RECHERCHE D'UN CRITÈRE D'APPARTENANCE À UNE DROITE

Une droite (z'z) est définie par les points A(-3 ;0) et B(0 ;2).
On cherche à exprimer qu'un point M(x ;y) est un point de la droite.

Un tel point M peut occuper trois positions différentes :

(1) : **x et y sont positifs** ; M est sur la demi-droite [Bz)
(2) : **x est positif et y est négatif** ; M est un point du segment [AB]
(3) : **x et y sont négatifs** ; M est sur la demi-droite [Az').

A,B,M étant alignés ; (MH) et (BO) étant parallèles, on a , d'après la propriété de Thalès :

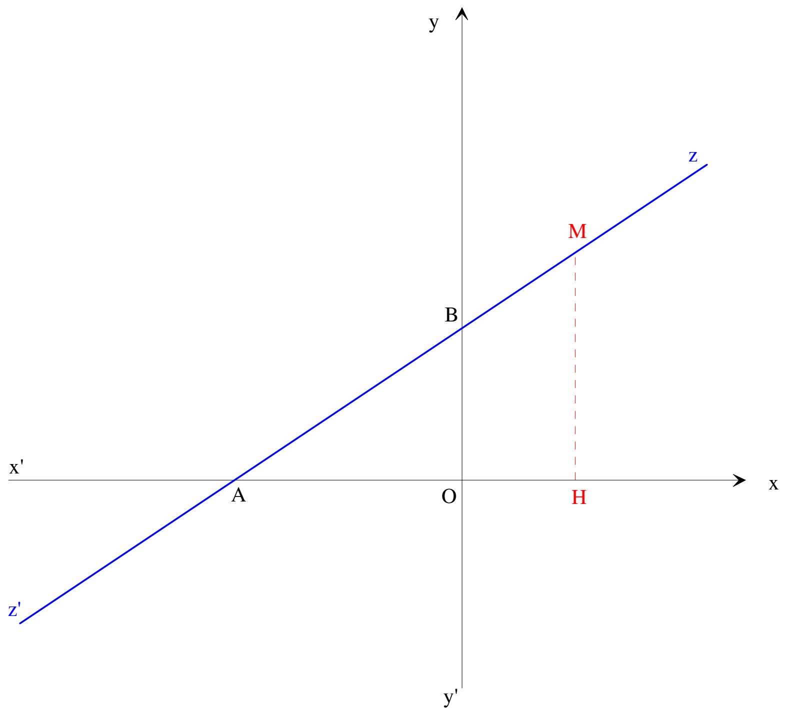
…………………………………………..

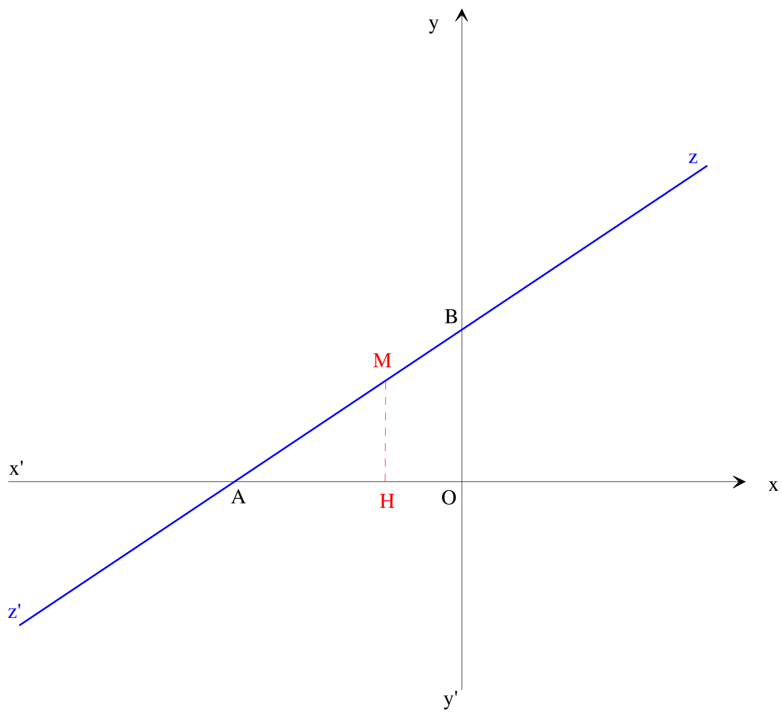
Or:

AO =….... BO = ………..
MH =……. AH = …………………………..

Donc :

……………………………………………………………….
……………………………………………………………….
……………………………………………………………….





Même raisonnement que précédemment :
mais avec :

MH = ………..

………………………………………………………………

AH = ……………………………………………………...

Donc :

………………………………………………………………
………………………………………………………………
………………………………………………………………
………………………………………………………………
………………………………………………………………

Dans ce troisième cas,

....

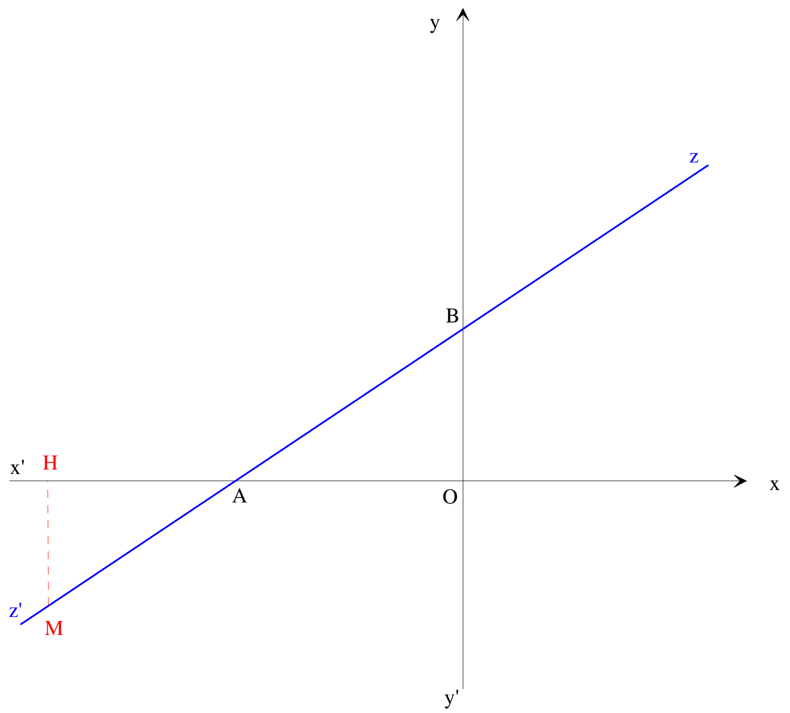
....

MH = ...

....

AH = ...

Donc :



....

....

....

....

....

....

CONCLUSION :

Les coordonnées de tout point M(x ;y) de la droite (z'z) vérifient l'égalité :

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x + 2}$$

L'APPLICATION AFFINE

❶ - Exemple d'application affine

Voici un tableau de correspondance entre les degrés Celsius (°C) et les degrés Fahrenheit (°F).

x (°C)	-20	-5	15	20	33	50
y (°F)	-4	23	59	68	91,4	122

Ce n'est pas un tableau de proportionnalité car y n'est pas associé à x par une application linéaire.

$\frac{y}{x}$ n'est pas une valeur constante.

Voici un tableau des accroissements de températures

$x_1 - x_2$ (°C)	15	20	5	13	17
$y_1 - y_2$ (°F)	27	36	9	23,4	30,6

Le passage de -20 °C à -5°C correspond à un accroissement de $-5-(-20)=-5+20=15°C$

L'accroissement correspondant est : $23-(-4)=23+4=27°F$

Ce tableau est un tableau de proportionnalité car : $\frac{27}{15}=\frac{36}{20}=\frac{9}{5}=\frac{23,4}{13}=\frac{30,6}{17}=\boxed{1,8}$

Cela signifie que : $\boxed{\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1,8}$ quelles que soient les températures x_1 et x_2.

En choisissant, par exemple : $x_1 = x$ et $x_2 = 20$, on obtient : $y_1 = y$ et $y_2 = 68$.

L'égalité précédente s'écrit : $\frac{y-68}{x-20}=1,8$

$y-68=1,8(x-20)$

En exprimant y en fonction de x : $y=1,8x-36+68$

$\boxed{y=1,8x+32}$

On peut, avec cette formule, vérifier toutes les valeurs du premier tableau.
par exemple : *si* $x=15$ *alors* $y=1,8\times15+32=27+32=59$

On peut aussi utiliser cette formule pour calculer d'autres températures :

Températures de solidification de l'eau :

$x = 0°C$ $y=1,8\times0+32=32°F$

Températures d'ébullition de l'eau :

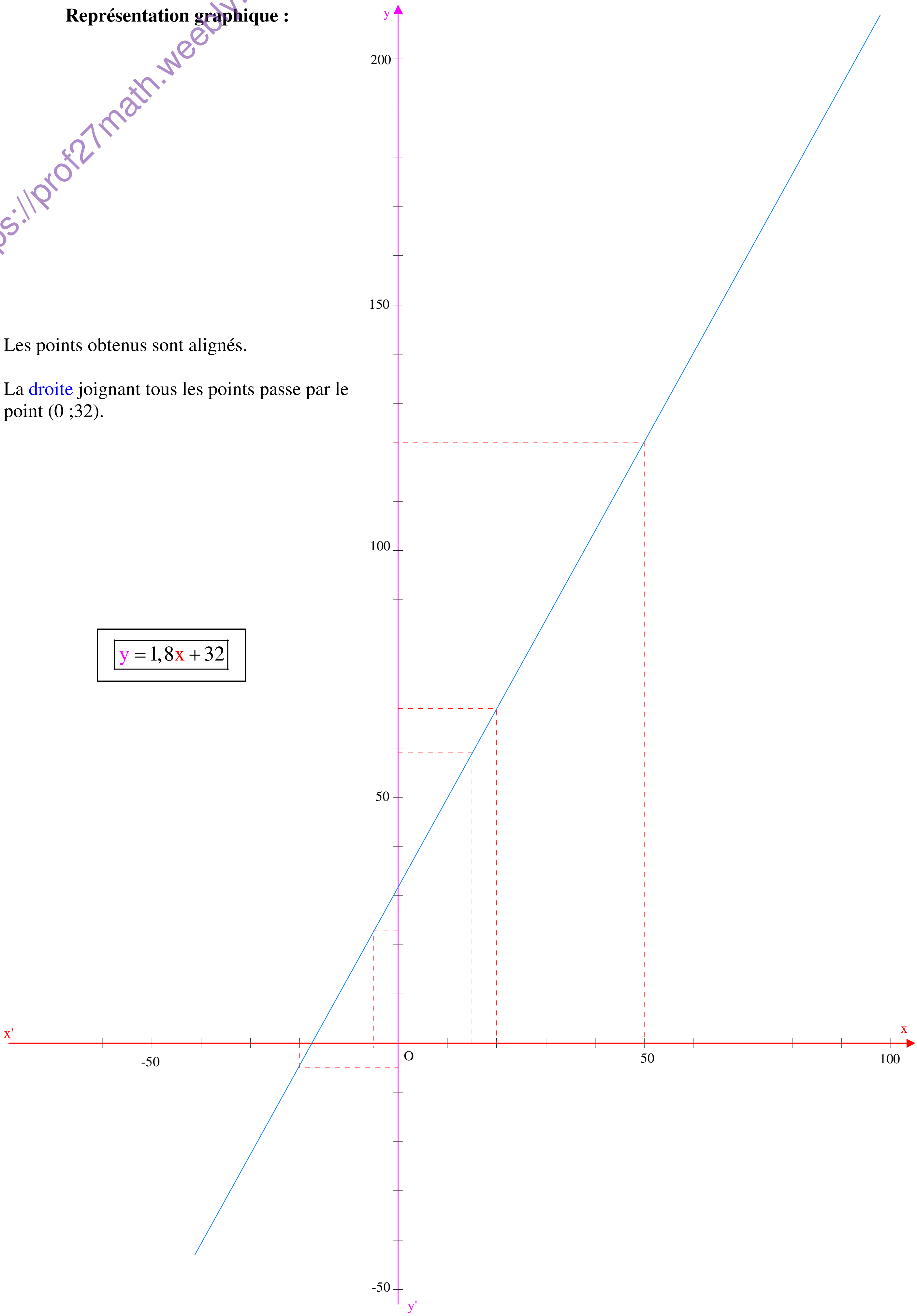
$x = 100°C$ $y=1,8\times100+32=180+32=212°F$

Représentation graphique :

Les points obtenus sont alignés.

La droite joignant tous les points passe par le point (0 ;32).

$$\boxed{y = 1,8x + 32}$$



Conclusion :

Le procédé f de calcul permettant de convertir des °C en °F est appelé application affine

$f : x \to y = 1,8x + 32$

La représentation graphique de cette application affine est la droite définie par les points dont les coordonnées sont des solutions de l'équation $y = 1,8x + 32$

❷ - Définition de l'application affine

Étant donnés deux nombres a et b,
le procédé de calcul f qui, à tout nombre x, fait correspondre le nombre $y = ax + b$
est appelé application affine.

$$\boxed{f : x \to y = ax + b}$$

Cas particulier :

Si $b = 0$ alors l'application f s'écrit :

$f : x \to y = ax$

f est une application linéaire.

Remarque :

Si $a = 0$ alors l'application f s'écrit :

$f : x \to y = 0x + b$
$f : x \to y = b$

f est une application constante (y est égal à b quelle que soit la valeur de x)

❸ - Représentation graphique d'une application affine

D'après l'étude de la correspondance droite - application affine, d'après la précédente représentation graphique, il est logique d'admettre que la représentation graphique d'une application affine est une droite.

Pour définir cette droite, il suffit d'en définir deux points dont les coordonnées sont des solutions de l'équation associée $y = ax + b$.

Vocabulaire :
Cette équation associée $y = ax + b$ est appelée **équation de la droite**.

Étude d'exemples :

Représentations graphiques des applications affines suivantes :

$f_1 : x \to y = 2x - 1$ $f_2 : x \to y = -3x + 2$ $f_3 : x \to y = \frac{2}{3}x + 1$

$f_4 : x \to y = -\frac{5}{2}x$ $f_5 : x \to y = 4$

On calcule deux solutions de chaque équation et on les présente dans un tableau :

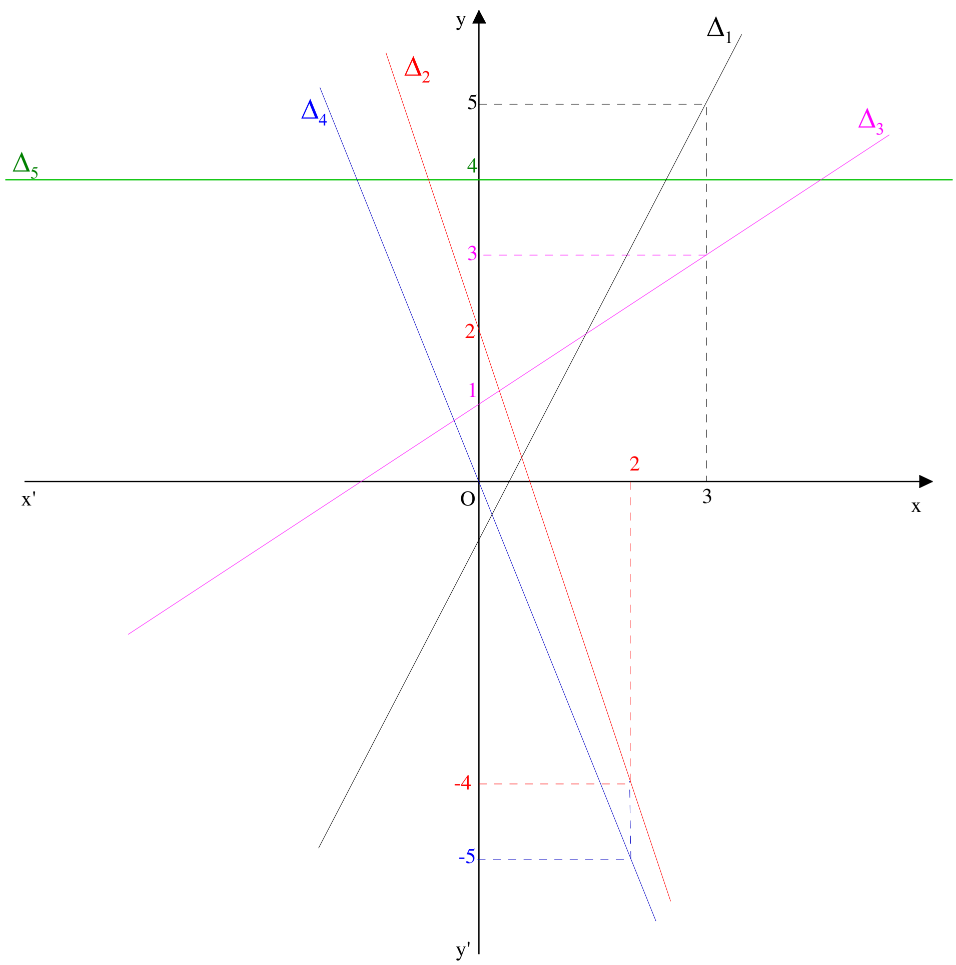
f_1	x	0	3	Δ_1
	y	-1	5	

f_2	x	0	2	Δ_2
	y	2	-4	

f_3	x	0	3	Δ_3
	y	1	3	

f_4	x	0	2	Δ_4
	y	0	-5	

f_5	x	0	3	Δ_5
	y	4	4	



Les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, $\Delta_5$sont les représentations graphiques de ces cinq applications affines.

❹ - Coordonnées du point d'intersection de deux droites.

Deux droites étant définies par leurs équations, les coordonnées de leur point d'intersection est la solution (si elle existe) du système formé par ces deux équations à deux inconnues.

Étude d'un exemple

Les droites Δ_1 et Δ_3 de l'étude précédente se coupent en un point dont les coordonnées sont la solution du système :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \frac{2}{3}x + 1 \end{cases}$$

d'où (par comparaison) :

$$2x - 1 = \frac{2}{3}x + 1$$

$$2x - \frac{2}{3}x = 1 + 1$$

$$\frac{4}{3}x = 2$$

$$x = 2 \times \frac{3}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

donc :

$$y = 2 \times \frac{3}{2} - 1$$

$$\boxed{y = 2}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont : $\boxed{\left(\frac{3}{2};2\right)}$ *(à vérifier sur le schéma ci-dessus)*

Remarques

Un système indéterminé correspond aux équations de deux droites confondues.

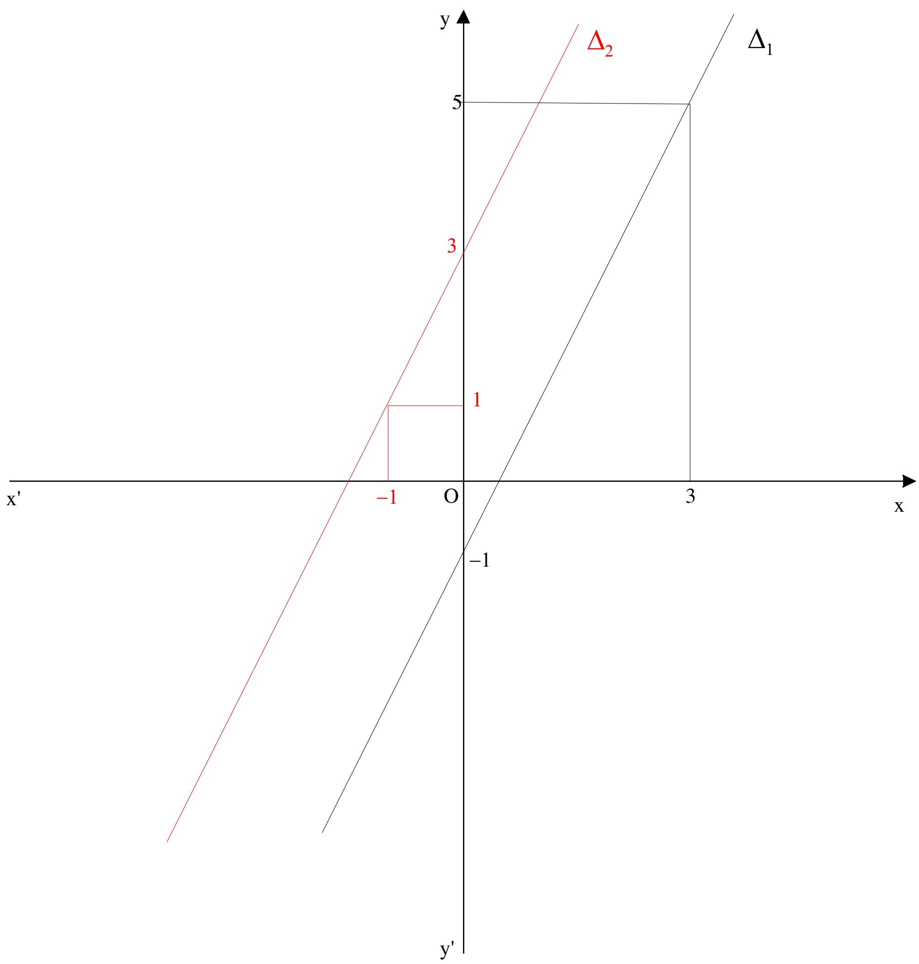
Un système impossible correspond aux équations de deux droites parallèles.

