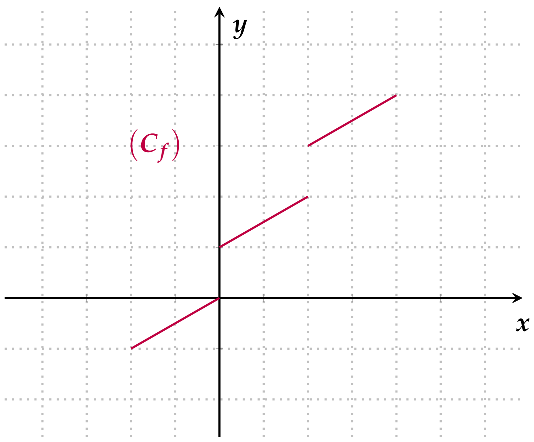
الحل

1 كتابة عبارة $f(x)$ دون الرمز $E(x)$

لدينا: من أجل $x \in [-1,0[$: $E(x)=-1$ و من أجل $x \in [0;1[$: $E(x)=0$ و من أجل $x \in [1;2[$: $E(x)=1$

ومنه $\begin{cases} f(x)=x & ;x \in [-1;0[\\ f(x)=x+1 & ;x \in [0;1[\\ f(x)=x+2 & ;x \in [1;2[\end{cases}$

2 إنشاء منحنى (C_f)



3 الدالة f غير مستمرة على المجال $[-1;2]$

4 بعض مجالات التي تكون فيها دالة f مستمرة : $[-1;0]$ ، $[0;1]$ و $[1;2]$

تمارين منزلية : تمرين 49 و 48 صفحة 29

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : مبرهنة القيم المتوسطة

المكتسبات القبلية : إستمرارية دالة على مجال ،رتابة دالة
الكفاءات المستهدفة : تبيان وجود حل للمعادلة $f(x) = k$
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التهيئة النفسية :

مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان) :

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاّ على الأقل في المجال $]a;b[$.

مرحلة بـنـاء مـعـارف

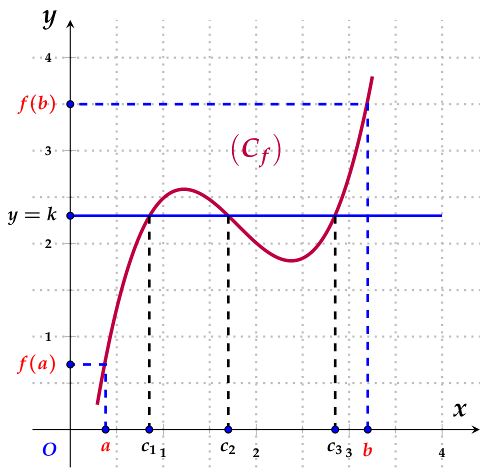
❖ التفسير البياني :

المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة منحنى الدالة f في نقطة فاصلتها محصورة بين a و b

بالنسبة للشكل المقابل المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع منحنى الدالة f في ثلاث نقط فواصلها c_1 ، c_2 و c_3.

حالة خاصة :

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ و كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = 0$



❖ المعادلة $f(x) = k$:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c محصور بين a و b

مـلاحظة:

مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x) = k$ أما تعيّن الحلول او قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مـثال

برهن بإستعمال مبرهنة القيم الم أنّ المعادلة $x^5 + 3x^4 - 6x^2 = 1$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $[1;2]$

طريقة

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$
- نتحقق من إستمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$
- نتحقق من أن العدد k محصور بيّن $f(a)$ و $f(b)$

الحل

لتكن f الدالة المعرفة على $[1;2]$ بـ: $f(x)=x^5+3x^2-6x^2$

• f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على المجال $[1;2]$ و لدينا : $f(1)=-2$ و $f(2)=56$

ولدينا : $-2<1<56$ أي $f(1)<1<f(2)$، إذن المعادلة $f(x)=1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1;2]$

طريقة 2

المعادلة السابقة تكافئ : $x^5+3x^2-6x^2-1=0$ ، نضع $f(x)=x^5+3x^2-6x^2-1$

f مستمرة على المجال $[1;2]$ و $f(1)=-2$ ، $f(2)=56$ ومنه $f(1)\times f(2)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $[1;2]$

تطبيق : لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$

1 أحسب : $f(-1)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$

2 إستنتج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

الحل

1 حساب الصور : $f(-1)=-\frac{5}{4}$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$ ، $f(0)=-\frac{1}{4}$ ، $f(1)=\frac{1}{4}$

2 إستنتاج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

لدينا: f دالة كثيرة حدود ، فهي معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و بالتالي فهي مستمرة على المجال $[-1;1]$

✍ لدينا f مستمرة على المجال $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ و أنّ: $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ أي 0 محصور بين $f(-1)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال (1) $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$

✍ لدينا f مستمرة على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ و أنّ: $f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(0)<0$ أي 0 محصور بين $f(0)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال (2) $\left]-\frac{1}{2};0\right[$

✍ لدينا f مستمرة على المجال $[0;0]$ و أنّ: $f(1)\times f(0)<0$ أي 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال (3) $]0;1[$

النتيجة: من (1) و (2) و (3) فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1;1[$

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على المجال $[a;b]$:

مبرهنة

✍ إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاّ وحيدا في المجال $]a;b[$.

البـرهـان

نفرض أن الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a;b]$

و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي أخر c' مختلف عن c محصور بين a و b و يحقق $f(c')=k$

يكون حينئذ $c\neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على $[a,b]$.

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ ■

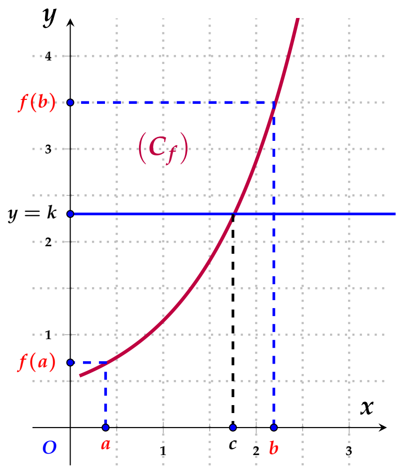
مرحلة بناء متعارف

مـــــرحـــلة التـقـويـــــم

❖ التفسير البياني :

✍ المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع مرة واحدة منحنى الدالة f في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .

✍ إذا كان $k = 0$ منحنى الدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها حل للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]a;b[$.



تطبيق :

لتكن f دالة عدد ية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث جدول تغيراتها كمايلي :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	5	↘	-3	↗	8

✍ عيّن عدد حلول المعادلات التالية محددا المجال الذي ينتمي إليه كل حل $f(x) = 0$ ، $f(x) = -2$ ، $f(x) = 9$

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^3 - 2x + 5$

1 أحسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 برهن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $[1;2]$

3 إستنتج إشارة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

إجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف:

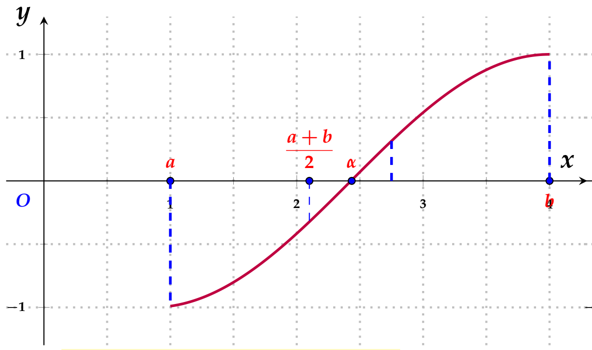
◂ للحصول على حصر أدق للعدد α نتبع طريقة التصنيف التالية :

- نحسب كل من $m = \dfrac{a+b}{2}$ (مركز المجال $[a;b]$) و $f(m)$
- نقارن بيّنّ $f(a)$ و $f(m)$ و نميز حالتين :

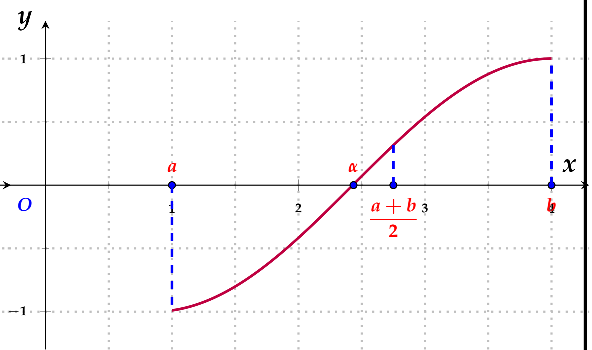
◂ إذا كان $f(a) \times f(m) < 0$ فإن الحل α موجود في المجال $]a;m[$

◂ إذا كان $f(a) \times f(m) > 0$ فإن الحل α موجود في المجال $]m;b[$

- نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض : a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه .



الحالة الثانية $\alpha \in \left]\dfrac{a+b}{2};b\right[$



الحالة الأولى $\alpha \in \left]a;\dfrac{a+b}{2}\right[$

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

x	$f(x)$
$1,1$	$8,95$
$1,7$	$0,12$
$1,85$	$-0,18$
2	$-0,41$
$-0,75$	$-0,75$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f .

