Les maths au collège :
Cours, Techniques et Exercices

Denis LE FUR
Collège Zéphir, Cayenne

11 mars 2004

L'objet de ce document est de fournir aux élèves de niveau 3ème un recueil de cours, de techniques et d'exercices sur les différentes connaissances exigibles en mathématiques au collège.

Ainsi, chaque chapitre contiendra un cours sommaire, des exercices corrigés, puis une série d'exercices mettant en oeuvre les notions étudiées dans ce chapitre.

Ce document regroupant à la fois des notions du programme de 3ème mais aussi des années précédentes, le plan choisi ne correspond pas à une progression d'un cours de 3ème.

Pour atteindre une notion, l'élève pourra s'aider de la table des matières mais aussi de l'index situé en fin de document.

Cee document s'adrese également aux parents et aux enseignants :

- les **parents** pourront s'en servir pour apprendre à leurs enfants à y chercher la réponse à un problème, à travailler sur la méthodologie même s'ils ne maîtrisent pas au départ le contenu ;
- les **enseignants** auront une base de discussion sur leur pratique pédagogique.

Une version informatique de ce document sous forme de fichier PDF contenant des liens hypertextes est aussi disponible.

Table des matières

Table des matiéres **5**

I Partie géométrique **7**

1 Le triangle rectangle **9**
1.1 Le cours . . . 9
1.1.1 Le théorème de Pythagore . . . 9
1.1.2 Triangle rectangle et cercle circonscrit . . . 11
1.1.3 Trigonométrie . . . 12
1.2 Les exercices . . . 14
1.2.1 Exercices corrigés . . . 14
1.2.2 Autres exercices . . . 15

2 Les droites parallèles **21**
2.1 Le cours . . . 21
2.1.1 Le théorème de Thalès . . . 21
2.1.2 La réciproque du théorème de Thalès . . . 22
2.1.3 Droite des milieux . . . 24
2.1.4 Angles et parallélisme . . . 24
2.2 Les exercices . . . 25
2.2.1 Exercices corrigés . . . 25
2.2.2 Autres exercices . . . 27

3 Les polygones **31**
3.1 Le cours . . . 31
3.1.1 Généralités . . . 31
3.1.2 Les triangles . . . 31
3.1.3 Les quadrilatères . . . 32
3.1.4 Autres polygones . . . 34
3.2 Les exercices . . . 34
3.2.1 Exercices corrigés . . . 34
3.2.2 Autres exercices . . . 36

4 Les droites remarquables **39**
4.1 Le cours . . . 39
4.1.1 Médianes . . . 39
4.1.2 Médiatrices . . . 40
4.1.3 Hauteurs . . . 40
4.1.4 Bissectrices . . . 41
4.2 Les exercices . . . 42
4.2.1 Exercices corrigés . . . 42
4.2.2 Autres exercices . . . 43

5 Les angles **47**
5.1 Le cours . . . 47
5.1.1 Les catégories d'angles . . . 47
5.1.2 Relations entre deux angles . . . 48
5.1.3 Angles inscrits et angles au centre . . . 49
5.2 Les exercices . . . 49
5.2.1 Exercices corrigés . . . 50
5.2.2 Autres exercices . . . 50

6 Longueurs, aires et volumes **53**
6.1 Le cours . . . 53
6.1.1 Longueurs . . . 53
6.1.2 Aires . . . 54
6.1.3 Volumes . . . 55
6.2 Les exercices . . . 57
6.2.1 Exercices corrigés . . . 57
6.2.2 Autres exercices . . . 58

7 Les transformations **61**
7.1 Le cours . . . 61
7.1.1 Symétrie centrale . . . 61
7.1.2 Symétrie axiale . . . 62
7.1.3 Translation . . . 64
7.1.4 Rotation . . . 66
7.2 Les exercices . . . 68
7.2.1 Exercices corrigés . . . 68
7.2.2 Autres exercices . . . 70

8 Géométrie dans l'espace **73**
8.1 Le cours . . . 73
8.1.1 Les pavés droits . . . 73
8.1.2 Les Pyramides . . . 74
8.1.3 Les cônes de révolution . . . 77
8.1.4 La sphère et la boule . . . 78
8.1.5 Agrandissement et réduction . . . 80
8.2 Les exercices . . . 82
8.2.1 Exercices corrigés . . . 82
8.2.2 Autres exercices . . . 85

9 Géométrie analytique **91**
9.1 Le cours . . . 91
9.1.1 Utilisation d'un repère . . . 91
9.1.2 Milieu d'un segment . . . 91
9.1.3 Vecteurs . . . 92
9.1.4 Distance entre deux points . . . 92
9.1.5 Droites dans un repère . . . 92
9.2 Les exercices . . . 95
9.2.1 Exercices corrigés . . . 95
9.2.2 Autres exercices . . . 99

II Partie numérique **105**

10 Le calcul numérique **107**
10.1 Le cours . . . 107
10.1.1 Priorités sur les opérations . . . 107
10.1.2 Les nombres relatifs . . . 107
10.1.3 Les fractions . . . 109
10.1.4 Les racines carrées . . . 111
10.1.5 Les puissances . . . 113

10.1.6 Écriture scientifique . . . 114
10.2 Les exercices . . . 114
10.2.1 Exercices corrigés . . . 114
10.2.2 Autres exercices . . . 115

11 L'arithmétique **119**
11.1 Le cours . . . 119
11.1.1 Division euclidienne . . . 119
11.1.2 Diviseurs communs à deux nombres et PGCD . . . 120
11.1.3 Méthodes de recherche du PGCD . . . 121
11.2 Les exercices . . . 122
11.2.1 Exercices corrigés . . . 122
11.2.2 Autres exercices . . . 123

12 Le calcul littéral **125**
12.1 Le cours . . . 125
12.1.1 Généralités sur les expressions numériques . . . 125
12.1.2 Développement d'une expression . . . 125
12.1.3 Factorisation d'une expression . . . 127
12.1.4 Equations du premier degré . . . 128
12.1.5 Inéquations . . . 130
12.1.6 Equation de type "produit nul" . . . 132
12.1.7 Système de deux équations à deux inconnues . . . 133
12.2 Les exercices . . . 136
12.2.1 Exercices corrigés . . . 136
12.2.2 Autres exercices . . . 140

13 La proportionnalité **143**
13.1 Le cours . . . 143
13.1.1 Proportionalité sur un tableau . . . 143
13.1.2 Proportionnalité et fonctions . . . 145
13.1.3 Les pourcentages . . . 147
13.1.4 Proportionnalité et grandeurs physiques . . . 149
13.2 Les exercices . . . 150
13.2.1 Exercices corrigés . . . 150
13.2.2 Autres exercices . . . 154

14 Gestion de données **159**
14.1 Le cours . . . 159
14.1.1 Séries statistiques . . . 159
14.1.2 Les graphiques . . . 160
14.1.3 Fréquences et fréquences cumulées . . . 162
14.1.4 Moyenne, médiane et étendue d'une série . . . 162
14.2 Les exercices . . . 164
14.2.1 Exercices corrigés . . . 164
14.2.2 Autres exercices . . . 167

Index **173**

Première partie

Partie géométrique

Chapitre 1

Le triangle rectangle

1.1 Le cours

1.1.1 Le théorème de Pythagore

Enoncé du théorème

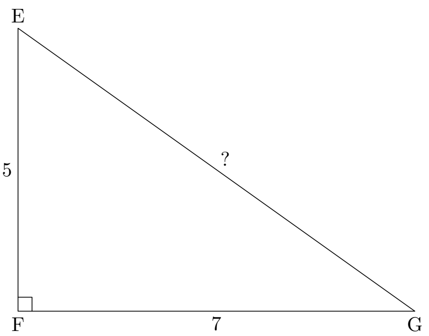
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

But du théorème

Le théorème de Pythagore sert à calculer un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres.

Cependant, l'énoncé du théorème ne dépend pas du côté cherché.

Première application : calcul de l'hypoténuse



Enoncé

Sur la figure ci-contre, le triangle EFG est rectangle en F.
On donne : $EF = 5$ et $FG = 7$.
Calculer EG. On donnera sa valeur exacte, puis sa valeur arrondie au dixième.

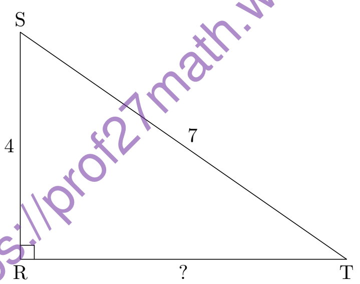
Solution

Calculons EG.
Dans le triangle EFG rectangle en F,
d'après le théorème de Pythagore,
$E\mathbf{F}^2 + \mathbf{F}G^2 = EG^2$
$5^2 + 7^2 = EG^2$
$25 + 49 = EG^2$
$EG^2 = 74$
$EG = \sqrt{74}$ (valeur exacte)
D'après la calculatrice $EG = 8,6$ (valeur arrondie au dixième)

Commentaires
Les 3 premières lignes sont l'énoncé du théorème.

Le sommet F de l'angle droit est près du signe $+$.
On remplace les deux valeurs connues.

Deuxième application : calcul d'un côté de l'angle droit



Enoncé

Sur la figure ci-contre, le triangle RST est rectangle en R.
On donne : $RS = 4$ et $ST = 7$.
Calculer RT. On donnera sa valeur exacte, puis sa valeur arrondie au dixième.

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,
$S\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}T^2 = ST^2$
$4^2 + RT^2 = 7^2$
$16 + RT^2 = 49$
$RT^2 = 49 - 16$
$RT^2 = 33$
$RT = \sqrt{33}$ (valeur exacte)
D'après la calculatrice $RT = 5,7$ (valeur arrondie au dixième)

Commentaires

Cette relation ne dépend pas de la longueur cherchée.

Réciproque du théorème de Pythagore

Enoncé de la réciproque

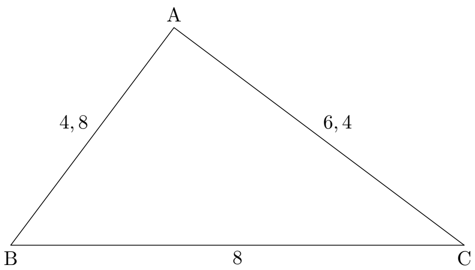
Dans un triangle, **si** la somme des carrés des deux petits côtés est égal au carré du grand côté, **alors** le triangle est rectangle et le grand côté est son hypoténuse.
Cette égalité doit être parfaite : aucun arrondi ne peut être utilisé.

But de la réciproque

La réciproque du théorème de Pythagore sert à vérifier si un triangle est rectangle ou non.

Pour l'utiliser, il est nécessaire de connaître les trois longueurs du triangle.
NB : il ne faut jamais utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur manquante pour ensuite vouloir utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

Première application : cas d'un triangle rectangle



Enoncé

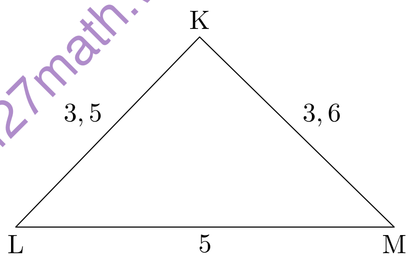
Sur la figure ci-contre, on donne : $AB = 4,8$, $AC = 6,4$ et $BC = 8$.
Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Solution

Montrons que le triangle ABC est rectangle en A	***Commentaires***
$BC^2 = 8^2 = 64$	*$[BC]$ est le grand côté du triangle.*
$B\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}C^2 = 4,8^2 + 6,4^2 = 23,04 + 40,96 = 64$	*A est le sommet de l'angle droit supposé.*

Comme $B\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}C^2 = BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Deuxième application : cas d'un triangle non rectangle



Enoncé

Sur la figure ci-contre, on donne : $KL = 3,5$, $LM = 5$ et $KM = 3,6$.
Le triangle KLM est-il rectangle ?

Solution

Vérifions si le triangle KLM est rectangle en K.

$LM^2 = 5^2 = 25$

$L\mathbf{K}^2 + \mathbf{K}M^2 = 3,5^2 + 3,6^2 = 12,25 + 12,96 = 25,21$

Commentaires

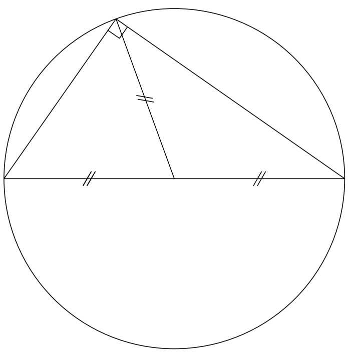
$[LM]$ est le grand côté du triangle.

K est le sommet de l'angle droit supposé.

Comme $L\mathbf{K}^2 + \mathbf{K}M^2 \neq LM^2$, le triangle KLM n'est pas rectangle.

1.1.2 Triangle rectangle et cercle circonscrit

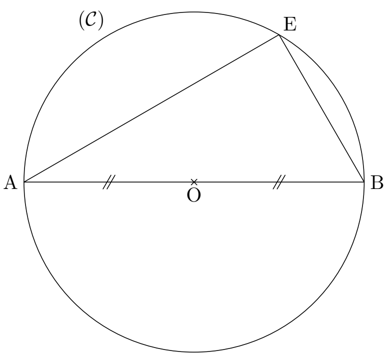
Propriété



Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Autrement dit, la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse.

Première application : le cercle est donné



Enoncé

$(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O. On donne $AB = 6$.
E est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $BE = 4$.
Montrer que ABE est un triangle rectangle.

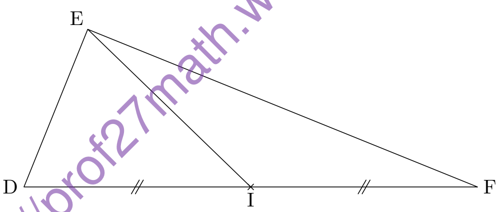
Solution

Montrons que le triangle ABE est rectangle en E

E est un point du cercle de diamètre $[AB]$,

alors le triangle ABE est rectangle en E.

Deuxième application : le cercle n'est pas donné



Enoncé

Sur la figure ci-contre, DEF est un triangle tel que :
- I est le milieu de $[DF]$;
- $DF = 8$, $DE = 3$ et $IE = 4$.

Montrer que DEF est un triangle rectangle.

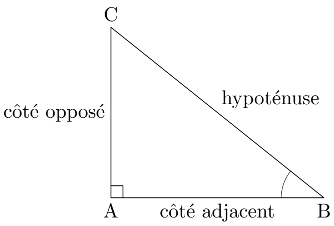
Solution

Montrons que le triangle DEF est rectangle en E.

I est le milieu de $[DF]$, d'où $DI = IF = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.
On a donc $ID = IF = IE = 4$.
I, milieu de $[DF]$, est le centre du cercle circonscrit du triangle DEF,
alors DEF est rectangle en E.

1.1.3 Trigonométrie

Comment nommer les côtés

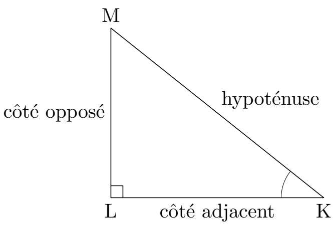


Dans un triangle rectangle, mis à part l'**hypoténuse** (le plus grand côté), on nomme les deux autres côtés par rapport à l'un des deux angles aigus du triangle rectangle.
Sur le dessin ci-contre, on a choisi l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

Si on s'intéresse maintenant à l'angle $\widehat{ACB}$,
- $[AB]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$;
- $[AC]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$;

NB : à chaque utilisation de la trigonométrie dans un exercice, il sera important de faire un schéma à main levée, de colorier l'angle aigu choisi et de nommer les côtés du triangle.

Les formules



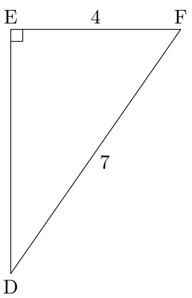
Dans le triangle KLM rectangle en L,

$$\cos(\widehat{LKM}) = \frac{LK}{MK} \left(= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \right)$$

$$\sin(\widehat{LKM}) = \frac{LM}{MK} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$$

$$\tan(\widehat{LKM}) = \frac{LM}{LK} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$$

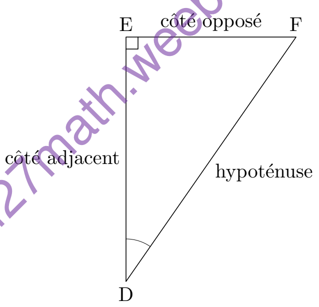
Première application : calcul d'un angle



Enoncé

Sur la figure ci-contre, DEF est un triangle rectangle en E tel que : $DF = 7$ et $EF = 4$.

1. Calculer l'angle $\widehat{EDF}$. On arrondira sa valeur au degré près.
2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{EFD}$ au degré près



Commentaires

La première étape consiste à colorier l'angle $\widehat{EDF}$ et à nommer les côtés du triangle.
Comme on connaît son côté opposé et l'hypoténuse, la formule trigonométrique à utiliser est le *sinus*.
Il est conseillé de marquer sur ce document la combinaison de touches de la calculatrice à utiliser pour parvenir au résultat.

Solution

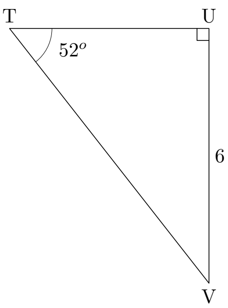
1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

	Commentaires
Dans le triangle DEF rectangle en E,	*Cette hypothèse est indispensable.*
$\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{EF}{DF} \left(= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}\right)$	*On rappelle la formule.*
$\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{4}{7}$	*On connaît donc le sinus de l'angle*
D'après la calculatrice, $\widehat{EDF} = 35°$.	*On a utilisé* $\sin^{-1}$.

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

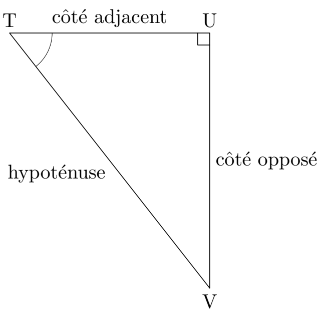
   Dans le triangle DEF rectangle en E, les angles aigus $\widehat{EDF}$ et $\widehat{EFD}$ sont complémentaires.
   On a donc : $\widehat{EDF} + \widehat{EFD} = 90°$.
   D'où, $\widehat{EFD} = 90 - \widehat{EDF} = 90 - 35$.
   $\widehat{EFD} = 35°$.

Deuxième application : calcul d'une longueur



Enoncé

Sur la figure ci-contre, TUV est un triangle rectangle en U tel que :
$UV = 6cm$ et $\widehat{VTU} = 52°$.
Calculer TU. On arrondira sa valeur au mm.



Commentaires

La première étape consiste à colorier l'angle $\widehat{VTU}$ et à nommer les côtés du triangle.
Comme on connaît son côté opposé et et que l'on cherche l'hypoténusee, la formule trigonométrique a utiliser est la *tangente*.
Il est conseillé de marquer sur ce document la combinaison de touches de la calculatrice à utiliser pour parvenir au résultat.

Solution

Calculons TU.

Dans le triangle TUV rectangle en U,

$\tan(\widehat{VTU}) = \dfrac{VU}{TU} \left(= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$

$\tan(52) = \dfrac{6}{TU}$

$TU \times \tan(52) = 6$

$TU = \dfrac{6}{\tan(52)}$

D'après la calculatrice, $TU = 4,7cm$.

Commentaires

Cette hypothèse est indispensable.

On rappelle la formule.

On remplace les valeurs connues.

On fait les produits en croix.

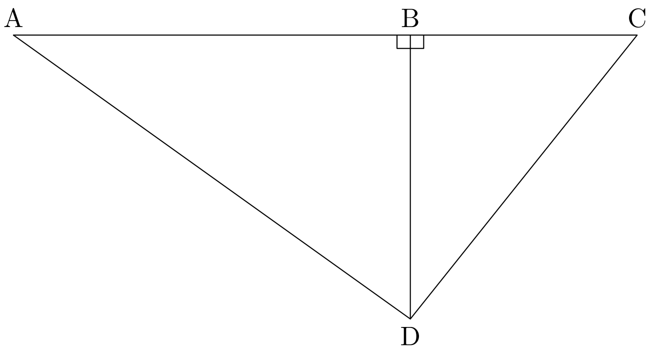
On obtient la valeur exacte.

On a utilisé sin.

1.2 Les exercices

1.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1

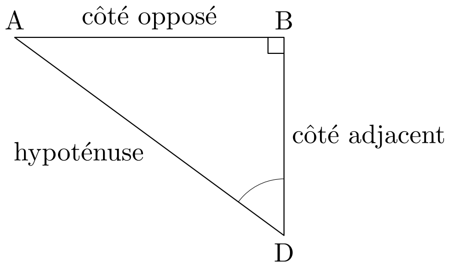


Enoncé *L'unité de longueur est le centimètre.*
On donne :
$BD = 7$; $AD = 12$;
$\widehat{BCD} = 50°$.

1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ (on donnera le résultat arrondie au degré).
2. Calculer la longueur CD (on donnera le résultat arrondie au dixième).

Solution

1. Calculons $\widehat{ADB}$.



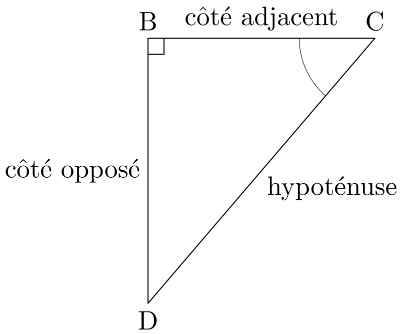
Dans le triangle ADB rectangle en B,

$\cos(\widehat{ADB}) = \dfrac{BD}{AD} \left(= \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \right)$

$\cos(\widehat{ADB}) = \dfrac{7}{12}$

D'après la calculatrice, $\widehat{ADB} = 55°$.

2. Calculons CD.



Dans le triangle BCD rectangle en B,

$\sin(\widehat{BCD}) = \dfrac{BD}{CD} \left(= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$

$\sin(50) = \dfrac{7}{CD}$

$\sin(50) \times CD = 7$

$CD = \dfrac{7}{\sin(50)}$

D'après la calculatrice, $CD = 10,9cm$.

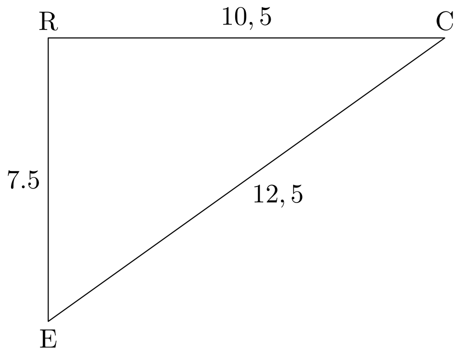
Exercice 2

Enoncé

1. Tracer le triangle REC tel que :
   $RE = 7,5cm$; $RC = 10cm$ et $EC = 12,5cm$.
2. Montrer que le triangle REC est rectangle en R.
3. Calculer, valeurs arrondies au degré près, les angles de ce triangle.

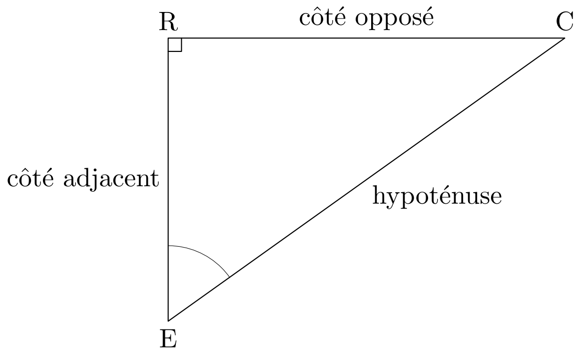
Solution

1. Voir figure suivante.



2. Montrons que le triangle REC est rectangle en R.
   $EC^2 = 12,5^2 = 156,25$
   $E\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}C^2 = 7,5^2 + 10^2 = 56,25 + 100 = 156,25$
   Comme $E\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}C = EC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle REC est rectangle en R
3. Calculons les angles du triangle ERC.

   Commençons par calculer l'angle $\widehat{REC}$.



Dans le triangle ERC rectangle en R,
$\sin(\widehat{REC}) = \frac{RC}{EC} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$
$\sin(\widehat{REC}) = \frac{10,5}{12,5}$
D'après la calculatrice, $\widehat{REC} = 57°$.

De plus, les angles $\widehat{REC}$ et $\widehat{RCE}$ sont complémentaires, d'où
$\widehat{REC} + \widehat{RCE} = 90$
$\widehat{RCE} = 90 - \widehat{REC} = 90 - 57 = 33$.
Enfin, on rappelle que l'angle $\widehat{ERC}$ est droit d'où $\widehat{ERC} = 90°$.

1.2.2 Autres exercices

NB : certaines questions des exercices suivants portent également sur d'autres connaissances de géométrie plane :
- le théorème de Pythagore ;
- les angles inscrits ;
- les quadrilatères particuliers ;
- ...

Exercice 3 : à répéter régulièrement.

Choisir un triangle rectangle (que l'on nommera) dont on donnera les longueurs de deux de ces côtés.

1. Calculer le côté manquant.
2. Calculer l'un des angles aigus.
3. En déduire l'autre angle aigu.
4. Vérifier les valeurs trouvés en mesurant sur une figure en vraie grandeur.

NB : on fera attention à chosisir les longueurs de telle façon que l'hypoténuse soit bien le plus grand côté !

Exercice 4 : à répéter régulièrement.

Choisir un triangle rectangle (que l'on nommera) dont on donnera la longueur de d'un côté et la mesure d'un angle aigu.

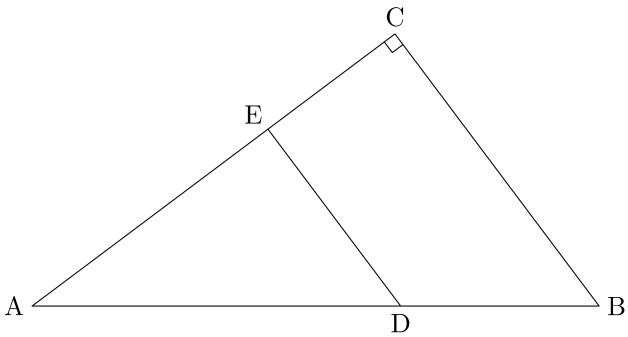
1. Calculer l'un des côtés manquants.
2. Calculer le dernier côté.
3. Vérifier les valeurs trouvés en mesurant sur une figure en vraie grandeur.

Exercice 5

$(\mathcal{C})$ est un cercle de $2,5\,cm$ de rayon. Le segment $[AB]$ est un diamètre de ce cercle. D est un point de ce cercle tel que $AD = 3\,cm$.

1. Construire la figure.
2. Démontrer que le triangle ABD est rectangle.
3. Calculer la longueur DB.

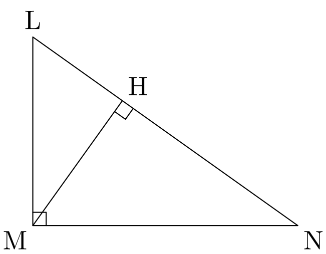
Exercice 6



Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle en C.
D est un point du segment $[AB]$.
E est un point du segment $[AC]$.
On donne :
$AC = 6$; $BC = 4,5$; $AD = 4$;
(DE) // (BC).

1. Reproduire la figure en grandeur réelle sur votre copie.
2. Prouver que $AB = 7,5$.
3. Calculer AE.
4. (a) Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{A}$.
   (b) En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{A}$.

Exercice 7



Le triangle LMN est rectangle en M et $[MH]$ est sa hauteur issue de M.
On donne $ML = 2,4\,cm$ et $LN = 6,4\,cm$.

1. Calculer la valeur exacte du cosinus de l'angle $\widehat{MLN}$. On donnera le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.
2. Sans calculer la valeur de l'angle $\widehat{MLN}$, calculer la longueur LH. Le résultat sera écrit sous forme d'un nombre décimal.

Exercice 8

L'unité est le centimètre.

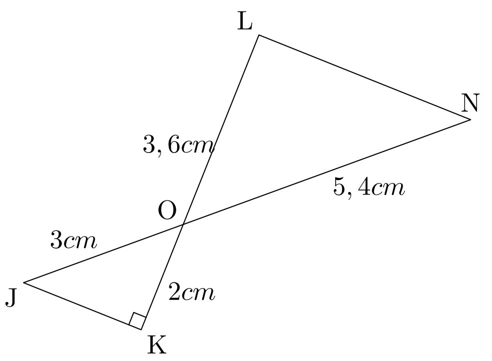
1. Construire un triangle RST tel que $RS = 4,5$, $ST = 6$, $RT = 7,5$. On laissera les traits de construction.
2. Montrer que le triangle RST est rectangle.
3. (a) Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de centre R et de rayon $4,5$. Le cercle $(\mathcal{C})$ coupe le segment $[RT]$ en K.
   (b) Tracer la droite (d) passant par le point K et parallèle à la droite (RS). Cette droite (d) coupe le segment $[TS]$ en un point L. Placer ce point sur la figure.
   (c) Calculer KL.
4. Calculer l'angle $\widehat{STR}$ (on donnera l'arrondi au degré).

Exercice 9

1. Construire un cercle de centre O et de rayon $3cm$.
   Placer sur ce cercle trois points A, B, C de telle façon que $BC = 4cm$ et $\widehat{BCA} = 65°$.
   Construire le point F diamétralement opposé au point B sur ce cercle.
2. Démontrer que le triangle BFC est un triangle rectangle.
3. Calculer le sinus de l'angle $\widehat{BFC}$ et en déduire la mesure de cet angle arrondie à un degré près.
4. Déterminer, au degré près, les mesures des angles du triangle BOC.