Exemple :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

f_1	x	0	3	Δ_1
	y	-1	5	

f_2	x	0	-1	Δ_2
	y	3	1	



Remarque :

Les deux équations ont le même coefficient de x ; c’est 2.

On dit que les deux droites parallèles ont le même coefficient directeur.

Exercices 1

APPLICATIONS LINÉAIRES ET AFFINES

Le tableau ci-dessous indique des tarifs d'un taxi.

Distance parcourue (km) **x**	**3**	**8**	**9**	**20**	**32**
Prix à payer (€) **y**	**7**	**14,50**	**16**	**32,50**	**50,50**

a) Construis un tableau d'accroissements :

$x_1 - x_2$					
$y_1 - y_2$					

b) Calcule le coefficient de proportionnalité et l'expression du prix en fonction de la distance parcourue:

……

……

……

……

c) Calcule le prix pour une course de 27 km:

……

……

d) Calcule la distance parcourue par le taxi pour 70 €:

……

……

e) Construis la représentation graphique du prix en fonction de la distance.

Exercices 2

APPLICATIONS LINÉAIRES ET AFFINES

Représente dans le plan repéré ci-dessous les fonctions affines suivantes :

en **bleu** : $f_1 : x \mapsto y = 2x - 3$

x		
y		

en **vert** : $f_2 : x \mapsto y = 2x + 4$

x		
y		

en **rouge** : $f_3 : x \mapsto y = -\frac{1}{2}x + 1$

x		
y		

en **noir** : $f_4 : x \mapsto y = -3x$

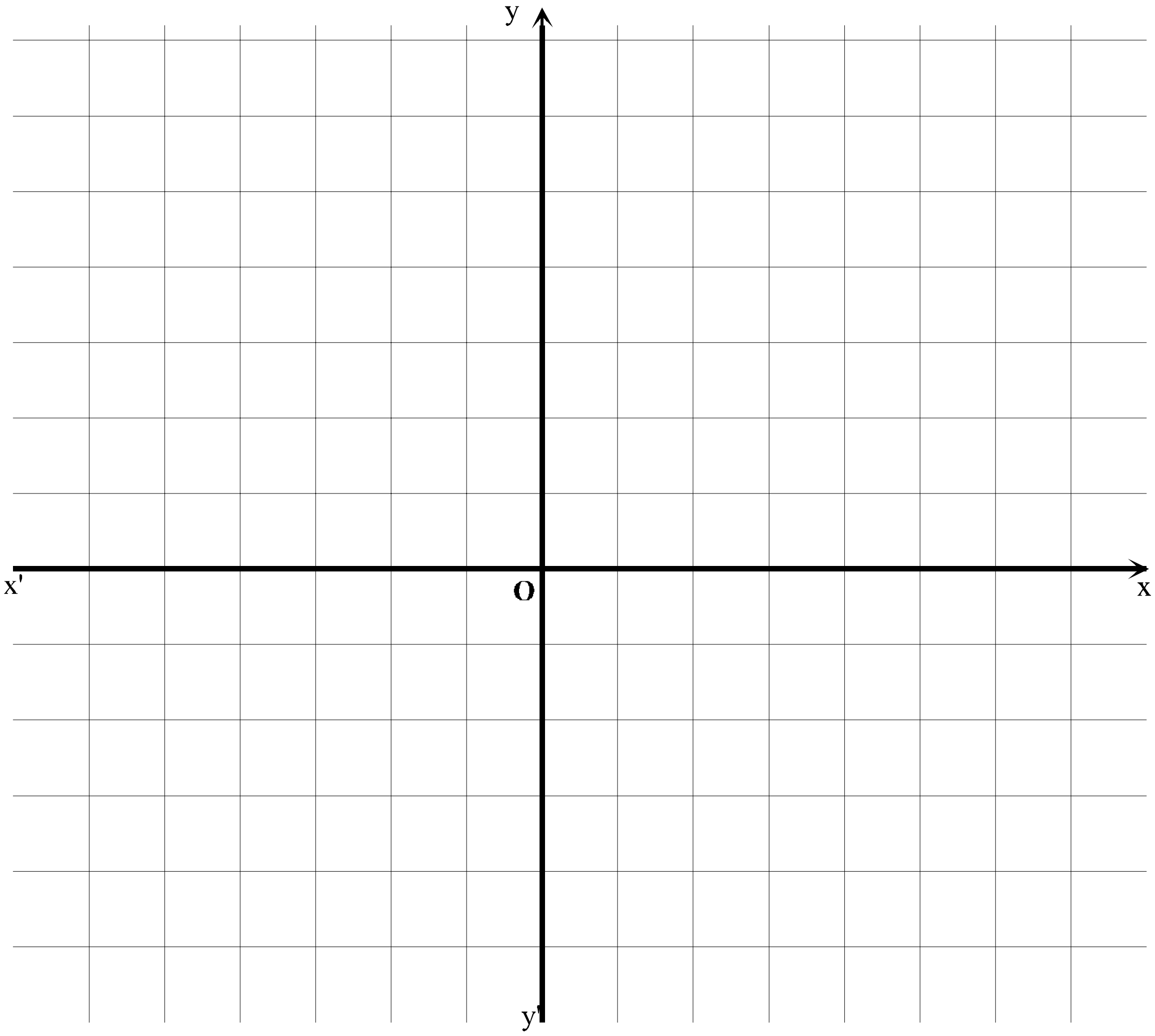
x		
y		

en **marron** : $f_5 : x \mapsto y = \frac{2}{3}x - 1$

x		
y		

en **violet** : $f_6 : x \mapsto y = -\frac{3}{2}$

x		
y		



Exercices 3

APPLICATIONS LINÉAIRES ET AFFINES

❶ - Trouve l'équation de la droite qui passe par A et qui est parallèle à la droite Δ d'équation donnée

$A(-\frac{1}{4};\frac{2}{3})$ ....

$\Delta: y = 3x - 1$ ....

$A(\sqrt{2};-\frac{1}{5})$ ....

$\Delta: y = -\frac{5}{2}x + 3$ ....

$A(-\frac{4}{11};100)$ ....

$\Delta: y = 17$ ....

❷ - Trouve les coordonnées, lorsqu'elles existent, du point d'intersection des droites Δ et Δ' d'équations :

$\begin{cases} \Delta: y = 2x + 3 \\ \Delta': y = -x + 5 \end{cases}$ ....

$\begin{cases} \Delta: y = -5x + 3 \\ \Delta': y = -5x + 12 \end{cases}$ ....

$\begin{cases} \Delta: y = 2 \\ \Delta': y = -3x + 4 \end{cases}$ ....

$\begin{cases} \Delta: x = -4 \\ \Delta': y = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{4} \end{cases}$ ....

$\begin{cases} \Delta: y = -\frac{1}{3}x + 4 \\ \Delta': y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{2} \end{cases}$ ....

Devoir

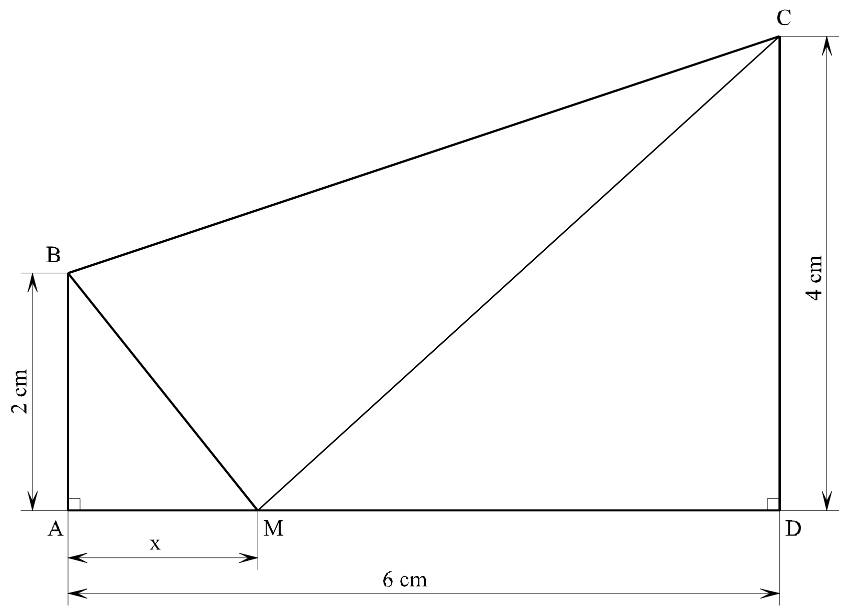
❶ - a) Représente graphiquement les applications f et g suivantes :

$f : x \mapsto y = -\frac{2}{3}x + 2$ (*tu chercheras, par exemple, les valeurs de y pour x =   et x = 3*)

$g : x \mapsto y = \frac{1}{2}x - 3$ (*tu chercheras, par exemple, les valeurs de y pour x = 0 et x = 2)*

b) Calcule les coordonnées du point d'intersection K des droites Δ_f et Δ_g.

❷ - On considère le schéma suivant :



a) Calcule l'aire du trapèze ABCD.

Rappel : Aire d'un trapèze = $\frac{\text{somme des bases} \times \text{hauteur}}{2}$

b) M est un point de [AD]; on pose: AM = x. Exprime l'aire du triangle ABM, l'aire du triangle CDM en fonction de x et calcule alors l'aire du triangle BMC.

c) Représente graphiquement l'application f qui à x associe l'aire du triangle BMC.

d) Calcule la position de M pour que l'aire du triangle BMC soit la moitié de celle du trapèze ABCD. Retrouve le résultat sur le graphique.

RECHERCHE D'UN CRITÈRE D'APPARTENANCE À UNE DROITE

Une droite (z'z) est définie par les points A(-3 ;0) et B(0 ;2).
On cherche à exprimer qu'un point M(x ;y) est un point de la droite.

Un tel point M peut occuper trois positions différentes :

(1) : **x et y sont positifs** ; M est sur la demi-droite [Bz)
(2) : **x est positif et y est négatif** ; M est un point du segment [AB]
(3) : **x et y sont négatifs** ; M est sur la demi-droite [Az').

A,B,M étant alignés ; (MH) et (BO) étant parallèles, on a , d'après la propriété de Thalès :

$$\frac{AO}{AH} = \frac{BO}{MH}$$

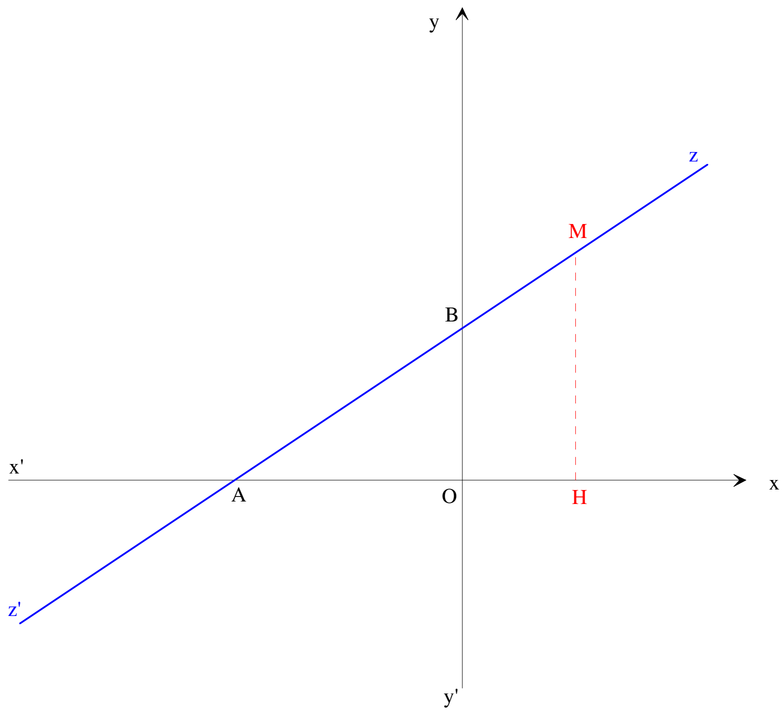
Or:

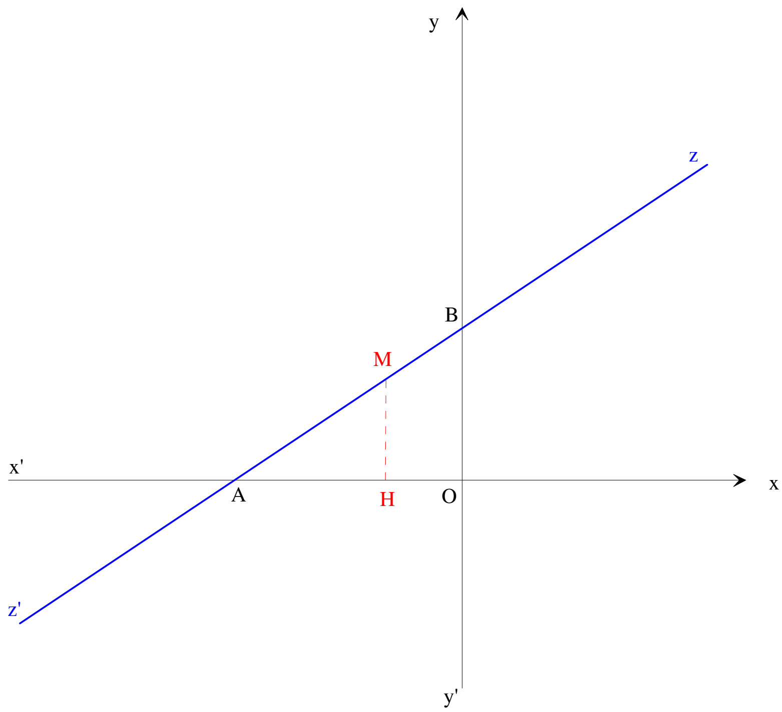
AO = 3 BO = 2
MH = y AH = $AO + OH = 3 + x$

Donc :

$$\frac{3}{x+3} = \frac{2}{y}$$

$3y = 2(x+3)$ soit : $\boxed{y = \frac{2}{3}x + 2}$





Même raisonnement que précédemment :
mais avec :

MH = y

L'abscisse x de H est négative donc OH = - x

AH = $AO - OH = 3 - (-x) = 3 + x$

Donc :

$$\frac{3}{3+x} = \frac{2}{y}$$

$$3y = 2(3+x)$$

$$3y = 6 + 2x$$

$$y = \frac{6+2x}{3}$$

$$y = \frac{6}{3} + \frac{2x}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x + 2}$$

Dans ce troisième cas,

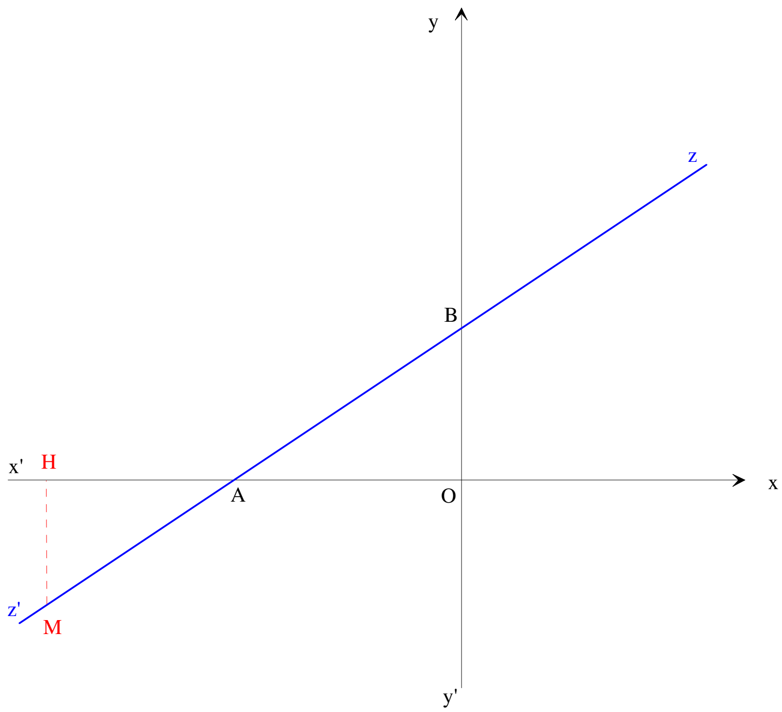
L'ordonnée y de M est négative donc :

MH = - y

L'abscisse x de H est négative donc OH = - x

AH = $OH - AO = -x - 3$

Donc :



$$\frac{3}{-3-x} = \frac{2}{-y}$$
$$-3y = 2(-3-x)$$
$$-3y = -6 - 2x$$
$$y = \frac{-6-2x}{-3}$$
$$y = \frac{-6}{-3} + \frac{-2x}{-3}$$
$$\boxed{y = \frac{2}{3}x + 2}$$

CONCLUSION :

Les coordonnées de tout point M(x ;y) de la droite (z'z) vérifient l'égalité :

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x + 2}$$

Exercices 1

APPLICATIONS LINÉAIRES ET AFFINES

❶ Le tableau ci-dessous indique des tarifs d'un taxi.

Distance parcourue (km) x	**3**	**8**	**9**	**20**	**32**
Prix à payer (€) y	**7**	**14,50**	**16**	**32,50**	**50,50**

a) Construis un tableau d'accroissements :

$x_1 - x_2$	$8-3=5$	$9-8=1$	$9-3=6$	$20-9=11$	$32-20=12$
$y_1 - y_2$	$14,5-7=7,5$	$16-14,5=1,5$	$16-7=9$	$32,5-16=16,5$	$50,5-32,5=18$

b) Calcule le coefficient de proportionnalité et l'expression du prix en fonction de la distance parcourue:

Le coefficient de proportionnalité est la valeur commune des quotients : $\frac{7,5}{5}=\frac{1,5}{1}=\frac{9}{6}=\frac{16,5}{11}=\frac{18}{12}=\boxed{1,5}$

En choisissant par exemple les valeurs correspondantes : x = 3 et y = 7 :

$\frac{y-7}{x-3}=1,5$ soit : $y-7=1,5(x-3)$ ou : $y=1,5x-4,5+7$ donc : $\boxed{y=1,5x+2,5}$

c) Calcule le prix pour une course de 27 km:

Si : $x=27$ alors : $y=1,5\times 27+2,5=43$

Une course de 27 km coûte 43 €

d) Calcule la distance parcourue par le taxi pour 70 €:

Si : $y=70$alors : $70=1,5x+2,5$ d'où : $1,5x=70-2,5$ soit : $1,5x=67,5$ donc : $x=\frac{67,5}{1,5}=45$

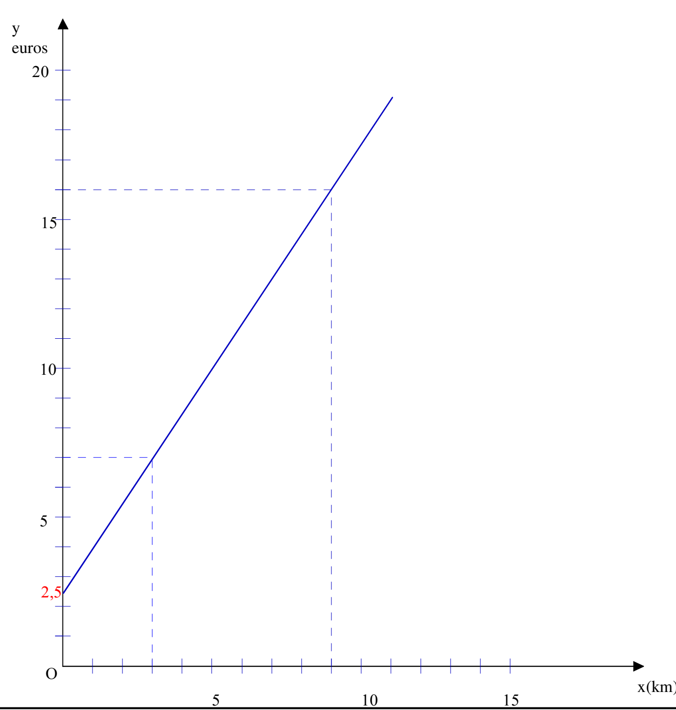
Pour une course de 70 €, le taxi a parcouru 45 km

e) Construis la représentation graphique du prix en fonction de la distance.