2 برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $]1,1;2,3[$.

3 بإستعمال طريقة التنصيف عيّن حصرا للعدد α سعته (طوله) $0,15$

4 أثبت أن: $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$

الحل

1 دراسة إتجاه تغير الدالة f

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ حيث : $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

بماأن $-\frac{1}{(x-1)^2}<0$ و $-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$ فإن $f'(x)<0$ و بالتالي f دالة متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

2 لنبرهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $[1,1;2,3]$

✍ f دالة مستمرة على المجال $]1;+\infty[$ فهي مستمرة على المجال $[1,1;2,3]$.

✍ $f(1,1)\approx 8,95$ و $f(2,3)\approx -0,75$ ومنه $f(1,1)\times f(2,3)<0$.

✍ f دالة متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فهي متناقصة تماما على المجال $[1,1;2,3]$.

إذن حسبة مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث : $\alpha\in]1,1;2,3[$.

3 تعيين حصرا للعدد α سعته $0,15$

✍ مركز المجال $]1,1;2,3[$ هو $1,7=\frac{1,1+2,3}{2}=m$ و $f(1,7)\approx 0,12$ ومنه $f(1,7)\times f(2,3)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;2,3[$

✍ مركز المجال $]1,7;2,3[$ هو $2=\frac{1,7,1+2,3}{2}=m$ و $f(2)\approx -0,41$ ومنه $f(1,7)\times f(2)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;2[$

✍ مركز المجال $]1,7;2[$ هو $1,85=\frac{1,7,1+2}{2}=m$ و $f(1,85)\approx -0,18$ ومنه $f(1,7)\times f(1,85)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;1,85[$

لاحظ أنّ طول المجال الأخير هو $1,85-1,7=0,15$ إذن نتوقف عن تنصيف المجال .

4 إثبات أنّ $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$

لدينا α حل للمعادلة $f(x)=0$ معناه $f(\alpha)=0$ تكافئ: $\frac{1}{\alpha-1}-\sqrt{\alpha}=0$ تكافئ: $\frac{1}{\alpha-1}=\sqrt{\alpha}$

بالتربيع الطرفين نجد: $\sqrt{\alpha^2}=\frac{1}{(\alpha-1)^2}$ تكافئ: $\alpha(\alpha-1)^2=1$ تكافئ : $\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)=1$ تكافئ:

$\alpha^3-2\alpha^2+\alpha=1$

إذن : $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$

تمارين منزلية : تمرين 106 و 107 صفحة 36

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

مرحلة التقويم

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : قابلية الإشتقاق دالة عند عدد

المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
الكفاءات المستهدفة : قابلية إشتقاق دالة عند عدد من اليمين و من اليسار و تفسير الهندسي
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / مرحلة بنـاء معـارف	(انظر المحتوى أدناه)	

قابلية إشتقاق الدالة عند عدد :

❶ قابلية الإشتقاق على اليمين

تعريف

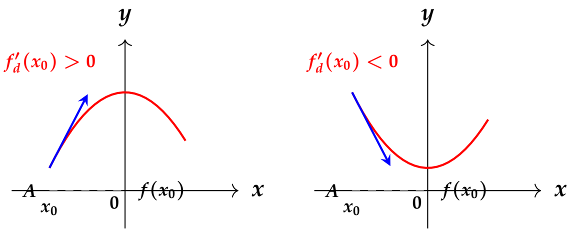
f دالة معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل ، $[x_0; x_0+\alpha[$ حيث : x_0 و α عددان حقيقيان مع $\alpha > 0$

✍ نقول عن الدالة f أنها تقبل الإشتقاق عند x_0 من اليمين إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_1$

حيث ℓ_1 عدد حقيقي و يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليمين

❖ **التفسير البياني :**

✍ إذا قبلت الدالة الإشتقاق في x_0 من اليمين فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين و هو معرف كمايلي:
من أجل $x \geq x_0$: $y = \ell_1(x-x_0)+f(x_0)$



مــثال

الدالة المعرفة بـ $f(x) = x\sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين لأنها معرفة على $[0; +\infty[$
ولدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x\sqrt{x} - 0\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$

❷ قابلية الإشتقاق على اليسار

تعريف

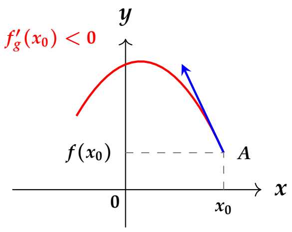
f دالة معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل ، $]x_0-\alpha; x_0]$ حيث : x_0 و α عددان حقيقيان مع $\alpha > 0$

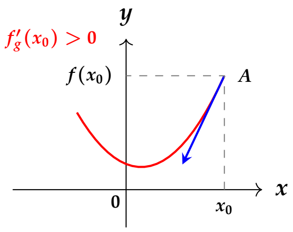
✍ نقول عن الدالة f أنها تقبل الإشتقاق عند x_0 من اليسار إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_2$

حيث ℓ_2 عدد حقيقي و يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليسار

❖ **التفسير البياني :**

✍ إذا قبلت الدالة الإشتقاق في x_0 من السار فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين و هو معرف كمايلي:
من أجل $x \leq x_0$: $y = \ell_2(x - x_0) + f(x_0)$





مــثال

✍ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 9|$

● ندرس قابلية الإشتقاق للدالة f من اليسار العدد 3

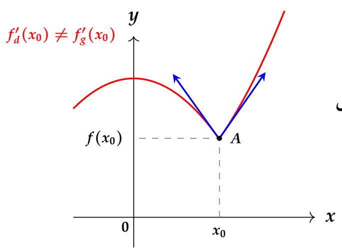
لدينا: $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 \; ; x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[\\ -(x^2 - 9) \; ; x \in [-3 : 3] \end{cases}$$

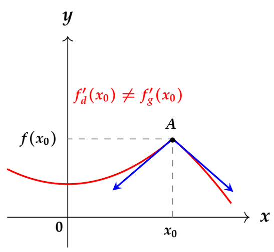
$$\lim_{x \underset{<}{\to} 3} \frac{-(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \underset{<}{\to} 3} -(x + 3) = -6$$

إذن الدالة تقبل الإشتقاق على يسار 3 و هي تقبل نصف مماس على اليسار معادلته $y_g = -6(x-3) +$ $f(3)$

❸ **نقطة زاوية**

إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن النقطة ذات الفاصلة x_0 تدعى نقطة زاوية





مــثال

✍ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 9|$

● ندرس قابلية الإشتقاق للدالة f عند العدد 3

لدينا: $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 \; ; x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[\\ -(x^2 - 9) \; ; x \in [-3 : 3] \end{cases}$$

● $$\lim_{x \underset{<}{\to} 3} \frac{-(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \underset{<}{\to} 3} -(x + 3) = -6$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق على يسار 3 و عددها المشتق هو -6

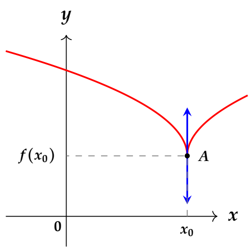
● $$\lim_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \underset{>}{\to} 3} (x + 3) = 6$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين 3 و عددها المشتق هو 6

بما أن العدد المشتق على اليمين يختلف عن اليسار فالدالة لا تقبل الإشتقاق عند 2 و تقبل نقطة زاوية

❹ **مماس موازي لمحور التراتيب**

إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty$ فإن التمثيل البياني (C_f) للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي حامل محور التراتيب .

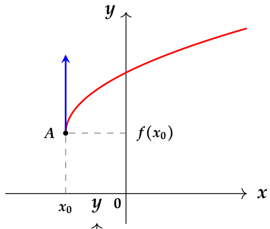


مرحلة التقويم

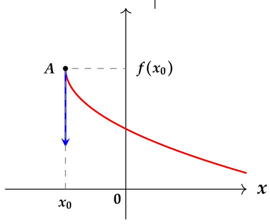
التقويم

حلات خاصة :

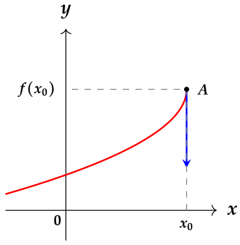
إذا كان $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يمين x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يمين النقطة $A\,(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$.



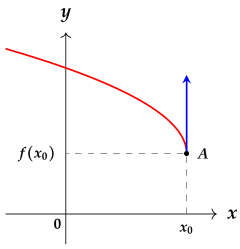
إذا كان $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يمين x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يمين النقطة $A\,(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$.



إذا كان $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يسار x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يسار النقطة $A\,(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$.



إذا كان $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يسار x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يسار النقطة $A\,(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$.



مــثال

الدالة المعرفة بـ: $f(x) = \sqrt{x}$ غير قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين لأن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

إذن الدالة f غير قابلة لإشتقاق عند 0 و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي على حامل محور التراتيب معادلته نحوا الأعلى $x = 0$

الإشتقاقية و الإستمرارية

مبرهنــة

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند عدد x_0 فإنها مستمرة عند x_0

مـلاحظة : عكس هذه المبرهنة ليس دوما صحيح

مــثال

الدالة $f : x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للإشتقاق عند 0

لأن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x-0}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x-0}{x} = -1$

ومنه المشتق من اليمين لا يساوي المشتق من اليسار $(f'_d \neq f'g)$

إذن f لا تقبل الإشتقاق عند 0

مرحلة التـــقويـــم

التقويم

تطبيق : أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند x_0 في كل حالة ثم فسر النتيجة بيانيا .