Exercice 10

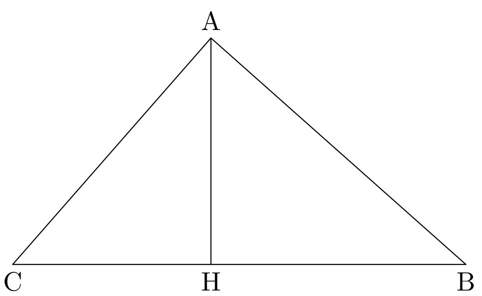
La figure ci-dessous est donnée à titre d'exemple pour préciser la disposition des points. Ce n'est pas une figure en vraie grandeur.



On donne :
- les points K, O, L sont alignés ; O est entre K et L ; $OK = 2cm$; $OL = 3,6cm$;
- les points J, O, N sont alignés ; O est entre J et N ; $OJ = 3cm$; $ON = 5,4cm$;
- le triangle OKJ est rectangle en K.

1. Calculer l'angle $\widehat{OJK}$ (on donnera l'arrondi au degré près).
2. Démontrer que les droites (JK) et (LN) sont parallèles.
3. Déduire de la question 2., sans effectuer de calculs, que les angles $\widehat{OJK}$ et $\widehat{ONL}$ sont égaux.

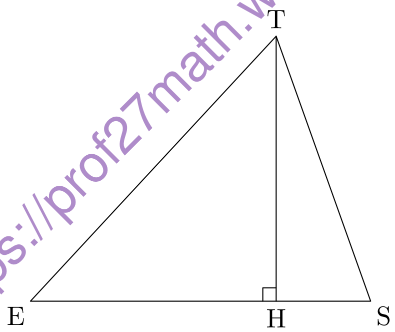
Exercice 11



Dans le triangle ABC (croquis ci-contre), on donne :
$[AH]$ hauteur issue de A ;
$AH = 5cm$; $AB = 8cm$; $\widehat{ACH} = 51°$.
On ne demande pas de refaire la figure.

1. (a) Déterminer la valeur arrondie au dixième de degré, de l'angle $\widehat{HBA}$.
   (b) Le triangle ABC est-il rectangle en A ?
2. Calculer la valeur arrondie au millimètre près de la longueur du segment $[HB]$.
3. Calculer la valeur arrondie au millimètre près de la longueur du segment $[CH]$.
4. Déterminer une valeur approchée de l'aire du triangle ABC.

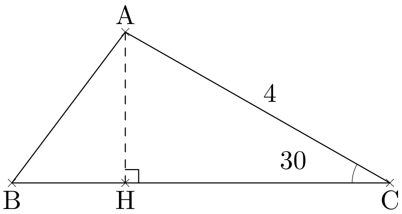
Exercice 12



Le triangle ci-contre représente un triangle EST, isocèle en E.
$[TH]$ est la hauteur issue de T.
Il n'est pas demandé de reproduire la figure.
On sait que :
- $ES = ET = 12\,cm$ (les dimensions ne sont pas respectées sur la figure) ;
- l'aire du triangle EST est de $42\,cm^2$.

1. Prouver que $TH = 7\,cm$.
2. Calcule l'angle $\widehat{TES}$ (on donnera sa valeur arrondie au degré près).
3. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{EST}$.

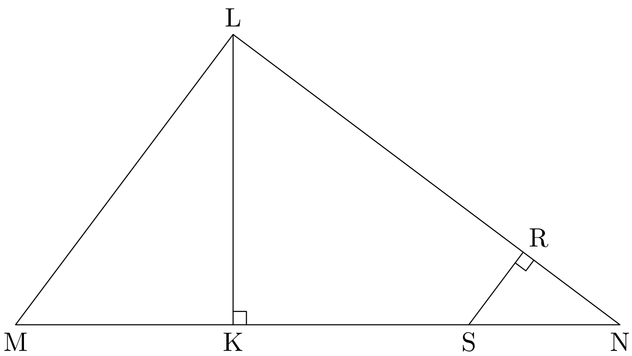
Exercice 13



Dans le triangle ABC de hauteur $[AH]$ représenté ci-contre, on donne :
$AC = 4cm$, $BH = 1,5cm$ et $\widehat{ACB} = 30°$.

1. Calculer la valeur exacte de AH.
2. En déduire la valeur arrondie à un degré près de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

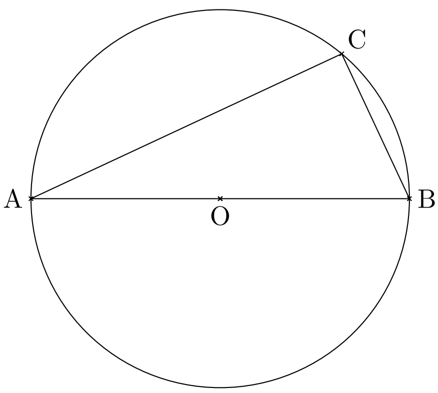
Exercice 14



On considère la figure ci-contre .
On donne :
$MN = 8cm$; $ML = 4,8cm$ et $LN = 6,4cm$. *On ne demande pas de refaire la figure sur la copie.*

1. Démontrer que le triangle LMN est rectangle.
2. Calculer la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{LNM}$.
3. Soit K le pied dela hauteur issue de L ; montrer que $LK = 3,84cm$.
4. Soit S le point de $[MN]$ tel que $NS = 2cm$, la perpendiculaire à (LN) passant par S coupe $[LN]$ en R ; calculer RS.

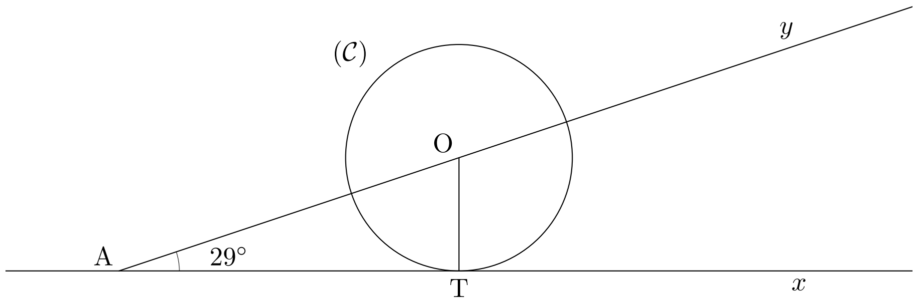
Exercice 15



Sur un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 10cm$, on a placé un point C tel que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure $50°$. Sur le dessin ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Calculer les longueurs AC et BC. On donnera les valeurs arrondies au millimètre.

Exercice 16



On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O, point de la demi-droite $[Ay)$. La demi-droite $[Ax)$ est tangente à $(\mathcal{C})$ en T. On donne $AT = 9cm$.

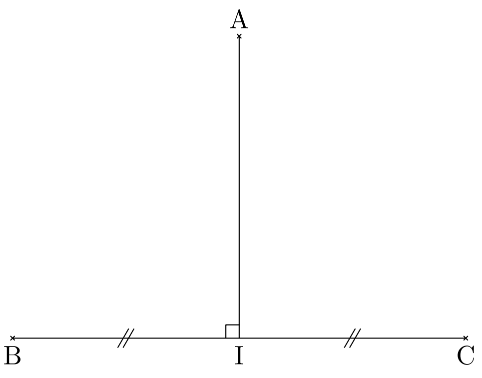
1. Calculer une valeur approchée au millimètre près du rayon du cercle $(\mathcal{C})$.
2. A quelle distance de A faut-il placer un point B sur $[AT]$ pour que l'angle $\widehat{OBT}$ mesure 30°.
   (Donner une valeur approchée arrondie au millimètre.)

Exercice 17

L'unité de longueur est le centimètre.

1. (a) Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que : $AB = 3$ et $AC = 9$.
   Sur le segment $[AC]$, placer le point I tel que $CI = 5$.
   (b) Calculer la valeur exacte de la longueur BC, puis sa valeur arrondie au millimètre près.
2. La droite qui passe par I et qui est parallèle à la droite (AB) coupe la droite (BC) en E.
   En précisant la méthode utilisée, calculer la valeur exacte de la longueur EI.
3. Calculer la valeur exacte de la tangente de l'angle $\widehat{ACB}$, puis en déduire la valeur arrondie au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

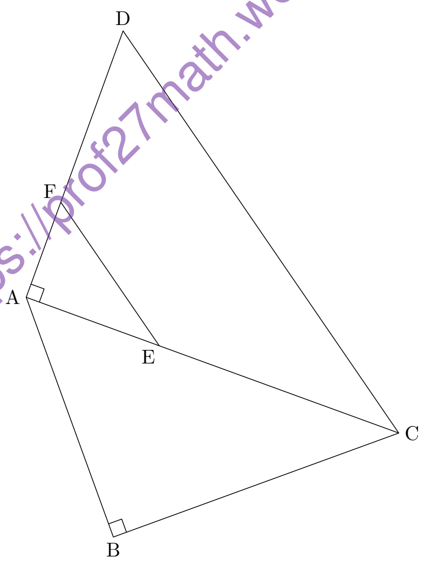
Exercice 18



On considère la figure ci-contre (dimensions non respectées sur le dessin) :
$AI = 8cm$
$BC = 12cm$
$\widehat{AIB} = 90°$
I milieu de $[BC]$.

1. Refaire la figure en vraie grandeur.
2. (a) Calculer AB.
   (b) Calculer $\sin \widehat{ABI}$.
3. O est le point de $[BC]$ tel que $BO = 5cm$.
   $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O passant par B.
   Il recoupe $[AB]$ en E et $[BC]$ en F.
   (a) Compléter la figure du 1. en traçant le cercle $(\mathcal{C})$ et en plaçant les points O, E et F.
   (b) Quelle est la nature du triangle BEF ? Justifier.

Exercice 19



Dans cet exercice, les questions sont toutes indépendantes les unes des autres.
On considère la figure ci-contre.

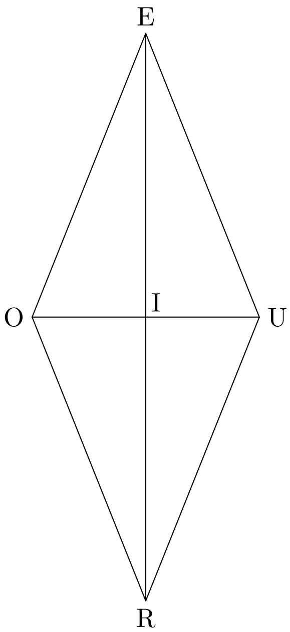
On donne $\widehat{BAC} = 50°$, $AD = 5cm$, $AC = 7cm$.
Les droites (EF) et (DC) sont parallèles et $AE = 2,5cm$.

1. Reproduire la figure précédente e vraie grandeur.
2. Calculer la longueuer AB, arrondie au mm.
3. Calculer la longueur DC, arrondie au mm.
4. Calculer $\tan \widehat{ADC}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$, arrondie au degré.
5. Calculer la longueur AF, arrondie au mm.

Exercice 20

1. Construire un triangle ABC rectangle en B et tel que $AB = 5cm$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
2. Calculer AC.
3. (a) Tracer la médiatrice de $[AC]$: elle coupe $[AC]$ en I et $[BC]$ en J.
   (b) Calculer l'angle $\widehat{IJB}$.

Exercice 21



Le quadrilatère $EURO$ est un losange de centre I.
L'angle $\widehat{IEU}$ vaut 25° et la diagonale $[ER]$ mesure $10cm$.

1. Prouver que le triangle EIU est rectangle en I.
2. Calculer la valeur arrondie au centième de cm de la longueur IU.

Chapitre 2

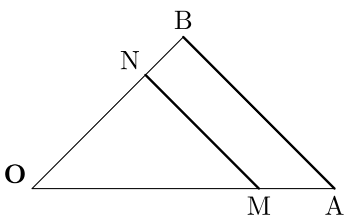
Les droites parallèles

2.1 Le cours

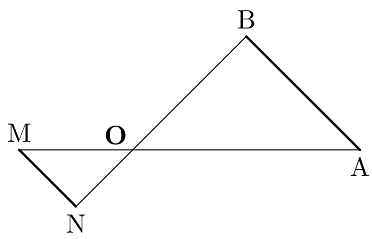
2.1.1 Le théorème de Thalès

<u>Les configuration de Thalès</u>

<u>Le triangle</u>



<u>La figure papillon</u>



Sur les deux figures suivantes, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.
Chacune des configurations fait intervenir cinq points :
– les quatre points situés sur les parallèles : A, B, M et N ;
– le dernier point O intersection des sécantes et très important dans l'énoncé du théorème.

Conseil : pour une meilleure lisibilité de la configuration de Thalès, il sera important de mettre en couleurs les parallèles et le point d'intersection des sécantes.

<u>Enoncé du théorème</u>

M est sur $(\mathbf{O}A)$
N est sur $(\mathbf{O}B)$
(MN) // (AB)
D'après le théorème de Thalès,
$$\frac{\mathbf{O}M}{\mathbf{O}A} = \frac{\mathbf{O}N}{\mathbf{O}B} = \frac{MN}{AB}$$

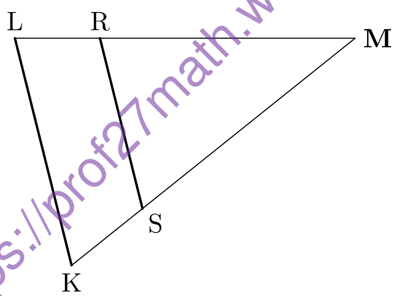
NB : il est très important de respecter cette présentation et de mettre en couleur le "fameux" point O.

<u>But du théorème</u>

Le théorème de Thalès sert à calculer une longueur.

Pour celà, on choisira deux des trois rapports du théorème dans lesquels on connaîtra trois longueurs et où la quatrième est la longueur à calculer.

Première application : dans un triangle



Enoncé Sur la figure ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.
Les droites (RS) et (LK) sont parallèles.
On donne :
$LM = 6cm$, $LK = 5cm$, $KM = 8cm$ et $SM = 6cm$.

Calculer RM.

Solution

Calculons RM.

R est sur $(\mathbf{M}L)$
S est sur $(\mathbf{M}K)$
(RS) // (LK)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\mathbf{M}R}{\mathbf{M}L} = \frac{\mathbf{M}S}{\mathbf{M}K} = \frac{RS}{LK}$$

D'où $\frac{\mathbf{M}R}{\mathbf{M}L} = \frac{\mathbf{M}S}{\mathbf{M}K}$

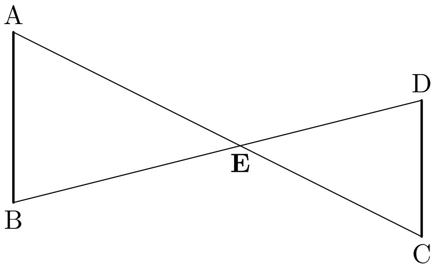
$$\frac{MR}{6} = \frac{6}{8}$$

$$8 \times MR = 6 \times 6$$

$$MR = \frac{36}{8}$$

$$MR = \frac{9}{2}$$

Seconde application : dans une figure papillon



Enoncé Sur la figure ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en E.
On donne :
$AB = 3cm$, $BD = 9cm$, $AC = 6cm$ et $BE = 5cm$.

Calculer CD.

Solution

Calculons CD.

C est sur $(\mathbf{E}A)$
D est sur $(\mathbf{E}B)$
(CD) // (AB)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\mathbf{E}C}{\mathbf{E}A} = \frac{\mathbf{E}D}{\mathbf{E}B} = \frac{CD}{AB}$$

D'où $\frac{\mathbf{E}D}{\mathbf{E}B} = \frac{\mathbf{C}D}{\mathbf{A}B}$

avec $ED = BD - BE = 9 - 5 = 4cm$

$$\frac{4}{5} = \frac{CD}{3}$$

$$5 \times CD = 4 \times 3$$

$$CD = \frac{12}{5}$$

2.1.2 La réciproque du théorème de Thalès

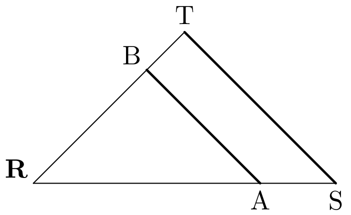
Enoncé de la réciproque

> A est sur $(\mathbf{R}S)$
> B est sur $(\mathbf{R}T)$
> L'ordre des points est respecté.
> D'après la réciproque du théorème de Thalès,
> **si** $\frac{\mathbf{R}A}{\mathbf{R}S} = \frac{\mathbf{R}B}{\mathbf{R}T}$, **alors** (AB) // (ST).

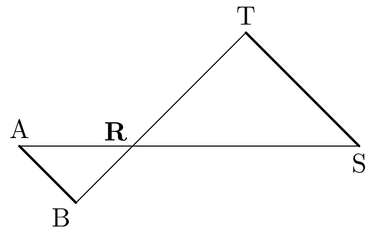
NB : on reprend la même structure de présentation que celle du théorème de Thalès.

Cet énoncé est valable pour l'une des deux configurations suivantes :

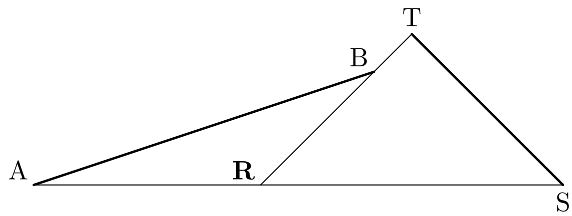
Le triangle



La figure papillon



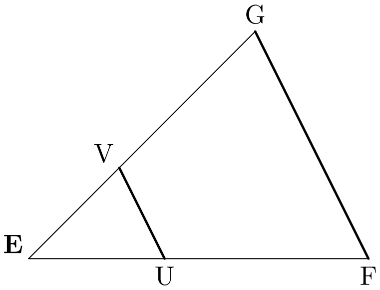
L'hypothèse sur l'ordre des points sert à éliminer les figures du type ci-contre pour lesquelles les rapports sont égaux alors que les droites ne sont de toute évidence pas parallèles.



But de la réciproque

La réciproque du théorème de Thalès sert à vérifier si deux droites sont parallèles. Pour cela, on est amené à comparer les deux rapports de l'énoncé : il faut donc connaître les quatre longueurs concernées ou du moins les deux rapports.

Première application : les droites sont parallèles



Enoncé Sur la figure ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.
On donne :
$EF = 6cm$, $EG = 5cm$, $FG = 4cm$,
$EU = 2,4cm$ et $EV = 2cm$

Les droites (FG) et (UV) sont-elles parallèles ?

Solution

Vérifions si (FG) // (UV).

U est sur $(\mathbf{E}F)$
V est sur $(\mathbf{E}G)$
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

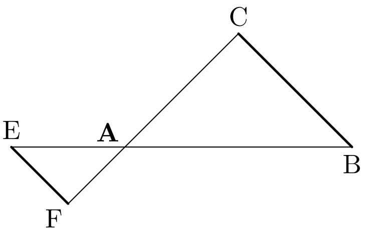
si $\frac{\mathbf{E}U}{\mathbf{E}F} = \frac{\mathbf{E}V}{\mathbf{E}G}$, **alors** (UV) // (EF).

Vérifions en calculant les produits en croix :

$EU \times EG = 2,4 \times 5 = 12$
$EV \times EF = 2 \times 6 = 12$

Comme $\frac{\mathbf{E}U}{\mathbf{E}F} = \frac{\mathbf{E}V}{\mathbf{E}G}$, (UV) // (EF).

Deuxième application : les droites ne sont pas parallèles



Enoncé Sur la figure ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.
On donne :
$AB = 6cm$, $BC = 4cm$, $AC = 5cm$,
$EA = 5cm$ et $AF = 4cm$

Les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ?

Solution

Vérifions si $(EF) // (BC)$.

E est sur $(\mathbf{A}B)$
F est sur $(\mathbf{A}C)$
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{\mathbf{A}E}{\mathbf{A}B} = \dfrac{\mathbf{A}F}{\mathbf{A}C}$, **alors** $(EF) // (BC)$.

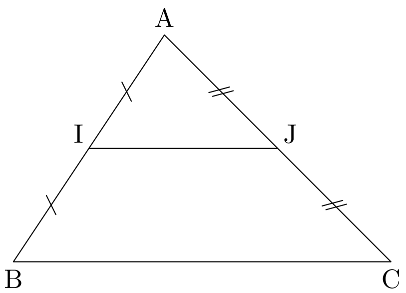
Vérifions en calculant les produits en croix :

$AE \times AC = 5 \times 5 = 25$
$AB \times AF = 6 \times 4 = 24$

Comme $\dfrac{\mathbf{A}E}{\mathbf{A}B} \neq \dfrac{\mathbf{A}F}{\mathbf{A}C}$, les droites (UV) et (EF) ne sont pas parallèles.

2.1.3 Droite des milieux

Première propriété : démontrer que deux droites sont parallèles

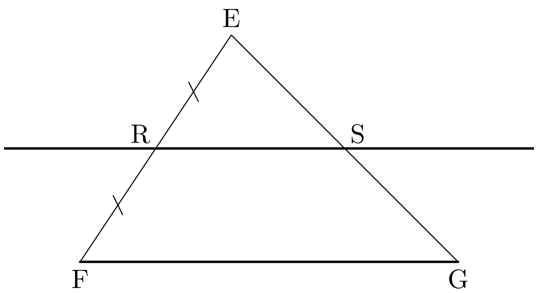


Dans le triangle ABC,
I milieu de $[AB]$.
J milieu de $[AC]$.
D'après la première propriété des milieux,

$IJ = \dfrac{BC}{2}$ et $(IJ) // BC$.

NB : cette première propriété des milieux est un cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès.

Seconde propriété : démontrer qu'un point est milieu d'un segment

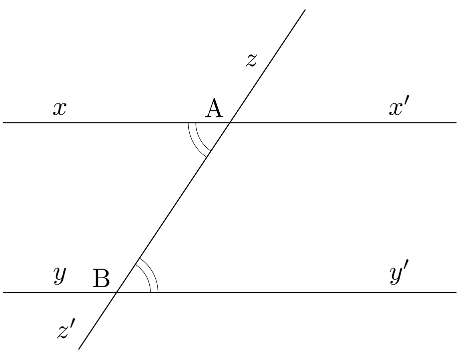


Dans le triangle EFG,
R milieu de $[EF]$.
La parallèle à (FG) passant par R coupe $[EG]$ en S.
D'après la seconde propriété des milieux,
R est le milieu de $[EG]$.

NB : cette seconde propriété des milieux est un cas particulier du théorème de Thalès.

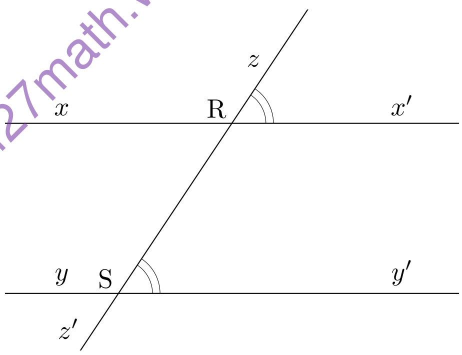
2.1.4 Angles et parallélisme

Les angles alternes internes



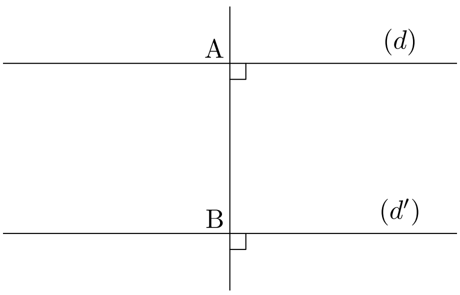
Sur le dessin ci-contre,
les angles alternes internes $\widehat{xAB}$ et $\widehat{ABy'}$ étant de même mesure, alors les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

Les angles correspondants



Sur le dessin ci-contre,
les angles correspondants $\widehat{zRx'}$ et $\widehat{RSy'}$ étant de même mesure, alors les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

Les droites perpendiculaires



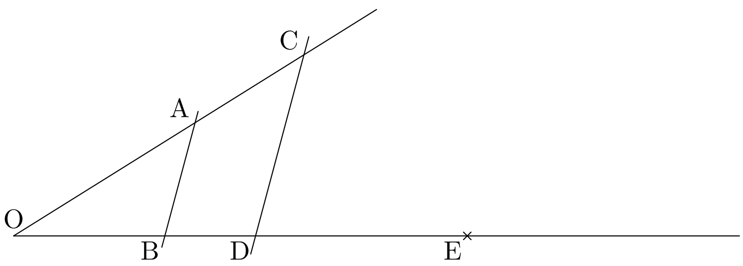
Sur le dessin ci-contre,
$(d) \perp (AB)$
$(d') \perp (AB)$
alors, (d) // (d').

2.2 Les exercices

2.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1

Enoncé



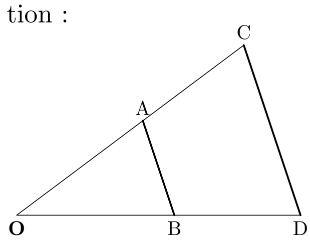
Sur la figure ci-contre (qui n'est pas en vraie grandeur) les droites (AB) et (CD) sont parallèles et les dimensions sont les suivantes :
$OA = 5\,cm$; $AC = AB = 4\,cm$;
$OD = 6,3\,cm$; $DE = 5,04\,cm$.

1. Calculer OB et CD.
2. Les droites (AD) et (CE) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Solution

1. Calculer OB et CD.
   A est sur $(\mathbf{O}C)$
   B est sur $(\mathbf{O}D)$
   (AB) // (CD)
   D'après le théorème de Thalès,
   $$\frac{\mathbf{O}A}{\mathbf{O}C} = \frac{\mathbf{O}B}{\mathbf{O}D} = \frac{AB}{CD} \quad (1)$$

Voici une figure à main levée résumant la situation :



Calculons OB.

D'après (1), on a $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

$\frac{5}{9} = \frac{OB}{6,3}$

$9 \times OB = 5 \times 6,3$

$OB = \frac{31,5}{9}$

$OB = 3,5cm$

Calculons CD.

D'après (1), on a $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$

$\frac{5}{9} = \frac{4}{CD}$

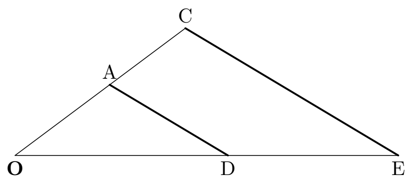
$5 \times CD = 9 \times 4$

$CD = \frac{36}{5}$

$CD = 7,2cm$

2. Montrons que (AD) // (CE).

Voici une figure à main levée résumant la situation :



A est sur (OC)
D est sur (OE)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OE}$, **alors** (AD) // (CE).

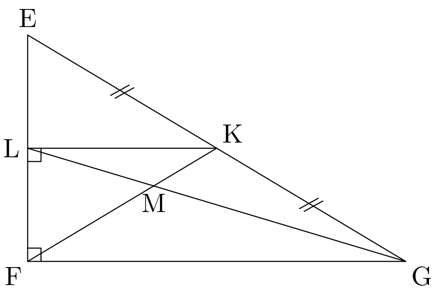
Vérifions en calculant les produits en croix :

$OA \times OE = 5 \times 11,34 = 56,7$
$OC \times OD = 9 \times 6,3 = 56,7$

Comme $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OE}$, (AD) // (CE).

Exercice 2

Enoncé



EFG est un triangle rectangle en F. K est le milieu du segment $[EG]$. La droite passant par K et perpendiculaire à la droite (EF) coupe le segment $[EF]$ en L.

1. (a) Démontrer que les droites (LK) et (FG) sont parallèles.
   (b) Démontrer que L est le milieu du segment $[EF]$.
2. Les droites (FK) et (GL) se coupent en M. Que représentent les droites (FK) et (GL) pour le triangle EFG ?
   En déduire que la droite (EM) coupe le segment $[FG]$ en son milieu.

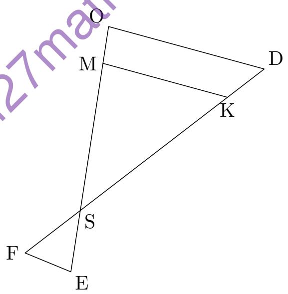
Solution

1. (a) Montrons que (LK) // (FG).
   $(LK) \perp (EF)$
   $(FG) \perp (EF)$
   alors, (LK) // (FG).
   (b) Montrons que L est le milieu du segment $[EF]$.
   Dans le triangle EFG,
   K milieu de $[EG]$.
   La parallèle à (FG) passant par K coupe $[EF]$ en L.
   D'après la seconde propriété des milieux,
   L est le milieu de $[EF]$.
2. Montrons que M est le centre de gravité du triangle EFG.
   Dans le triangle EFG,
   (KF) est la médiane issue de F,
   (LG) est la médiane issue de G,
   alors, le point M intersection des médianes (KF) et (LG) est le centre de gravité du triangle EFG.

   La troisième médiane issue de E est la droite (EM) : elle coupe donc le segment $[FG]$ en son milieu.

2.2.2 Autres exercices

Exercice 3

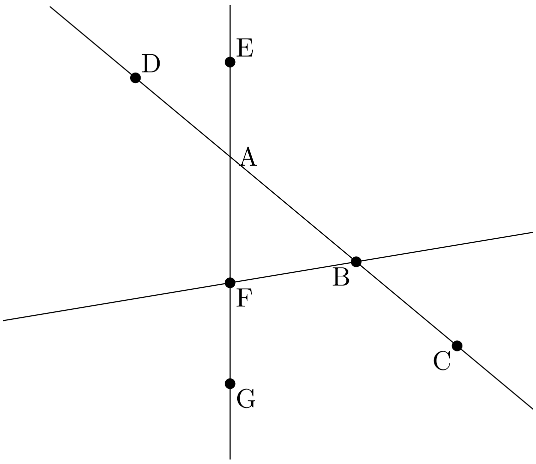


Sur la figure ci-contre :
- les droites (MK) et (OD) sont parallèles ;
- les points E, S, M et O sont alignés dans cet ordre ;
- les points F, S, K et D sont alignés dans cet ordre.