La représentation graphique est une demi-droite car seules les valeurs positives de x (distances) sont possibles.

La demi-droite est définie par les points : (3 ;7) et (9 ;16)

Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2,5.



Exercices 2

APPLICATIONS LINÉAIRES ET AFFINES

Représente dans le plan repéré ci-dessous les fonctions affines suivantes :

en **bleu** : $f_1 : x \mapsto 2x - 3$

x	0	3
$f_1(x)$	-3	3

en **vert** : $f_2 : x \mapsto 2x + 4$

x	0	-2
$f_2(x)$	4	0

en **rouge** : $f_3 : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$

x	0	4
$f_3(x)$	1	-1

en **noir** : $f_4 : x \mapsto -3x$

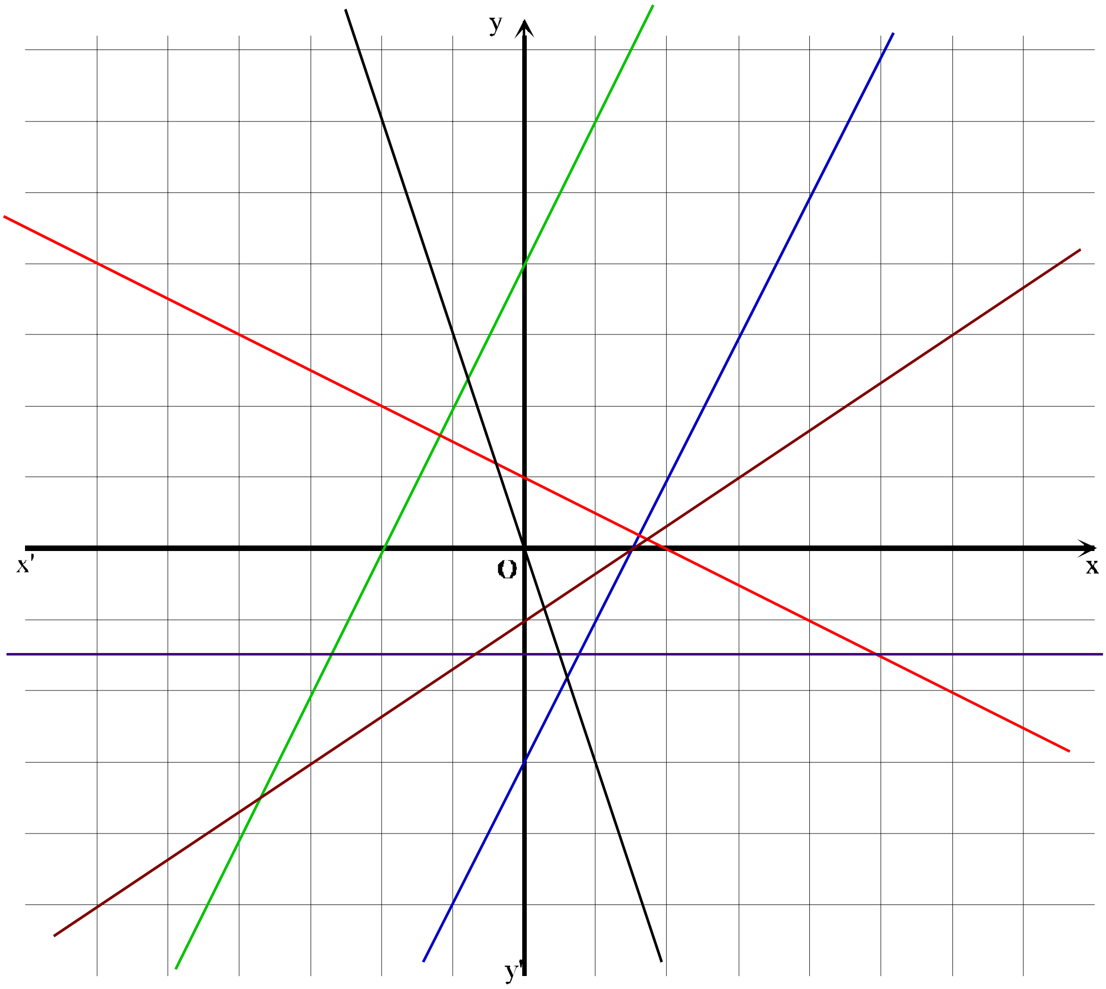
x	0	-2
$f_4(x)$	0	6

en **marron** : $f_5 : x \mapsto \frac{2}{3}x - 1$

x	0	3
$f_5(x)$	-1	1

en **violet** : $f_6 : x \mapsto -\frac{3}{2}$

x	0	5
$f_6(x)$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$



Exercices 3

APPLICATIONS LINÉAIRES ET AFFINES

❶ - Trouve l'équation de la droite qui passe par A et qui est parallèle à la droite Δ d'équation donnée

$A(-\frac{1}{4};\frac{2}{3})$

$\Delta : y = 3x - 1$

$\Delta' : y = 3x + b$ on remplace x par $-\frac{1}{4}$ et y par $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{3} = 3\times\left(-\frac{1}{4}\right) + b$

donc : $b = \frac{17}{12}$ d'où l'équation de Δ : $\boxed{y = 3x + \frac{17}{12}}$

$A(\sqrt{2};-\frac{1}{5})$

$\Delta : y = -\frac{5}{2}x + 3$

$\Delta' : y = -\frac{5}{2}x + b$ on remplace x par $\sqrt{2}$ et y par $-\frac{1}{5}$: $-\frac{1}{5} = -\frac{5}{2}\times\sqrt{2} + b$

donc : $b = \frac{25\sqrt{2} - 2}{10}$ d'où l'équation de Δ : $\boxed{y = -\frac{5}{2}x + \frac{25\sqrt{2} - 2}{10}}$

$A(-\frac{4}{11};100)$

$\Delta : y = 17$

Δ ' est une droite parallèle à l'axe des abscisses puisque son coefficient de x est 0

Δ ' passe par le point d'ordonnée 100 donc : Δ: $\boxed{y = 100}$

❷ - Trouve les coordonnées, lorsqu'elles existent, du point d'intersection des droites Δ et Δ' d'équations :

$\begin{cases} \Delta : y = 2x + 3 \\ \Delta' : y = -x + 5 \end{cases}$

$2x + 3 = -x + 5$ soit : $x = \frac{2}{3}$ alors : $y = \frac{13}{3}$

Les coordonnées du point d'intersection sont : $\boxed{\left(\frac{2}{3};\frac{13}{3}\right)}$

$\begin{cases} \Delta : y = -5x + 3 \\ \Delta' : y = -5x + 12 \end{cases}$

Δ et Δ' ont le même coefficient de x (-5). Elles sont parallèles.

N'étant pas confondues, $\boxed{\text{elles n'ont pas de point commun.}}$

$\begin{cases} \Delta : y = 2 \\ \Delta' : y = -3x + 4 \end{cases}$

$-3x + 4 = 2$ soit: $x = \frac{2}{3}$ on sait déjà que: $y = 2$

Les coordonnées du point commun sont: $\boxed{\left(\frac{2}{3};2\right)}$

$\begin{cases} \Delta : x = -4 \\ \Delta' : y = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{4} \end{cases}$

On sait que : $x = -4$; on reporte cette valeur dans l'équation de Δ'.

$y = -\frac{7}{2}\times(-4) + \frac{3}{4} = \frac{59}{4}$ les coordonnées sont donc : $\boxed{\left(-4;\frac{59}{4}\right)}$

$\begin{cases} \Delta : y = -\frac{1}{3}x + 4 \\ \Delta' : y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

$-\frac{1}{3}x + 4 = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}$ soit : $x = -\frac{15}{2}$ d'où : $y = -\frac{4}{5}\times\left(-\frac{15}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

Les coordonnées du point commun sont: $\boxed{\left(-\frac{15}{2};\frac{13}{2}\right)}$

INSUFFISANCE DU COSINUS

On considère un angle xÔy de 35°.
Marque sur [Oy) les points A, B, C, D tels que : OA = 4 cm, OB = 6 cm, OC = 9 cm, OD = 13 cm.

Les perpendiculaires à [Oy) passant par A,B,C,D coupent [Ox) en, E,F,G,H. Construis ces points E,F,G,H.

On te propose de calculer les longueurs AE, BF, CG, DH.

❶ - On dispose de quatre écritures du cosinus de l'angle xÔy :

....

Mais, dans ces écritures, les longueurs AE, BF, CG, et DH n'apparaissent pas !
Il faut donc avoir recours à ....

Par exemple, pour le calcul de AE :

....

....

❷ - Mesure les segments AE, BF, CG, DH puis calcule :

$\frac{AE}{OA} \approx$ .... $\frac{BF}{OB} \approx$ .... $\frac{CG}{OC} \approx$ .... $\frac{DH}{OD} \approx$ ....

Aux erreurs de mesures près, tu constates que ces quotients ....

....

On les appelle **tangente de l'angle xÔy**.

À la calculatrice, la fonction « tangente » est indiquée par $\boxed{\textbf{tan}}$ tan 35° ≈ ....

En utilisant cette fonction, calcule directement les longueurs AE, BF, CG, DH :

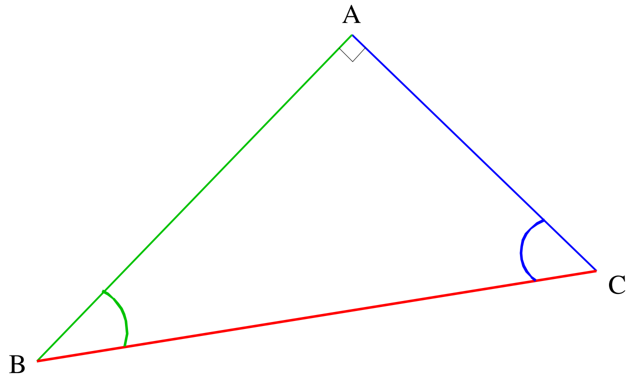
....

....

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

❶ - Cosinus d'un angle aigu (*Rappel*)

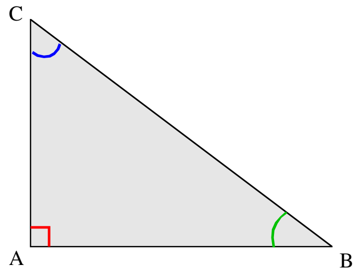
Le cosinus d'un angle d'un triangle rectangle est le quotient du **côté adjacent** à cet angle par l'**hypoténuse**.



$$\boxed{\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC}} \qquad \boxed{\cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC}}$$

Exemple :

Étant donné un triangle ABC, rectangle en A tel que : AB = 4 cm et AC = 3 cm.
Calcul des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ de ce triangle :



Le triangle ABC est le célèbre triangle « 3, 4, 5 » (BC = 5 cm)

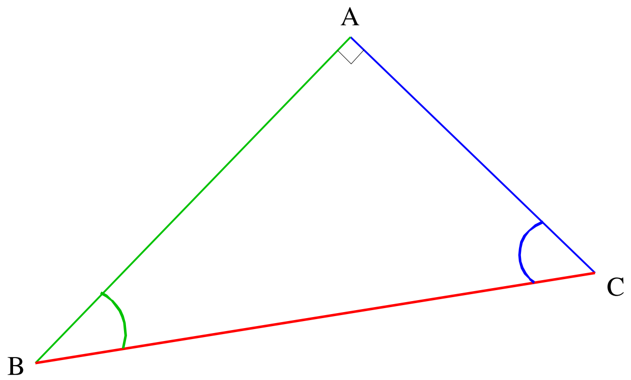
$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$ $\qquad \widehat{B} \approx 36,87°$

$\cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$ $\qquad \widehat{C} \approx 53,13°$

Utilisation de la fonction calculatrice (mode degré) : $\boxed{35}$ $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\cos}$

❷ - Sinus d'un angle aigu

Le sinus d'un angle d'un triangle rectangle est le quotient du **côté opposé** à l'angle par **l'hypoténuse**.



$$\boxed{\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC}} \qquad \boxed{\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC}}$$

Remarques :

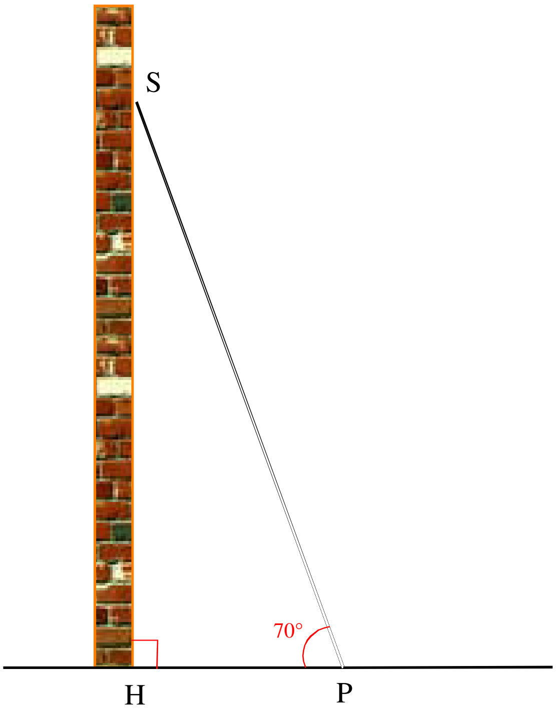
Puisque un côté de l'angle droit est plus petit que l'hypoténuse (AC < BC et AB < BC) :
le sinus d'un angle aigu est un nombre inférieur à 1.

$\sin\widehat{B} = \cos\widehat{C}$ et $\sin\widehat{C} = \cos\widehat{B}$

Le sinus d'un angle est le cosinus de son complément.

Exemple :

Une échelle de 8 mètres est placée contre un mur de telle façon que son « angle de travail » soit 70°.



Quelle hauteur atteint-elle ?

Le triangle SHP est rectangle en H ; donc :

$$\sin\widehat{P} = \frac{SH}{SP}$$

$$SH = SP\sin\widehat{P}$$

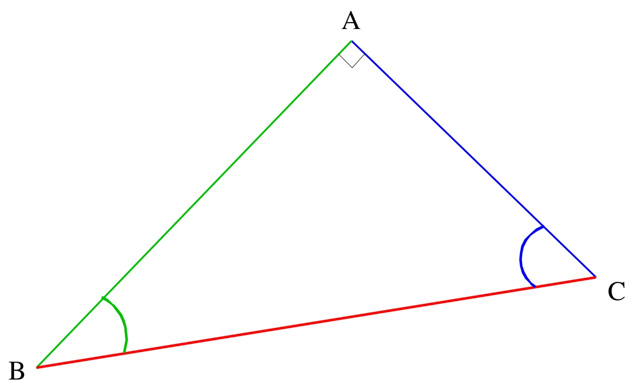
$$SH = 8 \times \sin 70°$$

$$\boxed{SH \approx 7{,}5 \text{ m}}$$

L'échelle permet d'atteindre une hauteur de 7,50 m environ.

❸ - Tangente d'un angle aigu

La tangente d'un angle d'un triangle rectangle est le quotient du **côté opposé** à l'angle par le **côté adjacent** à cet angle.



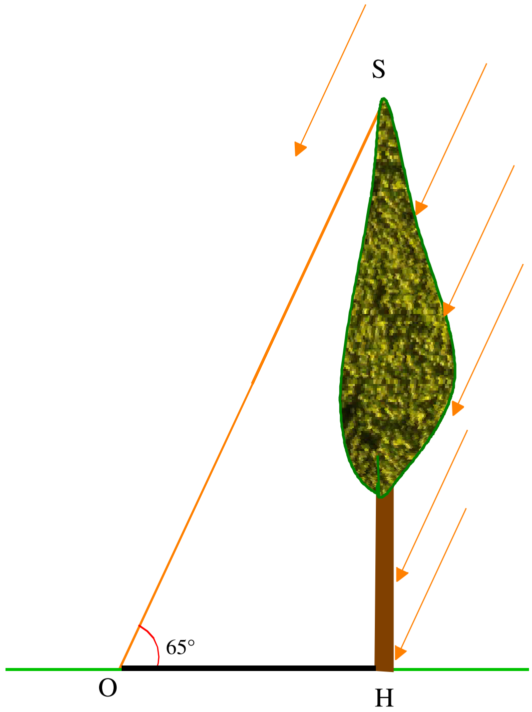
$$\boxed{\tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB}} \qquad \boxed{\tan\widehat{C} = \frac{AB}{AC}}$$

Remarque :

$$\frac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan\widehat{B}$$

Quel que soit l'angle aigu α, on a : $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

Exemple :



La « hauteur du soleil » est égale à 65°.
Quelle est la hauteur d'un arbre dont l'ombre mesure 13,8 m ?

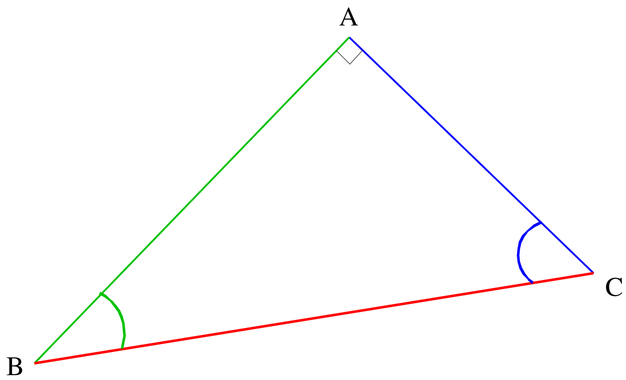
Dans le triangle SOH, rectangle en O :

$$\tan \widehat{O} = \frac{SH}{OH}$$

$$SH = OH \tan \widehat{O}$$
$$SH = 13{,}8 \times \tan 65°$$
$$\boxed{SH \approx 29{,}6\ \text{m}}$$

L'arbre mesure environ 29,60 mètres

❹ - <u>En utilisant la propriété de Pythagore</u>



ABC est un triangle rectangle en A, d'après la propriété de Pythagore :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (1)

Or : $AB = BC \cos \widehat{B}$ et $AC = BC \sin \widehat{B}$

L'égalité (1) s'écrit :

$$\left(BC \cos \widehat{B}\right)^2 + \left(BC \sin \widehat{B}\right)^2 = BC^2$$

$$BC^2 \times \left(\cos \widehat{B}\right)^2 + BC^2 \times \left(\sin \widehat{B}\right)^2 = BC^2$$

En simplifiant par BC² :

$\left(\cos \widehat{B}\right)^2 + \left(\sin \widehat{B}\right)^2 = 1$ ce qui s'écrit plus simplement : $\boxed{\cos^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{B} = 1}$

De la même façon : $\boxed{\cos^2 \widehat{C} + \sin^2 \widehat{C} = 1}$

D'une façon plus générale, quel que soit l'angle aigu α :

$$\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1}$$

Application :

Calcul de $\sin \alpha$ sachant que $\cos \alpha = 0{,}8$

D'après la formule précédente : $0{,}8^2 + \sin^2 \alpha = 1$ d'où : $\sin^2 \alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

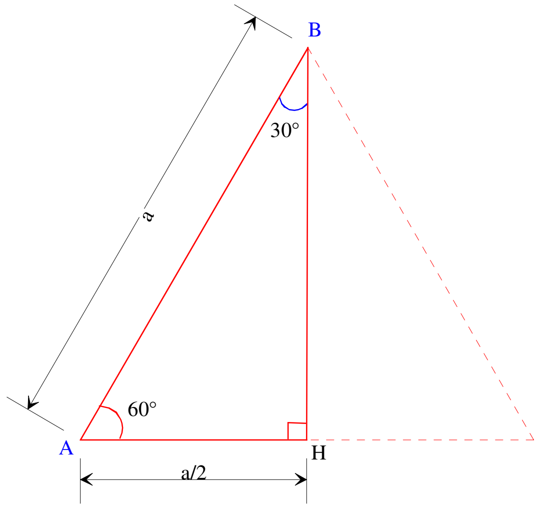
Donc : $\sin \alpha = \sqrt{0{,}36} = \boxed{0{,}6}$

❺ - Rapports trigonométriques d'angles particuliers

Les angles particuliers sont les angles de 0°, 30°, 45°, 60° et 90°.