❶ $f(x) = -x^2+2 ;\ x_0 = 1$ ❷ $f(x) = \sqrt{x-4} ;\ x_0 = 4$ ❸ $f(x) = x|x-3| ;\ x_0 = 3$

❹ $f(x) = \dfrac{|x|x^2}{x+2} ;\ x_0 = 0$

الحـل

❶ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{-x^2+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{-(x-1)(x-1)}{x-1}$

ومنه $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} -(x+1) = -2$

نتيجة : الدالة f تقبل الإشتقاق عند $x_0 = 1$ و $f'(1) = -2$

❷ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \left(\dfrac{\sqrt{x-4}}{x-4}\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \dfrac{\sqrt{x-4}\times\sqrt{x-4}}{(x-4)\sqrt{x-4}}$

ومنه $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \dfrac{(x-4)}{(x-4)\sqrt{x-4}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \dfrac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$

نتيجة : الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 4$

❸ **كتابة $f(x)$ دون رمز قيمة المطلقة :** $f(x) = \begin{cases} -x(x-3) \ ;x<3 \\ x(x-3) \ ;x>3 \end{cases}$

دراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند $x_0 = 3$:

✍ أولا دراسة قابلية إشتقاق الدالة f على يمين x_0 .

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{x(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} x = 3$

✍ ثانيا دراسة قابلية إشتقاق الدالة f على يسار x_0 .

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{-x(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} -x = -3$

نتيجة : إذن النسبة $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ليس لها نهاية عندما x يؤول إلى 3 ومنه f غير قابلة للإشتقاق عند العدد 3

❹ **كتابة $f(x)$ دون رمز قيمة المطلقة :** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x+2} \ ;\ x\in x\in[0;+\infty[\\ \dfrac{-x^3}{x+2} \ ;\ x\in x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0[\end{cases}$

دراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند $x_0 = 0$:

✍ أولا دراسة قابلية إشتقاق الدالة f على يمين x_0 .

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\frac{x^3}{x+2}-0}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{0}{2} = 0$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للأشتقاق على يمين $x_0 = 0$.

✍ ثانيا دراسة قابلية إشتقاق الدالة f على يسار x_0 .

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\frac{-x^3}{x+2}-0}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{-x^2}{x+2} = \dfrac{0}{2} = 0$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للأشتقاق على يسار $x_0 = 0$.

نتيجة : بما أن f قابلة للأشتقاق على يمين و يسار $x_0 = 0$ ولهما نفس النهاية فإن f دالة قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

تمارين منزلية : تمرين 7 و 8 صفحة 58

حل تمرين 7 صفحة 58

1 إثبات أنه من أجل $h \neq 0$ لدينا: $\frac{f(1+h)-1}{h} = h+2+\frac{|h|}{h}$

لدينا

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-1}{h} &= \frac{(1+h)^2+|1+h-1|-1}{h} = \frac{h^2+2h+1+|h|-1}{h}\\ &= \frac{h^2+2h+|h|}{h}\\ &= \frac{h^2+2h}{h}+\frac{|h|}{h}\\ &= h+2+\frac{|h|}{h}\end{aligned}$$

ومنه المطلوب

2 لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(1+h)-1}{h} &= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} h+2+\frac{|h|}{h}\\ &= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} h+2+\frac{h}{h}\\ &= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} h+2+1\\ &= 3\end{aligned}$$

و لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{f(1+h)-1}{h} &= \lim_{h \overset{<}{\to} 0} h+2+\frac{|h|}{h}\\ &= \lim_{h \overset{<}{\to} 0} h+2+\frac{-h}{h}\\ &= \lim_{h \overset{<}{\to} 0} h+2-1\\ &= 1\end{aligned}$$

بما أن $\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(1+h)-1}{h} \neq \lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{f(1+h)-1}{h}$ فالعبارة $\frac{f(1+h)-1}{h}$ لا تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0

3 أ) التفسير الهندسي: منحى (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 أحدهما من اليمين و أخر من اليسار

ب) كتابة معادلتي نصفي المماسين

$$(T_d) : y = f'_d(1)(x-1)+f(1) = 3(x-1)+1 = 3x-2$$

$$(T_g) : y = f'_g(1)(x-1)+f(1) = 1(x-1)+1 = x$$

حل تمرين 8 صفحة 58

1 حساب $\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(-2+h))}{h}$

لدينا: $\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(-2+h))}{h} = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$

2 لدينا: $\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(-2+h))}{h} = +\infty$ و بالتالي f غير قابلة للإشتقاق على يمين -2 . إذن (C_f) يقبل نصف مماس موجه نحو الأعلى موازي لمحور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة -2

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة
الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حساب مشتقة دالة

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
الكفاءات المستهدفة : حساب مشتقات الدوال المألوفة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق مرحلة بناء معارف	التهيئة النفسية :	

المشتقات و العمليات

❶ مشتقات دوال مألوفة (تقديم أمثلة)

الدالة f	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة f'
$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto a$
$x \longmapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 2x$
$x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$

❷ المشتقات و العمليات على الدوال النتائج ملخصة في الجدول التالي :

الدالة f	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة f'
$u+v$	u و v قابلتان الإشتقاق على I	$u'+v'$
$u.v$	u و v قابلتان الإشتقاق على I	$u'.v+u.v'$
$\lambda u \ (\lambda \in \mathbb{R})$	u قابلة للإشتقاق على I	$\lambda u'$
$\frac{1}{u}$	u قابلة للإشتقاق على I ومن أجل كل x من I : $u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	u و v قابلتان الإشتقاق على I و من أجل كل x من I : $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

مرحلة بناء معارف

نتائج

✍ الدوال كثيرات الحدود قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

✍ الدوال الناطقة قابلة للإشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها

أمثلة

✍ لنعين مشتقة الدوال التالية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

❶ $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-8$ ❷ $f(x)=(x-2)\sqrt{x}$ ❸ $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x}$

الحل

❶ $f'(x)=4x^3-6x^2+8x$ ❷ $f'(x)=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}}$ ❸ $f'(x)=\dfrac{2x^2-6}{4x^2}$

مبرهنة

✍ a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$ ، u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$

ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث : $ax+b$ ينتمي إلى I .

✍ الدالة $f:\mapsto u(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على J ولدينا : $f'(x)=au'(ax+b)$

التقويم

أمثلة

✍ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\sin(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=a\cos(ax+b)$

✍ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\cos(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=-a\sin(ax+b)$

✍ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $(ax+b)^n$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=na(ax+b)^{n-1}$

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

1 عين مشتقة الدالة f

2 لتكن g و h الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(-x)$ و $h(x)=g(3x-1)$

✍ عين $g'(x)$ و $h'(x)$ دون تعين $g(x)$ و $h(x)$

الحل

1 الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'(x^2+1)-(x^2+1)'(2x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

2 ✍ الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x)=-f'(-x)=\dfrac{2x^2+2x-2}{(x^2+1)^2}$

✍ الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة h' حيث :

$$h'(x)=3g'(3x-1)=\frac{2(3x-1)^2+2(3x-1)-2}{((3x-1)^2+1)^2}=\frac{18x^2+4x-2}{(9x^2-6x+2)^2}$$

تمارين منزلية : تمرين 13 و 17 و 24 صفحة 59 — 60

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : ساعة ونصف.
الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حساب مشتق الدالة مركب

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة : حساب مشتق الدالة مركب: $\sqrt{u(x)}$ ، $\frac{1}{u(x)^n}$ ، $u(x)^n$
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** التذكير بتفكيك دالة و تركيب دالة و مشتقات الدوال $x \mapsto f(ax+b)$ **نشاط مقترح** f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 3$. 1 عيّن عبارة الدالة $(f \circ g)(x)$. 2 أحسب $f'(x)$ ، $g'(x)$ و $(f \circ g)'(x)$. 3 قارن بين $(f \circ g)'(x)$ و $g'(x)f'(g(x))$	
مرحلة بـنـاء معـارف	**مناقشة النشاط** لدينا : $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3)$. إذن $(f \circ g)(x) = (x+3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$. لدينا: $f'(x) = 2x$ و $g'(x) = 1$ و $(f \circ g)'(x) = 2x + 6$. **المقارنة بين** $(f \circ g)'(x)$ و $g'(x)f'(g(x))$ لدينا: $g'(x)f'(g(x)) = 1f'(x+3) = 1[2(x+3)] = 2x + 6$ ومنه : $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$ **مشتق الدالة مركب** **مبرهنـة** إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، و إذا قبلت الدالة v الإشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ قابلة للإشتقاق على I ، و لدينا من أجل كل x من I $[v(u(x))]' = u'(x)v'(u(x))$ **مـــثال** لتكن الدالة العددية f المعرفةعلى $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. نضع : $u(x) = x^2 + 1$ و $v(x) = \sqrt{x}$. ومنه : $f(x) = (v \circ u)(x)$ و $[v(u(x))]' = u'(x)v'(u(x))$. لدينا: $u'(x) = 2x$ و $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. إذن $f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$	

المشتقات المتتابعة

تعريف

f دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ ، f' دالتها المشتقة على هذا المجال.