On donne $SO = 6\,cm$, $SD = 10\,cm$, $SM = 4,8\,cm$, $SE = 2\,cm$, $SF = 3\,cm$.
On ne demande pas de reproduire la figure sur la copie.

1. Calculer SK.
2. Les droites (EF) et (OD) sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 4



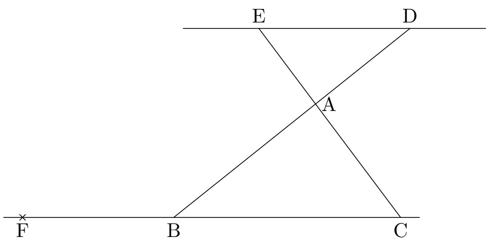
Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, les droites (BF) et (CG) sont parallèles.

1. On donne $AB = 5\,cm$, $BC = 4\,cm$, $AF = 3\,cm$.
   Calculer AG puis FG.
2. On donne $AD = 7\,cm$ et $AE = 4,2\,cm$.
   Démontrer que les droites (ED) et (BF) sont parallèles.

Exercice 5

1. Construire le triangle TRI tel que $RI = 8\,cm$, $RT = 6\,cm$ et $TI = 10\,cm$.
2. Quelle est la nature du triangle TRI ?
3. Placer le point O sur le segment $[TR]$ tel que $TO = 3,6\,cm$ et le point P sur le segment $[TI]$ tel que $TP = TI$.
4. Les droites (OP) et (RI) sont-elles parallèles ?

Exercice 6



La figure ci-dessous est donnée à titre d'exemple pour préciser la disposition des points, segments et droites. Elle n'est pas conforme aux mesures données.
L'unité de longueur est le centimètre. On donne :
$AB = 7,5$, $BC = 9$, $AC = 6$, $AE = 4$, $BF = 6$.
Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

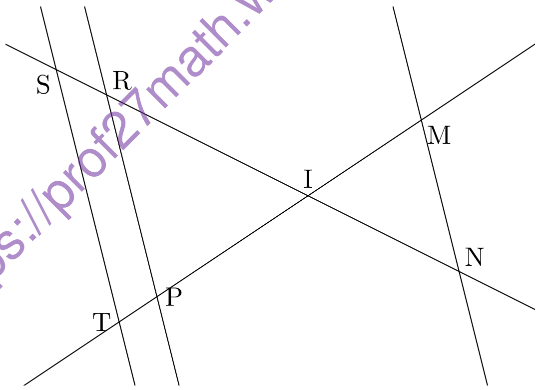
1. Calculer la longueur AD.
2. Les droites (EF) et (AB) sont-elles parallèles ?
   Calculer la longueur EF.

Exercice 7

Le triangle MNP est tel que $MP = 8\,cm$, $PN = 12\,cm$ et $MN = 15\,cm$. Le point A est sur le segment $[MP]$, tel que $PA = 4,8\,cm$.
La parallèle à la droite (PN) passant par A coupe la droite (MN) en B. La parallèle à la droite (MP) passant par B coupe la droite (NP) en C.

1. Faire la figure.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCP$ est un parallélogramme.
3. Calculer AB.
4. Préciser la nature du parallélogramme $ABCP$.

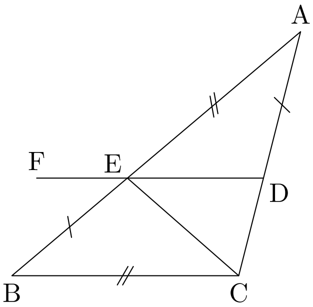
Exercice 8



Sur la figure ci-contre, tracée à main levée,
$IR = 8cm$; $RP = 10cm$; $IP = 4,8cm$; $IM = 4cm$;
$IS = 10cm$; $IN = 6cm$; $IT = 6cm$.
On ne demande pas de refaire la figure.

1. Démontrer que les droites (ST) et (RP) sont parallèles.
2. En déduire ST.
3. Les droites (MN) et (ST) sont-elles parallèles ? Justifier.

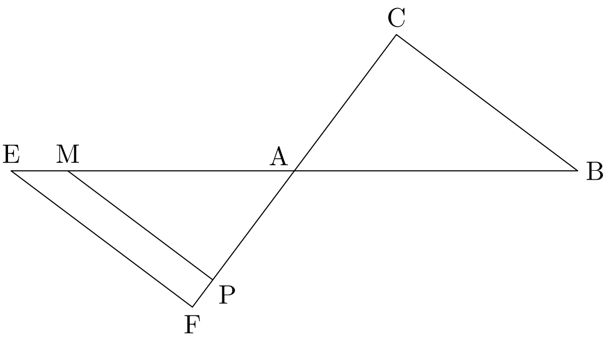
Exercice 9



L'unité est le centimètre.
On considère un triangle ABC. Soit E un point du segment $[AB]$; la parallèle à la droite $[BC]$ passant par E coupe le segment $[AC]$ au point D.
On donne $AE = BC = 3$ et $EB = AD = 2$.

1. Montrer que $ED = 1,8$.
2. Sur la demi-droite $[DE]$, on place, comme indiqué sur la figure, le point F tel que $DF = 3$.
   Les droites (AD) et (BF) sont-elles parallèles ?

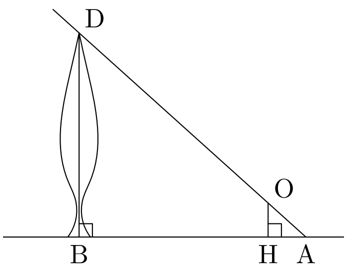
Exercice 10



L'unité est le centimètre. La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.
On ne demande pas de refaire cette figure.
Les points E, M, A, B sont alignés dans cet ordre ;
les points F, P, A, C sont alignés dans cet ordre.
Les droites (EF) et (MP) sont parallèles.
$AM = 6$; $MP = 4,8$; $AP = 3,6$;
$EF = 6$; $AC = 4,5$; $AB = 7,5$.

1. Démontrer que le triangle AMP est un triangle rectangle.
2. Calculer AE et en déduire la longueur ME (on justifiera les calculs).
3. Démontrer que les droites (MP) et (BC) sont parallèles.
4. Démontrer que les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{AMP}$ sont égaux.

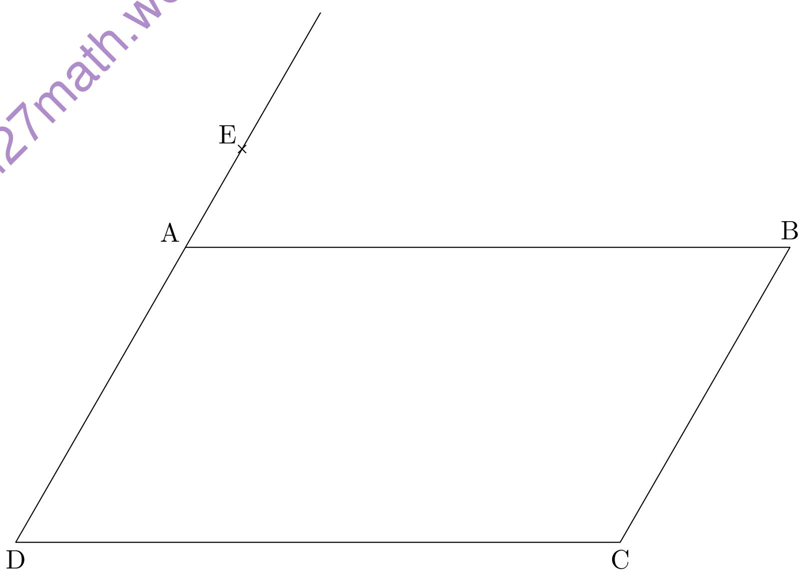
Exercice 11



Pour trouver la hauteur BD d'un arbre, on dispose des renseignements suivants :
$HA = 1m$; $BH = 5m$ et $OH = 0,9m$.
Les points A, H et B sont alignés, ainsi que les points O, A et D.
Les angles $\widehat{AHO}$ et $\widehat{ABD}$ sont droits.

1. Démontrer que les droites (OH) et (BD) sont parallèles.
2. Calculer la hauteur de l'arbre.

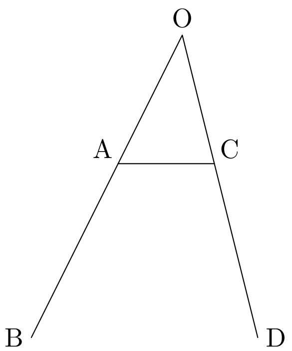
Exercice 12



On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
$ABCD$ est un parallélogramme.
$AB = 8cm$ et $AD = 4,5cm$.
E est le point de la droite (AD) tel que $AE = 1,5cm$ et E n'est pas sur le segment $[AD]$.
La droite $[EC]$ coupe le segment $[AB]$ en M.

1. Calculer AM.
2. Placer le point N sur le segment $[DC]$ tel que $DN = \frac{3}{4}DC$.
   Démontrer que les droites (AN) et (EC) sont parallèles.

Exercice 13



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, le point A est sur le segment $[OB]$ et le point C est sur le segment $[OD]$.
On donne :
$OA = 8,5cm$; $AB = 11,5cm$;
$OC = 5cm$; $CD = 7cm$.

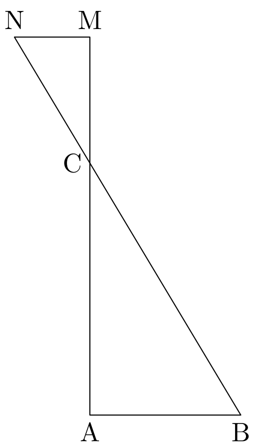
1. Calculer les longueurs OB et OD.
2. Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Exercice 14

$[AC]$ et $[EF]$ sont deux segments sécants en B.
On connaît :
$AB = 6cm$ et $BC = 10cm$;
$EB = 4,8cm$ et $BF = 8cm$.

1. Faire un dessin en vraie grandeur.
2. Les droites (AE) et (FC) sont-elles parallèles ? Justifier.
3. les droites (AF) et (EC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 15



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur et n'est pas à reproduire.
Elle est fournie pour préciser la position des points. L'unité est le centimètre.

1. Le triangle ABC est rectangle en A.
   $AB = 5$ et $BC = 13$.
   Démontrer que $AC = 12$.
2. Les points A, C et M sont alignés.
   Les points B, C et N sont alignés.
   $CM = 2,4$ et $CN = 2,6$.
   Démontrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.
3. Calculer la longueur MN.
4. Préciser la nature du triangle CMN ; justifier la réponse sans effectuer de calcul.

Chapitre 3

Les polygones

3.1 Le cours

3.1.1 Généralités

Un polygone est une figure plane à n côtés et n sommets. On définit les catégories de polygones en fonction de n :

- $n = 3$: les triangles ;
- $n = 4$: les quadrilatères ;
- $n = 5$: les pentagones ;
- $n = 6$: les hexagones ;
- etc ...

Dans ce chapitre, on ne s'intéressera qu'aux polygones convexes non croisés.

Un polygone est régulier si

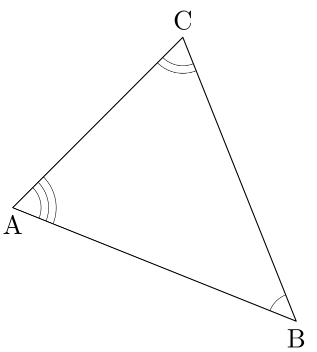
- ses côtés sont égaux ;
- il est inscrit dans un cercle.

Un polygone régulier admet :

- un centre de symétrie si n est pair ;
- n axes de symétrie.

3.1.2 Les triangles

<u>Propriétés</u>



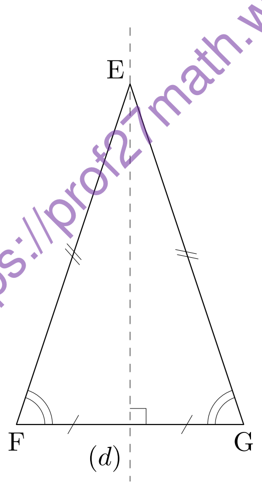
Dans le triangle ABC, on a les trois inégalités triangulaires suivantes :

$$A\mathbf{B} + \mathbf{B}C > AC$$
$$A\mathbf{C} + \mathbf{C}B > AB$$
$$B\mathbf{A} + \mathbf{A}C > BC$$

La somme des angles du triangle ABC est égale à 180° :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^o.$$

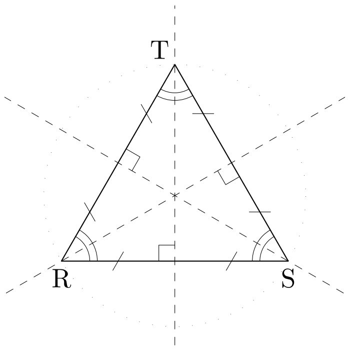
Le triangle isocèle



Le triangle EFG de sommet principal E admet comme axe de symétrie la médiatrice (d) du segment $[FG]$, d'où :
- $EF = EG$;
- $\widehat{EFG} = \widehat{EGF}$;

L'axe de symétrie (d) est à la fois :
- médiatrice du segment $[FG]$;
- médiane issue de E ;
- hauteur issue de E ;
- bisectrice de l'angle $\widehat{FEG}$.

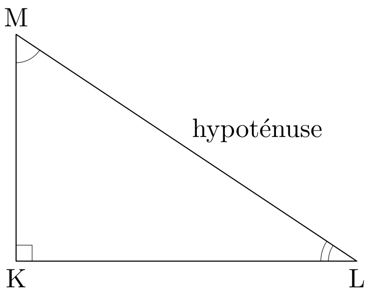
Le triangle équilatéral



Le triangle RST équilatéral est un polygone régulier : les médiatrices des côtés sont les axes de symétrie.

C'est pourquoi :
- $RS = ST = TR$;
- $\widehat{RST} = \widehat{STR} = \widehat{SRT} = 60^o$.

Le triangle rectangle



Le triangle KLM est rectangle en K car $\widehat{LKM} = 90^o$.

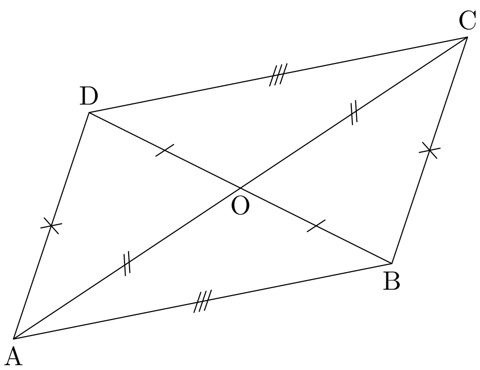
$[LM]$ est l'hypoténuse (le plus grand côté).

Les deux angles aigus sont complémentaires :

$$\widehat{KLM} + \widehat{KML} = 90^o$$

3.1.3 Les quadrilatères

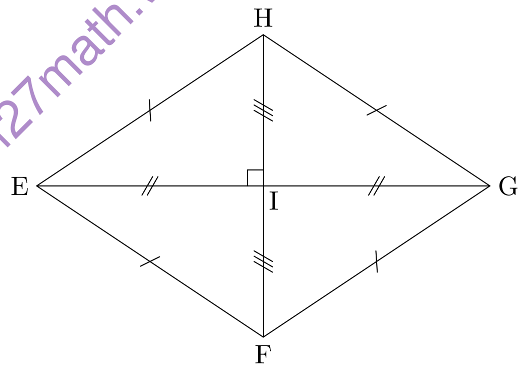
Le parallélogramme



Un parallélogramme est un quadrilatère ayant un centre de symétrie.

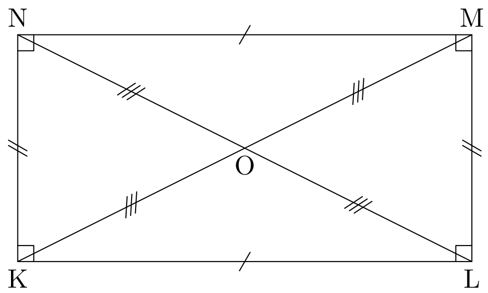
Sur la figure ci-contre, on a dessiné un parallélogramme $ABCD$ de centre O. Le point O étant son centre de symétrie :
- les diagonales se coupent en leur milieu ;
- les côtés opposés sont parallèles et de même longueur ;
- les angles opposés sont de même mesure.

Le losange



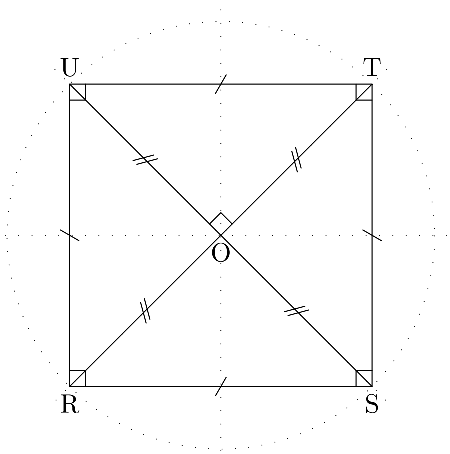
Un losange est un parallélogramme particulier : il possède donc toutes les propriétés d'un parallélogramme.
De plus,
– deux côtés consécutifs sont égaux ;
– ses diagonales sont perpendiculaires.
Le dessin ci-contre représente le losange $EFGH$ de centre I.

Le rectangle



Un rectangle est un parallélogramme particulier : il possède donc toutes les propriétés d'un parallélogramme.
De plus,
– deux côtés consécutifs sont perpendiculaires ;
– ses diagonales sont de même longueur : le rectangle est inscriptible dans un cercle.
Le dessin ci-contre représente le rectangle $KLMN$ de centre O.

Le carré

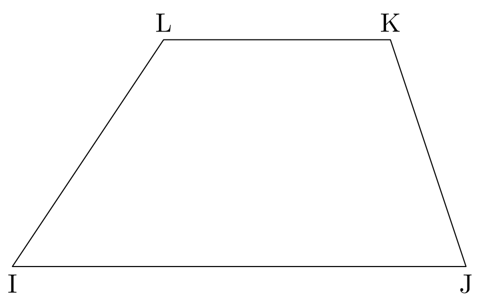


Un carré est à la fois un rectangle et un losange : il possède donc toutes les propriétés d'un parallélogramme, d'un losange et d'un rectangle.

Un carré est un polygone régulier. Il possède
– quatre axes de symétrie (les diagonales et les médiatrices des côtés) ;
– un centre de symétrie.

Le dessin ci-contre représente le carré $RSTU$ de centre O.

Le trapèze



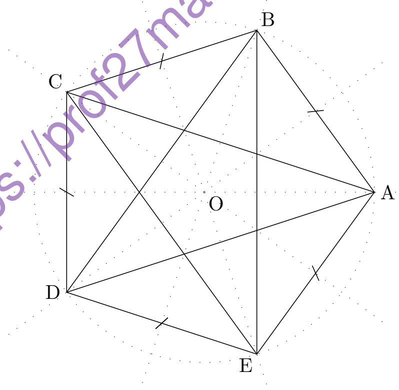
Un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles.

S'il possède de plus deux côtés perpendiculaires, on parle de trapèze rectangle.

La figure ci-contre représente le trapèze $IJKL$: les côtés $[IJ]$ et $[LK]$ sont parallèles.

3.1.4 Autres polygones

Le pentagone régulier



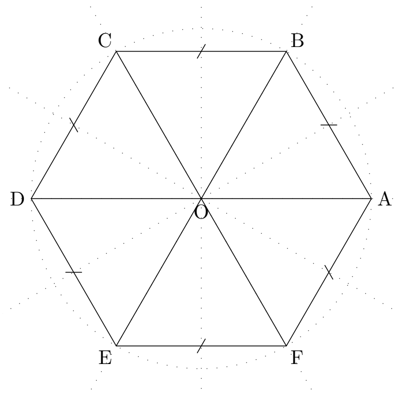
Le pentagone régulier possède cinq axes de symétrie.

Le segment rejoignant deux sommets non consécutifs du pentagone est appelé une diagonale.

Le rapport $\dfrac{\text{diagonale}}{\text{côté}}$ définit le nombre d'or Φ :

$$\Phi = \frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

L'hexagone régulier



L'hexagone régulier possède six axes de symétrie et un centre de symétrie.

Il est constitué de six triangles équilatéraux.

3.2 Les exercices

3.2.1 Exercices corrigés

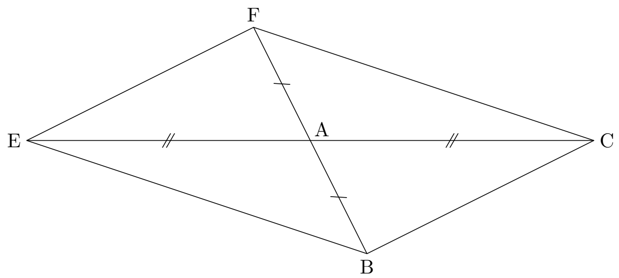
Exercice 1

Enoncé Soit ABC un triangle. Dans la symétrie de centre A, F est l'image du point B et E l'image de C.

1. Faire une figure à main levée.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $EFCB$? Justifier la réponse.
3. Dans cette question, on donne $AB = 3cm$, $AC = 4cm$ et $BC = 5cm$.
   (a) Faire une figure en vraie grandeur.
   (b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   (c) En déduire la nature du quadrilatère $EFCB$. Justifier la réponse.

Solution

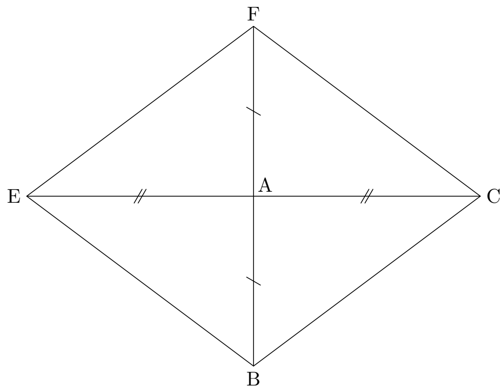
1. Voir figure suivante.



2. Montrons que $EFCB$ est un parallélogramme.

   F est le symétrique de B par rapport à A, d'où A milieu de $[BF]$.
   E est le symétrique de C par rapport à A, d'où A milieu de $[CE]$.
   Les diagonales du quadrilatère $EFCB$ se coupent en leur milieu A : $EFCB$ est un parallélogramme de centre A.

3. (a) Voir figure suivante.



   (b) Montrons que le triangle ABC est rectangle en A.

   $BC^2 = 5^2 = 25$
   $B\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}C^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

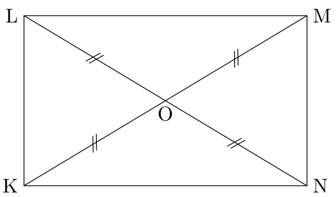
   Comme $B\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}C^2 = BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

   (c) Montrons que $EFCB$ est un losange.

   Les diagonales du parallélogramme $EFCB$ étant perpendiculaires, $EFCB$ est un losange.

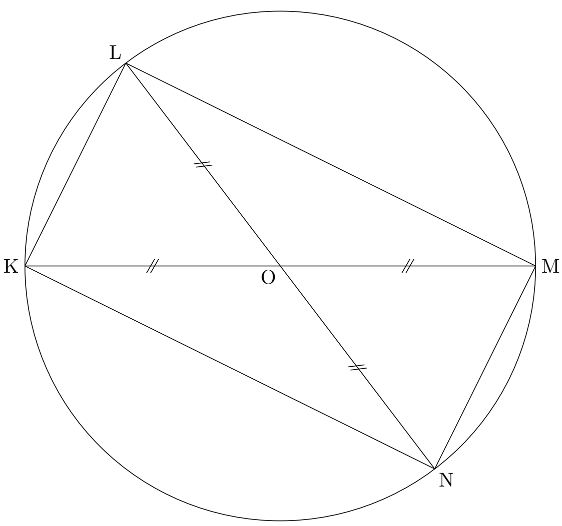
Exercice 1

Enoncé Construire un rectangle $KLMN$ de centre O tel que $KL = 4cm$ et $KM = 9cm$.



Commentaires Comme souvent en géométrie plane, il est conseillé de faire un dessin à main levée de la figure $KLMN$ demandée.

Ce dessin permet de ne pas confondre côtés et diagonales du rectangle : ainsi, on voit que O est le milieu du segment $[KM]$.



Solution O étant le centre du rectangle $KLMN$, O est le milieu de la diagonale $[KM]$.
Commençons par tracer le segment $[KM]$.

Les diagonales d'un rectangle étant de même longueur et se coupant en leur milieu, $[KM]$ et $[LN]$ sont deux diamètres d'un même cercle. Traçons ce cercle.

L est un point du cercle précédent tel que $KL = 4cm$.
N est le symétrique du point L dans la symétrie de centre O.

3.2.2 Autres exercices

Exercice 3

Soit RST un triangle. Dans la symétrie de centre S, M est l'image du point S et N l'image de T.

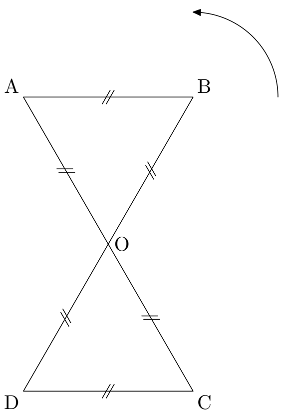
1. Faire une figure à main levée.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $MNRT$? Justifier la réponse.
3. Dans cette question, on donne $RS = ST = 6cm$ et $RT = 4cm$.
   (a) Faire une figure en vraie grandeur.
   (b) Quelle est la nature du triangle RST ?
   (c) En déduire la nature du quadrilatère $MNRT$. Justifier la réponse.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que $AB = 4cm$ et $AD = 3cm$.
E est le symétrique du point A dans la symétrie de centre B.
F est le symétrique du point C dans la symétrie de centre D.

1. Faire une figure en vraie grandeur.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $BEDF$? Justifier la réponse.
3. En déduire que O est le milieu du segment du segment $[BD]$.

Exercice 5



1. Reproduire ce dessin en vraie grandeur sachant que $OA = 3\,cm$ et que les points A, O et C, d'une part, et les points B, O et D, d'autre part, sont alignés.
2. Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
3. Placer, sur le dessin, le point E image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
4. Placer le point F image du point C par la rotation de centre O et d'angle $60°$ dans le sens de la flèche.
5. Montrer que les points A, B, C, D, E, F sont sur un même cercle que l'on précisera.
6. Ecrire un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$. L'unité est le centimètre. On considère les points $A(4; 4)$, $B(7; 5)$, $C(8; 2)$.

1. Placer les points A, B, C sur une figure.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC (on donnera les valeurs exactes).
3. Démontrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
4. Placer, sur la figure, le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

Exercice 7

1. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ (unité graphique : $1\,cm$), placer les points suivants $A(5; 0)$, $B(7; 6)$, $C(1; 4)$, $D(-1; -2)$.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
3. Calculer les distances AB et AD.
4. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 8

Soit SAB un triangle isocèle en S. Soit E le symétrique de A par rapport au point S. Soit F le symétrique de B par rapport au point S.

1. Faire une figure.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $AFEB$? Justifier.
3. (a) En utilisant les points de la figure, citer sans justifications : un vecteur égal à $\overrightarrow{AF}$; un vecteur égal à $\overrightarrow{AS}$.

   (b) Recopier, en les complétant, les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}=\ldots \qquad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\ldots$$

   On ne demande pas de justifications.

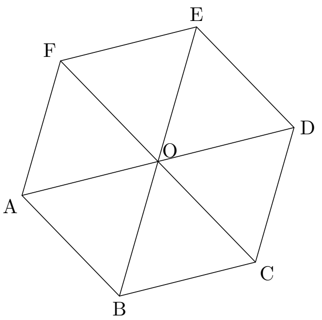
Exercice 9

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, I, J) ; l'unité graphique est le centimètre.
La figure sera réalisée sur papier quadrillé.

1. (a) Placer les points $A(4;5)$, $B(-3;3)$ et $C(2;-2)$.

   (b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Soit D l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   Calculer les coordonnées du point D.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

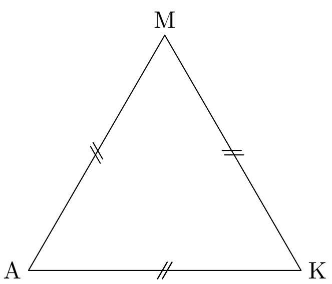
Exercice 10



Sur la figure ci-contre, $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O. On complétera le dessin et les phrases ci-dessous suivant les cas.

1. Le triangle ABO et le triangle CDO sont symétriques par rapport à la droite (Δ) sur le dessin.
2. Le triangle ABO est l'image du triangle EFO dans la rotation de centre .... d'angle .... dans le sens de la flèche. Indiquer par une flèche le sens de cette rotation.
3. L'image du triangle ABO, dans la translation qui transforme C en D, est le triangle ....
4. Compléter : $\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OC}=\cdots$; $\overrightarrow{OF}+\cdots=\overrightarrow{OE}$.

Exercice 11



Pour cet exercice, on laissera visible les traits de construction mais aucune justification n'est demandée.
Soit le triangle équilatéral MAK de côté mesurant $4cm$.

1. (a) Construire le point I image de M dans la rotation de centre K et d'angle $120°$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

   (b) Quelle est la natue exacte du triangle AKI ? (On ne demande pas de justification.)
2. Construire le point S symétrique de M par rapport à K.
3. Construire le point O tel que K soit le milieu de $[AO]$.
4. (a) Construire le point N image de K dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$.

   (b) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $AMNK$? (On ne demande pas de justification.)
5. (a) Tracer le polygone $MAISON$.