Il s'agit de trouver les valeurs **exactes** des sinus, cosinus et tangentes de ces angles.

30° et 60° sont des angles du demi triangle équilatéral ; 45° est l'angle à la base d'un triangle isocèle rectangle.



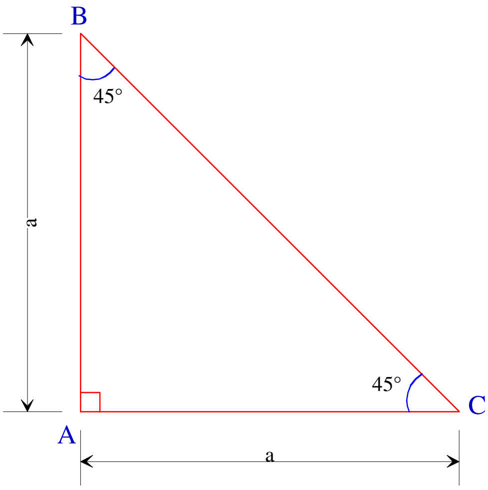
Dans le triangle ABH, rectangle en H :

$$\sin\widehat{B} = \cos\widehat{A} = \frac{AH}{AB} \qquad \text{soit : } \sin 30° = \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

Or : $\cos^2 30° + \sin^2 30° = 1$

ou : $\cos^2 30° = 1 - \sin^2 30° = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Donc : $\cos 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Dans le triangle ABC, rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad \text{d'où : } BC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{soit : } \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Toutes les autres valeurs se trouvent aisément en utilisant les formules vues plus haut.

Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Remarques :

La ligne des valeurs de $\sin\alpha$ est facile à retenir : $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{4}}{2}$

La ligne des valeurs de $\cos\alpha$ est celle de $\sin\alpha$ écrite à l'envers.

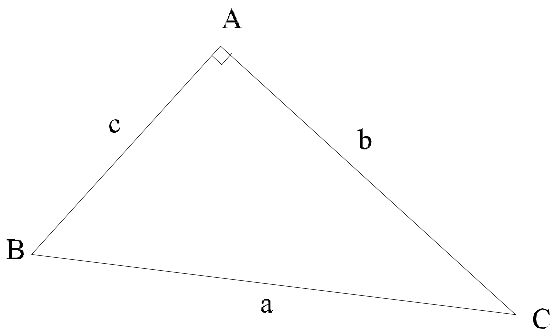
La ligne des valeurs de $\tan\alpha$ s'obtient en divisant chaque valeur de $\sin\alpha$ par la valeur correspondante de $\cos\alpha$. Ce qui explique que $\tan 90°$ n'existe pas!

Exercices

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

❶ - On considère un triangle rectangle ABC d'hypoténuse BC.

On pose : BC = a ; AC = b ; AB = c



RAPPELS :

Propriété de Pythagore ....

$\cos\hat{B} =$ .... $\sin\hat{B} =$ .... $\tan\hat{B} =$ ....

$\cos\hat{C} =$ .... $\sin\hat{C} =$ .... $\tan\hat{C} =$ ....

Complète le tableau ci-dessous en donnant, chaque fois que ce sera nécessaire, des valeurs approchées.

a	7	10				12		20
b	5		15	4			13	
c				5	9			12
$\hat{B}$		35°	40°					
$\sin\hat{B}$								
$\cos\hat{B}$								
$\tan\hat{B}$								
$\hat{C}$					25°	17°		
$\sin\hat{C}$								
$\cos\hat{C}$								
$\tan\hat{C}$							1,28	

❷ - Calcule sin a sachant que : $\cos a = \frac{9}{41}$

....

....

....

....

Devoir 1

❶ - Un triangle ABC, rectangle en B est tel que : AB = 6 cm et $\widehat{BAC} = 38°$

Calcule ses côtés BC et AC, son périmètre et son aire.

Donne les côtés à 0,1 cm près.

❷ On considère l'angle aigu α tel que: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

a) Calcule $\sin\alpha$.

b) Calcule $\tan\alpha$.

Donne leurs valeurs exactes sous leur forme la plus simple possibl.e

❸ - On considère un triangle ABC rectangle en A et tel que : AC = 2 AB

a) Calcule $\tan\hat{B}$ puis les angles du triangle.

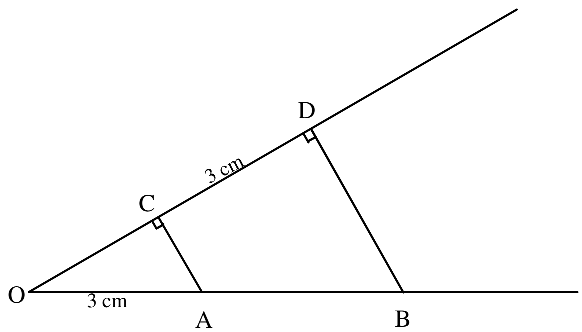
b) Exprime BC en fonction de AB.

c) Déduis-en la valeur exacte du sinus de l'angle $\hat{B}$.

❹ - On donne : OA = 3 cm, CD = 3 cm et $\hat{O} = 30°$.

a) Démontre que : $AC = 1{,}5\text{cm}$ et que: $OC = 1{,}5\sqrt{3}\text{cm}$.

b) Explique pourquoi tu peux utiliser la propriété de Thalès et calcule alors l'arrondi de DB à 0,1 cm près..



Devoir 2

❶ - On considère un triangle ABC, rectangle en A et tel que : BC = 2 AB.

a) Exprime AC en fonction de AB.

b) Calcule $\sin\hat{C}$ puis les angles du triangle.

❷ - On considère un triangle ABC rectangle en A et tel que : AC = 2 AB

a) Exprime BC en fonction de AB.

b) Calcule $\tan\hat{B}$ puis les angles du triangle.

❸ - Un cycliste grimpe une côte de 2,7 km dont la pente est de 11%.

Une pente de 11 % correspond à une ascension verticale de 11 mètres sur une distance horizontale de 100 mètres.

Autrement dit : la pente d'une route est la tangente de l'angle de la route avec l'horizontale.

De quelle hauteur s'est il élevé ?

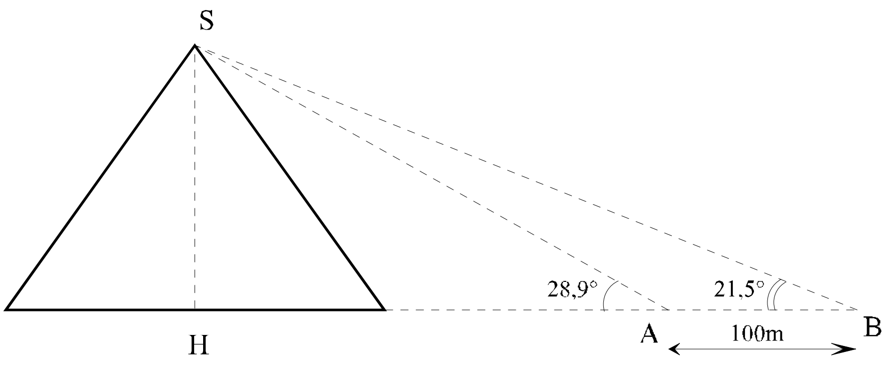
❹ - Sachant que : $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, vérifie que : $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Devoir 3

Hauteur de la pyramide de Kheops.

On utilise un goniomètre qui est un appareil de visée permettant de mesurer des angles.

Deux visées sont faites à partir de deux points A et B distants de 100 mètres.



Depuis A, on voit le sommet S de la pyramide sous un angle de 28,9° alors que depuis B, l'angle n'est plus que de 21,5°.

Calculer la hauteur de la pyramide.

Devoir 4

❶ - Un triangle ABC, rectangle en B est tel que : $AB = 6$ cm et $\widehat{BAC} = 30°$.

Calcule les valeurs exactes de ses côtés BC et AC, de son périmètre et de son aire.

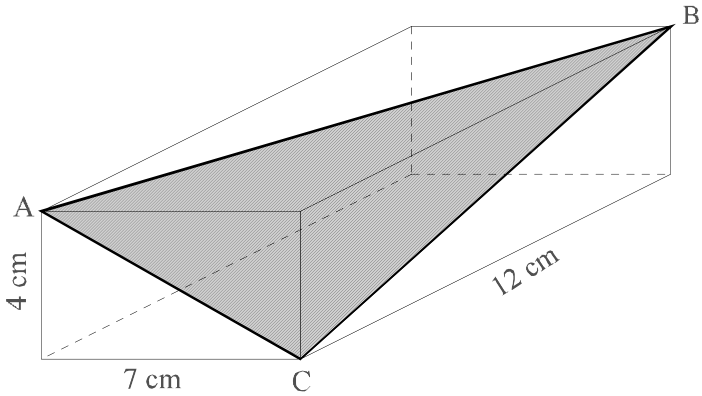
On donne $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

❷ - On considère un triangle ABC, rectangle en A et tel que : $BC = 2\ AB$.

a) Exprime AC en fonction de AB.

b) Calcule $\sin \hat{C}$ puis les angles du triangle.

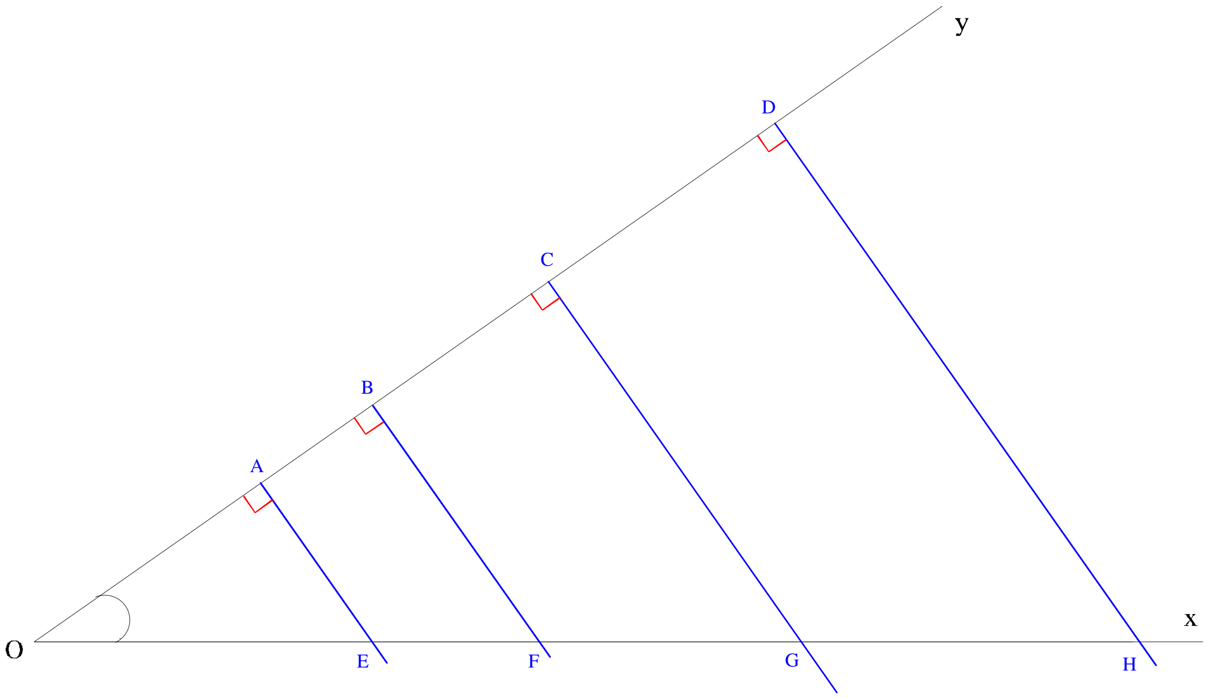
❸ - Un menuisier a taillé une face triangulaire ABC dans un bloc parallélépipédique dont les dimensions sont indiquées sur le schéma.



Cette face ABC a-t-elle deux arêtes perpendiculaires ?

INSUFFISANCE DU COSINUS

On considère un angle xÔy de 35°.
Marque sur [Oy) les points A, B, C, D tels que : OA = 4 cm, OB = 6 cm, OC = 9 cm, OD = 13 cm.



Les perpendiculaires à [Oy) passant par A,B,C,D coupent [Ox) en, E,F,G,H. Construis ces points E,F,G,H.

On te propose de calculer les longueurs AE, BF, CG, DH.

❶ - On dispose de quatre écritures du cosinus de l'angle $\widehat{xOy}$:

$$\cos\widehat{xOy} = \frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = \frac{OC}{OG} = \frac{OD}{OH}$$

Mais, dans ces écritures, les longueurs AE, BF, CG, et DH n'apparaissent pas !
Il faut donc avoir recours à .la propriété de Pythagore

Par exemple, pour le calcul de AE :

$$\cos\widehat{xOy} = \frac{OA}{OE} \quad \text{soit : } OE = \frac{OA}{\cos\widehat{xOy}} = \frac{4}{\cos 35°}$$

Dans le triangle OAE, rectangle en A : $AE^2 = OE^2 - OA^2 = \left(\frac{4}{\cos 35°}\right)^2 - 4^2$ donc : $AE \approx 2,8$ cm

❷ - Mesure les segments AE, BF, CG, DH puis calcule :

$$\frac{AE}{OA} \approx \frac{2,8}{4} = 0,7 \qquad \frac{BF}{OB} \approx \frac{4,2}{6} = 0,7 \qquad \frac{CG}{OC} \approx \frac{6,3}{9} = 0,7 \qquad \frac{DH}{OD} \approx \frac{9,1}{13} = 0,7$$

Aux erreurs de mesures près, tu constates que ces quotients semblent égaux.
Dans la mesure où j'admets qu'ils sont égaux je peux donc dire qu'ils ne dépendent que de l'angle $\widehat{xOy}$.

On les appelle **tangente de l'angle xÔy**.

À la calculatrice, la fonction « tangente » est indiquée par tan. $\qquad \tan 35° \approx 0,700207538$

En utilisant cette fonction, calcule directement les longueurs AE, BF, CG, DH :

$$\tan\widehat{xOy} = \frac{AE}{OA} = \frac{BF}{OB} = \frac{CG}{OC} = \frac{DH}{OD} \text{ donc : } AE = OA\tan 35° \approx 2,8 \text{ cm} \qquad BF = OB\tan 35° \approx 4,2 \text{ cm}$$

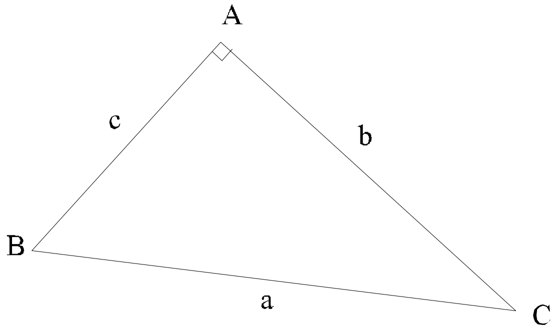
$$CG = OC\tan 35° \approx 6,3 \text{ cm} \qquad DH = OD\tan 35° \approx 9,1 \text{ cm}$$

Exercices

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

❶ - On considère un triangle rectangle ABC d'hypoténuse BC.

On pose : BC = a ; AC = b ; AB = c



RAPPELS :

Propriété de Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$

$\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ $\sin\hat{B} = \frac{b}{a}$ $\tan\hat{B} = \frac{b}{c}$

$\cos\hat{C} = \frac{b}{a}$ $\sin\hat{C} = \frac{c}{a}$ $\tan\hat{C} = \frac{c}{b}$

Complète le tableau ci-dessous en donnant, chaque fois que ce sera nécessaire, des valeurs approchées.

a	7	10	23,33	6,4	21,3	12	21,12	20
b	5	5,74	15	4	19,3	11,48	13	16
c	4,9	8,19	17,88	5	9	3,51	16,64	12
$\hat{B}$	45,6°	35°	40°	38,7°	65°	73°	38°	53,1°
$\sin\hat{B}$	0,714	0,574	0,643	0,625	0,906	0,956	0,616	0,8
$\cos\hat{B}$	0,7	0,819	0,766	0,781	0,423	0,292	0,788	0,6
$\tan\hat{B}$	1,02	0,7	0,839	0,8	2,144	3,271	0,781	1,333
$\hat{C}$	44,4°	55°	50°	51,3°	25°	17°	52°	36,9°
$\sin\hat{C}$	0,7	0,819	0,766	0,781	0,423	0,292	0,788	0,6
$\cos\hat{C}$	0,714	0,574	0,643	0,625	0,906	0,956	0,616	0,8
$\tan\hat{C}$	0,98	1,428	1,192	1,25	0,466	0,306	1,28	0,75

❷ - Calcule sin a sachant que : $\cos a = \frac{9}{41}$

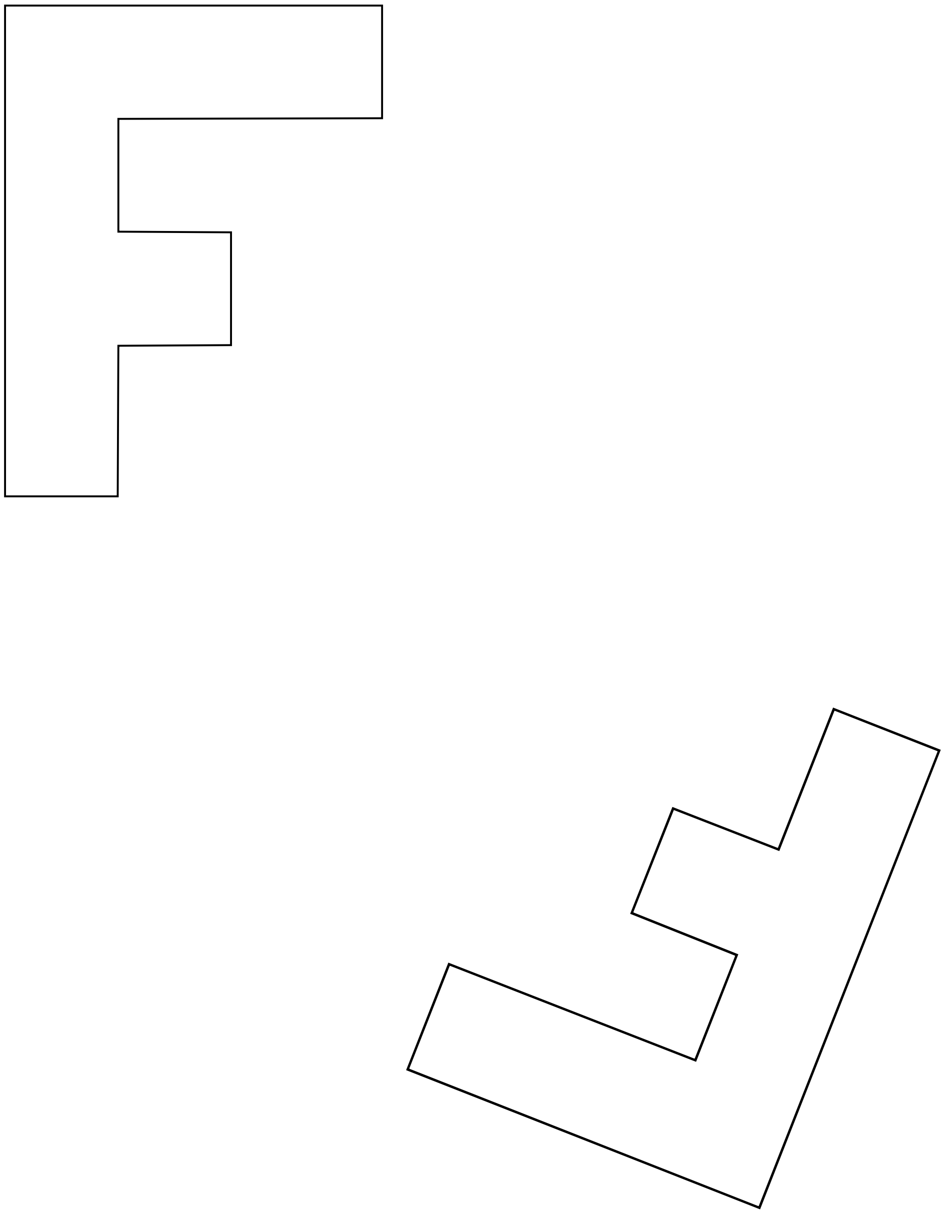
Sachant que : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ c'est que : $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

En remplaçant : $\sin^2 a = 1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2 = 1 - \frac{81}{1681} = \frac{1681-81}{1681} = \frac{1600}{1681}$

Donc : $\sin a = \sqrt{\frac{1600}{1681}} = \boxed{\frac{40}{41}}$

LA ROTATION

Trace les segments joignant des points correspondants des deux figures superposables ci-dessous.