✍ إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و يرمز لها بالرمز f'' أو $f^{(2)}$.

وهكذا إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق n مرة فإن دالتها المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $f^{(n)}$.

مثــال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$

لدينا: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1$ ، $f''(x) = 12x^2 - 6$ ، $f^{(3)}(x) = 24x$ و $f^{(4)}(x) = 24$

مــلاحظة: f دالة ، n عدد طبيعي غير معدوم .

✍ f^n هي الدالة f قوى العدد n

✍ $f^{(n)}$ هي مشتقة ذات الرتبة n (المشتقة النونية)

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \cos x$

1 عيّن الدوال المشتقة المتتابعة f' ، f'' ، f''' ، $f^{(4)}$ و $f^{(5)}$.

2 خمن حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$ المشتقة ذات المرتبة n.

الحل

❶ **تعيين الدوال المشتقة المتتابعة**

من أجل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = -\sin(x)$ ، $f''(x) = -\cos(x)$ ، $f'''(x) = \sin(x)$ ، $f^{(4)} = \cos(x)$

$f^{(5)} = -\sin(x)$

❷ **تخمين حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$**

✍ من أجل $n = 2k + 1$ نجد : $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sin(x)$ حيث $k \in \mathbb{N}$

✍ من أجل $n = 2k$ نجد : $f^{(2k+2)}(x) = (-1)^{k+1}\cos(x)$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التطبيقات

❶ مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

مبرهنــة

✍ إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ و كانت u موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ قابلة للإشتقاق على I ، ولدينا من أجل كل x من I $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

مرحلة بـنـــاء متعــــارف

البرهان

نضع $f(x)=\sqrt{u(x)}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ ومنه $f(x)=v\circ u$

لدينا u قابلة للإشتقاق على I من $\mathbb{R}$ وموجبة أي $u(x)>0$ أي $u(x)\in\,]0;+\infty[$

إذن f قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة f' حيث : $f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))$ لكن $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ ■

مــثال

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

لدينا: $f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

❷ مشتقة الدالة $x\mapsto (u(x))^n$

مبرهنة

n عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1 ، إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n قابلة للإشتقاق على I ولدينا : من أجل كل x من I $(u(x)^n)'=nu'(x)\,(u(x))^{n-1}$

البرهان

نضع $f(x)=(u(x))^n$ و $v(x)=x^n$ ومنه $f(x)=v\circ u$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$

الدالة v قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ($u(x)\in\mathbb{R}$ محققة دوما)

إذن f قابلة للإشتقاق على I

من أجل كل x من I $f'(x)=((v\circ u)(x))'=u'(x)v'(u(x))$ لكن $v'(x)=nx^{n-1}$

ومنه $v'(u(x))=n(u(x))^{n-1}$ ومنه $f'(x)=nu'(x)u(x)^{n-1}$ ■

مــثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^4+2x)^6$.

لدينا : $f'(x)=6(4x^3+2)(x^4+2x)^5$ أي : $f'(x)=(24x^2+12)(x^4+2x)^5$

❸ مشتقة الدالة $x\mapsto \dfrac{1}{(u(x))^n}$

مبرهنة

n عدد طبيعي غير معدوم ، إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ و كانت u لا تنعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا: من أجل كل x من I $\left(\dfrac{1}{u(x)^n}\right)'=-\dfrac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$

البرهان

نضع : $f(x)=\dfrac{1}{(u(x))^n}$

لدينا : $f=v\circ u$ حيث : $v(x)=\dfrac{1}{x}$

الدالة u قابلة للإشتقاق على I ومنه $x\mapsto (u(x))^n$ قابلة للإشتقاق على I ولا تنعدم على I ومنه حسب مبرهنة مشتقة مقلوب قابلة للإشتقاق

$\dfrac{1}{(u(x))^n}$ قابلة للإشتقاق على I أي f قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة f' حيث

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v'(u(x))\\
&= -\frac{(u(x)^n)'}{(u(x)^n)^2}\\
&= -\frac{nu'(x)u(x)^{n-1}}{(u(x))^{2n}}\\
&= -\frac{nu'(x)}{u(x)^{2n}u(x)^{-n+1}}\\
&= -\frac{nu'(x)}{u(x)^{2n-n+1}}\\
&= -\frac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}
\end{aligned}$$

ومنه $f'(x)=-\dfrac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$ ■

مرحلة بناء معارف

التقويم

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+3)^3}$

لدينا : $f'(x)=-\dfrac{6x}{(x^2+3)^4}$

تمارين منزلية : تمرين 78 صفحة 66 ++ تمرين 40 صفحة 61

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : تطبيقات الإشتقاقية

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة : إتجاه تغير دالة بإستعمال الدالة المشتقة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

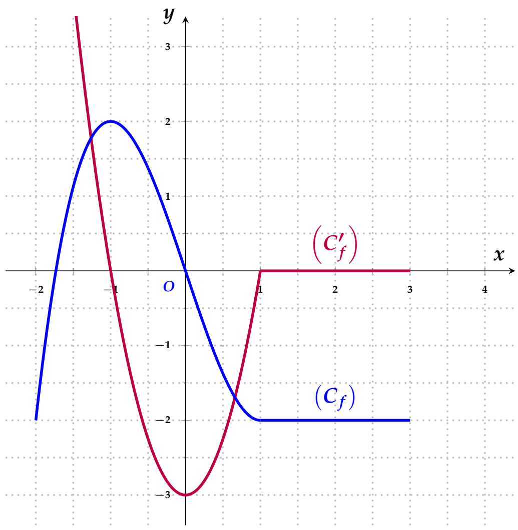
المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التهيئة النفسية :

نشاط مقترح

في الشكل المقابل (C_f) و (C'_f) منحنى الدالة f ودالتها المشتقة f'



1 أتمم الجدول التالي :

المجال	إشارة $f'(x)$	تغيرات الدالة f
$I=[-2;-1]$		
$J=[-1;1]$		
$k=[-1;3]$		

2 ذكر بالخاصية التي تربط إشارة $f'(x)$ بتغيرات الدالة f

مرحلة بـنـاء مـعـارف

إتجاه تغير دالة

❶ المشتقة و إتجاه التغير

مبرهنة

- f دالة قابلة للإشتقاق على مجال D_f من $\mathbb{R}$
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على D_f .
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)<0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على D_f .
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على D_f .

تطبيق : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2-4)^2$

- أدرس إتجاه تغير الدالة f

مرحلة بناء معارف

التقويم

الحل

f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث $f'(x) = 2(2x)(x^2-4)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[-2;0]$ و $[2;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ و $[0;2]$

ملاحظة:

✍ نقول أنّ الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f ، إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما على المجال D_f

✍ تبقى هذه المبرهنة صحيحة إذا إنعدمت المشتقة من أجل قيم معزولة في المجال المذكور

مثال

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $3x^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، لأن مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ مجموعة منتهية و هي $\{0\}$

تطبيق :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f ، أحسب $f(-1)$.

2 شكل جدول تغيرات الدالة f ثم إستنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 بإستعمال سؤال 1 أدرس إتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ $g(x) = \frac{1}{2} - 3x - \frac{4}{x}$

الحل

1 **دراسة إتجاه تغير الدالة f**

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و متناقصة على المجال $[0;2]$

حساب $f(-1)$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 0$

نهايات الدالة f

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$

2 جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- من جدول التغيرات f نستنتج أنّ $f(2)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f و $f(0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

إشارة $f(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3 دراسة إتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة g' حيث : $g'(x) = x - 3 + \frac{4}{x^2}$ ومنه

$$g'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

إشارة $g'(x)$

إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;0[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

تمارين منزلية : تمرين 11 و 12 و 13 صفحة 37 − 36

ملاحظات حول سير الدرس :

....

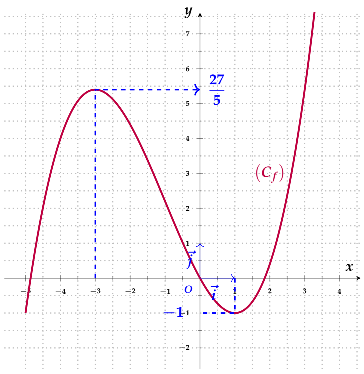
....

....