   (b) Quelle est la nature exacte de ce polygone ? (On ne demande pas de justification.)

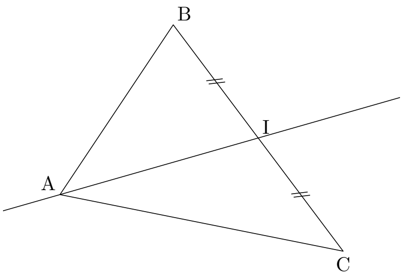
Chapitre 4

Les droites remarquables

4.1 Le cours

4.1.1 Médianes

Définition



Cas général Dans un triangle, une médiane est une droite passant par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé.
Exemple Dans le triangle ABC, la médiane issue de A (ou relative au côté $[BC]$) est la droite passant par A et par le milieu du côté opposé $[BC]$.

Construction de l'exemple précédent

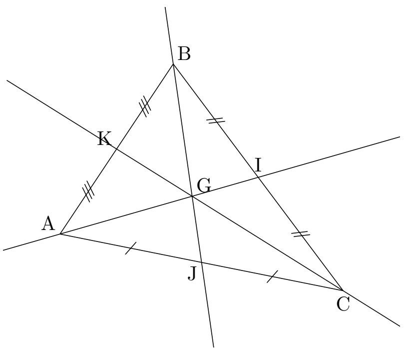
Il suffit de faire passer une droite par A et par le milieu I de $[BC]$.

Pourr obtenir le milieu de $[BC]$, deux techniques sont possibles :

– on mesure la distance BC et on divise par 2 ;
– on trace la médiatrice du segment $[BC]$.

NB : ne pas oublier de coder les segments de même longueur.

Point de concours des médianes

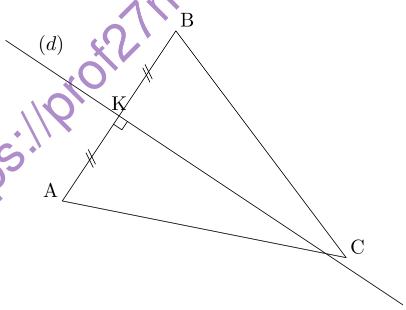


Cas général Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes (elles passent par un même point) : le point de concours G est le centre de gravité du triangle.
Propriétés Le centre de gravité est situé à l'intérieur du triangle : il correspond à son point d'équilibre.
Ce point est situé aux deux tiers de la médiane en partant du sommet.
Exemple Dans le triangle ABC, les médianes (AI), (BJ) et (CK) se coupent en G, centre de gravité du triangle.
On a :

$$AG = \frac{2}{3}AI \qquad BG = \frac{2}{3}BJ \qquad CG = \frac{2}{3}CK.$$

4.1.2 Médiatrices

Définition



Cas général

– La médiatrice d'un segment est la droite coupant ce segment perpendiculairement en son milieu.
– La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points à égale distance de ses extrêmités.

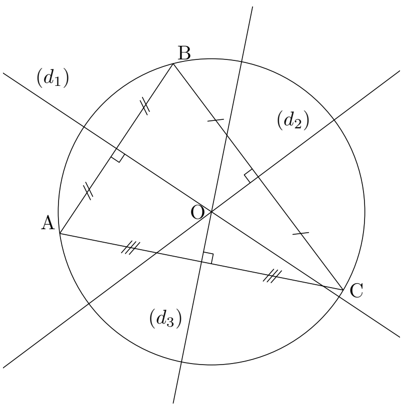
Exemple Dans le triangle ABC, la médiatrice du segment $[AB]$ est la droite (d_1) coupant $[AB]$ perpendiculairement en son milieu.
(d_1) est l'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$.

Construction de l'exemple précédent

Construction à la règle et à l'équerre On commence par chercher à l'aide d'une règle graduée le milieu K du segment $[AB]$. On trace à l'équerre la perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par K.

Construction à la règle et au compas On construit deux arcs de cercle de même rayon, de centres A et B ; la médiatrice (d) passe par les deux points d'intersection obtenus. Il ne reste qu'à effacer les arcs de cercle et à coder la figure.
NB : ne pas oublier de coder les segments égaux et les angles droits.

Point de concours des médiatrices

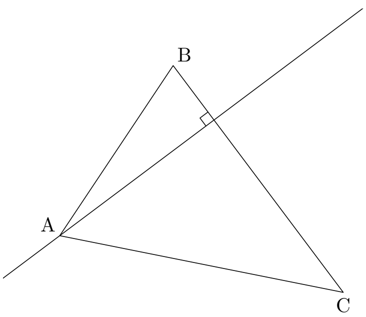


Cas général Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes (elles passent par un même point) : le point de concours O est le centre du cercle circonscrit du triangle.
Propriétés Le cercle circonscrit d'un triangle est l'unique cercle passant par ses trois sommets. Son centre peut être situé à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.
Dans le cas d'un triangle rectangle, ce point est le milieu de l'hypoténuse.
Exemple Dans le triangle ABC, les médiatrices (d_1), (d_2) et (d_3) respectives des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ se coupent en O, centre du cercle circonscrit du triangle.
On a :

$$OA = OB = OC.$$

4.1.3 Hauteurs

Définition



Cas général Une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.
Exemple Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A (ou relative au côté $[BC]$) est la droite passant par A et perpendiculaire à $[BC]$.

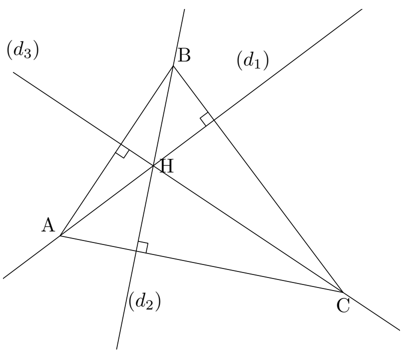
Construction de l'exemple précédent

Construction à la règle et à l'équerre On place l'équerre le long de la droite (BC) ; on trace la perpendiculaire à (BC) passant par A.

Construction à la règle et au compas On construit un arc de cercle de centre A qui vient couper la droite (BC) en deux points E et F (ne pas les nommer sur la figure) ; on trace la médiatrice du segment $[EF]$.

NB : il est souvent nécessaire de prolonger la droite (BC). Ne pas oublier de coder l'angle droit.

Point de concours des hauteurs

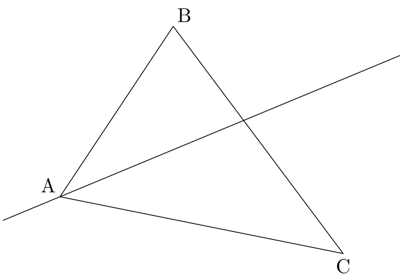


Cas général Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes (elles passent par un même point) : le point de concours H est appelé l'orthocentre du triangle.
Propriétés L'orthocentre peut être situé à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.
Dans le cas d'un triangle rectangle, l'orthocentre correspond au sommet de l'angle droit.
Exemple Dans le triangle ABC, les hauteurs (d_1), (d_2) et (d_3) issues respectivement de A, B et C se coupent en H, orthocentre du triangle.
On a :

$$(AH)\perp(BC) \qquad (BH)\perp(AC) \qquad (CH)\perp(AB).$$

4.1.4 Bissectrices

Définition



Cas général Une bissectrice d'un angle est une droite coupant cet angle en deux angles de même mesure.
Exemple Dans le triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est la droite coupant cet angle en deux angles de même mesure.

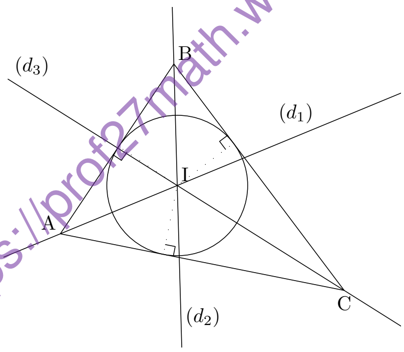
Construction de l'exemple précédent

Construction à la règle et au rapporteur On mesure avec le rapporteur l'angle $\widehat{BAC}$ et on le divise par 2 (méthode peu précise).

Construction à la règle et au compas On trace un arc de cercle de centre A qui coupe $[AB)$ en E et $[AC)$ en F (on ne nomme pas E et F sur la figure) ; on trace deux arcs de cercle de centre E et F. La bissectrice passe par A et par le point d'intersection de ces deux arcs.

NB : ne pas oublier de coder les angles de même mesure.

Point de concours des bissectrices

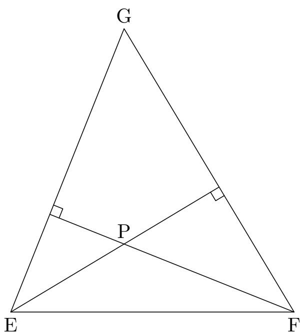


Cas général Dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes (elles passent par un même point) : le point de concours I est le centre du cercle inscrit du triangle.
Propriétés Le cercle inscrit est tangent aux côtés du triangle en trois points qui ne sont en général pas situés sur les bissectrices.
Exemple Dans le triangle ABC, les bissectrices (d_1), (d_2) et (d_3) des angles respectifs $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en I, centre du cercle inscrit du triangle.

4.2 Les exercices

4.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1



Enoncé

1. Que représente la droite (EP) dans le triangle EFG ? Justifier.
2. Que représente le point P dans le triangle EFG ? Justifier.
3. En déduire que les droites (PG) et (EF) sont perpendiculaires.

Solution

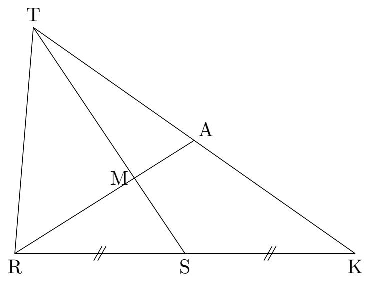
1. Montrons que (EP) est une hauteur.
   D'après le codage, $(EP)\perp(FG)$. (EP) est donc la hauteur relative au côté $[FG]$ dans le triangle EFG.
2. Montrons que P est l'orthocentre du triangle EFG.
   D'après la question précédente, (EP) est la hauteur issue de E.
   De même, on peut montrer que (FP) est la hauteur issue de F. P est donc le point d'intersection de deux hauteurs : P est alors l'orthocentre du triangle EFG.
3. Montrons que $(PG)\perp(EF)$.
   D'après la question précédente, P est l'orthocentre du triangle EFG.
   (PG) est donc la hauteur issue de G : d'où $(PG)\perp(EF)$.

Exercice 2

Enoncé Soit le triangle RST tel que $RS = 3cm$, $RT = 4cm$ et $ST = 4,8cm$.
M est le point du segment $[ST]$ tel que $SM = 1,6cm$.
K est le symétrique du point R dans la symétrie de centre S.
On appelle A le point d'intersection des droites (RM) et $(TK]$.

1. Faire une figure.
2. Donner le rapport $\dfrac{TM}{TS}$ sous forme de fraction irréductible.
3. En déduire le rôle du point M dans le triangle RTK.
4. En déduire que A est le milieu du segment $[TK]$.

Solution



1. Voir figure ci-contre.
2. Calculons $\dfrac{TM}{TS}$.

   M est un point du segment $[ST]$
   d'où $TM = TS - SM = 4,8 - 1,6 = 3,2$.
   Alors, $\dfrac{TM}{TS} = \dfrac{3,2}{4,8} = \dfrac{32}{48} = \dfrac{2 \times 16}{3 \times 16} = \dfrac{2}{3}$.
3. Montrons que M est le centre de gravité du triangle RTK.

   K étant le symétrique du point R dans la symétrie de centre S, S est donc le milieu du segment $[RK]$ et (TS) la médiane issue de T dans le triangle RTK.

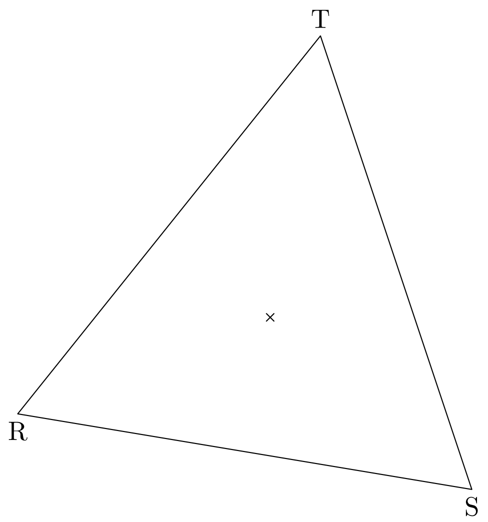
   M étant situé aux deux tiers de la médiane en partant du sommet T, M est le centre de gravité du triangle RTK.
4. Montrons que A est le milieu du segment $[TK]$.

   D'après la question précédente, M est le centre de gravité du triangle RTK : (RM) est donc la médiane issue de R.

   Le point d'intersection A de cette médiane avec le côté opposé $[TK]$ est le milieu du segment $[TK]$.

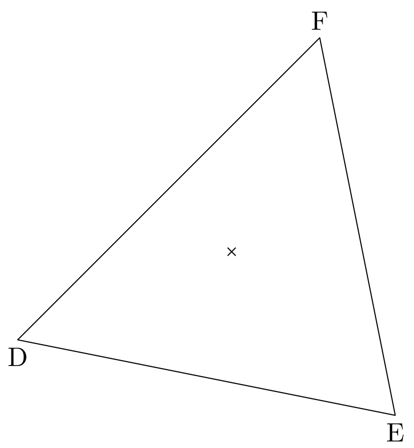
4.2.2 Autres exercices

Exercice 3



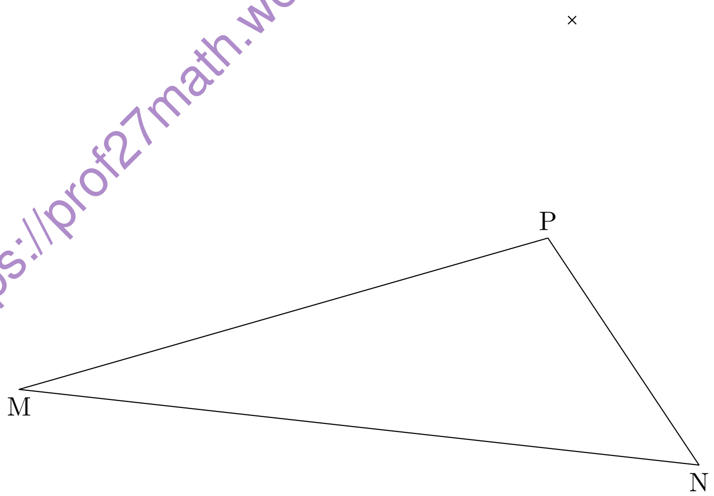
Soit le triangle RST ci-contre.
Tracer les bissectrices ainsi que le cercle inscrit dans le triangle RST.
NB : on vérifiera, après coup, que la croix correspond au centre du cercle inscrit.

Exercice 4



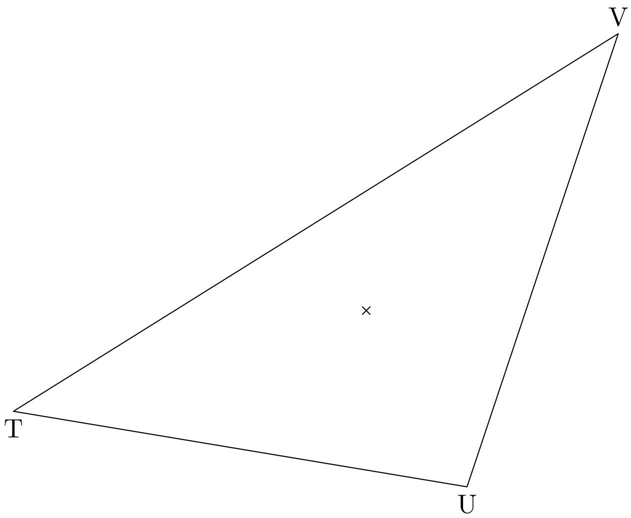
Soit le triangle DEF ci-contre.
Tracer les médiatrices ainsi que le cercle circonscrit dans le triangle DEF.
NB : on vérifiera, après coup, que la croix correspond au centre du cercle circonscrit.

Exercice 5



Soit le triangle MNP ci-contre.
Tracer les hauteurs du triangle MNP.
NB : on vérifiera, après coup, que la croix correspond à l'orthocentre du triangle.

Exercice 6



Soit le triangle TUV ci-contre.
Tracer les médianes du triangle TUV.
NB : on vérifiera, après coup, que la croix correspond au centre de gravité du triangle du triangle.

Exercice 7

Soit ABC un triangle tel que $AB = 10\,cm$, $BC = 11\,cm$ et $CA = 12\,cm$.

1. Construire l'orthocentre H du triangle ABC.
2. (a) Soit I le point d'intersection des droites (AH) et (BC) ; J le point d'intersection des droites (BH) et (CA) ; K le point d'intersection des droites (CH) et (AB).
   Construire le centre du cercle inscrit au triangle IJK.

   (b) Que constate-t-on ?

Exercice 8

1. Construire un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et B. Construire le symétrique L du point A par rapport au point M.
2. Soit I le point d'intersection des droites (LO) et (BM). Que représente le point I pour le triangle LAB ? Justifier la réponse.
3. La droite (AI) coupe le segment $[LB]$ en J. Que peut-on dire du point J ? Pourquoi ?

Exercice 9

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Le point E est le milieu du segment $[AB]$ et les segments $[AC]$ et $[DE]$ se coupent en G.

1. (a) Que représente le segment $[AO]$ pour le triangle ABD ? Justifier.
   (b) Que représente le point G pour le triangle ABD ? Justifier.
2. Démontrer que la droite (BG) coupe le segment $[AD]$ en son milieu.

Exercice 10

Soit ABC un triangle et D, E, F les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $EDFC$? Justifier.
   (b) Démontrer que la droite (DC) est à la fois une médiane du triangle ABC et du triangle EFD.
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   Démontrer que G est aussi le centre de gravité du triangle EFD.

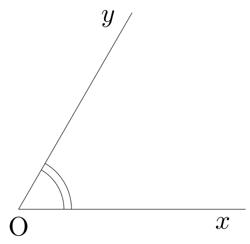
Chapitre 5

Les angles

5.1 Le cours

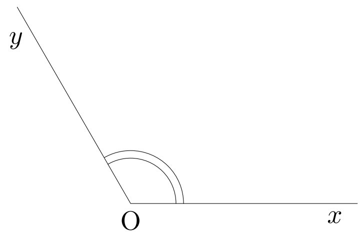
5.1.1 Les catégories d'angles

Angles aigus et angles obtus



Un angle est dit **aigu** si sa valeur est comprise entre 0 et 90 degrés :

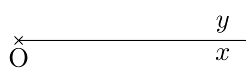
$$0 < \widehat{xOy} < 90.$$



Un angle est dit **obtus** si sa valeur est comprise entre 90 et 180 degrés :

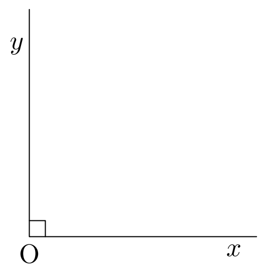
$$90 < \widehat{xOy} < 180.$$

Angle nul, angle droit, angle plat



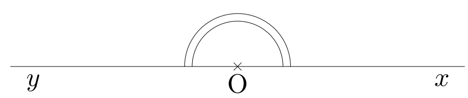
Un angle est dit **nul** si sa valeur est égale à 0 degré : les deux côtés de l'angle sont superposés.

$$\widehat{xOy} = 0.$$



Un angle est dit **droit** si sa valeur est égale à 90 degrés : les côtés de l'angle sont perpendiculaires.

$$\widehat{xOy} = 90.$$



Un angle est dit **plat** si sa valeur est égale à 180 degrés : les côtés de l'angle sont dans le prolongement l'un de l'autre.

$$\widehat{xOy} = 180.$$

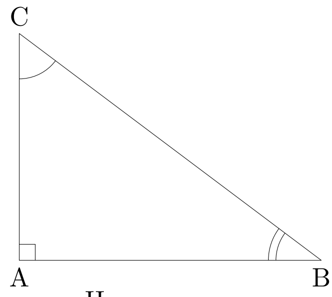
5.1.2 Relations entre deux angles

Relations suivant les valeurs

Deux angles sont dits **complémentaires** si la somme de leurs valeurs est égale à 90 degrés.

Ainsi, les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
Sur la figure ci-contre :

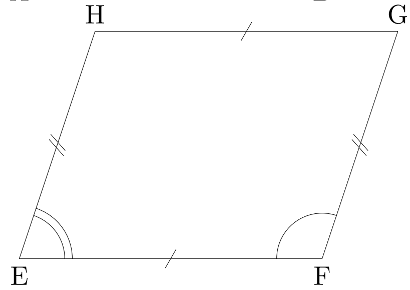
$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90.$$



Deux angles sont dits **supplémentaires** si la somme de leurs valeurs est égale à 180 degrés.

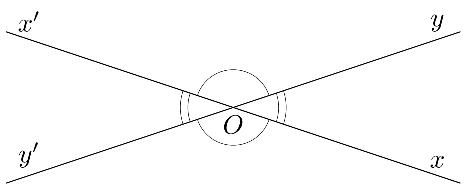
Ainsi, deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.
Sur la figure ci-contre :

$$\widehat{HEF} + \widehat{EFG} = 180.$$



Relations suivant les positions

Deux droites sécantes en un point O donnent deux paires d'angles **opposés par le sommet** O.
Ainsi, sur la figure ci-contre,
- les angles $\widehat{x'Oy}$ et $\widehat{xOy'}$ sont opposés par le sommet O ;
- les angles $\widehat{x'Oy'}$ et $\widehat{xOy}$ sont opposés par le sommet O.

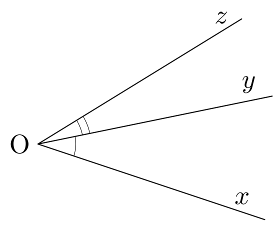


Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure :
- $\widehat{x'Oy} = \widehat{xOy'}$;
- $\widehat{x'Oy'} = \widehat{xOy}$.

Deux angles **adjacents** ont
- même sommet,
- un côté commun.

Ainsi, sur la figure ci-contre, les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents.
Dans ce cas ,

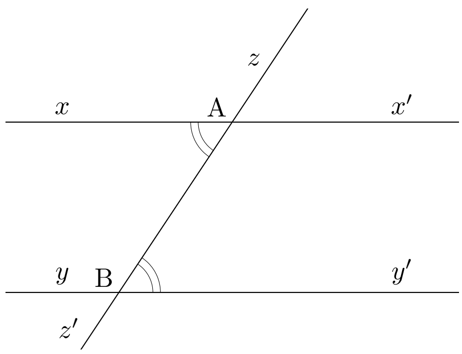
$$\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}.$$



La figure suivante constituée des droites (xx'), (yy') et (zz') permet de définir les quatre paires d'**angles correspondants** suivants :
- $\widehat{x'Az}$ et $\widehat{y'Bz}$,
- $\widehat{xAz}$ et $\widehat{yBz}$,
- $\widehat{x'Az'}$ et $\widehat{y'Bz'}$,
- $\widehat{xAz'}$ et $\widehat{yBz'}$.

De même, on a défini les deux paires d'**angles alternes internes** suivants :
- $\widehat{xAz'}$ et $\widehat{y'Bz}$,
- $\widehat{x'Az'}$ et $\widehat{yBz}$.

Si les angles correspondants ou alternes internes sont égaux, les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

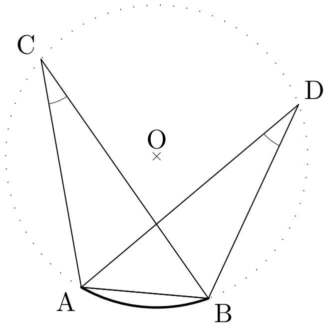


5.1.3 Angles inscrits et angles au centre

Définitions

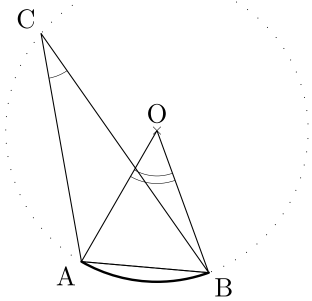
Sur la figure ci-contre, les points A, B, C et D sont sur un même cercle.
Les **angles inscrits** $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, alors

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}.$$



Sur la figure ci-contre, les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O.
L'**angle inscrit** $\widehat{ACB}$ et l'**angle au centre** $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, alors

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}.$$



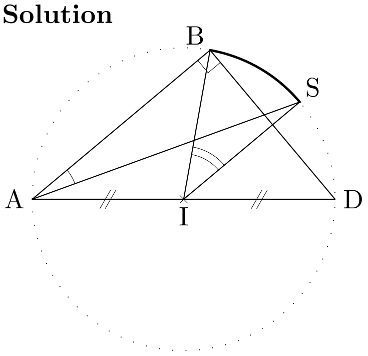
Application

Enoncé
Un triangle ABD rectangle en B est tel que $AB = 9cm$ et l'angle $\widehat{BAD} = 40°$.

1. Tracer ce triangle. Construire le cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABD (aucune justification n'est attendue pour cette construction) ; on précisera la position du centre I de ce cercle. Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Elle coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en S ; placer le point S sur la figure.

2. Déterminer la mesure exacte de l'angle $\widehat{SIB}$ en justifiant la démarche utilisée.

Solution



1. Voir figure ci-contre.
2. Calculons $\widehat{SIB}$.
   L'angle au centre $\widehat{SIB}$ et l'angle inscrit $\widehat{SAB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{\mathrm{SB}}$, d'où $\widehat{SIB} = 2 \times \widehat{SAB}$.
   La droite (AS) étant la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$,
   on a $\widehat{SAB} = \dfrac{\widehat{BAD}}{2} = \dfrac{40}{2} = 20°$.
   Alors, $\widehat{SIB} = 2 \times \widehat{SAB} = 2 \times 20 = 40°$.

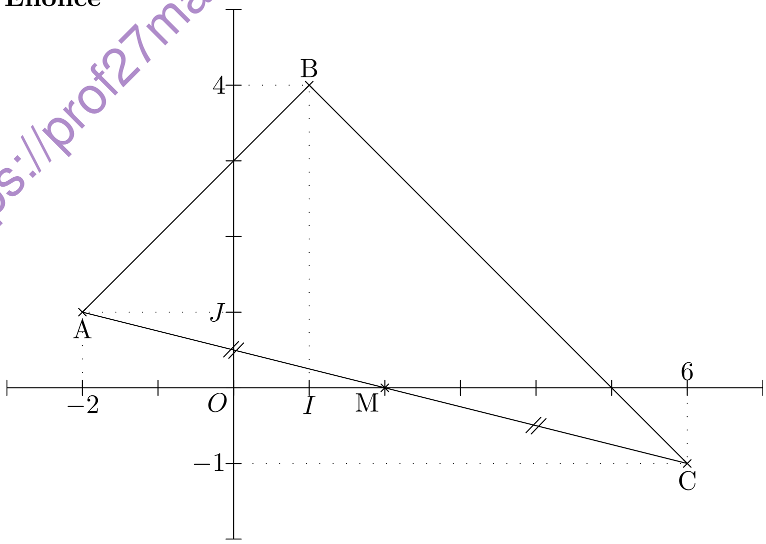
5.2 Les exercices

Les exercices sur les angles font aussi intervenir certaines notions étudiées dans d'autres chapitres :
– la trigonométrie,
– les droites remarquables (bissectrices),
– les polygones.
– ...

5.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1

Enoncé



$ABCD$ est un rectangle de centre O.
On donne : $\widehat{AOB} = 108°$.

Calculer chacun des angles de la figure.

Solution
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents et supplémentaires, alors $\widehat{BOC} = 180 - \widehat{AOB} = 180 - 108 = 72°$.

Utilisons le cercle circonscrit du rectangle $ABCD$.
L'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, d'où $\widehat{ACB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{108}{2} = 54°$.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ACD}$ sont adjacents et complémentaires, alors $\widehat{ACD} = 90 - \widehat{ACB} = 90 - 54 = 36°$.

Grâce à la symétrie de centre O, on en déduit les mesures d'autres angles :
- $\widehat{AOB} = \widehat{DOC} = 108°$ (angles opposés par le sommet O) ;
- $\widehat{DOA} = \widehat{COB} = 72°$ (angles opposés par le sommet O) ;
- $\widehat{DAC} = \widehat{ACB} = 54°$ (angles alternes internes) ;
- $\widehat{CAB} = \widehat{ACD} = 36°$ (angles alternes internes) ;

Les angles à la base des différents triangles isocèles étant égaux,
- $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 36°$ (triangle OAB isocèle en O) ;
- $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 54°$ (triangle OBC isocèle en O) ;
- $\widehat{ODC} = \widehat{OCD} = 36°$ (triangle OCD isocèle en O) ;
- $\widehat{ODA} = \widehat{OAD} = 54°$ (triangle OAD isocèle en O) ;

5.2.2 Autres exercices

Exercice 2

Soit $EFGH$ un parallélogramme de centre I tel que $EF = 8cm$, $\widehat{FEG} = 34°$ et $\widehat{EIF} = 104°$.

1. Faire un dessin à main levée.
2. Calculer les différents angles de la figure.
3. Faire un dessin en vraie grandeur.

Exercice 3

Construire un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ avec $AB = 6\,cm$. Placer sur ce cercle un point C tel que $BC = 3,6\,cm$.

1. Quelle est la nature du triangle ACB ? Justifier.
   Démontrer que la longueur AC est égale à $4,8\,cm$.
2. Déterminer par le calcul la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{COB}$. (On arrondira les deux mesures à l'unité.)
3. Soit E le milieu du segment $[OB]$. Tracer la parallèle à la droite (BC) passant par E ; elle coupe le segment $[AC]$ en F. Calculer les longueurs exactes des segments $[AF]$ et $[FE]$.