Trouve la particularité commune à tous ces segments après avoir tracé les médiatrices de ces segments.

....

....

....

....

....

LA ROTATION

Pour définir une rotation, il faut se donner :

- Un point appelé centre de rotation
- Un angle de rotation
- Un sens de rotation

  On convient ici de choisir le sens anti-horaire. *(sens inverse des aiguilles d'une montre)*

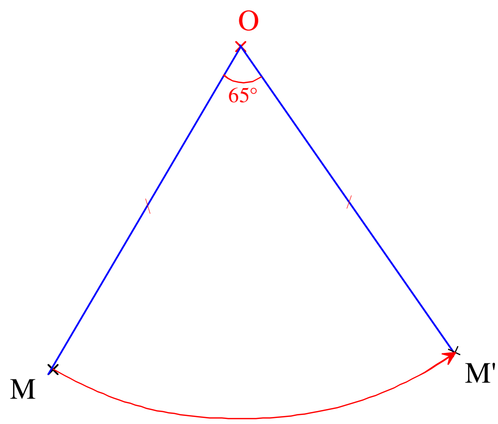
❶ - Image d'un point par une rotation donnée

Étude d'un exemple :

On considère la rotation (O ; 65°)

Le point M' est l'image d'un point M par cette rotation car :

$$\begin{cases} OM = OM' \\ \widehat{MOM'} = 65° \end{cases}$$



❷ - Image d'un segment par une rotation donnée

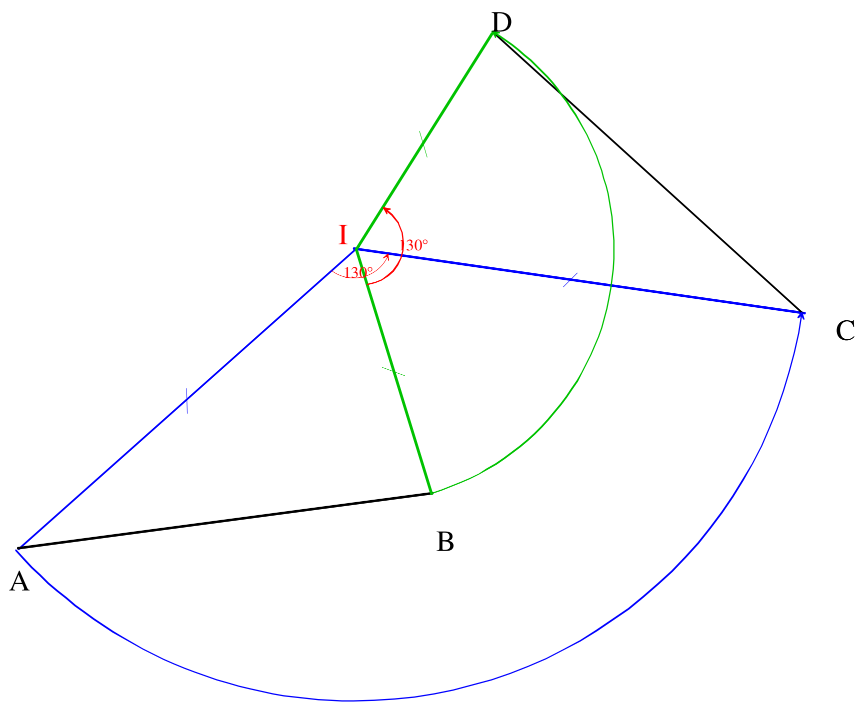
Étude d'un exemple :

On considère la rotation (I ; 130°)

Le segment [CD] est l'image du segment [AB] par cette rotation car :

$$\begin{cases} IA = IC \\ IB = ID \\ \widehat{AIC} = \widehat{BID} = 130° \end{cases}$$

Les triangles AIB et CID sont superposables.



❸ - Recherche d'un centre de rotation

C'est le même procédé que dans la fiche précédente :

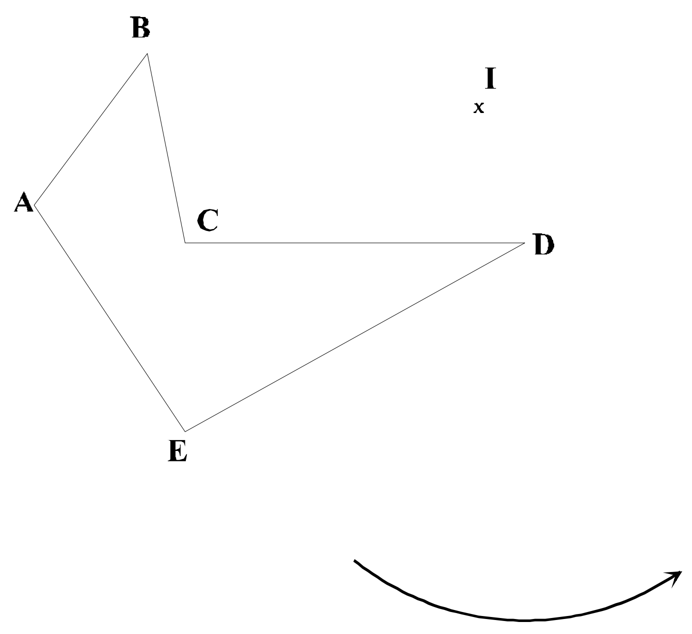
Le centre de rotation est le point d'intersection des médiatrices de deux segments joignant des points correspondants.

Un autre exemple est traité dans la fiche d'exercices.

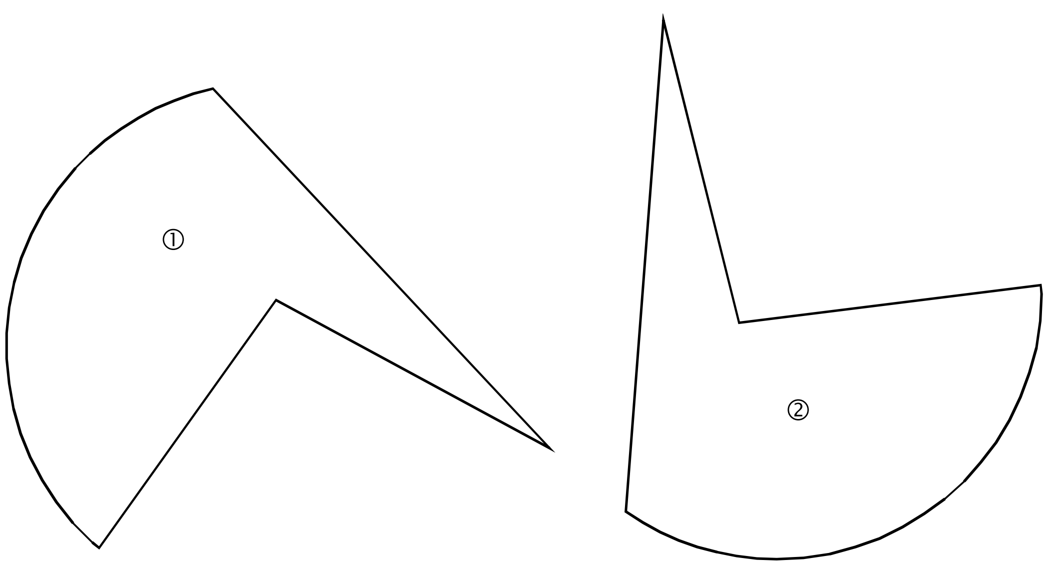
Exercices

LA ROTATION

❶ - Construis l'image du polygone ABCDE par la rotation de centre I et d'angle égal à 120°.
L'angle de rotation se mesure dans le ***sens inverse des aiguilles*** *d'une montre*.

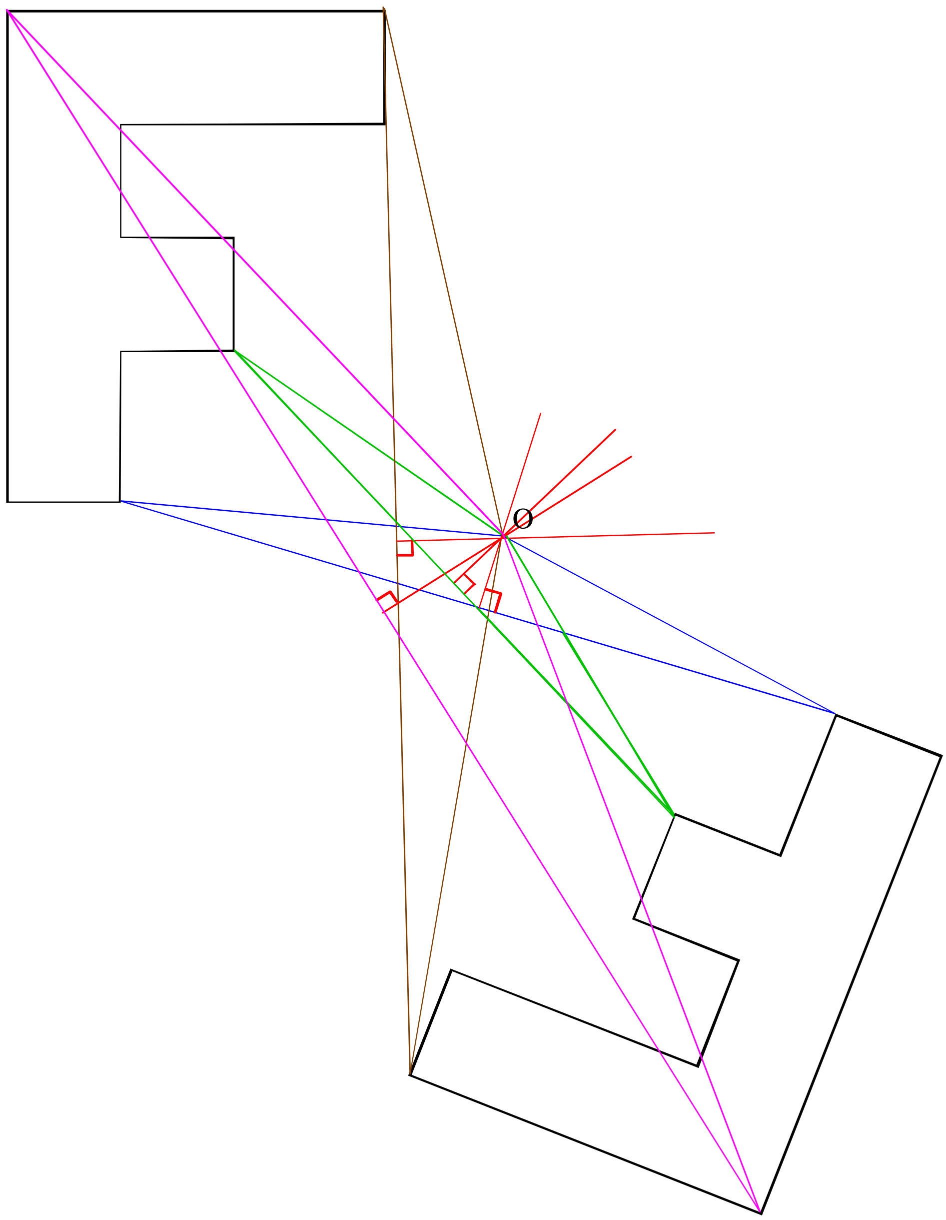


❷ - Construis le centre de la rotation qui transforme la figure ① en la figure ②.
Mesure l'angle de cette rotation.



LA ROTATION

Trace les segments joignant des points correspondants des deux figures superposables ci-dessous.



Trouve la particularité commune à tous ces segments après avoir tracé les médiatrices de ces segments.

Observation :

Les médiatrices des segments tracés sont concourantes en un point O.

Ce point O est donc équidistant des extrémités de chaque segment.

On peut donc imaginer une **rotation** autour de ce point O, dans le sens anti-horaire, d'un angle de 160°.

On peut utiliser un papier calque sur lequel on a décalqué la première lettre F et le point O.

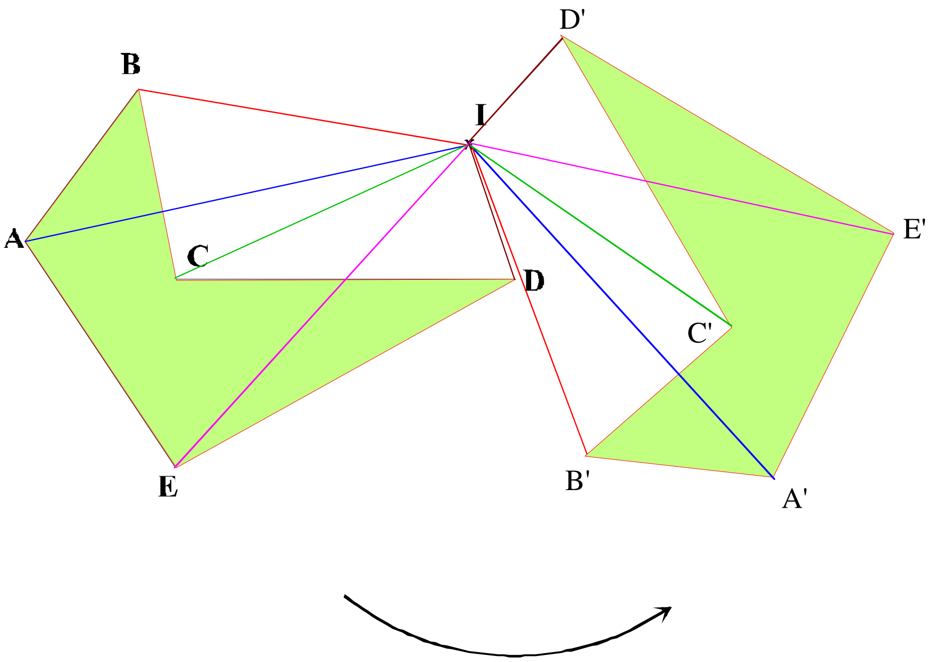
On fait tourner ce calque autour de O dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et d'un angle de 160°.

La première lettre F doit coïncider exactement avec la seconde lettre F.

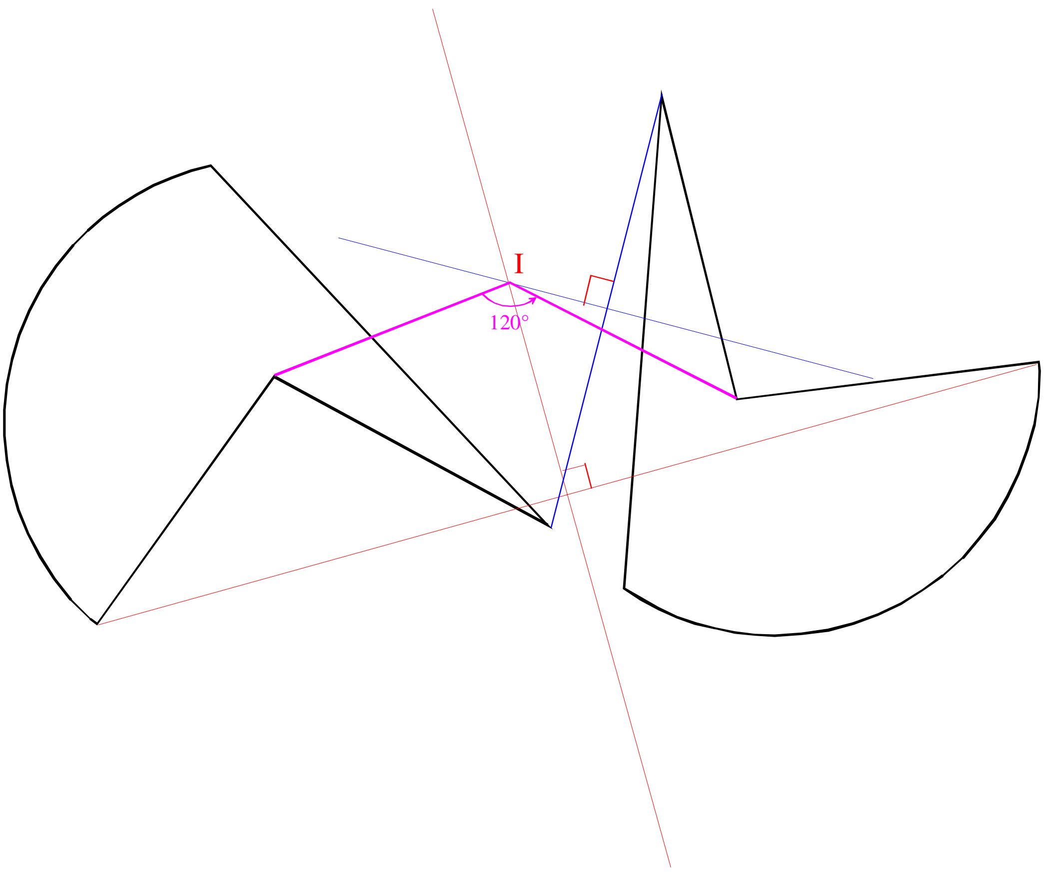
Exercices

LA ROTATION

❶ - Construis l'image du polygone ABCDE par la rotation de centre I et d'angle égal à 120°.
*L'angle de rotation se mesure dans le **sens inverse des aiguilles** d'une montre.*



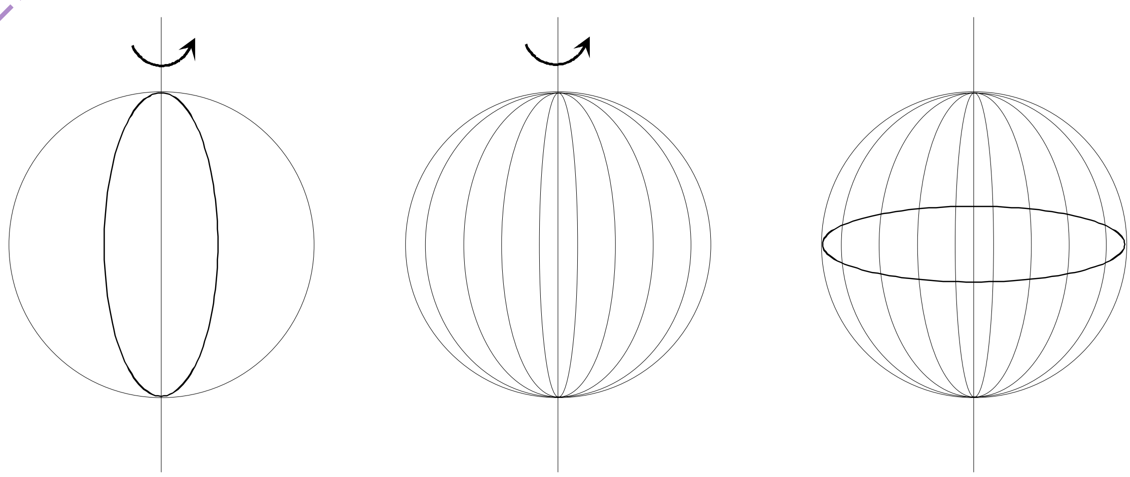
❷ - Construis le centre de la rotation qui transforme la figure ① en la figure ②.
Mesure l'angle de cette rotation.