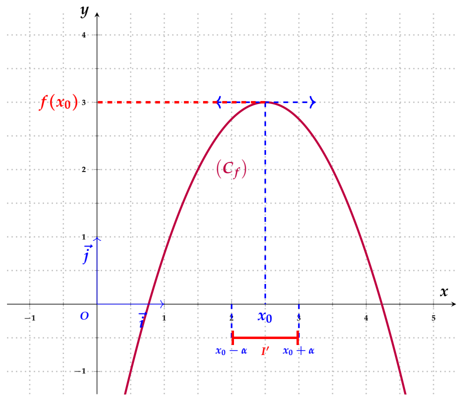
ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : تطبيقات الإشتقاقية(تابع)

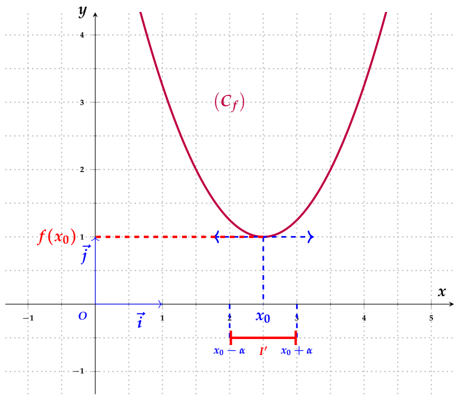
المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة : قيم الحدية المحلية لدالة، نقطة إنعطاف
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** **القيم الحدية المحلية:** **تعريف** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I . $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I' : $f(x) \leq f(x_0)$ $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I' : $f(x_0) \leq f(x)$ $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة يعني أن: $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى أو صغرى	
مرحلة بـــاء معـــارف	**مـــثال** لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-4;4]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 3x^2 - 9x)$ تمثيلها (C_f) موضح في الشكل المقابل نلاحظ أنّ : $\frac{27}{5}$ هي قيمة حدية محلية عظمى للدالة عند $x_0 = -3$ و -1 قيمة حدية محلية صغرى للدالة عند $x_1 = 1$  **مبرهنــة** لتكن الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة . إذا إنعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة x_0 من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I يشمل x_0. تقبل فيه f قيمة حدية $f(x_0)$ ، تسمى $f(x_0)$ قيمة حدية محلية .	

مرحلة بنـاء متـعـارف



من أجل كل x من I' : $f(x) \leq f(x_0)$



من أجل كل x من I' : $f(x_0) \leq f(x)$

مـلاحظة:

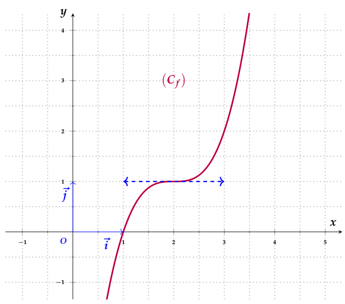
❶ النقطة $(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة حدية (الذروة) و المماس عند هذه النقطة موازيا لحامل محور الفواصل معادلته هي $y = f(x_0)$.

❷ إذا قبلت f قيمة حدية محلية عند x_0 فإن: $f'(x_0) = 0$

نقطة إنعطاف:

تعريف

نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني



مبرهنــة

✍ إذا إنعدمت الدالة المشتقة الثانية f'' عند x_0 مع تغير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0.

إذا إنعدمت الدالة المشتقة الأولى f' عند x_0 دون تغير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0.

التقويم

مـثال

✍ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3$ مشتقتها الأولى تنعدم عند $x_0 = 0$ ولا تغير إشارتها
إذن النقطة $A\,(0; f(0))$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f)

✍ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ مشتقتها الثانية تنعدم عند $x_0 = 1$ وتغير إشارتها.
إذن النقطة $A\,(0; g(0))$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g)

تمارين منزلية : تمرين 67 صفحة 64 و 70 صفحة 65

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة

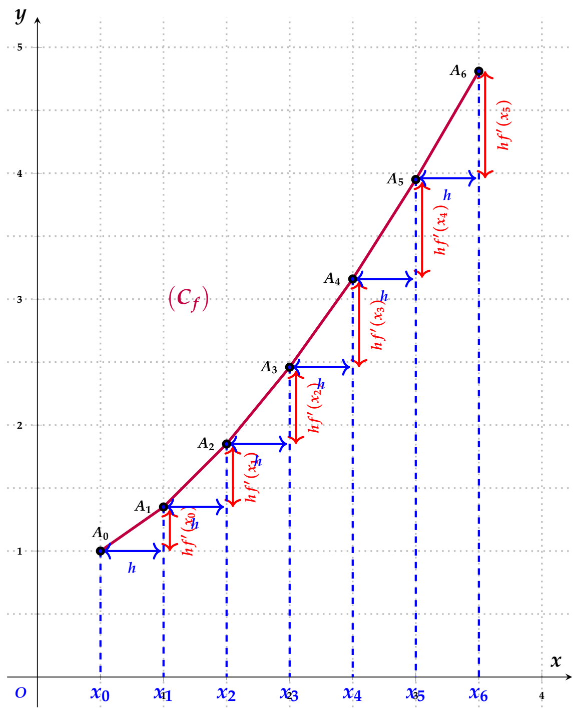
الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : التقريب التألفي

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لحل مشكلات
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** التذكير بأحسن تقريب تألفي لدالة بجوار عدد الحقيقي x_0 .	
مرحلة بناء معارف	**التقريب التألفي** **خاصية** f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$. إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$. من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لِـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f . **البـرهـان** ليكن x_0 من I و لدينا f قابلة للإشتقاق عند x_0 ومنه $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ بوضع : $\varepsilon(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$ يكون لدينا: $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$ إذن: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\varepsilon(h)+f'(x_0)$ ومنه $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ ■ **مـثال** لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$. بإستعمال التقريب التألفي للدالة f لنحسب القيمة المقربة إلى 10^{-2} للعدد $f(1,0001)$. لدينا: $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$ ، $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ و $f'(1)=1$. ومنه $f(1,0001)=f(1+0,0001)\approx f(1)+0,0001f'(1)$ ومنه $f(1,0001)\approx -0,50$ **مـلاحظة:** بوضع $x=x_0+h$ أحسن تقريب تألفي للدالة f يصبح كالتالي: $f(x)\approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. **مـثال** أحسن تقريب تألفي للدالة $x\mapsto\sqrt{x+1}$ بجوار 0 هي دالة تألفية $x\mapsto\dfrac{1}{2}x+1$. ونكتب : $\dfrac{1}{2}x+1\approx\sqrt{x+1}$ بجوار 0	

❶ طريقة اولر

تسمح طريقة أولر بانشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و$y_0 = f(x_0)$، ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا : $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$
انطلاقا من $A_0(x_0; f(x_0))$ ننشيء النقطة $A_1(x_1; f(x_1))$ حيث : $x_1 = x_0 + h$ و $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$ وبما أن $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ من أجل h قريب من 0 فإن $A_1(x_1; f(x_1))$ قريبة من C_f منحنى الدالة f
بنفس الطريقة يمكن إنشاء انطلاقا من A_1 النقطة $A_2(x_1 + h, f(x_1) + hf'(x_1))$، وهكذا يمكن إنشاء النقط $A_n(x_n, y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \succeq 1$، بربط النقط A_0 ، A_1 ، A_2،.... نحصل على تمثيل بياني تقريبي للدالة f مرتبط بإختيار h الذي يسمى الخطوة وكلما كانت الخطوة أقرب إلى الصفر نحصل على تمثيل أكثر دقة



مرحلة بناء متعارف

❷ الكتابة التفاضلية

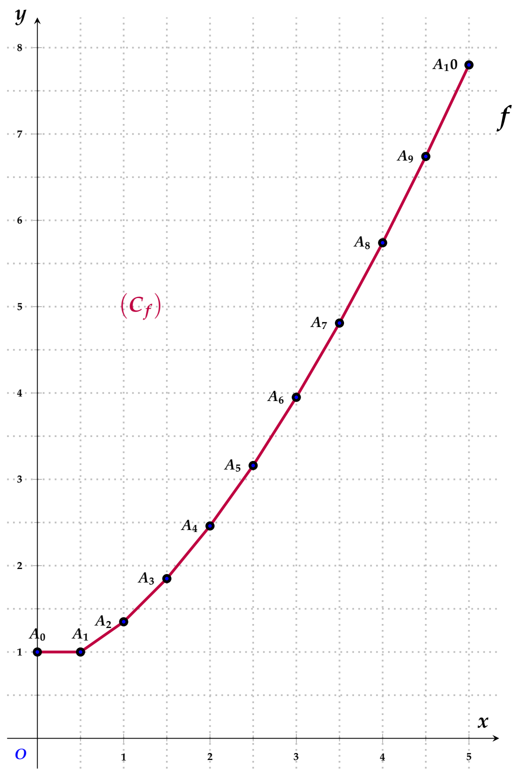
بوضع $\Delta x = (x+h) - x$ و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ تكتب المساواة : $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + hg(h)$ كما يلي : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x g(\Delta x)$ومنه التقريب التآلفي : $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0
نصطلح الصياغة التفاضلية التالية : $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dy$ يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية
وبصفة عامة نكتب $\dfrac{df}{dx}$ بدلا من f' و$\dfrac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' وهكذا $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$

التقويم

❸ مثال تطبيقي

أنشئ منحنى تقريبي بطريقة أولر للدالة f على المجال $[0;5]$ حيث $f(1) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{x}$
نختار مثلا الخطوة $h = 0,5$ و نقوم بمسح المجال $[0;5]$