Exercice 4

RST est un triangle isocèle de sommet principal S tel que $RT = 4cm$ et $\widehat{TRS} = 63°$.

1. Faire un dessin à main levée.
2. Calculer les angles $\widehat{RTS}$ et $\widehat{RST}$.
3. Soit H le pied de la hauteur issue de S. Calculer RS en donnant sa valeur arrondie au mm près.

Exercice 5

$KLMN$ est un losange de centre O tel que $KM = 8cm$ et $\widehat{KML} = 30°$.

1. Faire un dessin à main levée.
2. Calculer les différents angles de la figure.
3. Calculer la longueur du côté de ce losange.
4. Faire une figure en vraie grandeur.

Exercice 6

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon $5cm$. Soit $[AB]$ une corde de $(\mathcal{C})$ telle que $AB = 6cm$. On appelle I le milieu de $[AB]$.

1. Faire une figure que l'on complétera par la suite.
2. Calculer l'angle $\widehat{AOI}$ au degré près. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Soit E un point du grand arc $\overset{\frown}{AB}$ tel que $AE = 3cm$. Calculer $\widehat{AEB}$.

Chapitre 6

Longueurs, aires et volumes

6.1 Le cours

6.1.1 Longueurs

Les unités de longueurs

Les unités de longueurs sont basées sont le *mètre*. Les autres unités de longueurs du système métrique utilisent les préfixes suivants :

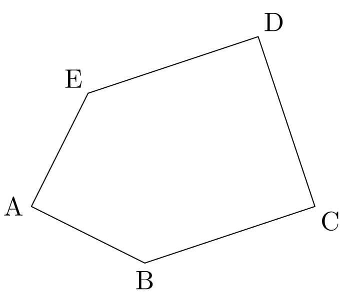
préfixe	symbole	coefficient
déca	da	10
hecto	h	100
kilo	k	1000

préfixe	symbole	coefficient
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}

On utilise le tableau de conversion suivant :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Formulaire

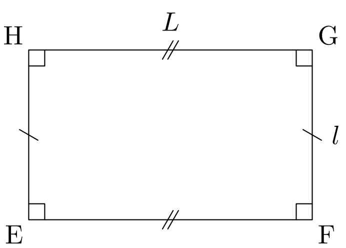


Périmètre d'une figure

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour.

La figure ci-contre représente un pentagone ABCDE. Son périmètre $\mathcal{P}_{ABCDE}$ est donné par la formule :

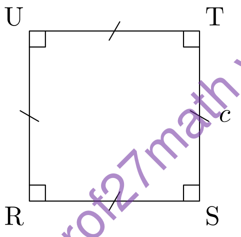
$$\mathcal{P}_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA$$



Périmètre d'un rectangle

$$\mathcal{P}_{\text{rectangle}} = 2 \times (\text{longueur} + \text{largeur})$$

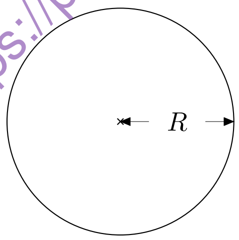
$$\mathcal{P}_{EFGH} = 2\,(L + l) = 2\,(EF + FG)$$



Périmètre d'un carré

$\mathcal{P}_{\text{carré}} = 4 \times \text{côté}$

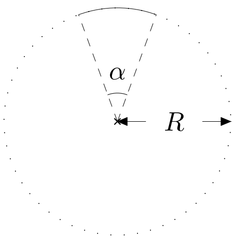
$\mathcal{P}_{RSTU} = 4\,c = 4\,RS$



Circonférence d'un cercle

La circonférence $\mathcal{P}$ d'un cercle de rayon R est donnée par la formule :

$\mathcal{P}_{\text{cercle}} = 2\,\pi\,R$



Longueur d'un arc de cercle

La longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle α degrés est donnée par la formule :

$$\mathcal{L}_{\text{arc}} = 2\,\pi\,R\,\frac{\alpha}{360}$$

6.1.2 Aires

Les unités d'aires

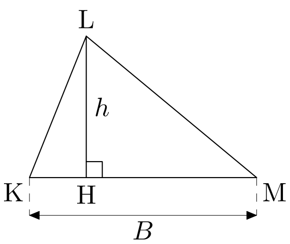
Les unités d'aire du système métrique sont basées sur le mètre carré (m^2).

Deux unités consécutives sont reliées par un coefficient multiplicateur 100.
Par exemple : $1dam^2 = 100m^2$.

D'où le tableau de conversion suivant comprenant deux colonnes par unité :

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	

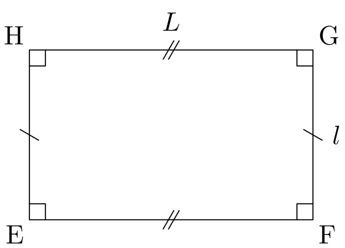
Formulaire



Aire d'un triangle

$$\mathcal{P}_{\text{triangle}} = \frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2}$$

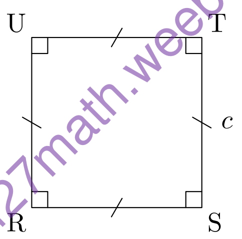
$$\mathcal{P}_{KLM} = \frac{B \times h}{2} = \frac{KM \times LH}{2}$$



Aire d'un rectangle

$\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = \text{longueur} \times \text{largeur}$

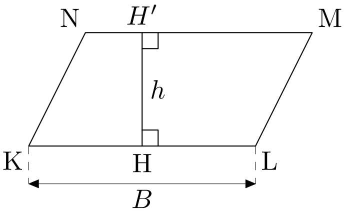
$\mathcal{A}_{EFGH} = L \times l = EF \times FG$



Aire d'un carré

$\mathcal{A}_{\text{carré}} = \text{côté} \times \text{côté}$

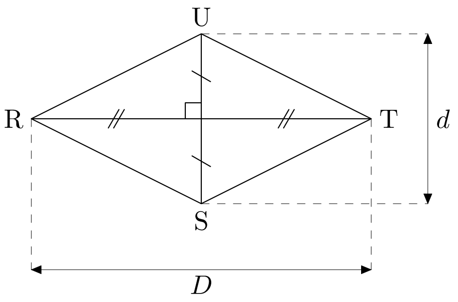
$\mathcal{A}_{RSTU} = c^2 = RS^2$



Aire d'un parallélogramme

$\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \text{Base} \times \text{hauteur}$

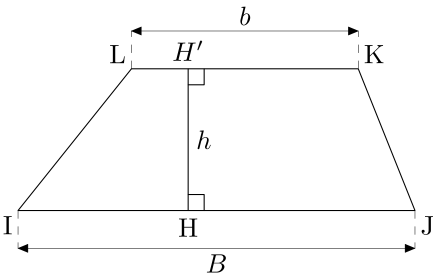
$\mathcal{A}_{KLMN} = B \times h = KL \times HH'$



Aire d'un losange

$\mathcal{A}_{\text{losange}} = \dfrac{\text{Grande Diagonale} \times \text{petite diagonale}}{2}$

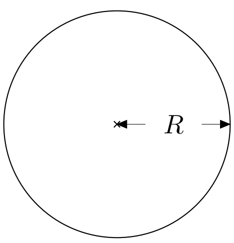
$\mathcal{A}_{RSTU} = \dfrac{D \times d}{2} = \dfrac{RT \times SU}{2}$



Aire d'un trapèze

$\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \dfrac{(\text{Grande Base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$

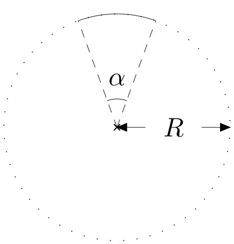
$\mathcal{A}_{IJKL} = \dfrac{(B+b) \times h}{2} = \dfrac{(IJ + LK) \times HH'}{2}$



Aire d'un disque

L'aire $\mathcal{A}$ d'un disque de rayon R est donnée par la formule :

$\mathcal{A}_{\text{disque}} = \pi\, R^2$



Aire d'un secteur angulaire

L'aire d'un secteur angulaire de rayon R et d'angle α degrés est donnée par la formule :

$\mathcal{A}_{\text{arc}} = \pi\, R^2\, \dfrac{\alpha}{360}$

6.1.3 Volumes

Les unités de volumes

Les unités de volume du système métrique sont basées sur le mètre cube (m^3).

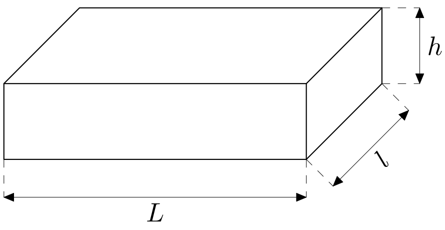
Deux unités consécutives sont reliées par un coefficient multiplicateur 1000.

Par exemple : $1dam^3 = 1000m^3$.

Cependant, les unités basées sur le litre (l) permettent d'avoir des unités consécutives de coefficient multiplicateur 10.
On a la correspondance : $1l = 1dm^3$.
D'où le tableau de conversion suivant comprenant trois colonnes par unité :

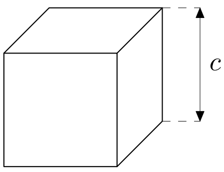
		dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3
						hl	dal	l	dl	cl	ml			

Formulaire



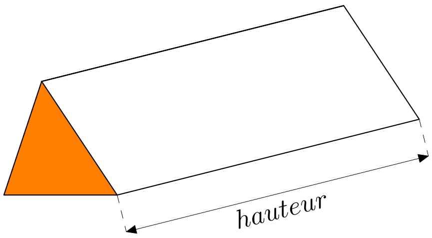
Volume d'un pavé droit

$\mathcal{V}_{\text{pavé droit}} = L \times l \times h$



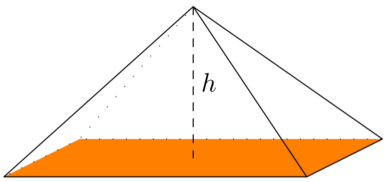
Volume d'un cube

$\mathcal{V}_{\text{cube}} = c^3$



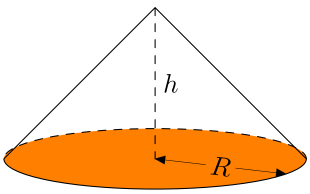
Volume d'un prisme droit

$\mathcal{V}_{\text{prisme droit}} = \mathcal{A}_{\text{Base}} \times \text{hauteur}$



Volume d'une pyramide

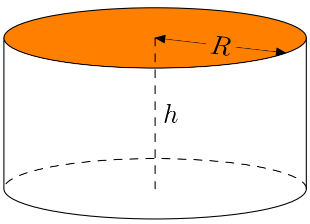
$\mathcal{V}_{\text{pyramide}} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{Base}} \times \text{hauteur}$



Volume d'une cône de révolution

$\mathcal{V}_{\text{cône}} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{Base}} \times \text{hauteur}$

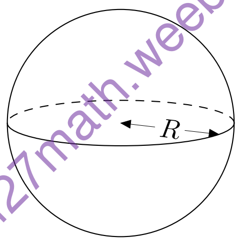
$\mathcal{V}_{\text{cône}} = \dfrac{1}{3}\,\pi\, R^2 \times h$



Volume d'un cylindre de révolution

$\mathcal{V}_{\text{cylindre}} = \mathcal{A}_{\text{Base}} \times \text{hauteur}$

$\mathcal{V}_{\text{cylindre}} = \pi\, R^2 \times h$



Volume d'une boule

$$\mathcal{V}_{\text{cylindre}} = \frac{4}{3}\,\pi\, R^3$$

6.2 Les exercices

6.2.1 Exercices corrigés

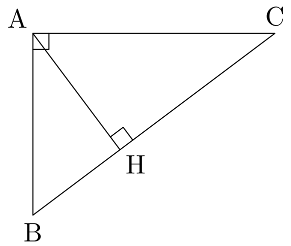
Exercice 1

Enoncé Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4,8cm$ et $AC = 6,4cm$.
On appelle H le pied de la hauteur issue de A.

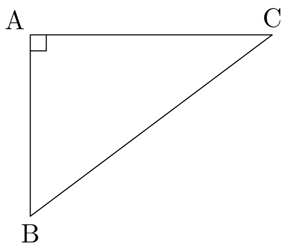
1. Faire une figure.
2. Calculer BC.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle ABC. On donnera sa valeur exacte.
4. Exprimer $\mathcal{A}_{ABC}$ en fonction de AH.
5. En déduire la valeur exacte de AH.

Solution

1. Voir figure suivante.



2. Calculons BC.



Dans le triangle ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore,
$BA^2 + AC^2 = BC^2$
$4,8^2 + 6,4^2 = BC^2$
$23,04 + 40,96 = BC^2$
$BC^2 = 64$
$BC = \sqrt{64}$
$BC = 8cm.$

3. Calculons $\mathcal{A}_{ABC}$.
Le triangle ABC étant rectangle en A,
$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{B \times h}{2} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{4,8 \times 6,4}{2}$
$\mathcal{A}_{ABC} = 15,36cm^2$

4. Exprimons $\mathcal{A}_{ABC}$ en fonction de AH.
$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{B \times h}{2} = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{8 \times AH}{2}$
$\mathcal{A}_{ABC} = 4\,AH$

5. Calculons AH.
D'après les questions précédentes, $\mathcal{A}_{ABC} = 15,36cm^2$ et $\mathcal{A}_{ABC} = 4\,AH$. D'où
$4\,AH = 15,36$
$AH = \dfrac{15,36}{4}$
$AH = 3,84cm$

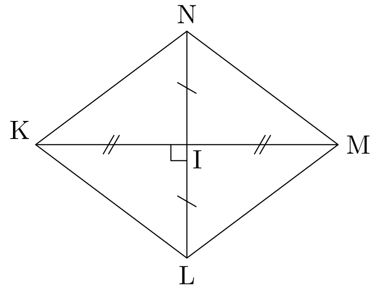
Exercice 2

Enoncé Soit $KLMN$ un losange de centre I tel que $LN = 6cm$ et $KL = 5cm$.

1. Faire une figure.
2. Calculer KI.
3. En déduire KM.
4. Calculer l'aire $\mathcal{A}_{KLMN}$ du losange $KLMN$.

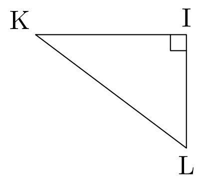
Solution

1. Voir figure suivante.



Il est conseillé de faire auparavant un dessin à main levée pour comprendre la disposition des points.

2. Calculons KI.



$KLMN$ étant un losange, ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu I.
Dans le triangle KIL rectangle en I,
d'après le théorème de Pythagore,
$K\mathbf{I}^2 + \mathbf{I}L^2 = KL^2$
$KI^2 + 3^2 = 5^2$
$KI^2 + 9 = 25$
$KI^2 = 25 - 9$
$KI^2 = 16$
$KI = 4cm$.

3. Calculons KM.
I étant le milieu de $[KM]$,
$KM = 2KI = 2 \times 4 = 8cm$

4. Calculons $\mathcal{A}_{KLMN}$.
$\mathcal{A}_{KLMN} = \dfrac{D \times d}{2} = \dfrac{KM \times LN}{2} = \dfrac{8 \times 6}{2}$
$\mathcal{A}_{KLMN} = 24cm^2$

6.2.2 Autres exercices

Exercice 3

Soit EFG un triangle équilatéral de côté $8cm$.

Montrer que l'aire de ce triangle est égale à $16\sqrt{3}\,cm^2$.

Exercice 4

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 25cm$ et $AD = 80cm$.

1. Calculer le périmètre de ce rectangle en cm. Convertir ensuite le résultat en m.
2. Calculer l'aire de ce rectangle en cm^2. Convertir le résultat en dm^2.

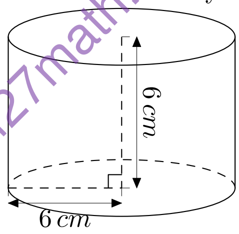
Exercice 5

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre 12cm.

1. Calculer sa circonférence. On donnera sa valeur exacte puis sa valeur arrondie au mm près.
2. Calculer l'aire du disque correspondant. On donnera sa valeur exacte puis sa valeur arrondie au cm^2 près.

Exercice 6

On considère le cylindre, la demi-boule et le cône représentés ci-dessous :



1. Vérifier au moyen d'un calcul que le volume $\mathcal{V}_1$ du cylindre, exprimé en cm^3, est égal à 216π et que le volume $\mathcal{V}_2$ de la demi-boule, exprimé en cm^3, est égal à 144π.
2. Calculer en cm^3 le volume $\mathcal{V}_3$ du cône sous la forme $k\pi$ (k étant un nombre entier).
3. On constate que $\mathcal{V}_2 = 2\mathcal{V}_3$. En utilisant le formulaire donné ci-dessous, justifier ce résultat.

   <u>FORMULAIRE</u>

   Volume du cylindre : $B \times h$

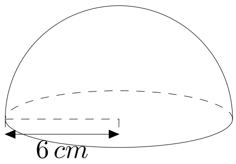
   B étant l'aire du disque de base,
   h étant la hauteur du cylindre.

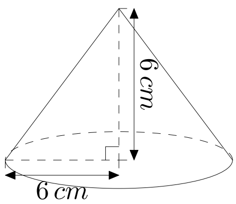
   Volume de la boule : $\dfrac{4}{3} \times \pi \times r^3$

   r étant le rayon de la boule.

   Volume du cône : $\dfrac{1}{3} \times B \times h$

   B étant l'aire du disque de base,
   h étant la hauteur du cône.

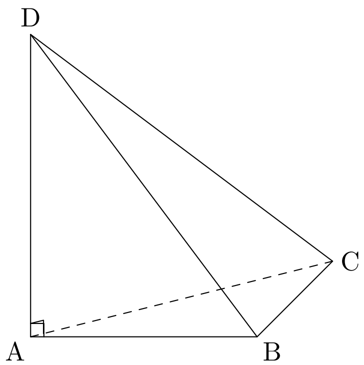




Exercice 8

Pour résoudre cet exercice, vous pourrez utiliser le formulaire suivant :

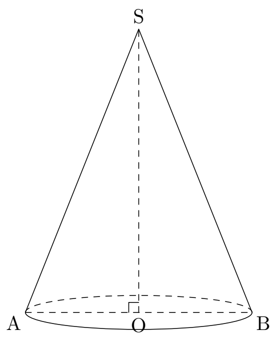
Volume du pavé droit	$L \times l \times h$
Volume du cône	$\dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3}$
Volume du prisme	$B \times h$
Volume de la pyramide	$\dfrac{B \times h}{3}$



On considère la pyramide $ABCD$ de hauteur $[AD]$ telle que $AD = 5\,cm$ et de base ABC telle que $AB = 4,8\,cm$; $BC = 3,6\,cm$; $CA = 6\,cm$. (La figure n'est pas aux dimensions.)

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Calculer le volume de cette pyramide.
3. On désire fabriquer de telles pyramides en plâtre. Combien peut-on en obtenir avec $1\,dm^3$ de plâtre ?

Exercice 9



L'unité de longueur est le centimètre.
Une bougie a la forme d'un cône de révolution de sommet S ; sa base est un cercle de centre O et de diamètre $AB = 10$, on donne $SA = 13$.

1. Montrer que la hauteur de la bougie a pour longueur $12\,cm$.
2. (a) Calculer la valeur exacte du volume de la bougie en cm^3. (On écrira cette valeur sous la forme $k \times \pi$, où k est un nombre entier.)

   (b) Combien peut-on fabriquer de bougies de ce type avec 4 litres de cire ? (Rappel : 1 litre $= 1\,000\,cm^3$.)

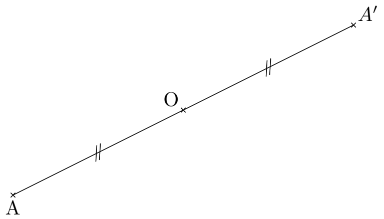
Chapitre 7

Les transformations

7.1 Le cours

7.1.1 Symétrie centrale

Symétrique d'un point



Le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O est tel que O soit le milieu du segment $[AA']$.
NB : la symétrie de centre O correspond à une rotation de centre O et d'angle 180°.

Propriétés

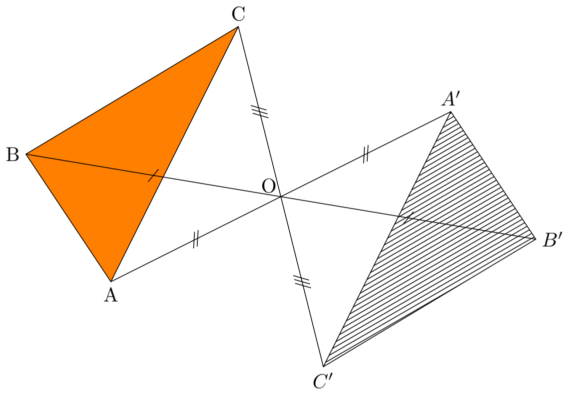
Un point et son image sont alignés avec le centre de symétrie.
Une figure et son image sont superposables.
L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur.

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O :
– on trace la demi-droite $[AO]$;
– on prend la mesure OA et on la reporte sur $[AO)$ à partir de O ;
– on efface les traits de construction ;
– on code les segments égaux.

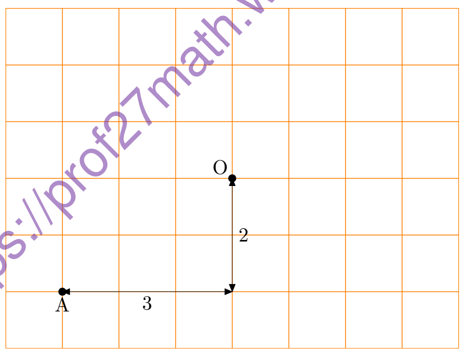
Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie centrale,
– on construit les symétriques de chaque sommet ;
– on relie les images de la même façon que les points de la figure initiale.

Exemple de symétrique d'une figure

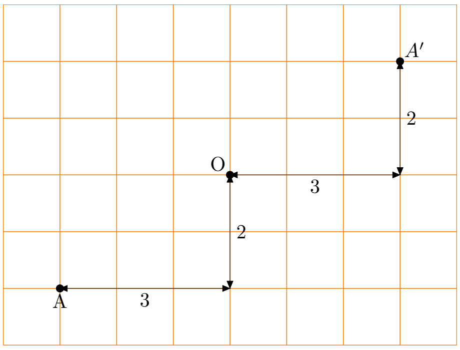


Le dessin ci-contre représente un triangle ABC et son symétrique $A'B'C'$ dans la symétrie de centre O.

Utilisation du quadrillage



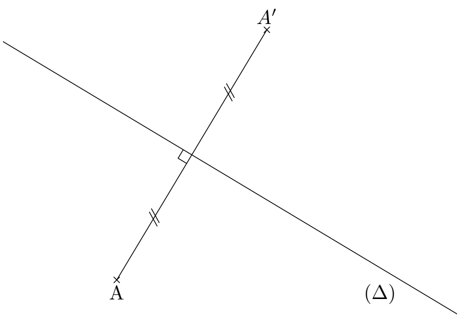
Le dessin ci-contre décrit la façon de chercher le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O.
Pour aller de A à O, on se déplace
– horizontalement de 3 carreaux ;
– verticalement de 2 carreaux ;



On se place en O et on effectue le déplacement précédent :
– horizontalement de 3 carreaux ;
– verticalement de 2 carreaux ;
La position finale est le point A'.
NB : le comptage des carreaux se fait généralement de tête et rien ne doit être marqué sur le dessin.

7.1.2 Symétrie axiale

Symétrique d'un point



Le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) est tel que (Δ) soit la médiatrice du segment $[AA']$.

Propriétés

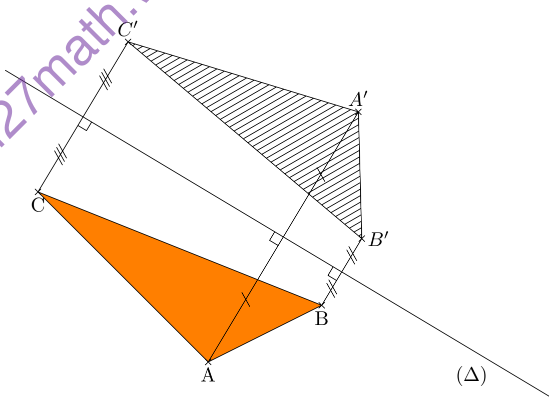
Une figure et son image sont superposables.
L'image d'un segment est un segment de même longueur mais en général non parallèle au segment initial.

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) :
– on trace un arc de cercle de centre A qui coupe l'axe en deux points E et F (ne pas les nommer sur la figure) ;
– on trace deux nouveaux arcs de même rayon que l'arc initial de centres E et F ;
– les deux arcs se coupent en A' ;
– on efface les traits de constructions ;
– on code les segments égaux et l'angle droit.

Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie centrale,
– on construit les symétriques de chaque sommet ;
– on relie les images de la même façon que les points de la figure initiale.

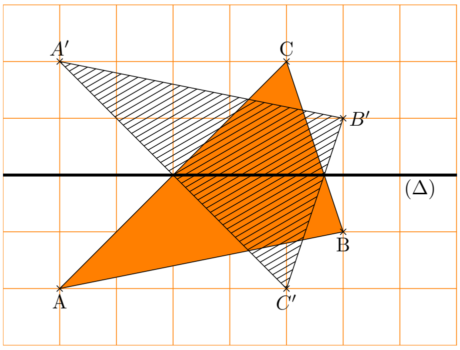
Exemple de symétrique d'une figure



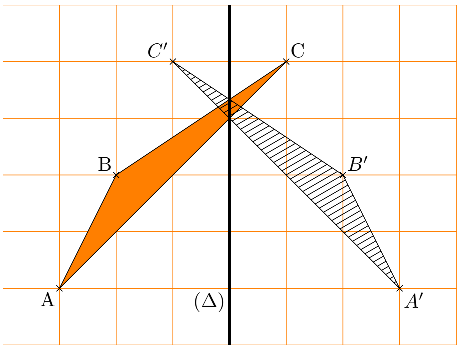
Le dessin ci-contre représente un triangle ABC et son symétrique $A'B'C'$ dans la symétrie d'axe (Δ).

Utilisation du quadrillage

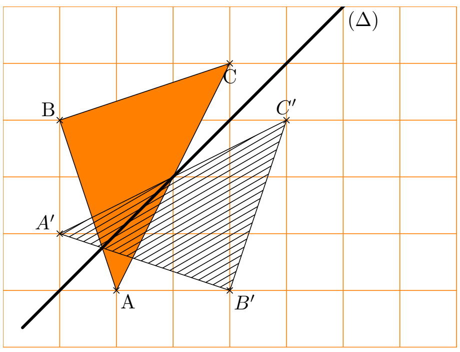
Dans chaque cas suivant, le dessin représente un triangle ABC et son symétrique $A'B'C'$ dans la symétrie d'axe (Δ).



Premier cas : l'axe est horizontal.
Toute perpendiculaire à l'axe sera une verticale.
Ainsi, de A à l'axe, on compte deux carreaux verticalement ; de même de l'axe à A'.



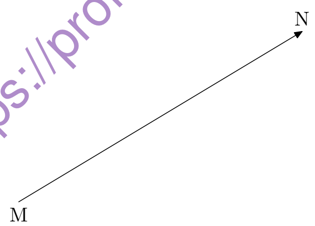
Deuxième cas : l'axe est vertical.
Toute perpendiculaire à l'axe sera une horizontale.
Ainsi, de A à l'axe, on compte trois carreaux horizontalement ; de même de l'axe à A'.



Troisième cas : l'axe est sur une diagonale du quadrillage.
Toute perpendiculaire à l'axe sera sur l'autre diagonale du quadrillage.
Ainsi, de A à l'axe, on compte un demi carreau en diagonale ; de même de l'axe à A'.

7.1.3 Translation

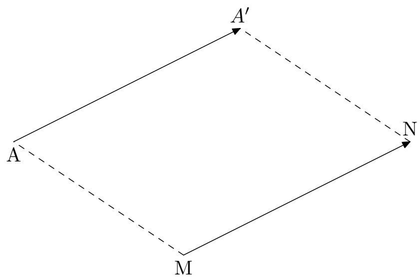
Notion de vecteur



Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sert à préciser le déplacement (ou glissement) de M vers N.
On caractérise ce vecteur $\overrightarrow{MN}$ par :
- son origine : M ;
- son extrêmité : N ;
- sa norme : la longueur MN ;
- sa direction : parallèlement à la droite (MN) ;
- son sens : de M vers N.

Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont :
- même norme ;
- même direction ;
- même sens.

Translaté d'un point



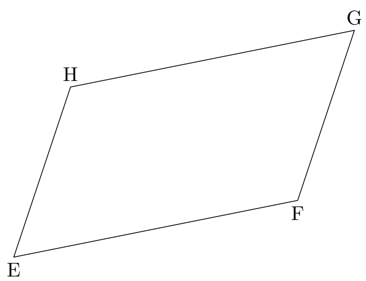
Sans vecteurs Le point A', image du point A dans la translation qui transforme M en N est tel que $MNA'A$ est un parallélogramme.
Avec vecteurs Le point A', image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ est tel que : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$.

Propriétés

Toutes les propriétés sont basées sur celles du parallélogramme.

L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur.

Le translaté d'une figure est une figure superposable.