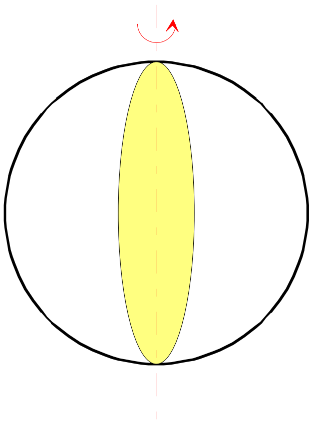
LA SPHÈRE

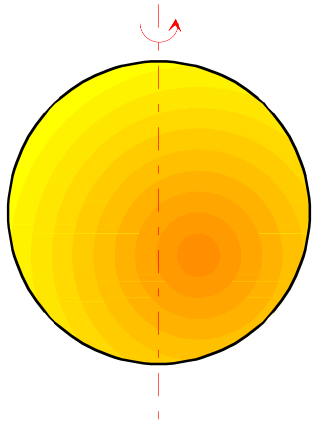
❶ - Génération de la Sphère

Un cercle de centre O et de rayon r en rotation autour d'un de ses diamètres, engendre une SPHÈRE de centre O et de rayon r.

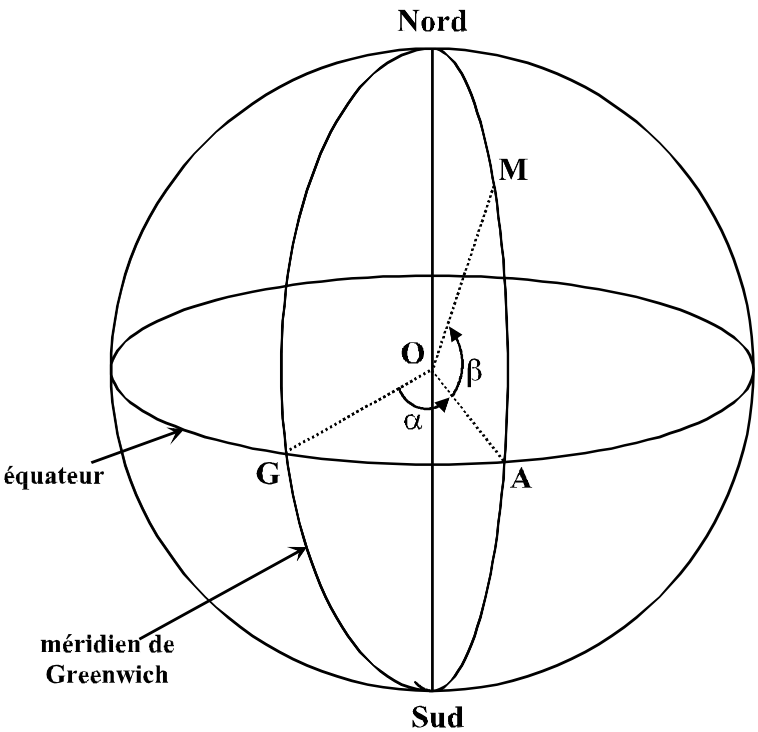


Remarque : un disque de centre O et de rayon r engendre une boule de centre O et de rayon r.





❷ - La Sphère Terrestre



α = **longitude est**

β = **latitude nord**

Les coordonnées sphériques du point M sont donc $(\alpha;\beta)$

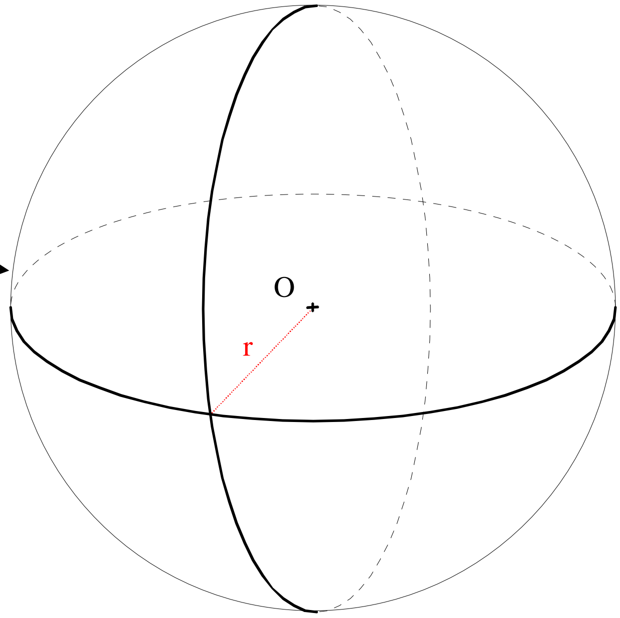
LA SPHÈRE

❶ - Représentation et autre définition de la sphère

On appelle **grand cercle** un cercle de points de la sphère dont le centre est le centre O de la sphère.

On représente la sphère au moyen de deux grands cercles.

La sphère de centre O et de rayon r



Définition :

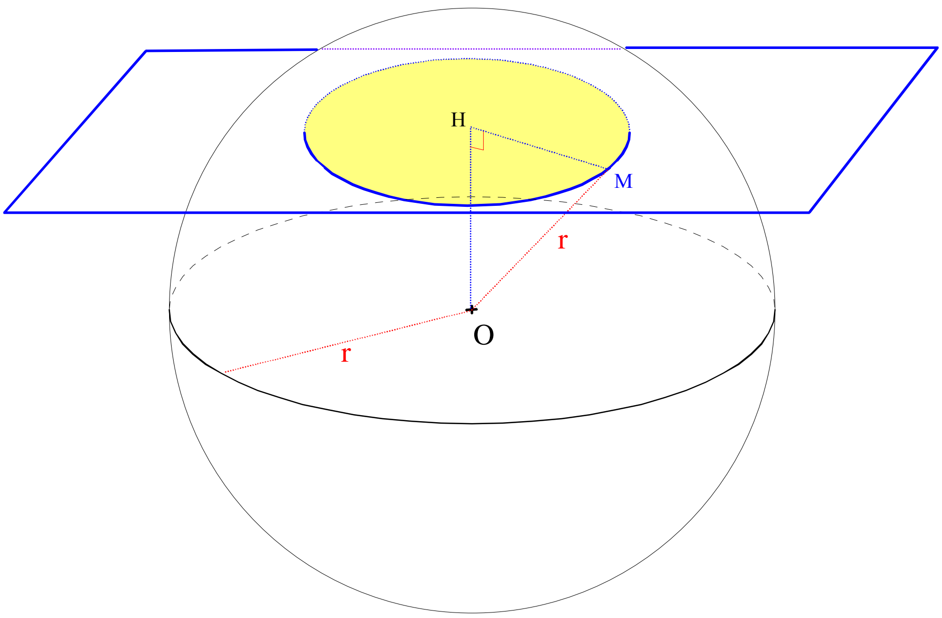
Cette sphère est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à la distance r du point O.

La boule associée à cette sphère est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à r du point O.

❷ - Intersection d'une sphère et d'un plan

Étude d'un exemple :

Une sphère de centre O et de rayon 4 cm est coupée par un plan tel que O soit à 2,4 cm du plan.



Le centre O est à 2,4 cm du plan : $OH = 2,4$ cm

Soit M un point commun à la sphère et au plan.

La droite (OH) est perpendiculaire au plan ; elle est donc perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite (HM).

Le triangle OHM est donc rectangle en H.
D'après la propriété de Pythagore :

$HM^2 = OM^2 - OH^2$

$HM^2 = 4^2 - 2,4^2 = 16 - 5,76 = 10,24$

$HM = \sqrt{10,24} = \boxed{3,2 \text{ cm}}$

N'importe quel point M, appartenant à l'intersection du plan et de la sphère, est à 3,2 cm du point H.
Il est sur le cercle de centre H et de rayon HM = 3,2 cm.

Inversement, n'importe quel point de ce cercle est un point de la sphère.

Conclusion : (généralisation)

La section d'une sphère et d'un plan est un cercle.

Remarques :

La plus grande section possible est obtenue par un plan passant par le centre de la sphère. (OH = 0)
C'est un grand cercle de la sphère.

Si OH = r, alors le plan n'a qu'un point commun avec la sphère.
Ce plan est dit tangent à la sphère en ce point.

❸ - Aire de la sphère

L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est :

$$\boxed{\text{Aire} = 4\pi r^2}$$

Exemple : Calcul de l'aire de la surface terrestre :

Sachant que le rayon terrestre est environ 6365 km, l'aire de la Terre est :
$4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 6365^2 \approx 500\ 000\ 000 \text{ km}^2$

❹ - Volume le la boule

Le volume d'une boule de rayon r est :

$$\boxed{\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Exemple : Calcul du volume d'une boule de 1 m de diamètre

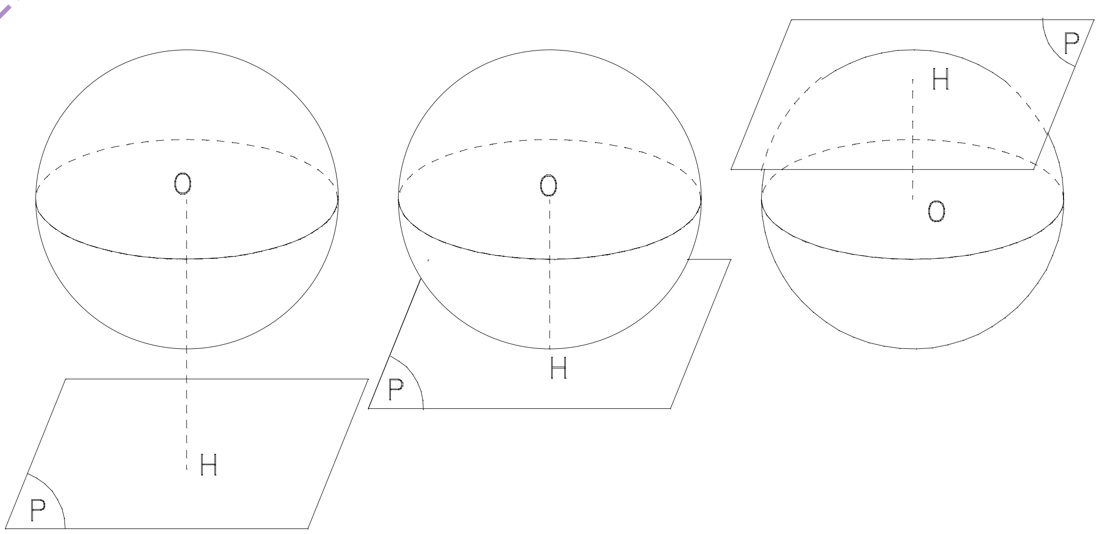
Le rayon d'une telle boule est 0,5 m soit 5 dm.

Le volume de cette boule est :
$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \approx 524 \text{ dm}^3$
Une boule creuse de 1 mètre de diamètre peut donc contenir environ 524 litres de liquide.

Exercices

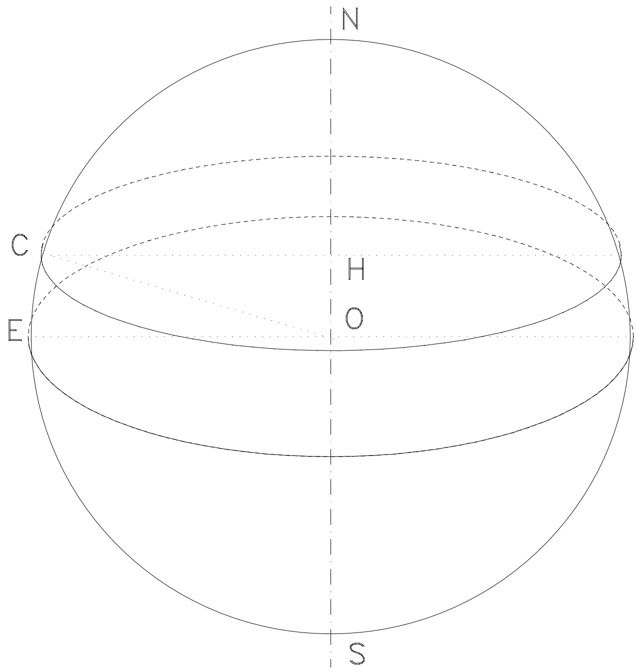
LA SPHÈRE

❶ - On donne une sphère de centre O et de rayon R et un plan P.
On appelle H le point d'intersection du plan et de la perpendiculaire à ce plan issue de O.



Dans chacun des cas ci-dessus, colorie la partie visible du plan.

❷ - **Le tropique du Cancer**



Le tropique du Cancer est à la latitude de 23,5° Nord.

$\widehat{EOC}$ = ... et $\widehat{OCH}$ = ...

car ....

Le triangle OCH est rectangle en H.

$\cos\widehat{OCH}$ ....

Sachant que le rayon de la terre est environ 6365 km,
le rayon du tropique est :

....

La longueur du tropique est environ :

....

....

❸ - Compare le volume d'une sphère de 1,50 m de rayon et celui d'un cylindre de 2 m de diamètre et de 4,50 m de hauteur.

....

....

....

Devoir

Une boule de laiton mesure **10 cm de diamètre**.
Le laiton est un alliage constitué de **40%** de zinc et de **60%** de cuivre.

❶- Calculer le volume de cette boule. (Arrondir à **1/10 cm^3** près)

❷- Quelle est sa masse ?

Indications : **μ (cuivre) = 8,94 g/cm^3**
μ (zinc) = 7,1 g/cm^3

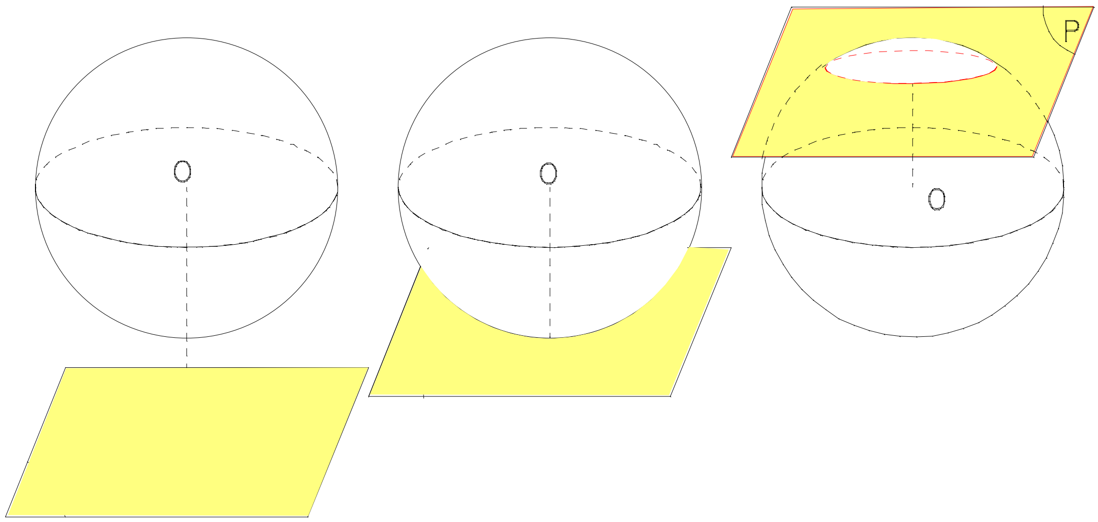
❸- On veut recouvrir cette boule de peinture dorée.
Calculer l'aire de la surface de la boule.
Quelle quantité de peinture est nécessaire si **1 dl** recouvre **0,1 m^2** ?

❹ - La boule est sciée selon un plan situé à **3 cm** de son centre.
Faire le schéma.
Calculer le rayon du cercle de section, la longueur de ce cercle et l'aire du disque de section.

Exercices

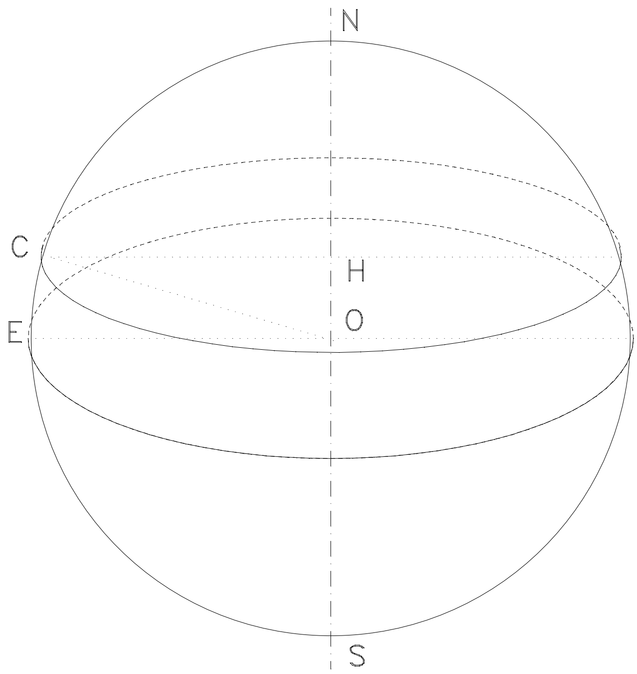
LA SPHÈRE

❶ - On donne une sphère de centre O et de rayon R et un plan P.
On appelle H le point d'intersection du plan et de la perpendiculaire à ce plan issue de O.



Dans chacun des cas ci-dessus, colorie la partie visible du plan.

❷ - **Le tropique du Cancer**



Le tropique du Cancer est à la latitude de 23,5° Nord.

$\widehat{EOC} = 23{,}5°$ et $\widehat{OCH} = 23{,}5°$
Car ils sont alternes internes pour les parallèles (CH) et (EO)

Le triangle OCH est rectangle en H.

$\cos\widehat{OCH} = \dfrac{CH}{OC} = \dfrac{CH}{r}$ r étant le rayon de la Terre

Sachant que le rayon de la terre est environ 6365 km,
le rayon du tropique est :
$CH = r\cos\widehat{OCH} = r \times \cos 23{,}5° \approx 6365 \times \cos 23{,}5° \approx 5840$ km

La longueur du tropique est environ :

$\text{longueur} = 2\pi \times CH \approx 2 \times \pi \times 5840 \approx 36\ 700$ km

Le Tropique du Cancer mesure environ 36 700 km

❸ - Compare le volume d'une sphère de 1,50 m de rayon et celui d'un cylindre de 2 m de diamètre et de 4,50 m de hauteur.

$V(\text{sphère}) = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 1{,}5^3 = \dfrac{4 \times \pi \times 3{,}375}{3} = \boxed{4{,}5\pi}$ (volumes exprimés en m^3)

$V(\text{cylindre}) = \pi r^2 h = \pi \times 1^2 \times 4{,}5 = \boxed{4{,}5\pi}$

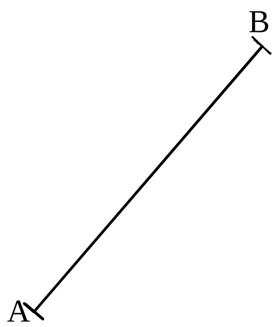
La sphère et le cylindre ont le même volume

ANGLES

❶ **- Recherche** :

Utilise la propriété de la somme des angles d'un triangle pour trouver des points M du plan d'où l'on voit le segment [AB] sous un angle de 70°.

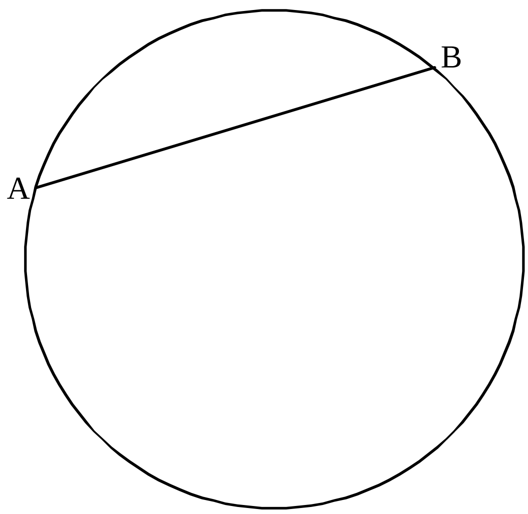
$\widehat{AMB}$	70°	70°	70°	70°	70°	70°	70°
$\widehat{ABM}$	20°	35°	50°	65°	80°	90°	100°
$\widehat{BAM}$							



Conjecture :..

❷ **- Recherche**:

En quel point du grand arc $\overset{\frown}{AB}$ dois-tu te placer pour voir le segment [AB] sous le plus grand angle possible?