لتكن $A_0(0;1)$ ولتكن A_1 النقطة ذات الإحداثيات $(0+0,5; f(0+0,5))$ أي $(0,5; f(0,5))$
لدينا: $f(0,5) \approx f(0+0,5) + 0,5f'(0) \approx 1 + 0,5(0) \approx 1$
ومنه $A_1(0,5;1)$
لتكن $A_2(0,5+0,5; f(0,5+0,5))$
$f(0,5+0,5) \approx f(0,5) + (0,5)f'(0,5) \approx 1,35$
ومنه : $A_2(1;1,35)$
لتكن $A_3(1,5; f(1,5))$
$f(1,5) = f(1+0,5) \approx f(1) + (0,5)f'(1) \approx 1,85$
ومنه : $A_3(1,5;1,85)$
لتكن $A_4(2; f(2))$
$f(2) = f(1,5+0,5) \approx f(1,5) + (0,5)f'(1,5) \approx 1,85$
ومنه : $A_4(2;2,46)$
لتكن $A_5(2,5; f(2,5))$
$f(2,5) = f(2+0,5) \approx f(2) + (0,5)f'(2) \approx 3,16$
ومنه : $A_5(2,5;3,16)$
لتكن $A_6(3; f(3))$
$f(3) = f(2,5+0,5) \approx f(2,5) + (0,5)f'(2,5) \approx 3,95$
ومنه : $A_6(3;3,95)$



لتكن $A_7(3,5;f(3,5))$ ، $f(3,5) = f(3+0,5) \approx f(3) + (0,5)f'(3) \approx 4,81$ ومنه : $A_7(3,5;4,81)$
لتكن $A_8(4;f(4))$ ، $f(4) = f(3,5+0,5) \approx f(3,5) + (0,5)f'(3,5) \approx 5,74$ ومنه : $A_8(4;5,74)$
لتكن $A_9(4,5;f(4,5))$ ، $f(4,5) = f(4+0,5) \approx f(4) + (0,5)f'(4) \approx 6,74$ ومنه : $A_9(4,5;6,74)$
لتكن $A_{10}(5;f(5))$ ، $f(5) = f(4,5+0,5) \approx f(4,5) + (0,5)f'(4,5) \approx 7,81$ ومنه : $A_{10}(5;7,81)$

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

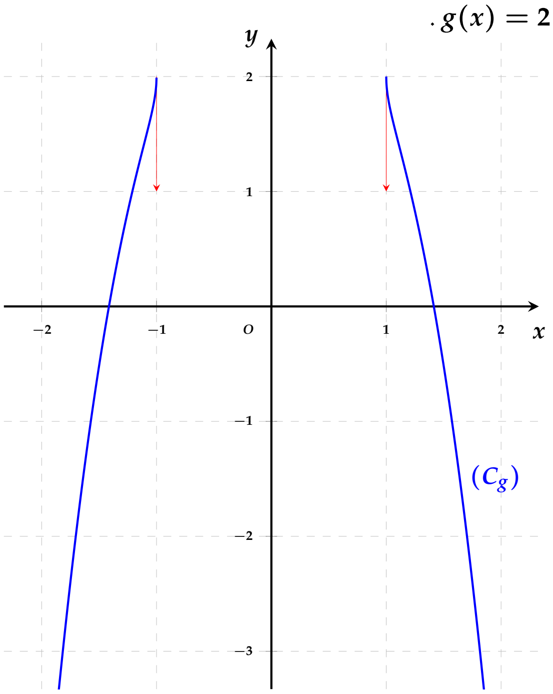
....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد — المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : توظيف المشتقات لحل المشكلات

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة : دراسة إتجاه تغير دوال كثير الحدود، ناطقة، الصماء
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

❶ دراسة دالة صماء:



I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $D =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$.
(C_g) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المقابل .

1 أحسب : $g\left(\sqrt{2}\right)$ و $g\left(-\sqrt{2}\right)$.

2 بقراءة بيانية :

أ - عيّن : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب - هل الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

ج - هل الدالة g قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين ؟ برّر .

د - عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$
بـ: $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أ - أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 1 من اليمين وعند القيمة -1 من اليسار . فسّر النتائج بيانيًا.

ب - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 بيّن أنه من أجل كل $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

3 أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

4 بيّن أن النقطة $I(0,1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

5 أنشئ (C_f) .

❷ دراسة دالة كثيرة الحدود + دالة ناطقة :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

1 أُدرس تغيرات الدالة g .

2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α
في المجال $[-1;0]$.

3 عيّن إِشارة $g(x)$ حسب قيم x .

4 بيّن أن : $\alpha^2 = -3 - \dfrac{4}{\alpha - 1}$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الوحدة $2cm$)

1 بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$$

◁ أُدرس تغيرات الدالة f .

2 بيّن أن : $f(\alpha) = \alpha - \dfrac{2}{\alpha^2 + 1}$.

◁ استنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$ باستعمال العدد α .

3 عيّن الأعداد a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{x^2 + 1}$.

أ) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) مستقيمًا مقاربًا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

ب) أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4 تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

◁ بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتهما.

5 أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 .

◁ ماذا تستنتج بالنسبة للمماس (T) والمستقيم (Δ) ؟

6 أنشئ (C_f) ، (T) ، (Δ) و المستقيمات المقاربة.

7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة :
$m(x^2+1) + 2 = 0$.

تصحيح التمرين رقم 01

التمرين الأول :

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال: $D =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

بـ : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$.

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1)

$$g(\sqrt{2}) = 2-\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}$$
$$= 2-2\sqrt{2-1} = 2-2 = 0$$
$$g\left(-\sqrt{2}\right) = 2-\left(-\sqrt{2}\right)^2\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2-1}$$
$$= 2-2\sqrt{2-1} = 2-2 = 0$$

2) بقراءة بيانية :

◄ تعيين النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

◄ الدالة g غير مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنه لا يمكن رسم (C_g) بدون رفع القلم على $\mathbb{R}$.

فهي مستمرة على المجال $]-\infty;-1]$ و $[2;+\infty[$.

◄ الدالة g غير قابلة للإشتقاق عند $1-$ من اليمين لأنها تقبل مماسًا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=1$ متجه نحو الأسفل أي :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\infty$$

◄ تعيين إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	▨	▨	$+$	0	$-$	

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

بـ : $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)

◄ دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 1 من اليمين:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 - 0}{x-1}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} + \frac{-x+1}{x-1}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} - 1$$
$$= \frac{0}{0} - 1 \quad (\text{حالة عدم التعيين})$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} \times \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} - 1$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2(x^2-1)}{x(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{x\cancel{(x-1)}\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \frac{2(2)}{0^+} = +\infty$$

ومنه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين وتقبل مماسا موازيا لمحور التراتيب موجه للأعلى معادلته $x=1$.

دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $1-$ من اليسار:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 - 2}{x+1}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{2\sqrt{x^2-1} - x - 1}{x(x+1)}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)} + \frac{-x-1}{x(x+1)}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)} - \frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+1)}}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{0}{0} + 1 \quad (\text{حالة عدم التعيين})$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} + 1$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{2(x-1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}\sqrt{x^2-1}} + 1$$
$$= \frac{2(-2)}{-1(0^+)} + 1 = \frac{4}{0^+} + 1$$
$$= +\infty$$

ومنه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند $1-$ من اليسار وتقبل مماسا موازيا لمحور التراتيب موجه للأسفل معادلته $x=-1$.

◄ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$$
$$= \frac{+\infty}{+\infty} - \infty \quad (\text{حالة عدم التعيين})$$
$$= \frac{2\overset{=x}{\cancel{|x|}}\sqrt{1-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}}}{\cancel{x}} - x + 1$$
$$= 2\cdot 1 - \infty + 1 = -\infty$$

◄ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$$
$$= \frac{+\infty}{-\infty} + \infty \quad (\text{حالة عدم التعيين})$$
$$= \frac{2\overset{=-x}{\cancel{|x|}}\sqrt{1-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}}}{\cancel{x}} - x + 1$$
$$= -2\cdot 1 + \infty + 1 = +\infty$$

2) نبين أنه من أجل كل $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

$$f'(x) = \frac{2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot x - 1\cdot 2\sqrt{x^2-1}}{x^2} - 1$$
$$= \frac{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2\sqrt{x^2-1} - x^2}{x^2}$$
$$= \frac{\frac{2x^2 - 2\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-1} - x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 2(x^2-1) - x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^2} + 2 \cancel{-2x^2} - x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \frac{2 - x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

3) إنشاء جدول تغيرات الدالة f :

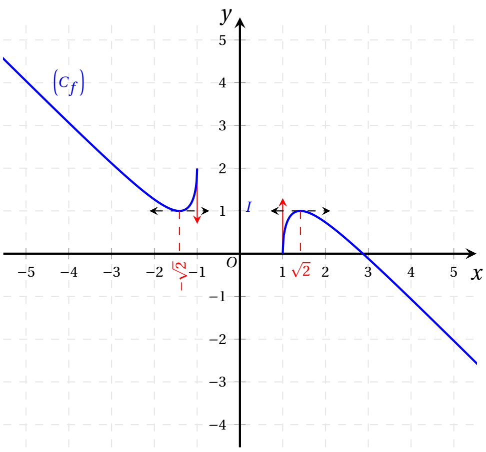
إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $(x^2\sqrt{x^2-1} > 0)$ من أجل كل x من D_f .