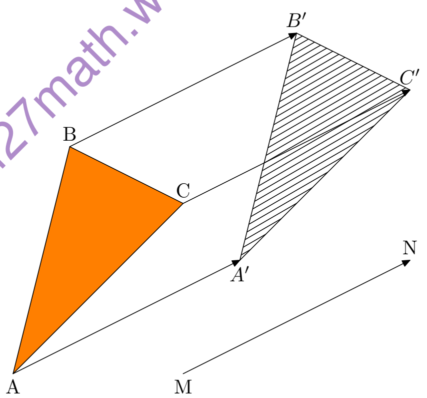


Sur la figure ci-contre, $EFGH$ est un parallélogramme.
Alors, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et G est donc l'image de H dans la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
De même, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ et G est donc l'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$.
Etc ...

Construction

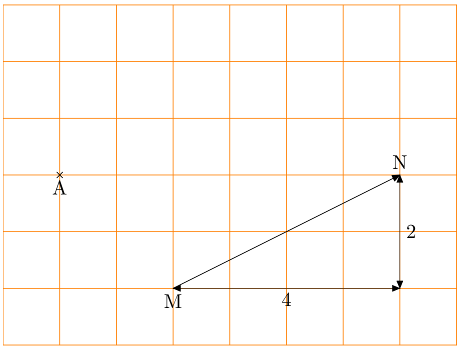
Trois points étant placés, on termine la construction du parallélogramme $MNA'A$ de la façon suivante :
- on reporte la distance MN à partir de A (en effet $MN = AA'$) ;
- on reporte la distance MA à partir de N (en effet $MA = NA'$) ;
- le point d'intersection de ces deux arcs est le point A' ;
- on efface les traits de construction ;
- on trace le vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Translaté d'une figure

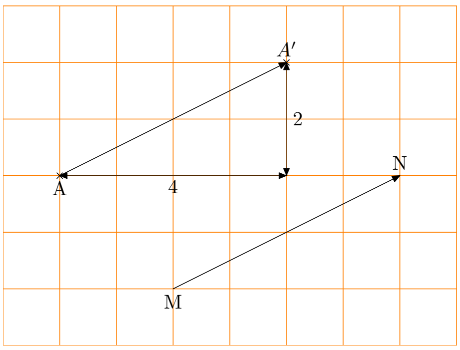


Sur la figure ci-contre, le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Utilisation du quadrillage

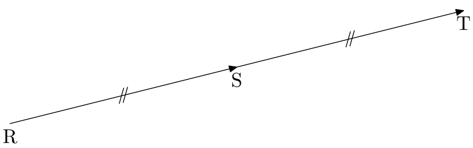


Pour trouver la position du point A', image du point A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$, on commence par décomposer le déplacement de M vers N :
- 4 carreaux horizontalement ;
- 2 carreaux verticalement.



On reproduit le même déplacement en partant de A.
La position obtenue est celle du point A'.
NB : le comptage des carreaux se fait de tête : il est inutile de marquer les détails sur la copie.

Caractérisation du milieu



Sur la figure ci-contre, les points R, S et T sont tels que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{ST}$.
Alors, S est le milieu du segment $[RT]$.

Relation de Chasles

On donne trois points D, M et C, quelconques du plan :

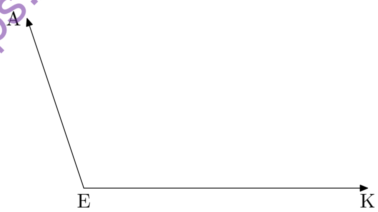
$$\boxed{\overrightarrow{D\mathbf{M}} + \overrightarrow{\mathbf{M}C} = \overrightarrow{DC}}$$

NB : dans la somme $\overrightarrow{D\mathbf{M}} + \overrightarrow{\mathbf{M}C}$, l'extrêmité M du premier vecteur coorespond à l'origine du second.

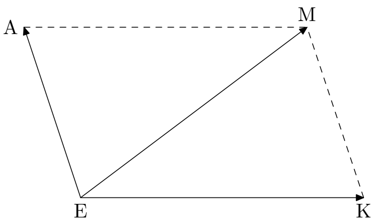
On peut ainsi facilement compléter les égalités suivantes sans devoir observer la position des points sur une figure :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{A\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}C} = \cdots\\
&\overrightarrow{R\mathbf{S}} + \overrightarrow{\mathbf{S}..} = \overrightarrow{RT}\\
&\overrightarrow{K\mathbf{B}} + \overrightarrow{..C} = \overrightarrow{KC}\\
&\overrightarrow{..\mathbf{T}} + \overrightarrow{\mathbf{T}A} = \overrightarrow{EA}
\end{aligned}$$

Somme de deux vecteurs de même origine

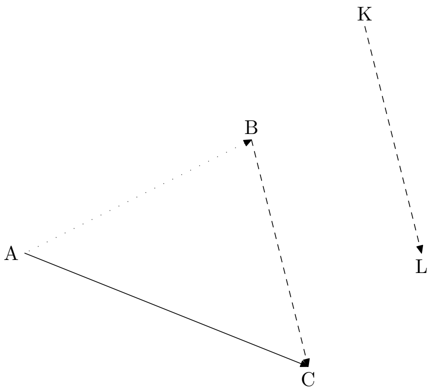


Soit trois points E, A et K du plan.
On cherche à construire le point M tel que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EK}$.
NB : dans cette égalité, les trois vecteurs ont la même origine E.



$[EM]$ est la diagonale du parallélogramme à construire $EAMK$.
Pour chercher la position de M :
- on reporte la distance EA à partir de K (en effet $EA = KM$) ;
- on reporte la distance EK à partir de A (en effet $EK = AM$) ;
- le point d'intersection de ces deux arcs est le point M ;
- on efface les traits de construction ;
- on trace le vecteur $\overrightarrow{EM}$.

Translations successives



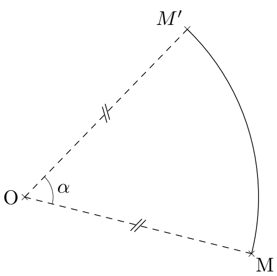
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{KL}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Pour cela, sur la figure ci-contre, on a construit le point C image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{KL}$: d'où $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KL}$.
D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{A\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}C} = \overrightarrow{AC}$.

7.1.4 Rotation

Sens positif de rotation

Le sens positif de rotation est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Image d'un point par une rotation



L'image M' du point M dans la rotation de centre O et d'angle α est tel que :
$OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

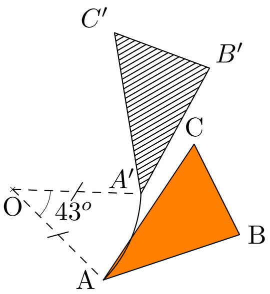
Propriétés

L'image d'un segment est un segment de même longueur.
L'image d'une figure est une figure superposable.

Construction de l'image d'un point

On veut construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens des aiguilles d'une montre.
Pour cela :
- on trace le segment OM ;
- on trace un arc de cercle de centre O partant de M dans le sens de la rotation ;
- on trace la demi-droite $[Ox)$ tel que $\widehat{MOx} = 50°$ en faisant attention au sens de la rotation ;
- M' est l'intersection de l'arc de cerce et de la demi-droite ;
- on code les segments de même longueur et l'angle de 50° ;
- on efface les traits de construction inutiles.

Image d'une figure



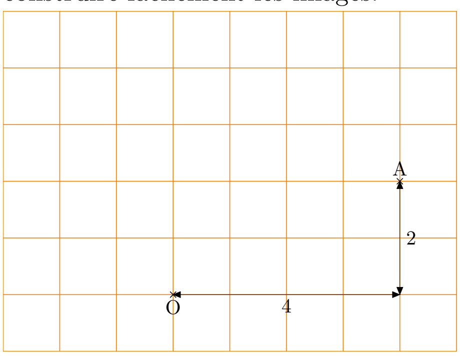
Sur la figure ci-contre, le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC dans la rotation de centre O et d'angle 43°.
Pour ne pas charger la figure, seul le codage concernant le point A' est présent ; Cependant, vous pouvez compléter cette figure et vérifier par exemple que C' est bien l'image du point C dans la rotation choisie.

De plus, on peut illustrer la rotation en utilisant un calque :
- reproduire par transparence sur le calque la figure initiale ABC ainsi que le centre O de la rotation ;
- placer parfaitement le calque à sa position ;
- pointer le compas en O ;
- faire tourner le calque autour du compas (en O) jusqu'à ce que le triangle ABC du calque viennent superposer le triangle $A'B'C'$ de la feuille.

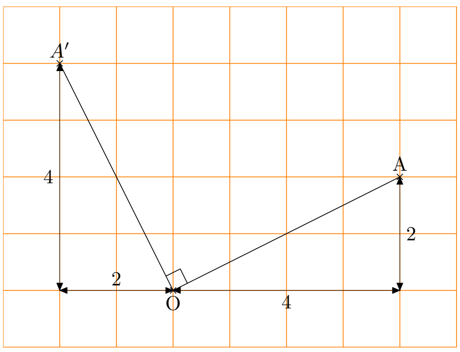
Quart de tour et quadrillage

Lorsque l'angle de rotation est de 180°, on parle d'un demi-tour : dans ce cas très particuliuer, la rotation est une symétrie centrale.

Lorsque l'angle de rotation est de 90°, on parle de quart de tour. On peut dans ce cas utiliser le quadrillage pour construire facilement les images.

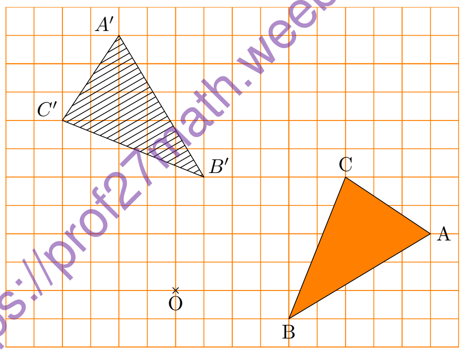


On cherche à construire le point A' image du point A dans le quart de tour de centre O, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Pour cela, on décompose le déplacement de O vers A :
- 4 carreaux horizontalement ;
- 2 carreaux verticalement.



En partant de O, on se déplace de la façon suivante :
- 2 carreaux horizontalement à gauche ;
- 4 carreaux verticalement.

La position obtenue est celle du point A'.



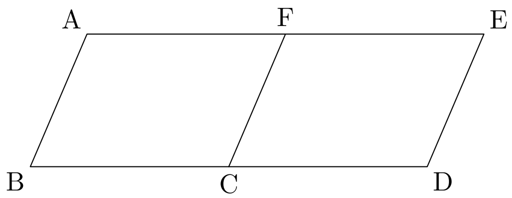
La figure ci-contre montre l'image $A'B'C'$ d'un triangle ABC dans le quart de tout de centre O dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

7.2 Les exercices

7.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1

Enoncé Sur la figure ci-après, $ABCF$ et $FEDC$ sont deux parallélogrammes tels que C et F sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[AE]$.



En utilisant uniquement les points de cette figure, donner :

1. Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CB}$.
2. Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CE}$.
3. Un vecteur n'ayant pas la même direction que le vecteur $\overrightarrow{CB}$.
4. L'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.
5. Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}$.
6. Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

Solution

1. Donnons un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CB}$.

   $ABCF$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FA}$.
   De même $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}$.
2. Donnons un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CE}$.

   En utilisant les diagonales des parallélogramme $ABCF$ et $FEDC$, on a $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}$.
3. Donnons un vecteur n'ayant pas la même direction que le vecteur $\overrightarrow{CB}$.

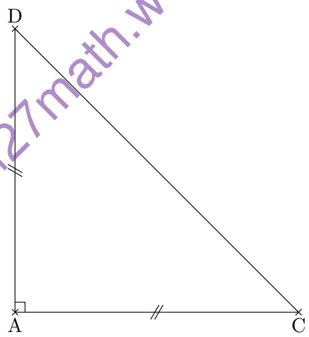
   Les droites (BA) et (CB) n'étant pas parallèles, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$ n'ont pas la même direction.
4. Donnons l'image du point C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.

   D'après la figure, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}$: D est alors l'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.
5. Donnons un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}$.

   D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CE}$.
6. Donnons un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

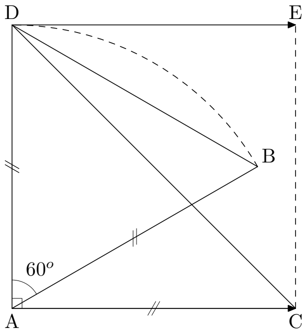
   $ABCF$ étant un parallélogramme, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}$.

Exercice 2



Enoncé On considère un triangle ACD rectangle et isocèle de sommet principal A.
On complétera la figure ci-contre au fur et à mesure.

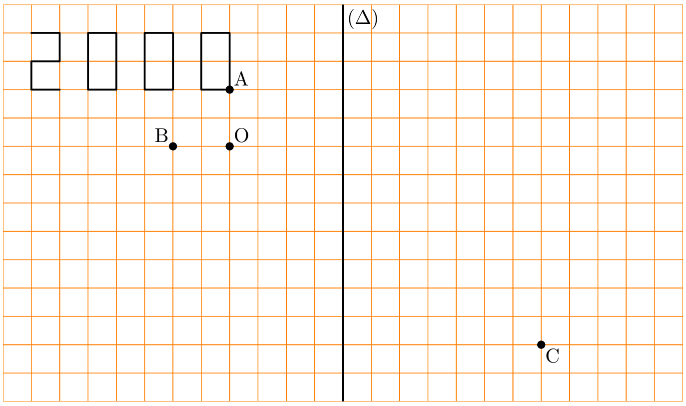
1. Placer le point B image de D dans la rotation de centre A et d'angle $60°$. On prendra le sens des aiguilles d'une montre comme sens de rotation.
2. Démontrer que le triangle ABD est un triangle équilatéral.
3. Placer E, l'image du point D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Démontrer que $ACED$ est un carré.



Solution

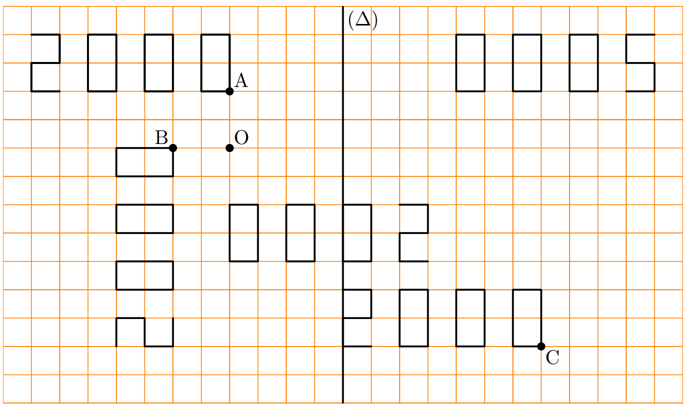
1. Voir figure suivante.
2. Démontrons que le triangle ABD est un triangle équilatéral.
   B est l'image de D dans la rotation de centre A et d'angle $60°$
   d'où $AB = AD$ et $\widehat{BAD} = 60°$.
   Le triangle ABD est alors isocèle avec un angle de $60°$: ABD est équilatéral.
3. Démontrons que $ACED$ est un carré.
   E est l'image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$.
   $ACED$ est alors un parallélogramme ayant de plus deux côtés consécutifs perpendiculaires de même longueur : $ACED$ est un carré.

Exercice 3



Enoncé Construire sur le graphique ci-dessous l'image du nombre 2000 par :

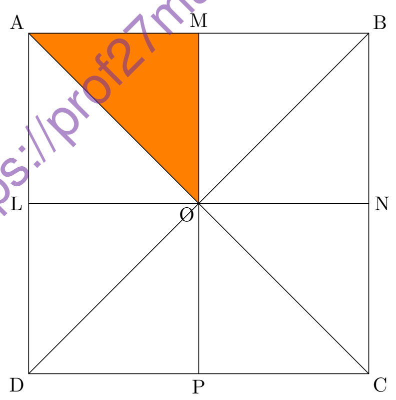
1. la symétrie de centre O ;
2. la symétrie d'axe (Δ) ;
3. la translation qui transforme A en C ;
4. la rotation de centre O qui transforme A en B.



Solution Voir figure ci-contre.

7.2.2 Autres exercices

Exercice 4



Le schéma ci-contre représente un carré $ABCD$ dont les diagonales se coupent en O. Les points M, N, P et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
Répondre aux questions suivantes sans justifier :

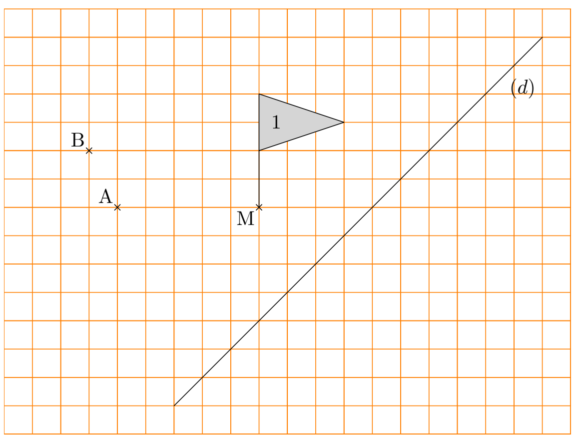
1. Quel est le symétrique du triangle AOM par rapport à la droite (LN) ?
2. Quel est le symétrique du triangle AOM par rapport au point O ?
3. On considère la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Quelle est l'image du triangle AOM par cette rotation ?
4. Recopier et compléter les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} = \ldots$ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OC} = \ldots$

Exercice 5

1. Construire un carré $ABCD$ et le triangle équilatéral ABE, extérieur à $ABCD$, ayant le côté commun $[AB]$ tel que $AB = 4cm$.
Construire O le centre de gravité de ABE.
2. Construire $A_1B_1C_1D_1$ image de $ABCD$ par la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle 120°, dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Construire $A_2B_2C_2D_2$ image de $A_1B_1C_1D_1$ par la même rotation.
4. Quelle est la rotation qui transforme $ABCD$ en $A_2B_2C_2D_2$?
5. Quelle est l'image de $A_2B_2C_2D_2$ par la rotation $\mathcal{R}$?

Exercice 6

Sur un quadrillage constitué de carrés, on a placé une droite (d), trois points (nommés A,B et M), une figure qui est en forme de fanion et est numérotée 1.



1. (a) Construire l'image de la figure 1 par la symétrie d'axe (d) ; numéroter 2 la figure obtenue.
   (b) Construire l'image de la figure 1 par la rotation de centre M et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ; numéroter 3 la figure obtenue.
   (c) Construire l'image de la figure 1 par la symétrie de centre A ; numéroter 4 la figure obtenue.
   (d) Construire l'image de la figure 4 par la symétrie de centre B ; numéroter 5 la figure obtenue.
2. Par quelle transformation géométrique peut-on passer directement de la figure 1 à la figure 5 ?
Préciser l'élément caractéristique de cette transformation.

Exercice 7

Prévoir de la place autour du tracé du triangle ABC.

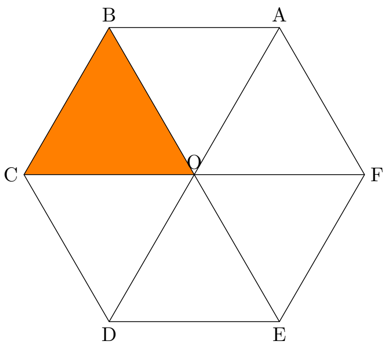
1. Tracer le triangle ABC tel que : $BC = 4$; $AB = 3$; $AC = 2$. *On appelle cette figure* F_1 .
2. Construire l'image de F_1 par la symétrie d'axe (AB). *On l'appelle* F_2.
3. Construire l'image de F_1 par la symétrie de centre B. *On l'appelle* F_3.
4. Construire l'image de F_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. *On l'appelle* F_4.

Exercice 8

Tracer un carré $RIEN$ de côté $5cm$.

1. Construire le point P image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{RE}$.
2. Sans utiliser d'autres points que ceux de la figure, recopier et compléter les égalités suivantes :
$\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{EI} = \ldots$; $\overrightarrow{NR} + \overrightarrow{IP} = \ldots$; $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{RI} = \ldots$.

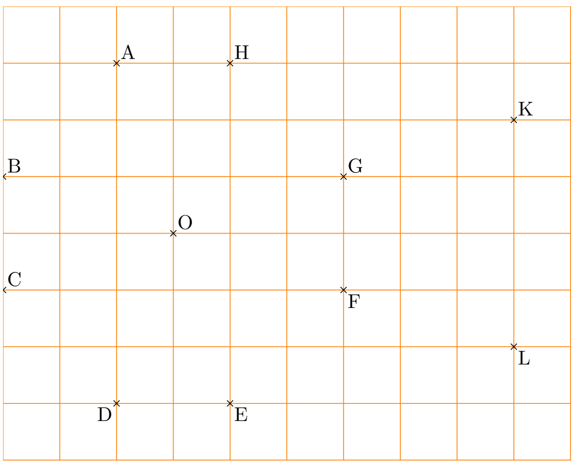
Exercice 9



On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ ci-contre de centre O (*l'hexagone n'est pas à reproduire*).
On demande de déterminer l'image du triangle BCO par :

1. La translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.
2. La symétrie d'axe (BE).
3. La rotation de centre O et d'angle $60°$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

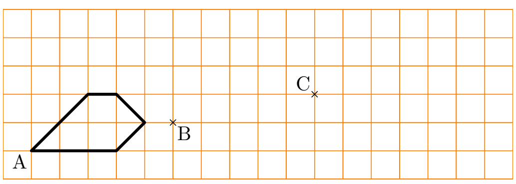
Exercice 10



A l'intersection des lignes d'un quadrillage, on a marqué les points A, B, C, D, E, F, G, H, K, L et O. En observant la figure ci-dessous, recopier et compléter les phrases suivantes :

1. Le symétrique du point B par rapport au point O est ....
2. Le symétrique du point A par rapport à la droite (CG) est ....
3. L'image du point K dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ est ....
4. $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BC} = \cdots$.

Exercice 11



La figure $\mathcal{F}_1$ est tracée ci-dessous.

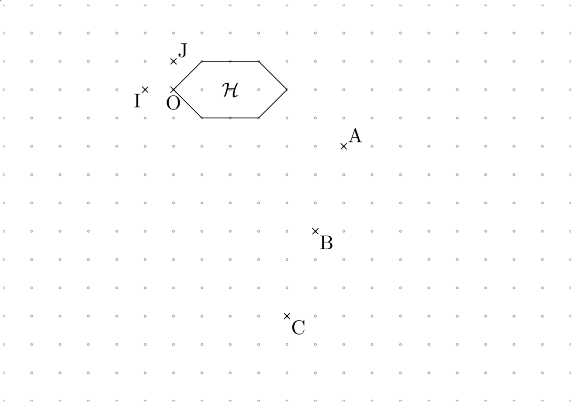
1. Tracer l'image $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}_1$ par la symétrie de centre B ; préciser l'image de A par cette symétrie.
2. Tracer l'image $\mathcal{F}_3$ de $\mathcal{F}_2$ par la symétrie de centre C.
3. Par quelle transformation passe-t-on de $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_3$? En utilisant des points du dessin, préciser cette transformation.

Exercice 12

L'unité est le centimètre.
On donne un triangle ABD tel que $AB = 5$, $AD = 6$ et $BD = 7$.

1. Construire le point E image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.
2. Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.
3. Montrer que D est le milieu de $[EF]$.

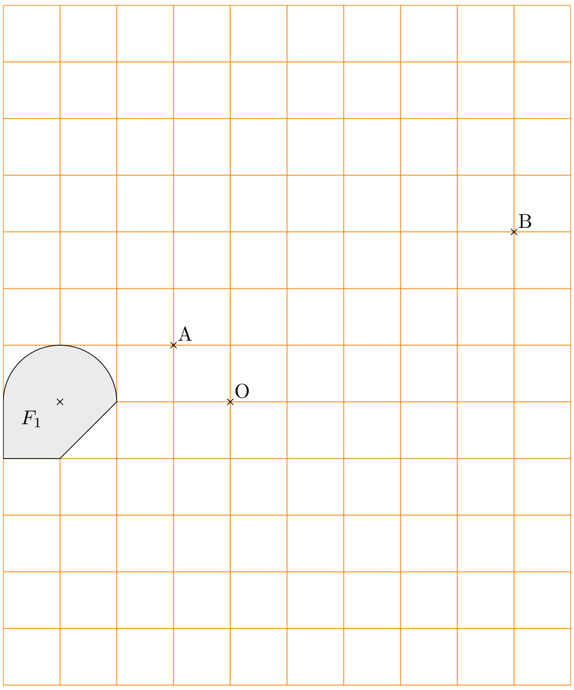
Exercice 13



Sur le dessin ci-contre :

1. Tracer $\mathcal{H}_1$ image de $\mathcal{H}$ par la symétrie de centre A.
2. Tracer $\mathcal{H}_2$ image de $\mathcal{H}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Quelle transformation permet de passer directement de $\mathcal{H}_1$ à $\mathcal{H}_2$?
4. Tracer $\mathcal{H}_3$ image de $\mathcal{H}$ par la rotation de centre O qui transforme I en J.

Exercice 14



Sur la figure ci-après, on considère la figure F_1, en grisé.
Construire :

1. la figure F_2, image de la figure F_1 par la symétrie d'axe (OA) ;
2. la figure F_3, image de la figure F_1 par la symétrie de centre O ;
3. la figure F_4, image de la figure F_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Numéroter chacune des figures construites.

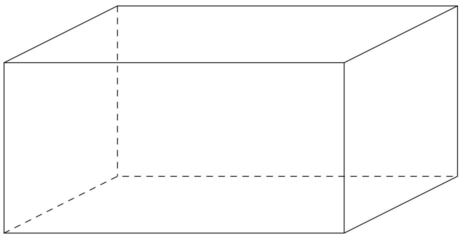
Chapitre 8

Géométrie dans l'espace

8.1 Le cours

8.1.1 Les pavés droits

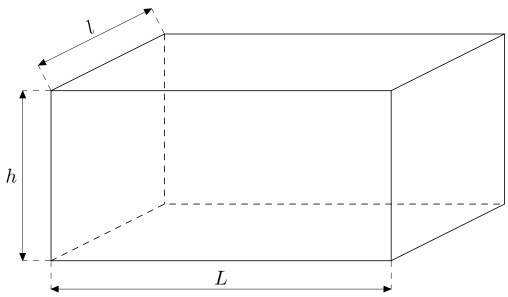
Généralités



Un pavé droit (ou parallélépipède rectangle) est constitué de 6 faces rectangulaires identiques et parallèles deux à deux :
- le haut et le bas ;
- le dessus et le dessous ;
- la droite et la gauche.

Deux arêtes consécutives sont perperdiculaires.
Un cas particulier du pavé droit est le cube : toutes ses faces sont carrés.

Volume

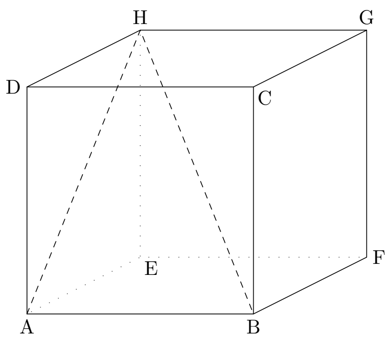


$$\mathcal{V} = L \times l \times h$$

Du pavé droit à la géométrie plane

Deux arêtes consécutives étant perperdiculaires, on extraira du pavé droit des carrés, rectangles ou des triangles rectangles dans lesquels on pourra utiliser l'ensemble de nos connaissances de géométrie plane.
Il est vivement conseillé de dessiner pour chaque question une figure à main levée de la figure extraite.

Application : diagonales du cube

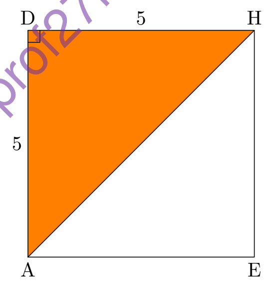


Enoncé $ABCDEFGH$ est un cube de côté $5cm$.

1. Calculer AH. On donnera sa valeur exacte.
2. Calculer HB. On donnera sa valeur exacte.
3. Faire une figure en vraie grandeur du triangle AHB.

Solution

1. Calculons AH.

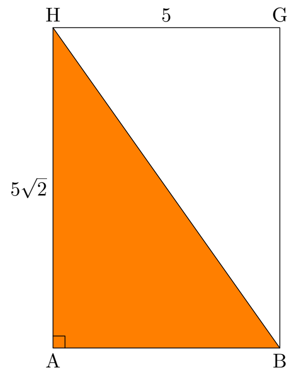


La figure ci-contre représente la face $ADHE$ qui est un carré.

Dans le triangle ADH rectangle en H,
d'après le théorème de Pythagore,
$A\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}H^2 = AH^2$
$5^2 + 5^2 = EG^2$
$25 + 25 = EG^2$
$EG^2 = 50$
$EG = \sqrt{50} = \sqrt{\mathbf{25} \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$
$EG = 5\sqrt{2}$ (valeur exacte)

Dans le cas général d'un cube d'arête a, la diagonale d'une face mesure $a\sqrt{2}$.

2. Calculons HB.



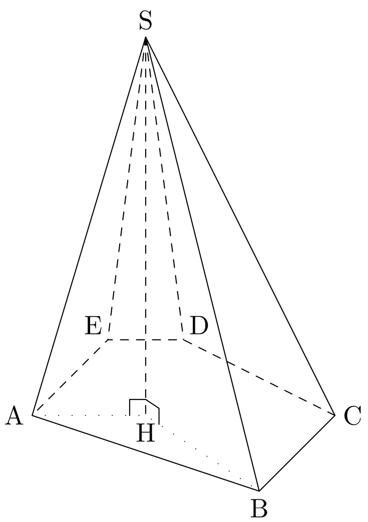
La figure ci-contre représente le rectangle $ABGH$

Dans le triangle ABH rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore,
$B\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}H^2 = BH^2$
$5^2 + (5\sqrt{2})^2 = BH^2$ or $(5\sqrt{2})^2 = 50$ d'après la question précédente.
$25 + 50 = BH^2$
$BH^2 = 75$
$BH = \sqrt{75} = \sqrt{\mathbf{25} \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3}$
$BH = 5\sqrt{3}$ (valeur exacte)

Dans le cas général d'un cube d'arête a, sa grande diagonale mesure $a\sqrt{3}$.