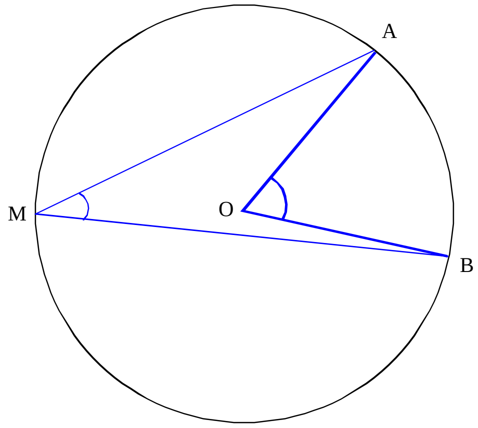


Conjecture :..

ANGLES ET CERCLES

❶ - Définitions

M est un point d'un cercle de centre O.
$\overset{\frown}{AB}$ est un arc de ce cercle.



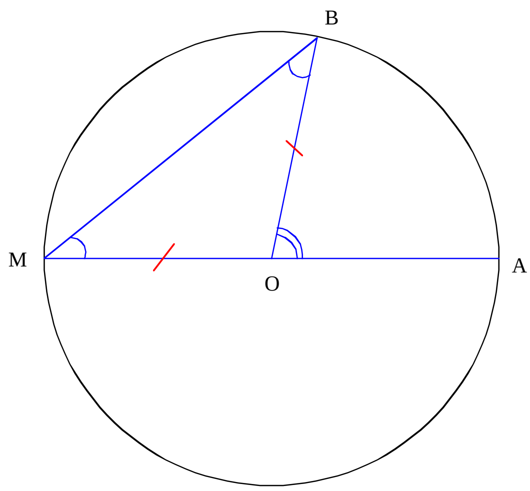
$\widehat{AMB}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

$\widehat{AOB}$ est l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

$\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ sont des angles associés.

❷ - Propriété

a) Étude du cas où un côté de l'angle inscrit est un diamètre du cercle.



$$\widehat{MOA} = 180°$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AOB} = 180° - \widehat{MOB} \\ \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 180° - \widehat{MOB} \end{array}\right\} \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = \widehat{AOB}$$

Le triangle MOB est isocèle (OM =OB = rayon) donc :

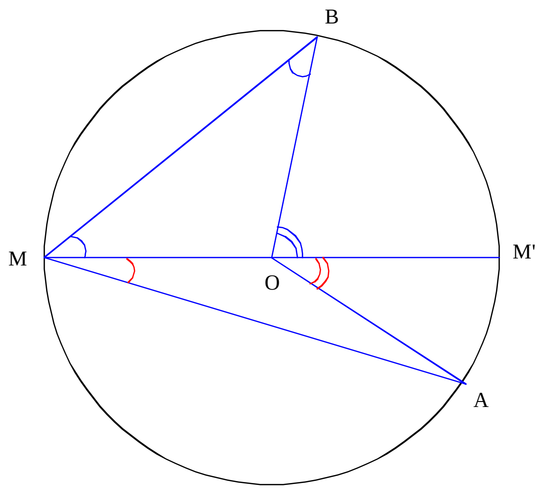
$$\widehat{OMB} = \widehat{OBM}$$

$$2 \times \widehat{OMB} = \widehat{AOB}$$

Par conséquent : $\widehat{OMB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$

$$\boxed{\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}}$$

b) Étude du cas général



Cas où le centre du cercle est dans l'angle inscrit :

D'après la démonstration précédente :

$$\widehat{M'MB} = \frac{\widehat{M'OB}}{2}$$

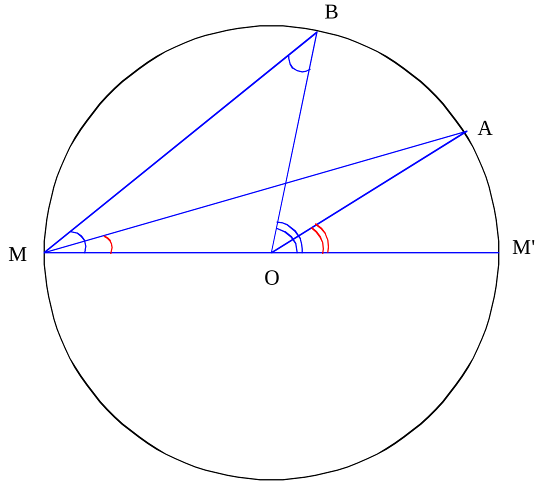
$$\widehat{M'MA} = \frac{\widehat{M'OA}}{2}$$

En ajoutant membre à membre :

$$\widehat{M'MB} + \widehat{M'MA} = \frac{\widehat{M'OB} + \widehat{M'OA}}{2}$$

$$\boxed{\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}}$$

Cas où le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle inscrit :



$$\widehat{M'MB} = \frac{\widehat{M'OB}}{2}$$

$$\widehat{M'MA} = \frac{\widehat{M'OA}}{2}$$

En retranchant membre à membre :

$$\widehat{M'MB} - \widehat{M'MA} = \frac{\widehat{M'OB} - \widehat{M'OA}}{2}$$

$$\boxed{\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}}$$

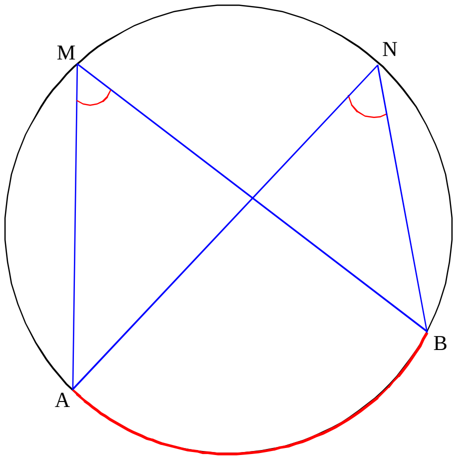
Conclusion :

Un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre associé.

$$\boxed{\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}}$$

❸ - Applications

a) Des angles inscrits dans un même cercle et interceptant le même arc (ou des arcs superposables) sont égaux.



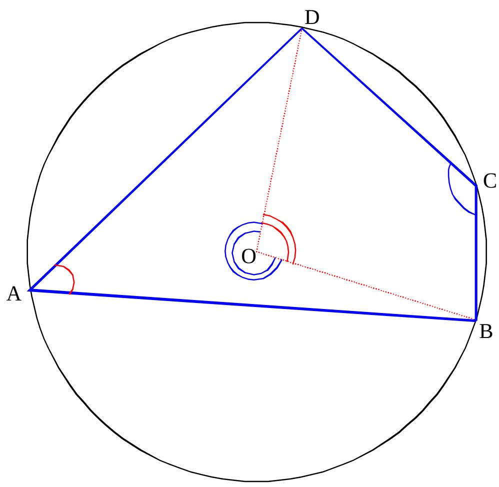
Les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Ils sont donc égaux (ils sont associés au même angle au centre)

$$\boxed{\widehat{AMB} = \widehat{ANB}}$$

b) Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle sont supplémentaires

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{BAD} = \dfrac{\widehat{BOD}}{2} \\ \widehat{BCD} = \dfrac{\widehat{BOD}}{2} \end{array}\right\} \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \frac{\widehat{BOD} + \widehat{BOD}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Attention : $\widehat{BOD}$ est un angle rentrant



$$\boxed{\widehat{A} + \widehat{C} = 180°}$$

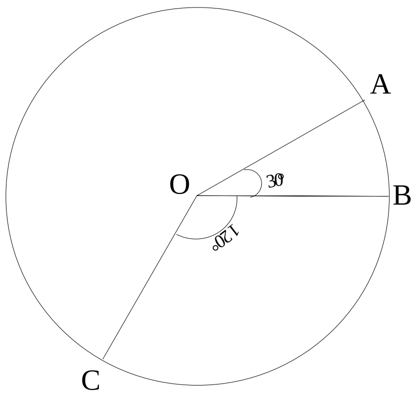
De même

$$\boxed{\widehat{B} + \widehat{D} = 180°}$$

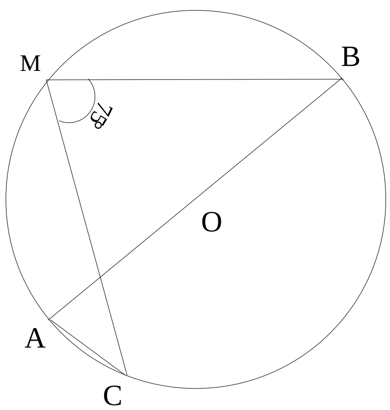
Exercices

ANGLE INSCRIT - ANGLE AU CENTRE

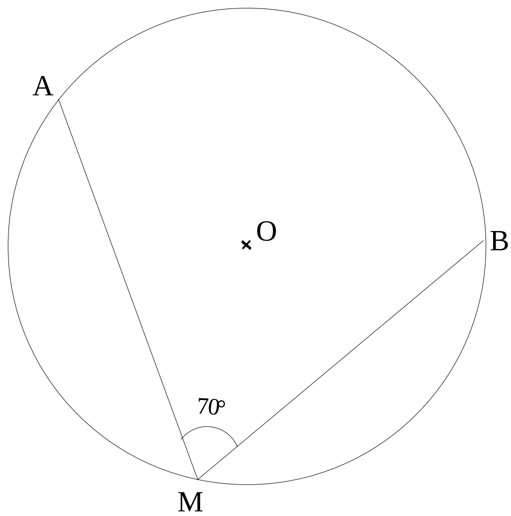
❶ Calcule les angles du triangle ABC :



❷ Calcule les angles du triangle ABC :



❸ Le rayon du cercle est 20 m, calcule la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AB}$



Devoir

❶ - On considère un cercle de centre O et de rayon 4 cm.

$\widehat{ABC}$ est un angle de 35° inscrit dans ce cercle.

Calcule la mesure de l'angle au centre correspondant puis la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$.

Tu donneras le résultat arrondi à 0,01 cm près.

*On rappelle que la longueur d'un cercle de rayon **r** est :* $2\pi r$

La droite (AO) recoupe le cercle en D. Calcule les angles $\widehat{ADC}$, $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DAC}$.

❷- On donne un cercle de centre O et de rayon 5 cm.

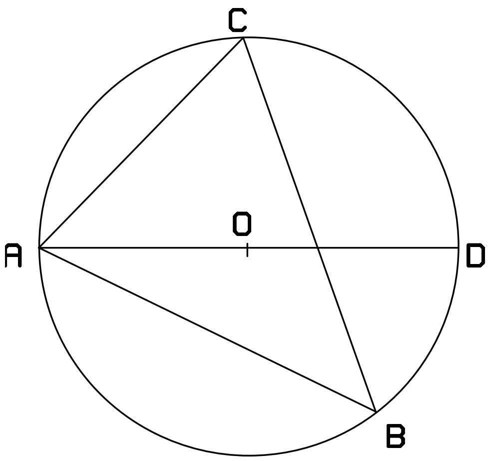
ABC est un triangle inscrit dans ce cercle tel que : $\hat{B} = 45°$ et $\hat{C} = 70°$.

D est le point diamétralement opposé au point A.

a) Explique pourquoi le triangle ADC est un triangle rectangle isocèle.

b) Calcule AC.

c) Construis le triangle ABC.

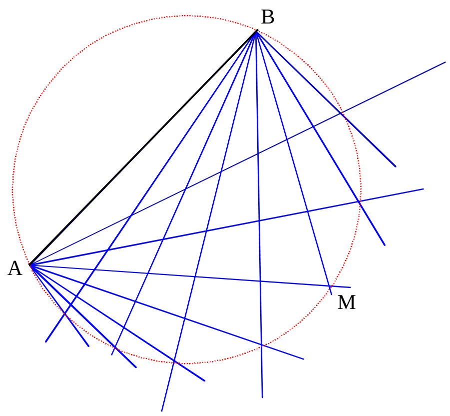


ANGLES

❶ - **Recherche** :

Utilise la propriété de la somme des angles d'un triangle pour trouver des points M du plan d'où l'on voit le segment [AB] sous un angle de 70°.

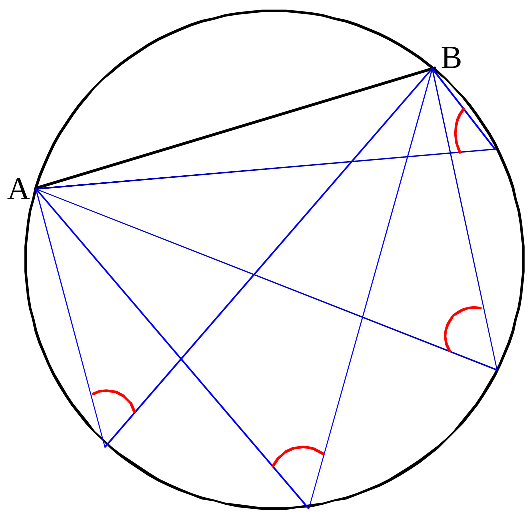
$\widehat{AMB}$	70°	70°	70°	70°	70°	70°	70°
$\widehat{ABM}$	20°	35°	50°	65°	80°	90°	100°
$\widehat{BAM}$	90°	75°	60°	45°	30°	20°	10°



Conjecture :Tous les points M semblent appartenir à un cercle dont [AB] est une corde.
Le centre de ce cercle est l'intersection de la médiatrice de [AB] et de la médiatrice d'un des segments [AM]

❷ - **Recherche**:

En quel point du grand arc $\overset{\frown}{AB}$ dois-tu te placer pour voir le segment [AB] sous le plus grand angle possible?

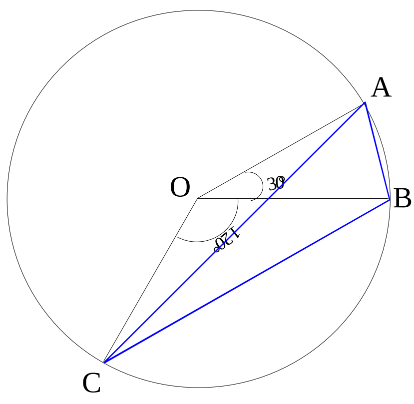


Conjecture : Il semble que, de chaque point du grand arc $\overset{\frown}{AB}$, on voit le segment [AB] sous le même angle.
(environ 56°)

Exercices

ANGLE INSCRIT - ANGLE AU CENTRE

❶ Calcule les angles du triangle ABC :



L'angle inscrit étant la moitié de l'angle au centre associé

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

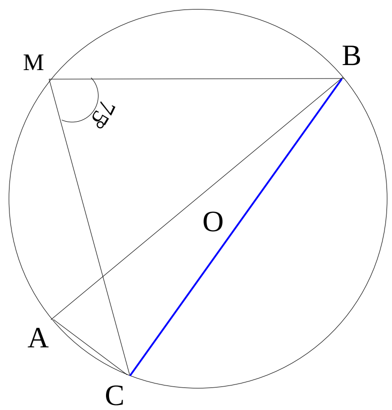
$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$$

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° :

$$\widehat{ABC} = 180° - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) = 180° - (60° + 15°) = 105°$$

Les angles du triangle ABC mesurent 60°, 15° et105°

❷ Calcule les angles du triangle ABC :



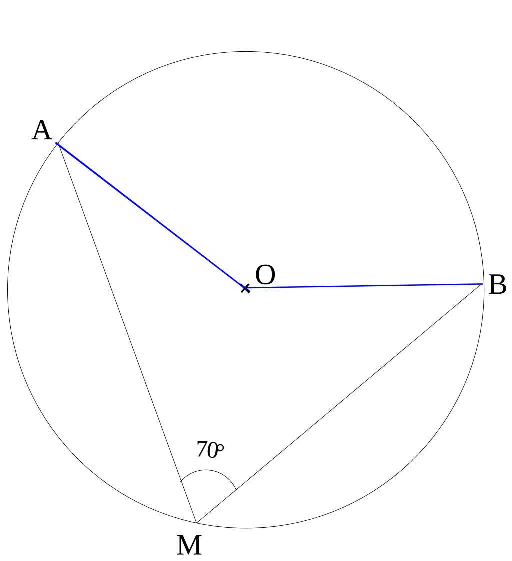
Les angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BMC} = 75°$$

[AB] est un diamètre du cercle, donc : $\widehat{ACB} = 90°$

$$\widehat{ABC} = 180° - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) = 180° - (75° + 90°) = 15°$$

❸ Le rayon du cercle est 20 m, calcule la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AB}$



L'angle au centre est le double de l'angle inscrit correspondant :

$$\widehat{BOA} = 2 \times \widehat{BMA} = 2 \times 70° = 140°$$

La longueur du cercle de centre O et de rayon OA est :

$$2 \times \pi \times OA = 2 \times \pi \times 20 = 40\pi$$

La longueur d'un arc étant proportionnelle à la mesure de l'angle au centre associé, on a le tableau de proportionnalité :

J'appelle x la longueur de l'arc de 140° (arc $\overset{\frown}{AB}$)

Longueur de l'arc (m)	40π	x
Angle au centre (°)	360	140

$$x = \frac{40\pi \times 140}{360} \approx \boxed{48,9 \text{ m}}$$

SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES

❶ - Équation du premier degré à deux inconnues

Étude d'un exemple :

L'équation : $4x - 5y - 3 = 0$ est du premier degré par rapport à x et par rapport à y.
Ses solutions sont tous les couples de deux nombres (x ;y) qui vérifient l'égalité : $4x - 5y - 3 = 0$

$\left(0; -\frac{3}{5}\right)$ est une solution car : $4 \times 0 - 5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) - 3 = 0 + 3 - 3 = 0$

$\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ est une solution car : $4 \times \frac{3}{4} - 5 \times 0 - 3 = 3 - 0 - 3 = 0$

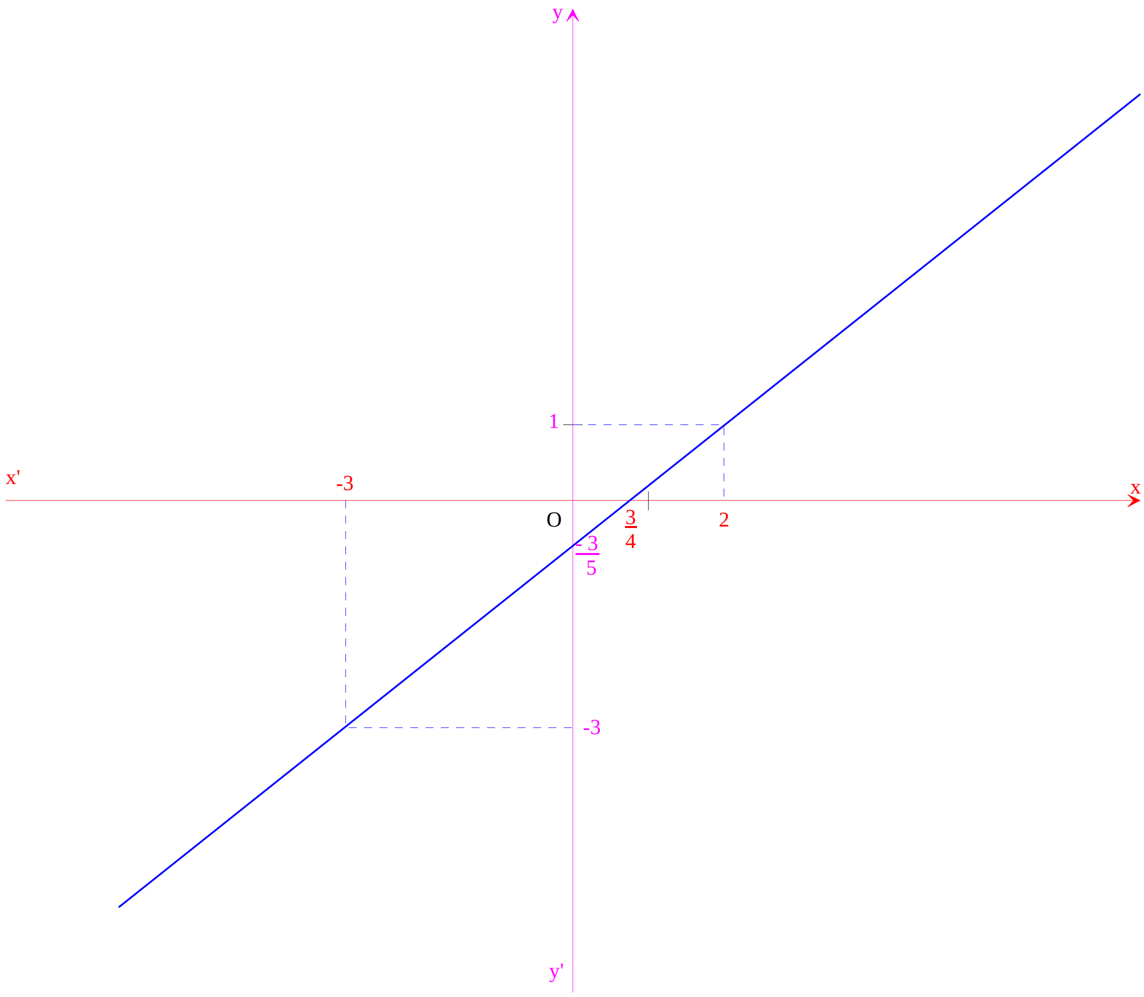
$(2;1)$ est une solution car : $4 \times 2 - 5 \times 1 - 3 = 8 - 5 - 3 = 0$

$(-3;-3)$ est une solution car : $4 \times (-3) - 5 \times (-3) - 3 = -12 + 15 - 3 = 0$

Il y a une infinité de solutions car, à chaque valeur donnée à x correspond une valeur de y.
(x pouvant prendre n'importe quelle valeur)

Remarque importante :

Les solutions de cette équation sont représentées, dans un repère du plan, par des points alignés.