ومنه :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	▨	▨	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	▨	▨	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	2	0	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

4) إثبات أن النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر لـ (C_f) :

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$
$$f(2\cdot 0 - x) + f(x) = 2 \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 2$$
$$\frac{2\sqrt{(-x)^2-1}}{-x} - (-x) + 1 + \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$$
$$-\cancel{\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}} + \cancel{x} + 1 + \cancel{\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}} \cancel{-x} + 1 = 2$$



دراسة دالة كثيرة حدود+دالة ناطقة

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

الجزء الأول :

1 أ) حساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^3\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3\right) = +\infty$$

◄ حساب $g'(x)$ ودراسة اشارتها ثم تشكيل جدول التغيرات للدالة g
الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g'
معرفة بـ : $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

دراسة إشارتها :
نحل المعادلة $g'(x) = 0$ أي $3x^2 - 2x + 3 = 0$
نحسب المميز Δ مع $a = 3$ ، $b = -2$ و $c = 3$
لدينا: $\Delta = b^2 - 4ac = -32 < 0$ وبالتالي المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ وإشارة $g'(x)$ من إشارة a .

جدول التغيرات: لدينا :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1;0]$:
لدينا $g(-1) = -0.07$ ، $g(0) = 1$ و $g(-1)\times g(0) < 0$
و g دالة مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على المجال $[0;1]$
إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 1$

◄ إعطاء حصر لـ α سعته 10^{-2} :
نستعين بالجدول التالي نوضح فيه كل الخطوات و مراحل الحصر :

الخطوة	b	a	$\frac{a+b}{2}$	$g(a)$	$g(b)$	$g\left(\frac{a+b}{2}\right)$	السعة
01	-1	0	-0.5	-4	1	-0.88	1
02	-0.5	0	-0.25	-0.88	1	0.17	0.5
03	-0.5	-0.25	-0.38	-0.88	0.17	-0.34	0.25
04	-0.38	-0.25	-0.32	-0.34	0.17	-0.01	0.13
05	-0.32	-0.25	-0.29	-0.01	0.17	0.02	0.07
06	-0.32	-0.29	-0.31	-0.01	0.02	-0.06	0.03
07	-031	-0.29	-0.30	-0.06	0.02	-0.02	0.02
08	-030	-0.29		-0.02	0.02		0.01

ومنه نلاحظ أن $g(-0.30) = -0.02$
و $g(-0.29) = 0.02$ ومنه $g(a)\times g(b) < 0$
وبالتالي يمكن أن نعتبر :
$-0.30 < \alpha < -0.29$.

جـ) تعيين إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2 تبيان أن : $\alpha^2 = -3 - \dfrac{4}{\alpha - 1}$:
نعلم أن $g(\alpha) = 0$.
ومنه $\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$
وبالتالي :

$$\alpha^3 - \alpha^2 = -3\alpha - 1$$
$$\alpha^2(\alpha - 1) = -3\alpha + 3 - 4$$
$$\alpha^2(\alpha - 1) = -3(\alpha - 1) - 4$$
$$\alpha^2 = \frac{-3\cancel{(\alpha-1)}}{\cancel{(\alpha-1)}} - \frac{4}{(\alpha - 1)} = -3 - \frac{4}{(\alpha - 1)}$$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$

1 تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$
الدالة f قابلة للإشتقاق عند كل قيمة من $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' :

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2+1) - (x^3+x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(3x^4 + x^2 + 3x^2 + 1) - (2x^4 + 2x^2 - 4x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^4 + x^2 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - 2x^2 + 4x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 4x + 1}{(x^2+1)^2}$$

لدينا من جهة أخرى :

$$(x+1)g(x) = (x+1)(x^3 - x^2 + 3x + 1)$$
$$= x^4 - x^3 + 3x^2 + x + x^3 - x^2 + 3x + 1$$
$$= x^4 + 2x^2 + 4x + 1$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
ب) بما أن $(x^2+1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $-(x+1)g(x)$.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x-2}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

② تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$

$$f(x) = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{(ax+b)(x^2+1)+cx+d}{x^2+1} = \frac{ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d}{x^2+1} = \frac{x^2+x-2}{x^2+1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ a+c=1 \\ b+d=-2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ 1+c=1 \\ 0+d=-2 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=-2 \end{cases}$ ومنه : $f(x) = x-2\frac{2}{x^2+1}$

أ) نبيّن أن للمنحنى (C_f) مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 0$

ومنه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y]$. لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-y = x-\frac{2}{x^2+1}-x$$

ومنه $f(x)-y = -\frac{2}{x^2+1} < 0$.

إذن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (Δ) .

③ تبيان أن $f(\alpha) = \alpha-\frac{2}{\alpha^2+1}$:

لدينا: $f(\alpha) = \frac{\alpha^3+\alpha-2}{\alpha^2+1}$ ومنه $f(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha^2+1)-2}{\alpha^2+1}$

وبالتالي: $f(\alpha) = \alpha-\frac{2}{\alpha^2+1}$.

◄ استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ ، باستعمال حصر العدد α.

لدينا $-0.30 < \alpha < -0.29$

ومنه $(-0.29)^2 < \alpha^2 < (-0.30)^2$

$\Leftrightarrow 0.08 < \alpha^2 < 0.09$

$\Leftrightarrow 1.08 < 1+\alpha^2 < 1.09$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.09} < \frac{1}{\alpha^2+1} < \frac{1}{1.08}$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{1.08} < \frac{-2}{\alpha^2+1} < \frac{-2}{1.09}$

$\Leftrightarrow -0.30-\frac{-2}{1.08} < \alpha-\frac{-2}{\alpha^2+1} < -0.29-\frac{-2}{1.09}$

وبالتالي: $-2.15 < f(\alpha) < -2.12$

④ تحقق أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = 4\times\frac{-3x^2+1}{(x^2+1)^3}$

نعيد حساب المشتقة الأولى باستعمال العبارة الثانية للدالة f

أي $f(x) = x-\frac{2}{x^2+1}$

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 1-\frac{-2\times 2x}{(x^2+1)^2}$

ومنه $f'(x) = 1+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

نحسب الآن المشتقة الثانية f'' :

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2.4-4x.2x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{4(x^2+1)\left[(x^2+1)-2x^2\right]}{(x^2+1)^4} = \frac{4\left[x^2+x-4x^2\right]}{(x^2+1)^3} = 4\times\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}$$

◄ نبيّن أن للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعين إحداثياهما.

نحل المعادلة $f''(x) = 0$ وهذا يعني $-3x^2+1 = 0$

نحسب المميز $\Delta = b^2-4ac$ مع $a=-3, b=0, c=1$

ومنه $\Delta = 0^2-4(-3)(1) = 12 > 0$ ، المعادلة تقبل حلين x_1 ، x_2 :

$$x_1 = \frac{0-\sqrt{12}}{2\times -3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{0+\sqrt{12}}{2\times -3} = \frac{+2\sqrt{3}}{-6} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

نستنتج إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

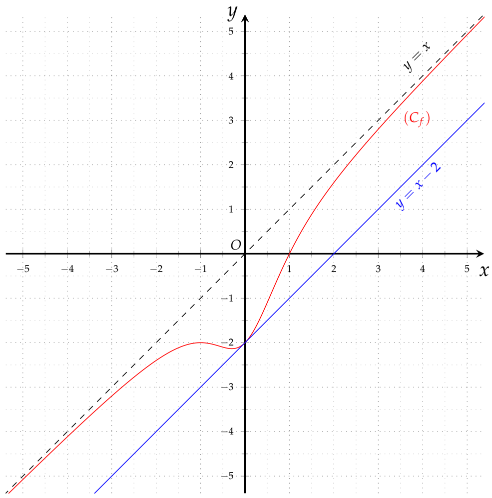
بما أن المشتقة الثانية تنعدم عند قيمتين وتغير إشارتها نستنتج أن للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف إحداثياهما $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

⑤ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 :

$y = f'(x_0)(x-x_0)f(x_0)$ ومنه $y = -1(x-0)+(-2)$ ومنه $y = x-2$.

◄ المماس (T) والمستقيم (Δ) لهما نفس معامل التوجيه 1 ومنه نستنتج أن المستقيمين متوازيان.

6. إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f) :



7. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $m(x^2+1)+2=0$:

لدينا : $m(x^2+1)+2=0$ وبالتالي $m(x^2+1)=-2$

ومنه $m=\dfrac{-2}{x^2+1}$

أي : $m+x=x+\dfrac{-2}{x^2+1}$

ومنه $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=x+m$.

نلاحظ أن المستقيم (Δ_m) يوازي كل من المستقيمين (T) و (Δ) لأن لهم نفس معامل التوجيه.