8.1.2 Les Pyramides

Généralités



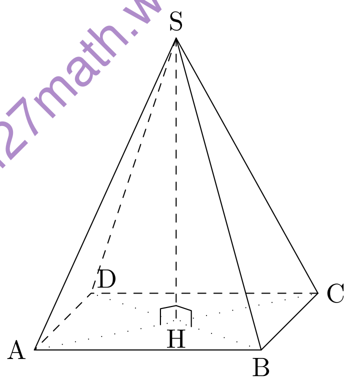
Une pyramide est définie par
- une base polygonale (triangle, quadrilatère, ...)
- un point S appelé sommet de la pyramide situé en dehors du plan de la base.

On appelle "hauteur de la pyramide" la distance SH séparant le sommet de la base.
La figure ci-contre est l'exemple d'une pyramide $SABCDE$ de sommet S dont la base est le pentagone $ABCDE$.

Volume

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

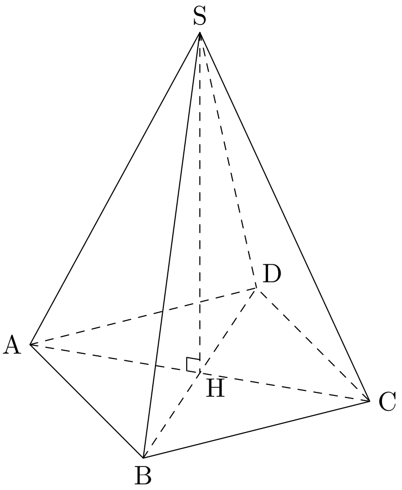
Cas particulier d'une pyramide régulière



Une pyramide est dite régulière si
– sa base est un polygone régulier (triangle équilatéral, carré, ...)
– le pied H de sa hauteur est situé au centre de sa base.
Dans ce cas, toutes les arêtes partant du sommet sont de la même longueur.

La figure ci-contre représente le cas d'une pyramide régulière $SABCD$ de sommet S dont la base est le carré $ABCD$ de centre H.

Première application : pyramide régulière



Enoncé La pyramide régulière à base carrée $SABCD$ ci-contre a une base de $50cm^2$ et une arête $[SA]$ de $13cm$.

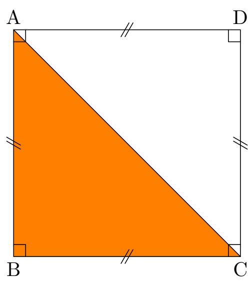
1. Calculer la valeur exacte de AB, puis démontrer que : $AC = 10cm$.
2. Soit H le centre de $ABCD$. On admet que (SH) est perpendiculaire à (AC).
   Démontrer que : $SH = 12cm$, puis calculer le volume de $SABCD$.

Solution

1. Calculons AB puis AC.

Commençons par calculer AB.

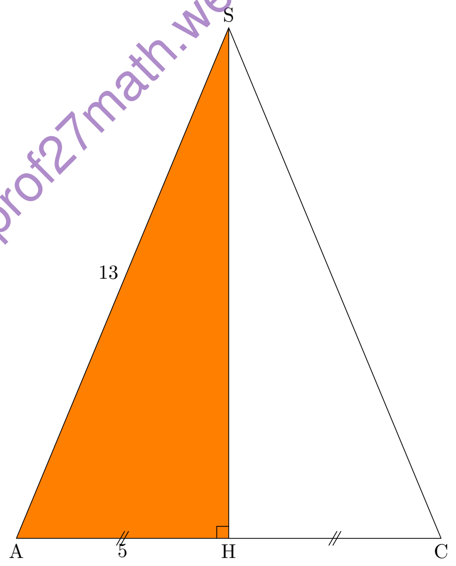
$ABCD$ est un carré de côté AC et d'aire $50cm^2$, d'où
$AC^2 = 50$
$AC = \sqrt{50}$
$AC = \sqrt{\mathbf{25} \times 2}$
$AC = \sqrt{\mathbf{25}} \times \sqrt{2}$
$AC = 5\sqrt{2}$



Calculons AC.

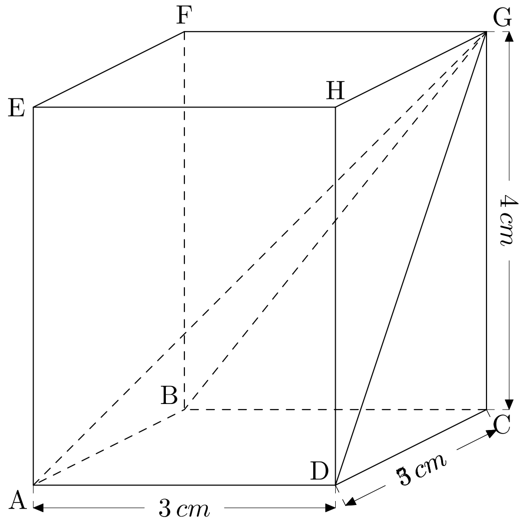
Dans le triangle ABC rectangle en B,
d'après le théorème de Pythagore,
$\mathbf{AB}^2 + \mathbf{BC}^2 = AC^2$
$(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 = AC^2$ or d'après la question précédente $(5\sqrt{2})^2 = 50$.
$50 + 50 = AC^2$
$AC^2 = 100$
$AC = \sqrt{100}$
$AC = 10$

2. Calculons SH



La pyramide étant régulière, les longueurs SA et SC sont égales : le triangle SAC dessiné ci-contre est donc isocèle de sommet principal S.
H est le milieu de $[AC]$ d'où $AH = 5$.
Dans le triangle SAH rectangle en H,
d'après le théorème de Pythagore,
$S\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}A^2 = SA^2$
$SH^2 + 5^2 = 13^2$
$SH^2 + 25 = 169$
$SH^2 = 169 - 25$
$SH^2 = 144$
$SH = \sqrt{144}$
$SH = 12$

Deuxième application : pyramide extraite d'un pavé droit

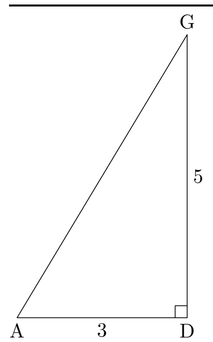


Enoncé $ABCDEFGH$ est un pavé droit.
On donne $AD = DC = 3\,cm$; $GC = 4\,cm$; $GD = 5\,cm$.
Sur le dessin ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.

1. Calculer le volume, exprimé en cm^3, de la pyramide $GABCD$.
2. (a) Dessiner en vraie grandeur le triangle ADG rectangle en D.
   (b) Calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{AGD}$ du triangle ADG.
   (c) Calculer la valeur exacte de la longueur AG, puis en donner la valeur arrondie au millimètre.

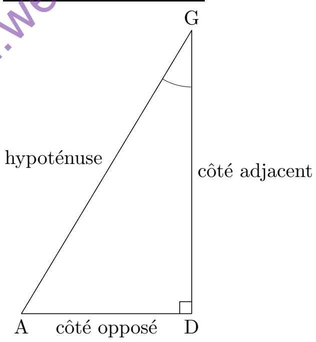
Solution

1. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide $GABCD$.
   Dans cette pyramide , la base est le carré $ABCD$ et la hauteur est le segment $[GC]$, d'où
   $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times GC$ avec $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 3^2 = 9cm^2$ et $GC = 4cm$.
   $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 9 \times 4 = \dfrac{36}{3} = 12$
   Le volume de la pyramide $GABCD$ est $12cm^3$.
2. (a) Dessinons en vraie grandeur le triangle ADG.



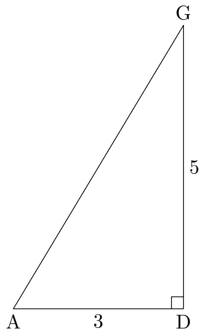
Le triangle ADG est rectangle en D.

(b) Calculons $\widehat{AGD}$.



Dans le triangle ADG est rectangle en D,
$\tan(\widehat{AGD}) = \dfrac{EF}{DF} \left(= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$
$\tan(\widehat{AGD}) = \dfrac{3}{5}$
D'après la calculatrice, $\widehat{AGD} = 31°$.

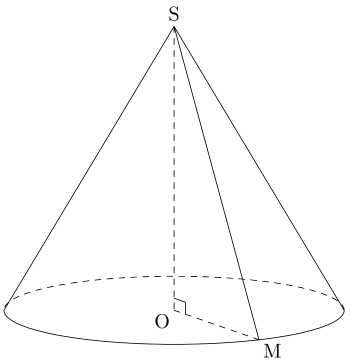
(c) Calculons AG.



Dans le triangle ADG rectangle en D,
d'après le théorème de Pythagore,
$A\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}G^2 = AG^2$
$3^2 + 5^2 = AG^2$
$9 + 25 = AG^2$
$AG^2 = 34$
$AG = \sqrt{34}$ (valeur exacte)
D'après la calculatrice, $AG = 5,8cm$

8.1.3 Les cônes de révolution

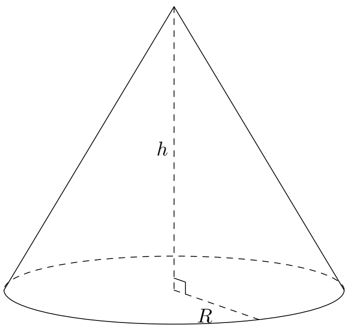
Généralités



Un cône de révolution est définie par
– un disque de base ;
– un sommet S situé sur la perpendiculaire au plan de base passant par le centre O de cette base.

Ainsi, sur le dessin ci-contre, le triangle SMO est rectangle en O, quel que soit le point M sur le cercle de base.

Volume



Un cône de révolution de hauteur h dont la base a pour rayon R a pour volume $\mathcal{V}$:

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$ avec Aire de la base $= \pi \times R \times R$.

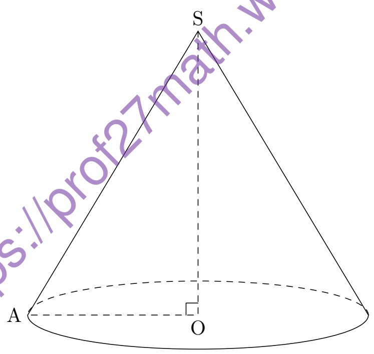
$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times R \times R \times h$

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

Du cône de révolution à la géométrie plane

La majorité des questions de géométrie plane consisteront à travailler dans un triangle rectangle dont les sommets sont :
– le sommet de la pyramide ;
– le centre de la base ;
– un point du cercle de base.
Il sera encore une fois très important de desiner un schéma à main levée du triangle en question.

Application



Enoncé La figure ci-contre représente un cône de hauteur $SO = 20\,cm$ et de base le cercle de rayon $OA = 15\,cm$.

1. Calculer, en cm^3, le volume de ce cône ; on donnera la valeur exacte sous la forme $k \times \pi$ (k étant un nombre entier).
2. Montrer que $SA = 25\,cm$.
3. L'aire latérale de ce cône est donnée par la formule $\pi \times R \times SA$ (R désignant le rayon de la base). Calculer, en cm^2, cette aire ; on donnera la valeur exacte sous la forme $n\pi$ (n étant un nombre entier), puis une valeur arrondie à 10^{-1} près.

Solution

1. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de ce cône.

   Ce cône a pour hauteur $SO = 20cm$ et pour rayon de base $OA = 15cm$.

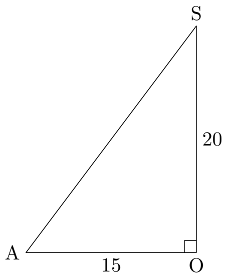
   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times R \times R \times h$

   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times SO \times SO \times OA$

   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 20 \times 20 \times 15$

   $\mathcal{V} = 2000\pi$ (valeur exacte)

2. Calculons SA.



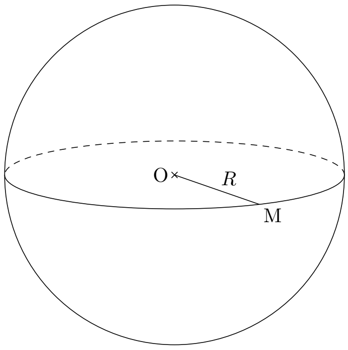
   Dans le triangle SOA rectangle en O,
   d'après le théorème de Pythagore,
   $S\mathbf{O}^2 + \mathbf{O}A^2 = SA^2$
   $20^2 + 15^2 = SA^2$
   $400 + 225 = SA^2$
   $SA^2 = 625$
   $SA = \sqrt{625}$
   D'après la calculatrice, $SA = 25cm$.

3. Calculons l'aire latérale $\mathcal{A}$ de ce cône.

   On a la formule :
   $\mathcal{A} = \pi \times R \times SA$ avec $R = OA$.
   $\mathcal{A} = \pi \times 15 \times 25$
   $\mathcal{A} = 375\pi$ (valeur exacte)
   D'après la calculatrice, $\mathcal{A} = 1178,1cm^2$.

8.1.4 La sphère et la boule

Généralités

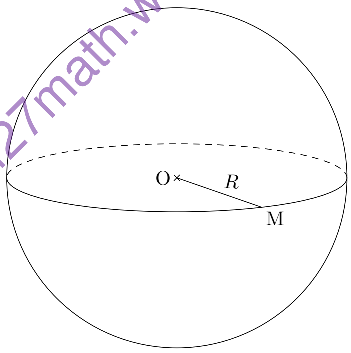


Une sphère est définie par son centre O et son rayon R.
La sphère est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = R$.

Une boule est définie par son centre O et son rayon R.
La boule est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant R$.

La boule est pleine alors que la sphère est creuse.

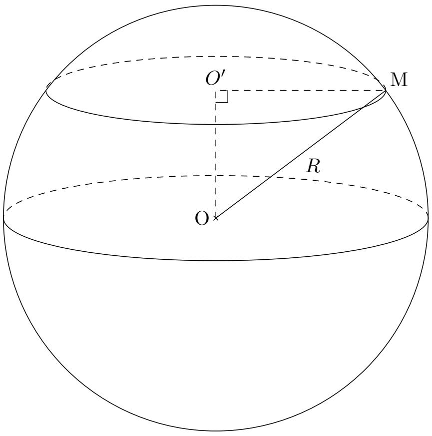
Volume



Le volume $\mathcal{V}$ d'une boule de rayon R est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

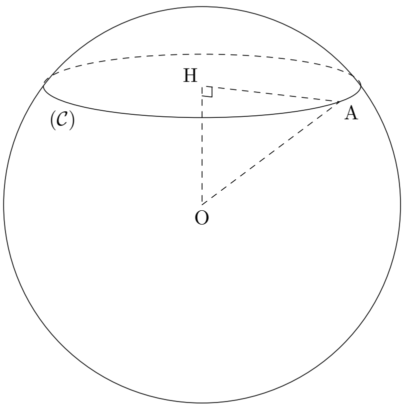
Section par un plan



La section d'une sphère par un plan est un cercle.

On sera amené à utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle $OO'M$ rectangle en O'.

Application



Enoncé Un plan coupe une sphère de centre O et de rayon $10cm$ selon un cercle $(\mathcal{C})$ de centre H.
La distance OH du centre de la sphère à ce plan P vaut $6cm$.
La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. Cette figure représente la sphère et le cercle $(\mathcal{C})$.

1. Calculer le volume intérieur de cette sphère. On donnera sa valeur exacte puis sa valeur arrondie au cm^3 près.
2. En utilisant uniquement les données de l'énoncé, tracer en vraie grandeur le triangle OHA, rectangle en H.
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Calculer le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

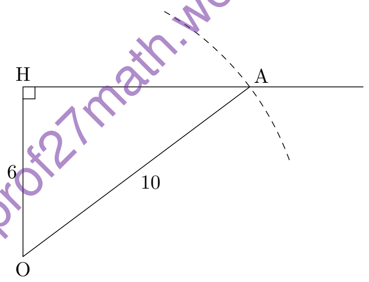
Solution

1. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de cette boule.
   $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$

   $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi 10^3$

   $\mathcal{V} = \frac{4000\pi}{3}$ (valeur exacte)
   D'après la calculatrice, $\mathcal{V} = 4189cm^3$.

2. Voir figure suivante.



On construit dans l'ordre :
– le segment $[OH]$;
– l'angle droit par la demi-droite d'extrêmité H ;
– l'arc de cercle de centre O et de rayon $10cm$.

3. Calculons HA.
Dans le triangle OHA rectangle en H,
d'après le théorème de Pythagore,
$O\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}A^2 = OA^2$
$6^2 + HA^2 = 10^2$
$36 + HA^2 = 100$
$HA^2 = 100 - 36$
$HA^2 = 64$
$HA = \sqrt{64}$
$HA = 8cm$

8.1.5 Agrandissement et réduction

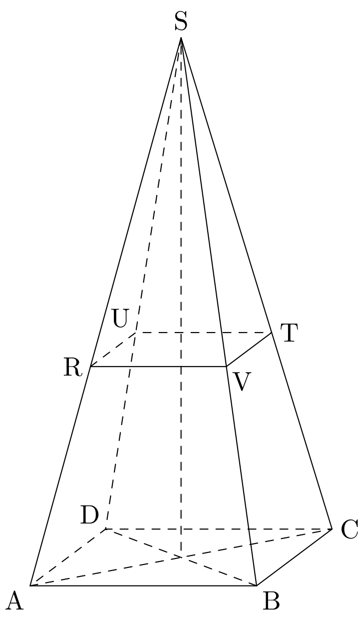
Principe

Lors d'un agrandissement, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre k supérieur à 1 appelé coefficient d'agrandissement.

Lors d'une réduction, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre k inférieur à 1 appelé coefficient de réduction.

Dans les deux cas,
– les longueurs sont multipliées par k ;
– les aires sont multipliées par k^2 ;
– les volumes sont multipliés par k^3.

Première application : pyramide régulière



Enoncé $SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée telle que $AB = 4,5\,cm$ et de hauteur $SH = 4,8\,cm$.
(Les dimensions ne sont pas respectées sur la figure.)

1. (a) Calculer l'aire du carré $ABCD$.
   (b) Prouver que le volume de la pyramide $SABCD$ est de $32,4\,cm^3$.
2. Le quadrilatère $RVTU$ est la section de cette pyramide par un plan parallèle à la base.
   (a) Quelle est la nature de cette section ? Justifier la réponse.
   (b) On rappelle que la pyramide $SRVTU$ est une réduction de la pyramide $SABCD$; on sait de plus que $SV = \dfrac{2}{3}SB$.
   Calculer le volume de $SRVTU$.
   (c) Représenter la section $RVTU$ en vraie grandeur.

Solution

1. (a) Calculons l'aire du carré $ABCD$.
   $ABCD$ est un carré de côté $AB = 4,5cm$, d'où
   $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 4,5^2 = 20,25cm^2$
   (b) Calculons le volume de la pyramide $SABCD$.
   $\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times$ hauteur

   $\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 20,25 \times 4,8$

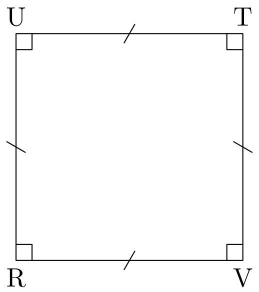
   $\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 20,25 \times 4,8$

   $\mathcal{V}_{SABCD} = 32,4cm^3$

2. (a) Déterminons la nature de la section.
   $SRVTU$ étant une réduction de la pyramide $SABCD$, la base $RVTU$ est une réduction de la base $ABCD$: $RVTU$ est un carré.
   (b) Calculons le volume de la pyramide $SRVTU$.
   On sait que $SV = \frac{2}{3}SB$: on en déduit que le coefficient de la réduction est $\frac{2}{3}$.
   D'où le volume de la pyramide $SRVTU$:
   $\mathcal{V}_{SRVTU} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \mathcal{V}_{SABCD}$

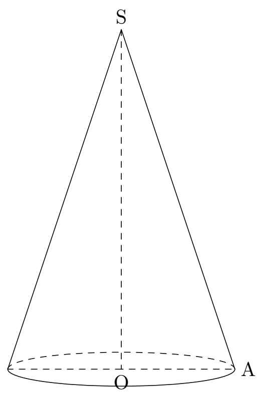
   $\mathcal{V}_{SRVTU} = \frac{8}{27} \times 32,4$

   D'après la calculatrice, $\mathcal{V}_{SRVTU} = 9,6cm^3$.
   (c) Dessinons le carré $RVTU$.



$RVTU$ est une réduction du carré $ABCD$.
Le coefficient de réduction étant $\frac{2}{3}$, on a $RV = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \times 4,5 = 3cm$.

Deuxième application : cône de révolution



Enoncé Le cône de révolution ci-contre de sommet S a une hauteur SO de $9\,cm$ et un rayon de base OA de $5\,cm$.

1. Calculer le volume $\mathcal{V}_1$ de ce cône au cm^3 près.
2. Soit M le point du segment $[SO]$ tel que $SM = 3\,cm$.
   On coupe le cône par un plan parallèle à la base passant par M.
   Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ du petit cône de sommet S ainsi obtenu au cm^3 près.

Solution

1. Calculons le volume $\mathcal{V}_1$ de ce cône.
   Ce cône a pour hauteur $SO = 9cm$ et pour rayon de base $OA = 5cm$.

   $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times R \times R \times h$

   $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times SO \times SO \times OA$

   $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 9 \times 5$

   $\mathcal{V}_1 = 135\pi$ (valeur exacte]
   D'après la calculatrice, $\mathcal{V}_1 = 424cm^3$.

2. Calculons le volume $\mathcal{V}_2$ du petit cône.

   Le petit cône est une réduction du grand cône de coefficient $\frac{SM}{SO} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, d'où

   $\mathcal{V}_2 = \left(\frac{SM}{SO}\right)^3 \times \mathcal{V}_1$

   $\mathcal{V}_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \mathcal{V}_1$

   $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{27} \times 135\pi$

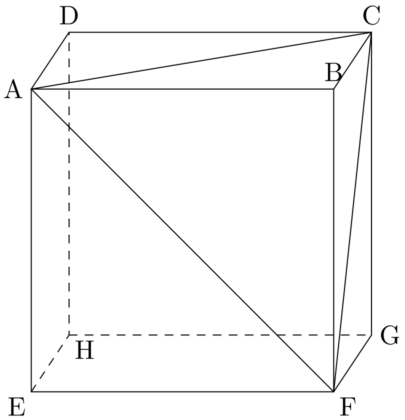
   $\mathcal{V}_2 = 5\pi$ (valeur exacte)

   D'après la calculatrice, $\mathcal{V}_2 = 16cm^3$.

8.2 Les exercices

8.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1



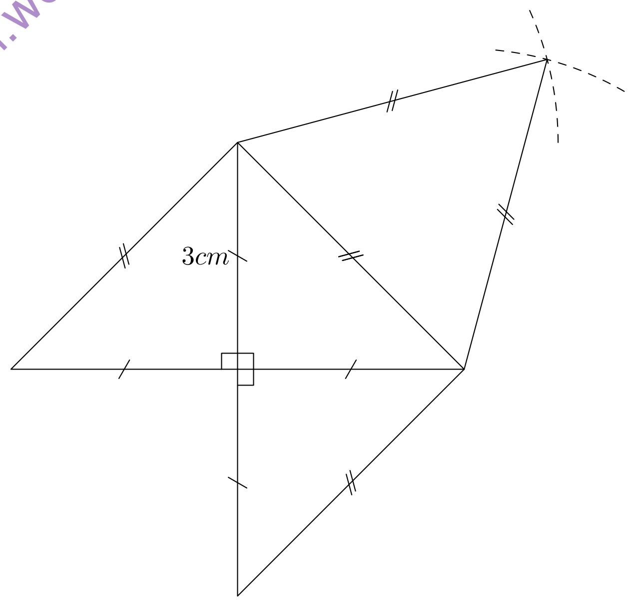
Enoncé On considère la figure ci-contre où $ABCDEFGH$ est un cube de côté $3\,cm$.

1. Montrer que le triangle ACF est équilatéral.
2. On considère alors la pyramide $CABF$, de base le triangle ABF et de hauteur CB.
   (a) Calculer le volume de cette pyramide.
   (b) Dessiner un patron de cette pyramide ; on laissera les traits de construction.

Solution

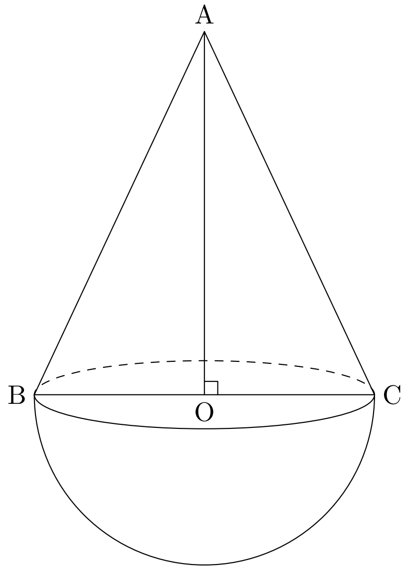
1. Montrons que le triangle ACF est équilatéral.
   Les trois côtés du triangle ACF sont trois diagonales des faces carrées du cube $ABCDEFGH$.
   On a alors $AC = CF = FA$. Le triangle ACF est bien équilatéral.
2. (a) Calculons le volume de cette pyramide.
   Dans la pyramide $CABF$, la base est le triangle ABF rectangle en B et la hauteur est le segment $[CB]$, d'où
   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABF} \times CB$ avec $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AB \times BF}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$ et $CB = 3cm$.
   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{9}{2} = 4,5cm^3$

(b) Dessinons un patron de cette pyramide.



La patron est constitué de
- trois triangles rectangles identiques ;
- un triangle équilatéral.

Exercice 2

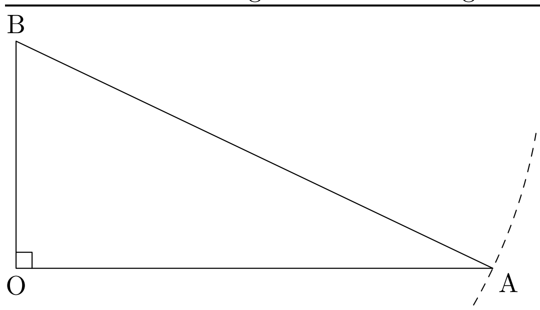


Enoncé *L'unité est le centimètre.*
Un jouet à la forme d'une demi-boule surmontée d'un cône de révolution de sommet A, comme l'indique la figure ci-contre.
Le segment $[BC]$ est un diamètre de la base du cône ; le point O est le centre de cette base.
On donne : $AB = 7$ et $BC = 6$.

1. (a) Construire en vraie grandeur le triangle rectangle AOB.
   (b) Calculer la valeur exacte de AO.
   (c) Calculer la valeur exacte du sinus de l'angle $\widehat{BAO}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAO}$ (on donnera le résultat arrondi au degré près).
2. Calculer le volume de ce jouet, cône et demi-boule réunis (on donnera le résultat arrondi au cm^3 près).

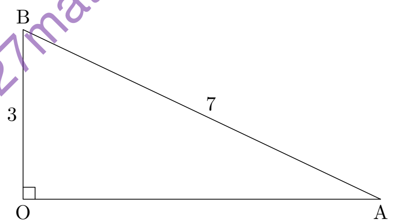
Solution

1. (a) Construisons le triangle AOB en vraie grandeur.



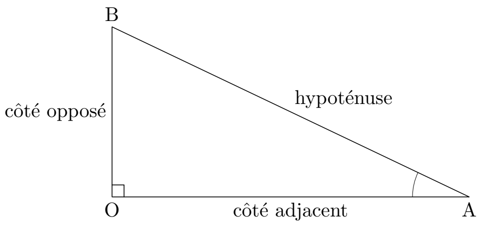
O étant le centre de la base,
$OB = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$.
On commence par tracer le segment $[OB]$ puis l'angle droit à l'aide d'une demi-droite d'extrêmité O. Enfin, on termine en traçant l'arc de cercle de centre B et de longueur $7cm$.

(b) Calculons la valeur exacte de AO.



Dans le triangle AOB rectangle en O,
d'après le théorème de Pythagore,
$A\mathbf{O}^2 + \mathbf{O}B^2 = AB^2$
$AO^2 + 3^2 = 7^2$
$AO^2 + 9 = 49$
$AO^2 = 49 - 9$
$AO^2 = 40$
$AO = \sqrt{40}$
ou encore $AO = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

(c) Calculons $\sin(\widehat{BAO})$ puis $\widehat{BAO}$.



Dans le triangle AOB rectangle en O,
$\sin(\widehat{BAO}) = \dfrac{OB}{AB} \left(= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$
$\sin(\widehat{BAO}) = \dfrac{3}{7}$
D'après la calculatrice, $\widehat{BAO} = 25°$.

2. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de ce jouet.

Commençons par calculer le volume $\mathcal{V}_1$ du cône.

Ce cône a pour hauteur $AO = 7cm$ et pour rayon de base $OB = 3cm$.

$\mathcal{V}_1 = \dfrac{1}{3} \times \pi \times R \times R \times h$

$\mathcal{V}_1 = \dfrac{1}{3} \times \pi \times AO \times AO \times OB$

$\mathcal{V}_1 = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 3 \times 3 \times 7$

$\mathcal{V}_1 = 21\pi$ (valeur exacte]

Calculons maintenant le volume $\mathcal{V}_2$ de la demi-boule de rayon $R = 3cm$.