❷ - Système de deux équations à deux inconnues

Étude d'un exemple :

On considère le système des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 7x - 6y + 5 = 0 \\ 6x - 5y + 4 = 0 \end{cases}$$

Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples (x ;y), solutions simultanées des deux équations.

Trois méthodes sont ci-dessous proposées :

a) Méthode par comparaison

$$\begin{cases} 7x - 6y + 5 = 0 & (1) \\ 6x - 5y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

On exprime y en fonction de x dans chacune des deux équations :

$$\begin{cases} 6y = 7x + 5 & (1) \\ 5y = 6x + 4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{7x+5}{6} & (1) \\ y = \dfrac{6x+4}{5} & (2) \end{cases}$$

En comparant les équations (1) et (2) :

$$\frac{7x+5}{6} = \frac{6x+4}{5}$$

On résout cette équation à une inconnue x :

$$5(7x+5) = 6(6x+4)$$
$$35x + 25 = 36x + 24$$
$$35x - 36x = 24 - 25$$
$$-x = -1$$
$$\boxed{x = 1}$$

D'après l'égalité (1) :

Remarque : on peut aussi calculer y à partir de l'égalité (2)

$$y = \frac{7 \times 1 + 5}{6} = \frac{12}{6}$$
$$\boxed{y = 2}$$

Conclusion :

Le couple $\boxed{(1\,;2)}$ est **la** solution du système.

*On verra plus tard que cette solution est le couple de coordonnées du **point d'intersection des deux droites** représentant les deux équations du système.*

b) **Méthode par substitution**

On extrait l'expression d'une inconnue en fonction de l'autre inconnue dans une équation et on reporte cette valeur dans l'autre équation.

$$\begin{cases} 7x-6y+5=0 & (1) \\ 6x-5y+4=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{7x+5}{6} & (1) \\ 6x-5y+4=0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) s'écrit ainsi :

$$6x-5\times\frac{7x+5}{6}+4=0 \qquad (2)$$

On résout cette équation à une inconnue x :

$$6x-\frac{35}{6}x-\frac{25}{6}+4=0$$

$$\frac{36}{6}x-\frac{35}{6}x-\frac{25}{6}+\frac{24}{6}=0$$

$$36x-35x-25+24=0 \qquad \text{on a simplifié par } 6$$

$$x-1=0$$

$$\boxed{x=1}$$

La valeur correspondante de y s'obtient comme dans la première méthode :
on reporte $x = 1$ dans l'équation (1).

On obtient : $\boxed{y = 2}$

$\boxed{(1\,;2)}$ est la solution du système

c) **Méthode par addition**

On multiplie chaque équation par un nombre <u>à choisir avec soin</u> :

$$\begin{cases} 7x-6y+5=0 & (1) \\ 6x-5y+4=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x-6y+5=0 & (1)\leftarrow\times(-5) \\ 6x-5y+4=0 & (2)\leftarrow\times 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-5)\times(7x-6y+5)=(-5)\times 0 & (1) \\ 6\times(6x-5y+4)=6\times 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -35x+30y-25=0 & (1) \\ 36x-30y+24=0 & (2) \end{cases}$$

$$36x-35x+30y-30y+24-25=0 \qquad \leftarrow \text{on a ajouté membre à membre}$$

$$x-1=0 \qquad \leftarrow \text{le choix des facteurs a permis d'obtenir une équation à une seule inconnue}$$

$$\boxed{x=1}$$

La valeur de y est obtenue en remplaçant x par 1 dans une des deux équations.
Par exemple, dans l'équation (1) :

$$7\times 1-6y+5=0$$
$$12-6y=0$$
$$\boxed{y=2}$$

La solution est le couple $\boxed{(1\,;2)}$

❸ - Étude de systèmes particuliers

Étude de deux exemples

$$\begin{cases} 9x+6y=12 \\ 12x+8y=15 \end{cases}$$

En procédant par addition :

$$\begin{cases} 9x+6y=12 & \leftarrow\times 4 \\ 12x+8y=15 & \leftarrow\times(-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x+24y=48 \\ \underline{-36x-24y=-45} \end{cases}$$

$$0x+0y=3$$
$$0=3$$

Ce résultat est impossible ;
$\boxed{\text{Ce système n'a pas de solution}}$.

Remarque : cela correspond graphiquement à deux droites qui sont strictement parallèles.

$$\begin{cases} 9x+6y=12 \\ 12x+8y=16 \end{cases}$$

En procédant par addition :

$$\begin{cases} 9x+6y=12 & \leftarrow\times 4 \\ 12x+8y=16 & \leftarrow\times(-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x+24y=48 \\ \underline{-36x-24y=-48} \end{cases}$$

$$0x+0y=0$$
$$0=0$$

Ce résultat est possible quel que soit le nombre x (ou le nombre y).

On dit que : $\boxed{\text{le système est indéterminé}}$.

Remarque : Il s'agit, en fait, de deux fois la même équation
Et on sait qu'une équation à deux inconnues a une infinité de couples solutions.

❹ - Utilisation des systèmes d'équations pour résoudre des problèmes à deux inconnues

Étude d'un exemple

« Mon père a les $\frac{8}{3}$ de mon âge. Dans cinq ans, il aura les $\frac{9}{4}$ de mon âge »
Quels sont les âges du père et du fils ?

a) **Choix des inconnues**

On appelle x l'âge du père et y l'âge du fils.

b) **Mise en équations**

Actuellement, le père a les $\frac{8}{3}$ de l'âge du fils, soit : $x=\frac{8}{3}y$
Dans cinq ans, le père aura $x+5$ (ans) et le fils $y+5$ (ans)
Le père aura les $\frac{9}{4}$ de l'âge du fils, soit : $x+5=\frac{9}{4}(y+5)$
Les nombres x et y doivent vérifier simultanément ces deux équations, soit le système :

$$\begin{cases} x=\frac{8}{3}y \\ x+5=\frac{9}{4}(y+5) \end{cases}$$

c) **Résolution du système**

Le système s'écrit plus simplement :

$$\begin{cases} 3x=8y \\ 4(x+5)=9(y+5) \end{cases}$$

ou, mieux encore :

$$\begin{cases} 3x-8y=0 \\ 4x-9y=25 \end{cases}$$

En procédant par addition :

$$\begin{cases} 3x-8y=0 & \leftarrow\times(-4) \\ 4x-9y=25 & \leftarrow\times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x+32y=0 \\ \underline{12x-27y=75} \end{cases}$$

$$5y=75$$

$$\boxed{y=15}$$

En remplaçant y par 15 dans la première équation :

$$3x=8\times 15$$

$$x=\frac{8\times 15}{3}$$

$$\boxed{x=40}$$

La solution du système est : $\boxed{(40\,;15)}$

d) **Conclusion**

$\boxed{\text{Le père a 40 ans et le fils 15 ans.}}$

e) **Vérification**

Dans cinq ans, le père aura 45 ans et le fils 20 ans.
Le père aura bien les $\frac{9}{4}$ de l'âge du fils : $\frac{9}{4}\times 20 = \frac{9\times 20}{4} = 45$

Exercices 1

ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES

❶ - Entoure, parmi les couples proposés, les couples solutions des équations ou des systèmes d’équations suivants:

$3x - 2y + 7 = 0$	$\frac{3}{4}x - 5y + 2 = 0$	$\begin{cases} 3x - 4y = -18 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y = -6 \end{cases}$
$(-3;0)$	$(1;-2)$	$(-2;-10)$	$(1;-2)$
$\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$	$(4;1)$	$(4;0)$	$(-2;-4)$
$(1;5)$	$(0;2)$	$(-2;1)$	$(5;3)$
$(3;7)$	$\left(-4;\frac{1}{5}\right)$	$(-2;3)$	$\left(6;\frac{4}{3}\right)$
justification	*justification*	*justification*	*justification*
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....

❷ - Résous le système d’équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + y = 8 & \textbf{(1)} \\ 4x - 5y = -2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

a) *Par comparaison*	*b)Par substitution*	*c)Par combinaison*
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

Quelle serait la meilleure méthode ? ....

Exercices 2

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

❶- Résous le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ 2x + 7y - 13 = 0 \end{cases}$$

a) *Par comparaison* b) *Par substitution* c) *Par combinaison*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

❷ - Cinq croissants et huit pains au chocolat coûtent 6 €.
Trois croissants et cinq pains au chocolat coûtent 3,70 €.
Quel est le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat ?

a) Choix des inconnues:

....

....

b) Mise en équations:

....

....

....

c) Résolution du système:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

....

....

....

d) Conclusion:

....

Exercices 3

SYSTÈMES D’ÉQUATIONS

❶ **-** Résous les systèmes d’équations suivants en choisissant, chaque fois, la méthode la mieux appropriée :

$$\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 7y = -12 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

❷ **-** Résous les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{6} \\ 5x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

❸ **-** Résous le système :

$$\begin{cases} 2x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} = 8 \end{cases}$$

Devoir

PROBLÈMES À DEUX INCONNUES

❶ - Un père a le triple de l’âge de son fils. Dans quinze ans, l’âge du père sera le double de l’âge de son fils. Quels sont les âges respectifs du père et du fils ?

❷ - Une salle de théâtre compte 400 places. Les « parterres » sont à 23 € et les « balcons » à 18 €.

Quand le théâtre est plein, la recette est de 8100 €.

Combien y a-t-il de parterres et de balcons ?

❸ - Des personnes ont pris toutes le même menu.

Si elles donnent chacune 12 €, il manque au total 17,50 €.

Si elles donnent chacune 15 €, le restaurateur leur rend 3,50 €.

Quel est le nombre de convives et quel est le prix du repas ?

❹ - Si la longueur d’un rectangle augmente de 10 %, son demi-périmètre est alors 10,6 cm.

Si la largeur de ce même rectangle diminue de 10 %, son demi-périmètre est alors 9,6 cm.

Quelles sont les dimensions initiales du rectangle ?

❺ - Trois cercles sont tangents deux à deux.

On appelle O, P, Q leurs centres.

Calculer leurs rayons sachant que : OP = 50 cm ; PQ = 35 cm ; OQ = 29 cm.

Exercices 1

ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES

❶ - Entoure, parmi les couples proposés, les couples solutions des équations ou des systèmes d'équations suivants:

$3x-2y+7=0$

$(-3;0)$

$\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{(1;5)}$

$(3;7)$

justification

$3\times1-2\times5+7=0$

$\frac{3}{4}x-5y+2=0$

$(1;-2)$

$\boxed{(4;1)}$

$(0;2)$

$\left(-4;\frac{1}{5}\right)$

justification

$\frac{3}{4}\times4-5\times1+2=$

$3-5+2=0$

$\begin{cases}3x-4y=-18\\ x+2y=4\end{cases}$

$(-2;-10)$

$(4;0)$

$(-2;1)$

$\boxed{(-2;3)}$

justification

$\begin{cases}3\times(-2)-4\times3=-18\\ -2+2\times3=4\end{cases}$

$\begin{cases}2x-3y=8\\ -\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}y=-6\end{cases}$

$\boxed{(1;-2)}$

$\boxed{(-2;-4)}$

$(5;3)$

$\boxed{\left(6;\frac{4}{3}\right)}$

justification

$\begin{cases}2\times1-3\times(-2)=8\\ -\frac{3}{2}\times1+\frac{9}{4}\times(-2)=-6\end{cases}$

$\begin{cases}2\times(-2)-3\times(-4)=8\\ -\frac{3}{2}\times(-2)+\frac{9}{4}\times(-4)=-6\end{cases}$

etc...

ce système a une infinité de solutions

❷ - Résous le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}3x+y=8 & \textbf{(1)}\\ 4x-5y=-2 & \textbf{(2)}\end{cases}$$

a) *Par comparaison*

d'après (1) : $y=8-3x$

d'après (2) : $y=\frac{4x+21}{5}$

En comparant :

$8-3x=\frac{4x+21}{5}$

$5(8-3x)=4x+21$

$40-15x=4x+21$

$-15x-4x=21-40$

$-19x=-19$

$x=1$

d'après (1) :

$y=8-3\times1=5$

la solution est :

$\boxed{(1;5)}$

b) *Par substitution*

d'après (1) : $y=8-3x$

on reporte dans (2) :

$4x-5(8-3x)=-21$

$4x-40+15x=-21$

$4x+15x=-21+40$

$19x=19$

$x=1$

d'après (1) :

$y=8-3\times1=5$

la solution est :

$\boxed{(1;5)}$

c) *Par combinaison*

on multiplie (1) par 5.

$\begin{cases}15x+5y=40\\ 4x-5y=-21\end{cases}$

on ajoute membre à membre :

$19x=19$

$x=1$

On multiplie (1) par 4 et (2) par (-3) :

$\begin{cases}12x+4y=32\\ -12x+15y=63\end{cases}$

on ajoute membre à membre :

$19y=95$

$y=5$

la solution est :

$\boxed{(1;5)}$

Quelle serait la meilleure méthode ? En combinant la méthode par combinaison (première addition membre à membre) et la fin des deux autres méthodes, on a probablement la meilleure méthode.

Exercices 2

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

❶- Résous le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 & (1) \\ 2x + 7y - 13 = 0 & (2) \end{cases}$$

a) *Par comparaison*

d'après (1) : $x = \dfrac{5y+4}{3}$

d'après (2) : $x = \dfrac{-7y+13}{2}$

par conséquent :

$\dfrac{5y+4}{3} = \dfrac{-7y+13}{2}$

$2(5y+4) = 3(-7y+13)$

$10y + 8 = -21y + 39$

$10y + 21y = 39 - 8$

$31y = 31$

$y = 1$

d'après (1) : $x = \dfrac{5y+4}{3} = \dfrac{5\times1+4}{3} = 3$

b) *Par substitution*

d'après (1) : $x = \dfrac{5y+4}{3}$

on reporte cette valeur dans (2) :

$2 \times \dfrac{5y+4}{3} + 7y - 13 = 0$

$\dfrac{10y+8}{3} + \dfrac{21y}{3} - \dfrac{39}{3} = 0$

on simplifie par 3 :

$10y + 8 + 21y - 39 = 0$

$31y - 31 = 0$

$31y = 31$

$y = \dfrac{31}{31}$

$y = 1$

d'après (1) : $x = 3$

c) *Par combinaison*

on multiplie (1)par 2 et (2) par -3 :

le système s'écrit :

$$\begin{cases} 6x - 10y - 8 = 0 \\ -6x - 21y + 39 = 0 \end{cases}$$

$-10y - 21y - 8 + 39 = 0$

$-31y + 31 = 0$

$-31y = -31$

$y = 1$

d'où : $x = 3$

La solution du système est le couple : $\boxed{(3\,;1)}$

❷ - Cinq croissants et huit pains au chocolat coûtent 6 €.
Trois croissants et cinq pains au chocolat coûtent 3,70 €.
Quel est le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat ?

a) *Choix des inconnues:*

x est le prix d'un croissant et y est le prix d'un pain au chocolat.

b) *Mise en équations:*

Cinq croissants coûtent (en €) : $5x$ Huit pains coûtent (en €) : $8y$ Soit en tout : $5x + 8y$

Trois croissants coûtent : $3x$ Cinq pains coûtent : $5y$ Soit en tout : $3x + 5y$

Les deux phrases de l'énoncé sont traduites par les équations : $5x + 8y = 6$ et : $3x + 5y = 3{,}7$

c) *Résolution du système:*

$$\begin{cases} 5x + 8y = 6 & (1) \\ 3x + 5y = 3{,}7 & (2) \end{cases}$$

On multiplie (1) par 3 et (2) par -5 :

$$\begin{cases} 15x + 24y = 18 \\ -15x - 25y = -18{,}5 \end{cases}$$

Après addition : $-y = -0{,}5$ ou : $\boxed{y = 0{,}5}$

En reportant dans (1) : $5x + 8 \times 0{,}5 = 6$ ou : $\boxed{x = 2}$

d) *Conclusion:*

Un croissant coûte 2 € et un pain au chocolat 0,50 €.

Exercices 3

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

❶ - Résous les systèmes d'équations suivants en choisissant, chaque fois, la méthode la mieux appropriée :

$$\begin{cases} 4x-7y=3 \\ 3x-7y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-7y=-12 \\ x-2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

$\begin{cases} 7y=4x-3 \\ 7y=3x-2 \end{cases}$

En comparant :

$4x - 3 = 3x - 2$

$4x-3x=3-2$

$\boxed{x=1}$

En reportant dans la première équation :

$7y=4\times1-3=1$

$\boxed{y=\frac{1}{7}}$

La solution est :

$\boxed{\left(1;\frac{1}{7}\right)}$

On multiplie la 2ème équation par (-2) :

$\begin{cases} 2x-7y=-12 \\ -2x+4y=0 \end{cases}$

après addition membre à membre :

$-3y = -12$

$\boxed{y=4}$

En reportant dans la seconde équation:

$x-2\times4=0$

$\boxed{x=8}$

La solution est :

$\boxed{(8;4)}$

On multiplie la 1ère par 2 et la 2ème par -3 :

$\begin{cases} 4x-6y=2 \\ -9x+6y=-3 \end{cases}$

$-5x=-1$

$\boxed{x=\frac{1}{5}}$

On reporte cette valeur dans la 1ère :

$2\times\frac{1}{5}-3y=1$

$3y=\frac{2}{5}-1$

$3y=-\frac{3}{5}$

$\boxed{y=-\frac{1}{5}}$

Solution : $\boxed{\left(\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)}$

❷ - Résous les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=4 \leftarrow\times6 \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{2}=-2 \leftarrow\times4 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3x+2y=24 \\ x-2y=-8 \end{cases}$

$4x=16$

$\boxed{x=4}$

On reporte dans la 1ère :

$3\times4+2y=24$

$\boxed{y=6}$

Solution : $\boxed{(4;6)}$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{6} \leftarrow\times6 \\ 5x+y=\frac{1}{2} \leftarrow\times2 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2(x-1)=y+1 \\ 2(5x+y)=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x-y=3 \leftarrow\times2 \\ 10x+2y=1 \end{cases}$

soit : $\begin{cases} 4x-2y=6 \\ 10x+2y=1 \end{cases}$

$14x=7$ ou $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

$2\times\frac{1}{2}-y=3$ ou $\boxed{y=-2}$

Solution : $\boxed{\left(\frac{1}{2};-2\right)}$

❸ - Résous le système :

$$\begin{cases} 2x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=1 \\ x\sqrt{2}+2y\sqrt{3}=8 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par 2 et on obtient le système équivalent suivant :

$\begin{cases} 4x\sqrt{2}-2y\sqrt{3}=2 \\ x\sqrt{2}+2y\sqrt{3}=8 \end{cases}$ Après addition membre à membre : $5x\sqrt{2}=10$ d'où $\boxed{x=\sqrt{2}}$

On reporte cette valeur dans la première équation : $2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}-y\sqrt{3}=1$ soit : $4-y\sqrt{3}=1$ ou : $\boxed{y=\sqrt{3}}$

La solution du système est : $\boxed{\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)}$

*Remarque : toutes les solutions peuvent être **vérifiées** ; c'est conseillé pour les vérifications simples.*