- من أجل $m < -2$ فإن المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$
- من أجل $m = -2$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد $m = -2$
- من أجل $-2 < m < 0$ فإن المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة.
- من أجل $m \geq 0$ فإن المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد	**الوحدة التعلمية:** الإشتقاقية و الإستمرارية
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا	**ميدان التعلم:** التحليل
المدة : 2 سـاعة	**موضوع الحصة :** دراسة الدوال المثلثية

المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دوال المألوفة

الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin(x)$ ، $x \mapsto \cos(x)$ ، $x \mapsto a\sin(bx+c)$

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية :** التذكير بدوال cos ، sin ، tan و دساتير الجمع	

دراسة الدالة sin و الدالة cos

نشاط مقترح

مرحلة بناء معارف

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لـ f و g على الترتيب في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

✍ نقتصر دراسة الدالتين على المجال $[-\pi;\pi]$

1 إعتماداعلى الدائرة المثلثية حدد إشارة $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$.

2 (بإستعمال دساتير الجمع)

- أدرس شفاعة الدالتين (فسرالنتيجة هندسيا)
- أثبت أن f و g دوريتين و دورهما هو 2π

3 أحسب $f'(x)$ و $g'(x)$.

4 إستنتج إتجاه تغير f و g على مجال $[0;\pi]$ ، ثم شكل جدول تغيرات f و g

5 أنشئ (C_f) و (C_g) على مجال $[0;\pi]$ ثم إستنتج الإنشاء على المجال $[-\pi;0]$

6 إشرح كيف يتم إنشاء (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$

مناقشة النشاط

1 إشار $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$

x	0		π
$f(x)$		$+$	

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2 دراسة شفاعة الدالتين

- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$

$\cos(-x) = \cos(0-x) = \cos(0)\cos(x) + \sin(0)\sin(x) = 1 \times \cos(x) + 0 \times \sin(x) = \cos(x)$

ومنه $\cos(-x) = \cos(x)$ إذن الدالة cos دالة زوجية و منحناها البياني متناضر بالنسبة لمحور التراتيب

- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$

$\sin(-x) = \sin(0-x) = \sin(0)\cos(x) - \sin(x)\cos(0) = 0 - \sin(x) \times 1 = -\sin(x)$

ومنه $\sin(-x) = -\sin(x)$ إذن الدالة sin دالة فردية و منحناها البياني متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم

- **إثبات أن الدالتين f و g دالتين دوريتين**
- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x) \times 1 - \sin(x) \times 0$$

ومنه $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ إذن الدالة $\cos$ دورية و دورها 2π

- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\sin(2\pi) = \sin(x) \times 1 + \cos(x) \times 0$$

ومنه $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ إذن الدالة $\sin$ دورية و دورها 2π

3 • الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث : $f'(x) = \cos(x)$
- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x) = -\sin(x)$

4 **إستنتاج أتجاه تغير f و g**
- لدينا : $f'(x) > 0$ من أجل $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ و $f'(x) < 0$ من أجل $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; \frac{\pi}{2}]$ و متناقصة تماما على المجال $[\frac{\pi}{2}; \pi]$
- لدينا : $g'(x) < 0$ من أجل $x \in [0; \pi]$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0; \pi]$

جدول التغيرات

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

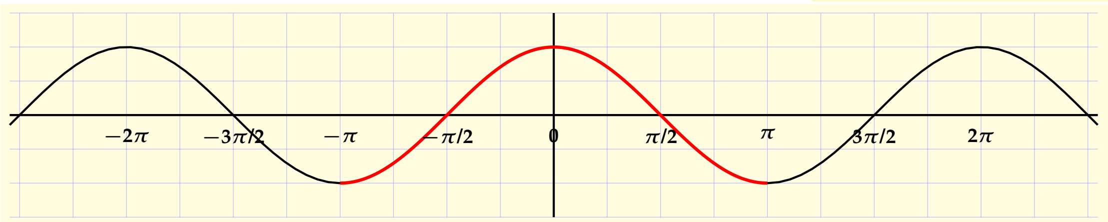
x	0		π
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	-1

5 **التمثيل البياني**

❖ الدالة $\cos$

✍ ننشيء التمثيل البياني للدالة "cos" على المجال $[0; \pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.
نتمم هذا الرسم على المجال $[-\pi; 0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة "cos" زوجية (الجزء الأحمر)
ومنه نستنتج بيان الدالة cos على $\mathbb{R}$ وذلك بإنجاز "دوريات" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

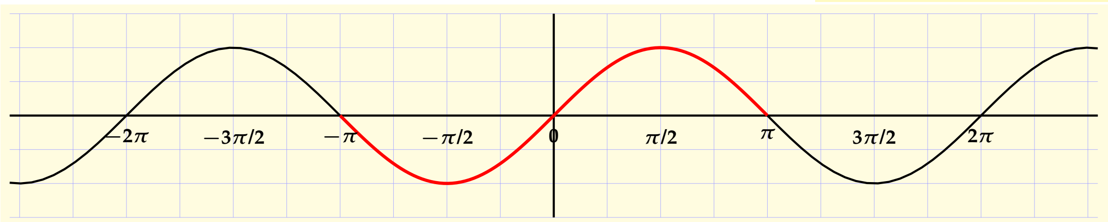
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$



❖ الدالة $\sin$

✍ ننشيء التمثيل البياني للدالة "sin" على المجال $[0; \pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.
نتمم هذا الرسم على المجال $[-\pi; 0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة "sin" فردية (الجزء الأحمر)
ومنه نستنتج بيان الدالة "sin" على $\mathbb{R}$ وذلك بإنجاز "دوريات" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$



دراسة الدالة tan

تعريف

الدالة ظل و التي نرمز إليها بالرمز " tan " معرفة بـ: $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ من أجل كل عدد حقيقي x بحيث x يختلف عن $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح

مرحلة بــنــاء مــعــارف

خواص

❶ دراسة شفعية الدالة

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح

لدينا: $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

ومنه الدالة ظل دالة فردية .

❷ لنبين أنّ الدلة دورية و دورها π

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

إذن tan دالة دورية و دورها π

❸ دراسة الدالة الظل

الدالة الظل دورية و دورها π يكفي دراستها على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\cap D_f$ أي يكفي دراستها على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

✍ الدالة الظل دالة فردية يكفي دراستها على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

- **دراسة الدالة على المجل** $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0+} = +\infty \ ; \ \tan(0) = \frac{sin(0)}{\cos(0)} = 0$$

المستقيم ذو المعادلة $x = \dfrac{\pi}{2}$ مقارب للمنحى دالة الظل

- **مشتقة الدالة الظل**

الدالة الظل قابلة للإشتقاق على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ودالتها المشتقة $\tan'$ حيث :

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x)\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

ومنه $\tan'(x) > 0$ أي الدالة ظل متزايدة تماما على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

- **جدول تغيرات الدالة الظل**

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	$+$	‖
$\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖

- **التمثيل البياني للدالة الظل**

التقويم

تمارين منزلية : تمرين 95 صفحة 70

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

ثانوية : الشهيد مصطفى بن بولعيد – المعاضيد
المستوى : 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ريا
المدة : 1 ساعة
الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : دراسة الدوال المثلثية(تابع)

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin(x)$ ، $x \mapsto \cos(x)$ ، $x \mapsto a\sin(bx+c)$
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر المدرس	المدة
التقويم	(see below)	

حل تمرين 95 صفحة 70

1 أ) إثبات أنّ الدالة f ورية دورها $2pi$.

من أجل كل x و $x+2\pi$ من $\mathbb{R}$ يكون :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{1}{2}\cos 2(x+2\pi) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}(2x+4\pi) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن: f دورية ، دورها $T = 2\pi$

ب) **إثبات أنّ محور التراتيب هو محور تناظر:**

من أجل x و $-x$ من $\mathbb{R}$ يكون :

$$f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos x = f(x)$$

إذن: الدالة f زوجية و بالتالي (C) يقبل محور تناظر معادلته : $x = 0$

2 أ) تعين $f'(x)$

f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و يكون $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x)$

ب) لدينا: $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(x)(1 - 2\cos(x))$

ج) دراسة إشارة $f'(x)$ على $[0;\pi]$

$f'(x) = 0$ تكافئ: $\sin x = 0)$ أو $\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = k\pi$ أو $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3}$ ومنه

$x \in \left\{0; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}$ و يكون

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$1-2\cos x$		$-$	0	$+$	
$\sin x$	0	$+$		$+$	0
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

• جدول النغيرات

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	$-\frac{3}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{3}{2}$

تقويم

4 • **رسم المنحنى على** $[-\pi;\pi]$

نرسم (C) على المجال $[0;\pi]$ ثم نأخذ نظيره بالنسبة لمحور التراتيب على المجال $[-\pi;0]$

يمكن رسم (C) على $\mathbb{R}$ و ذلك بإستعمال الإنسحاب الذي شعاعه $k\pi\overrightarrow{i}$.

حل تمرين 63 صفحة 69

إثبات أنّ التسارع متناسب مع فاصلة المتحرك عند اللحظة t .

لدينا: $x(t)=3\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$ حيث $t\in[0;+\infty[$

فتكون السرعة اللحظية عند t هي : $x'(t)=3\left[-2\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-6\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

و التسارع هو : $x''(t)=-6\left[2\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-12\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

النتيجة : $x''(t)=-4\left[3\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-4x(t)$ أي أن تسارع المترحك يكون متناسبا مع فاصلة المتحرك .

ملاحظات حول سير الدرس :

....

....

....