$\mathcal{V}_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3}\pi R^3$

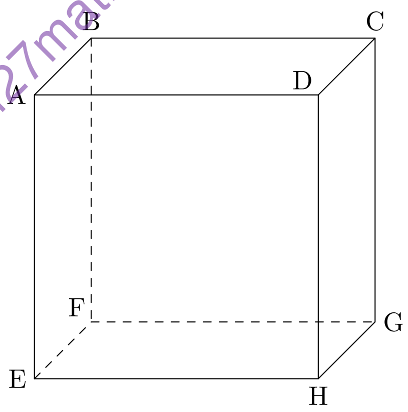
$\mathcal{V}_2 = \dfrac{2}{3}\pi 3^3$

$\mathcal{V}_2 = 18\pi$ (valeur exacte)

D'où le volume $\mathcal{V}$ de ce jouet :
$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$
$\mathcal{V} = 21\pi + 18\pi$
$\mathcal{V} = 39\pi$ (valeur exacte)
D'après la calculatrice, $\mathcal{V} = 123cm^3$.

8.2.2 Autres exercices

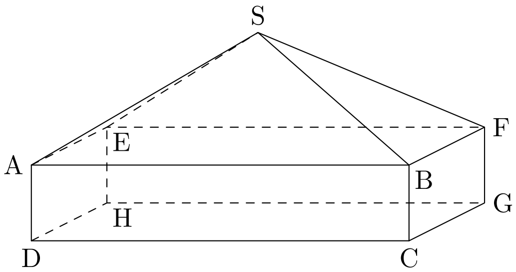
Exercice 3



Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête $5cm$.

1. Dessiner en vraie grandeur le triangle AHG.
2. Calculer les valeurs exactes de AH et AG, puis une valeur arrondie à 0,1 degré près de la mesure de l'angle $\widehat{HAG}$.

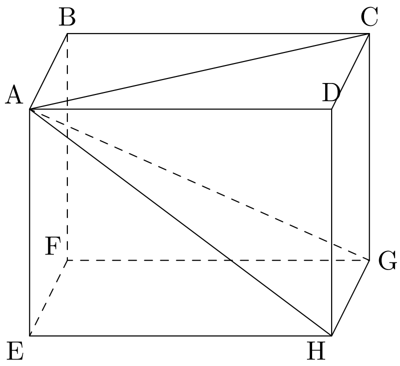
Exercice 4



La maquette de maison représentée ci-contre est composée :
- d'un pavé droit de dimensions :
  $AB = 30cm$, $AE = 20cm$ et $AD = 5cm$;
- surmonté d'une pyramide de hauteur $6cm$.

1. Calculer le volume V_1 de cette maquette.
2. Sachant que cette maquette est une réduction de coefficient 1/50 de la maison réelle, déduire de la première question le volume V_2 en m^3 de la maison.

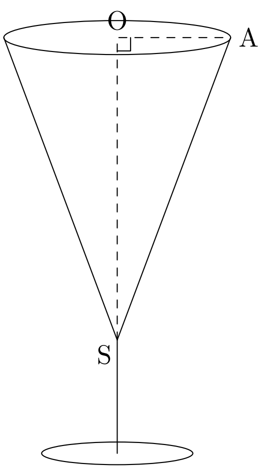
Exercice 5



La figure représente un parallélépipède rectangle. (On ne demande pas de la reproduire.)
On donne $AB = 3\,cm$; $BC = 7\,cm$; $AE = 5\,cm$.

1. En utilisant le triangle rectangle ACD, calculer la longueur exacte de $[AC]$.
2. En utilisant le triangle rectangle ACG, calculer la longueur exacte de $[AG]$.
3. On s'intéresse à la pyramide de base $DCGH$, de sommet A, de hauteur AD. Quel est son volume ?

Exercice 6



On considère le verre ci-contre, ayant la forme d'un cône de révolution, de hauteur $OS = 12\,cm$ et de rayon $OA = 3\,cm$.

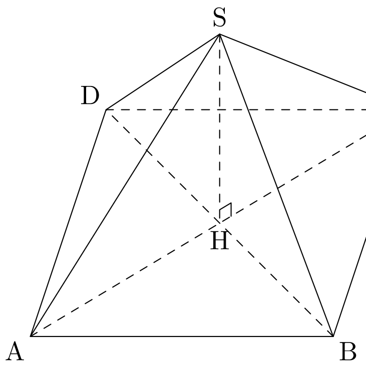
1. Montrer que le volume de ce verre (en cm^3) est égal à 36π.
2. Avec un litre d'eau, combien de fois peut-on remplir ce verre entièrement ?
3. Si on remplit ce verre d'eau aux $\frac{5}{6}$ de sa hauteur, quel est alors le volume d'eau utilisée ? On donnera le résultat arrondi au cm^3 près.
4. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OSA}$ (donner la valeur arrondie au degré près).

Exercice 7

On se donne une pyramide $\mathcal{P}_1$ ayant une base carrée de $8\,cm$ de côté et une hauteur de $12\,cm$. Une pyramide $\mathcal{P}_2$ est un agrandissement de $\mathcal{P}_1$ dont un côté de la base mesure $20\,cm$.

1. Calculer le coefficient de l'agrandissement.
2. (a) Calculer le volume de la pyramide $\mathcal{P}_1$.
   (b) Calculer le volume de la pyramide $\mathcal{P}_2$.

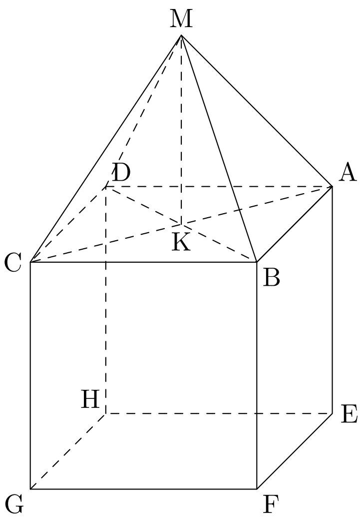
Exercice 8



$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée de $24\,m$ de côté. La hauteur $[SH]$ mesure $12\,m$.

1. Calculer, en m^3, le volume $\mathcal{V}_1$ de cette pyramide.
2. A l'intérieur de la pyramide, on construit une salle en forme de demi-boule de centre H et de rayon $8\,m$. Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ de la demi-boule en m^3. Donner le résultat arrondi à $1\,m^3$ près.
3. On réalise une maquette à l'échelle 1/20. $\mathcal{V}_3$ est le volume en m^3 de la pyramide réduite.
   (a) Par quelle fraction doit-on multiplier $\mathcal{V}_1$ pour obtenir $\mathcal{V}_3$?
   (b) En déduire la valeur de $\mathcal{V}_3$.

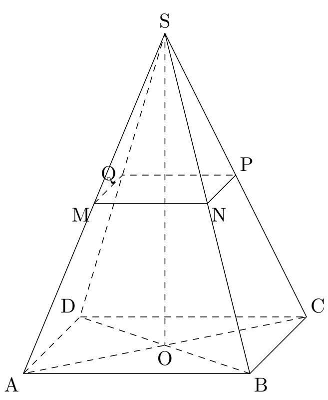
Exercice 9



La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$ sur lequel on a posé une pyramide régulière de base $ABCD$ et de hauteur MK. L'arête du cube mesure $6\,cm$.

1. Dans cette question on pose $MK = x$. Calculer x sachant que le volume du cube et de la pyramide réunis est $270\,cm^3$.
2. Dans cette question on donne $MK = 4,5\,cm$.
   (a) Dessiner en vraie grandeur le carré $ABCD$.
   (b) Utiliser la figure précédente pour construire en vraie grandeur le triangle CMA et justifier votre construction.
   (c) Démontrer que $\tan \widehat{MCA} = \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$. En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{MCA}$.

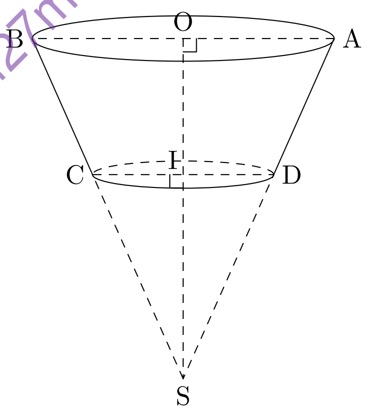
Exercice 10



$SABCD$ est une pyramide régulière de sommet S, de base le carré $ABCD$ de centre O. On donne :
– la hauteur de la pyramide $SQ = 5\,cm$;
– le côté de la base $BC = 4\,cm$.

1. Calculer la valeur exacte du volume de la pyramide en cm^3, puis en donner une valeur approchée en mm^3.
2. M, N, P, Q sont les milieux respectifs des arêtes $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$.
   (a) Démontrer que $MN = 2\,cm$.
   (b) On admet que la pyramide $SMNPQ$ est une réduction de $SABCD$. Quel est le rapport de réduction ? Quel est le volume de SMNPQ ?

Exercice 11



Un panier a la forme d'un tronc de cône dont les bases ont pour diamètres les segments $[AB]$ et $[CD]$, situés dans un même plan.
Le petit cône de sommet S et de disque de base de rayon $[IC]$ est une réduction du grand cône de sommet S et de disque de base de rayon $[OA]$.
Il est inutile de reproduire la figure ci-contre, représentant un tronc de cône.
On donne $AB = 30\,cm$ et $CD = 20\,cm$

1. (a) Démontrer, à partir des indications portées sur la figure, que les droites (AO) et (CI) sont parallèles.
   (b) Démontrer que $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$.
2. (a) Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ du petit cône en fonction du volume $\mathcal{V}_1$ du grand cône.
   (b) Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tronc de cône est $V = \dfrac{19}{27}\mathcal{V}_1$.

Exercice 12

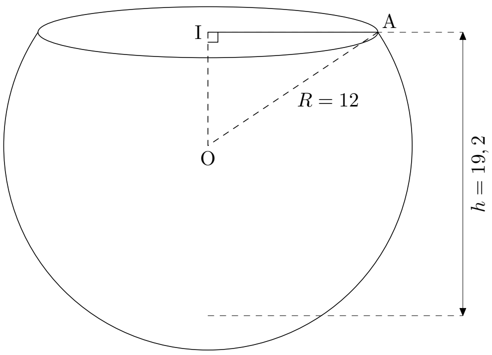
1. On admet qu'un ballon de basket est assimilable à une sphère de rayon $R_1 = 12,1\,cm$. Calculer le volume $\mathcal{V}_1$, en cm^3, de ce ballon ; donner le résultat arrondi au cm^3.

2. On admet qu'une balle de tennis est assimilable à une sphère de rayon R_2, en cm. La balle de tennis est ainsi une réduction du ballon de basket. Le coefficient de réduction est $\dfrac{4}{15}$.

   (a) Calculer R_2 ; donner le résultat arrondi au mm.

   (b) Sans utiliser cette valeur de R_2, calculer le volume $\mathcal{V}_2$, en cm^3, d'une balle de tennis ; donner le résultat arrondi à l'unité.

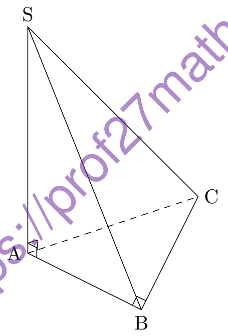
Exercice 13



Un aquarium a la forme d'une calotte sphérique de centre O (voir schéma) qui a pour rayon $R = 12\,cm$ et pour hauteur $h = 19,2\,cm$.

1. Calcule la longueur OI puis la longueur IA.
2. Le volume d'une calotte sphérique est donnée par la formule $V = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ où R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte sphérique.
   Calcule une valeur approchée du volume de cet aquarium au cm^3 près.
3. On verse six litres d'eau dans l'aquarium. Au moment de changer l'eau de l'aquarium, on transvase dans un récipient parallélépipédique de $26\,cm$ de longueur et de $24\,cm$ de largeur.
   Détermine la hauteur x d'eau dans ce récipient. (On arrondira le résultat en mm)

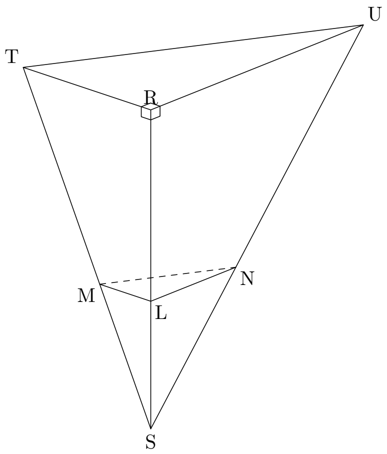
Exercice 14



Le dessin ci-contre représente une pyramide $SABC$ de hauteur $SA = 5cm$ et dont la base est le triangle ABC rectangle en B.
$AB = 4cm$ et $BC = 3cm$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC, puis le volume de la pyramide $SABC$.
2. Dessiner un patron de cette pyramide.

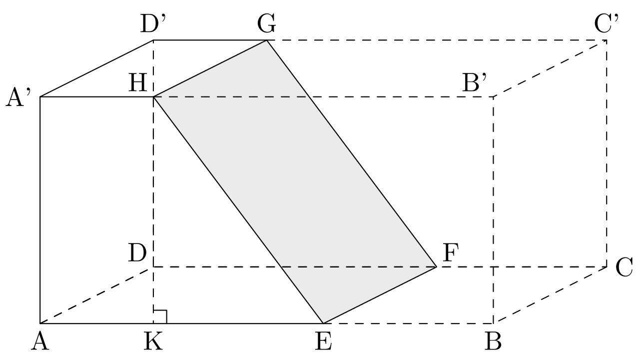
Exercice 15



La figure ci-contre représente une pyramide $STRU$, de sommet S et de base TRU.
SRT, SRU et TRU sont des triangles rectangles en R.
Les triangles RTU et LMN sont dans des plans parallèles.
L'unité de longueur est le centimètre.
On donne :
$SR = 7,5$; $RT = 4$; $RU = 6,2$; $LR = 4,5$.

1. Calculer le volume de la pyramide $STRU$.
2. (a) Dessiner en vraie grandeur le triangle SRT. Placer sur ce dessin les points L et M, en utilisant le fait que les droites (LM) et (RT) sont parallèles.
   (b) Calculer ML.

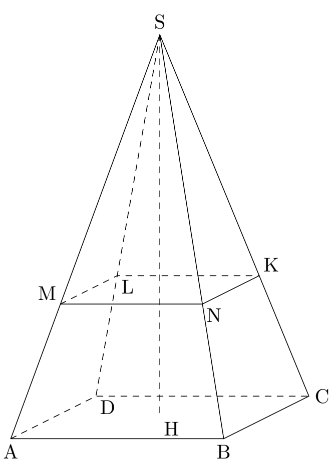
Exercice 16



Le parallélépipde rectangle de la figure ci-contre a été coupé par un plan parallèle à l'arête $[BC]$.
On donne : $EF = 25cm$, $HK = 20cm$
et $KE = 15cm$.

1. Quelle est la nature de la section plane $EFGH$?
2. Calculer HE.
3. Que peut-on déduire des questions précédentes pour le quadrilatère $EFGH$? Justifier la réponse.

Exercice 17



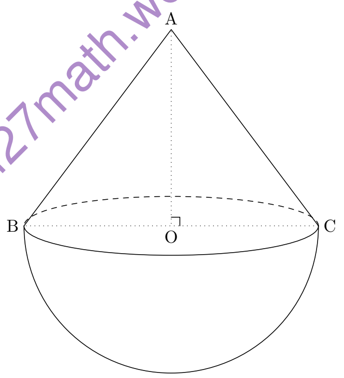
$SABCD$ est une pyramide. Sa hauteur $[SH]$ mesure $9cm$ et l'aire de sa base est $20,25cm^2$.

1. Calculer le volume de cette pyramide.
2. En réalisant une section plane parallèle à la base de la pyramide, on obtient une pyramide $SMNKL$.

   De plus, on sait que $SM = \dfrac{2}{3}SA$.

   Calculer le volume de la pyramide $SMNKL$.

Exercice 18



Le culbuto est un jouet formé d'une demi-sphère surmontée d'un cône (comme l'indique la figure ci-contre).
On donne $AB = AC = 10cm$ et $AO = 8cm$.

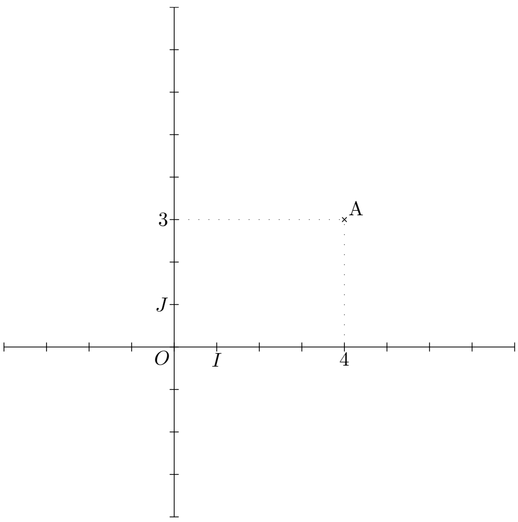
1. Calculer le rayon le rayon de la sphère.
2. (a) Calculer le volume en cm^3 de la demi-sphère.
   On en donnera la valeur arrondie au dixième près.
   (b) Calculer le volume en cm^3 du cône.
   On en donnera la valeur arrondie au dixième près.
   (c) Donner une valeur approchée du volume du culbuto.

Chapitre 9

Géométrie analytique

9.1 Le cours

9.1.1 Utilisation d'un repère

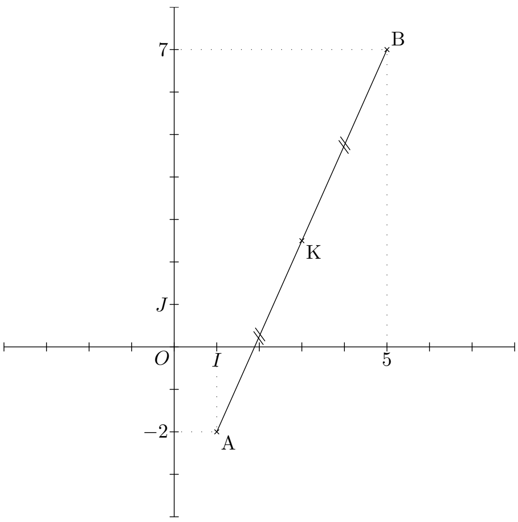


Un repère (O, I, J) est constitué de
- son origine O,
- l'axe des abscisses (OI),
- l'axe des ordonnées (OJ).

Les deux axes étant perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.
Si de plus, $OI = OJ$, on dit que le repère est orthonormé.
OI représente l'unité graphique sur l'axe des abscisses, OJ l'unité graphique sur l'axe des ordonnées.

Un point est placé à partir de ses coordonnées formées par le couple (abscisses ; ordonnée).
Sur la figure ci-contre, on a placé le point $A(4; 3)$:
- la première valeur 4 désigne l'abscisse de A. On notera $x_A = 4$.
- la deuxième valeur 3 désigne l'ordonnées de A. On notera $y_A = 1$.

9.1.2 Milieu d'un segment



Soit K le milieu du segment $[AB]$, avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Alors,

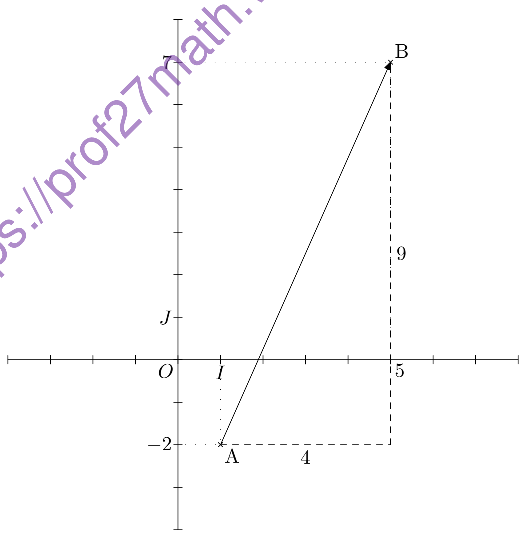
$$\boxed{K\left(\frac{x_A + y_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Dans notre exemple, $A(1; -2)$ et $B(5; 7)$.

$$K\left(\frac{x_A + y_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad K\left(\frac{1+5}{2}; \frac{-2+7}{2}\right)$$

$$K\left(3; \frac{5}{2}\right)$$

9.1.3 Vecteurs



Dans un repère, on définit les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la façon suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.}$$

NB : on fera très attention à l'ordre dans les soustractions.

Deux vecteurs de même coordonnées sont égaux.

Dans notre exemple, $A(1; -2)$ et $B(5; 7)$.

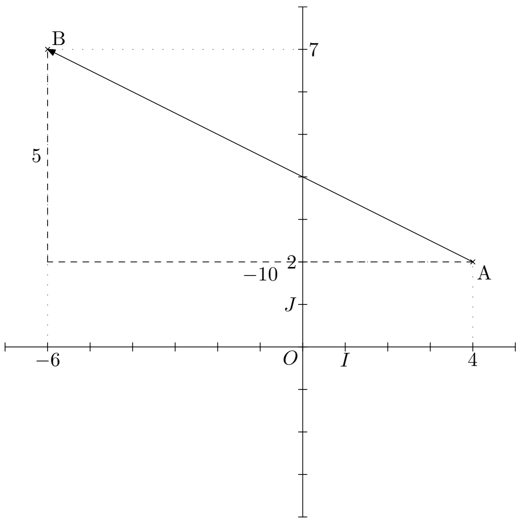
Alors, $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 5-1 \\ 7-(-2) \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 4 \\ 9 \end{array}\right.$

On peut lire directement les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la figure en décomposant le déplacement de A à B en un déplacement horizontal et un déplacement vertical.

Dans cet ouvrage, on a choisi une notation verticale des coordonnées de vecteur : $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$.

On pourra utiliser une notation horizontale : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

9.1.4 Distance entre deux points



Dans un repère orthonormé, la distance AB est donnée par la formule :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - xy_A)^2}}$$

Si $OI = OJ = 1cm$, le résultat sera en cm.

En pratique, il est préférable de commencer par calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Dans notre exemple, $A(4; 2)$ et $B(-6; 7)$.

Alors, $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -6-4 \\ 7-2 \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -10 \\ 5 \end{array}\right.$

D'où $AB = \sqrt{(-10)^2 + 5^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125}$

$AB = \sqrt{\mathbf{25} \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$AB = 5\sqrt{5}$.

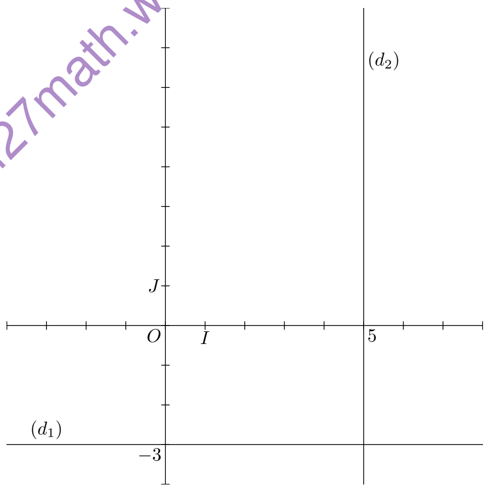
9.1.5 Droites dans un repère

<u>Généralités</u>

Dans un repère, une droite est définie par son équation.
Un point est sur une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

Il y a trois catégories de droites :
– les droites horizontales ;
– les droites verticales ;
– les droites obliques.

Les droites horizontales et les droites verticales

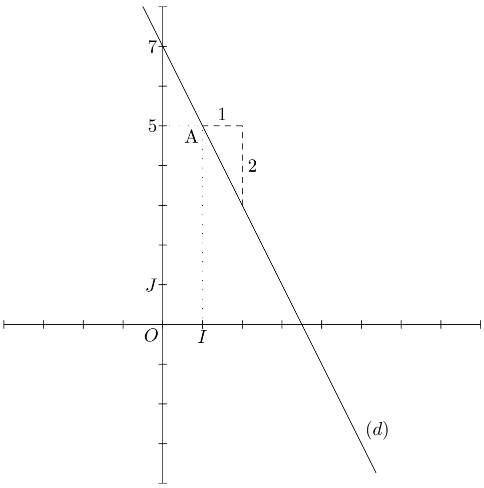


Sur le dessin ci-contre, on a dessiné deux droites (d_1) et (d_2).

La droite horizontale (d_1) contient tous les points dont les ordonnées sont égales à -3.
C'est pourquoi, l'équation de la droite (d_1) est $y = -3$.

La droite verticale (d_2) contient tous les points dont les abscisses sont égales à 5.
C'est pourquoi, l'équation de la droite (d_2) est $x = 5$.
NB : ne pas confondre les abscisses avec les ordonnées.

Les droites obliques



Une droite oblique a une équation pouvant s'écrire sous la forme $y = mx + p$:
- m est le coefficient directeur de la droite ;
- p est l'ordonnée à l'origine.

Etudions le droite (d) du dessin ci-contre.

La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 7, d'où l'ordonnée à l'origine $p = 7$.

Plaçons-nous sur un point de la droite (d), par exemple le point $A(5; 1)$. Déplaçons nous horizontalement de **1 unité vers la droite**. Pour arriver jusqu'à la droite (d), il faut **descendre de 2 unités** : d'où le coefficient directeur $m = -2$.

La droite (d) a pour équation $y = -2x + 7$.

Propriétés des coefficients directeurs

Le coefficient directeur m de la droite oblique (AB) est donné par la formule : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Soit la droite (d) d'équation $y = mx + p$ et (d') la droite d'équation $y = m'x + p'$.
- (d) et (d') sont parallèles si $m = m'$.
- (d) et (d') sont perpendiculaires si $m \times m' = -1$.

Application : un point est-il sur une droite ?

Enoncé Soit la droite (d) d'équation $y = \dfrac{5}{6}x - 2$.
Les points $E(5; 2)$ et $F(-6; -7)$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

Solution Vérifions si E et F sont des points de la droite (d).
$y_E = 2$

$\dfrac{5}{6}x_E - 2 = \dfrac{5}{6} \times 5 - 2 = \dfrac{25}{6} - \dfrac{12}{6} = \dfrac{13}{6}$

Comme $y_E \neq \dfrac{5}{6}x_E - 2$, le point E n'appartient pas à la droite (d).

$y_F = -7$

$\frac{5}{6}x_F - 2 = \frac{5}{6} \times (-6) - 2 = -5 - 2 = -7$

Comme $y_F = \frac{5}{6}x_F - 2$, le point F appartient à la droite (d).

NB : la figure ne permet pas de savoir si un point appartient à une droite.

Application : équation d'une droite oblique passant par deux points

Enoncé Déterminer une équation de la droite (RS). On donne $R(-5; -2)$ et $S(4; 6)$.

Solution Déterminons une équation de la droite (RS).
(RS) étant oblique, son équation peut s'écrire sous la forme $y = mx + p$.

Calculons m.

$m = \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R}$

$m = \frac{6 - (-2)}{4 - (-5)}$

$m = \frac{8}{9}$

Calculons p.

$y_R = \frac{8}{9}x_R + p$

$-2 = \frac{8}{9} \times (-5) + p$

$-\frac{18}{9} = -\frac{40}{9} + p$

$p = -\frac{18}{9} + \frac{40}{9}$

$p = \frac{22}{9}$

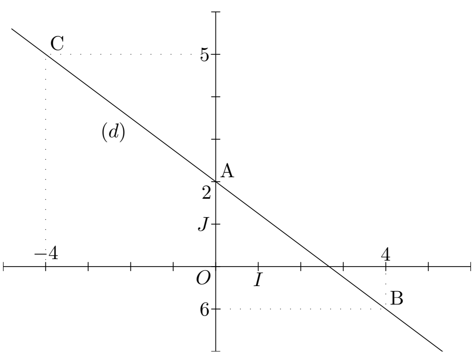
D'où l'équation de la droite (RS) : $y = \frac{8}{9}x + \frac{22}{9}$.

Application : dessin d'une droite d'équation donnée

Enoncé Tracer la droite (d) d'équation $y = -\frac{3}{4}x - 4$.

Commentaires La technique consiste à trouver trois points de la droite (d) : deux points sont nécessaires , le troisième servira de vérification.
Le plus simple consiste à choisir des valeurs d'abscisses et de calculer les ordonnées correspondantes.
On essaiera de trouver autant que possible des coordonnées entières et des points suffisamment éloignés les uns des autres pour réussir un tracé précis.

Dans notre exemple, le coefficient directeur étant $-\frac{3}{4}$, il est judicieux d'uliser des abscisses multiples de 4 pour éliminer les fractions.



Solution Traçons la droite (d).

Soit A le point de (d) d'abscisse $x_A = 0$.
y_A correspond à l'ordonnée à l'origine, d'où $y_A = 2$.

Soit B le point de (d) d'abscisse $x_B = 4$.
$y_B = -\frac{3}{4}x_B + 2 = -\frac{3}{4} \times 4 + 2 = -3 + 2 = -1$

La droite (d) passe par les points $A(0; 2)$ et $B(3; -1)$.
Vérifions à l'aide du point C d'abscisse (-4) :
$y_C = -\frac{3}{4}x_C + 2 = -\frac{3}{4} \times (-4) + 2 = 3 + 2 = 5$
Le point $C(-4; 5)$ se trouve bien sur la droite (d).

Application : intersection de deux droites

Enoncé Soit la droite (d_1) d'équation $y = x - 2$ et la droite (d_2) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

1. Déterminer les coordonnées du point M intersection des droites (d_1) et (d_2).
2. Vérifier la réponse précédente à l'aide d'une figure.

Solution

1. Déterminons les coordonnées de M.

   M étant le point d'intersection des deux droites, ses coordonnées $M(x_M; y_M)$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} y_M = x_M - 2 & (1) \\ y_M = -\frac{1}{2}x_M + 4 & (2) \end{cases}$$

   D'où l'équation,

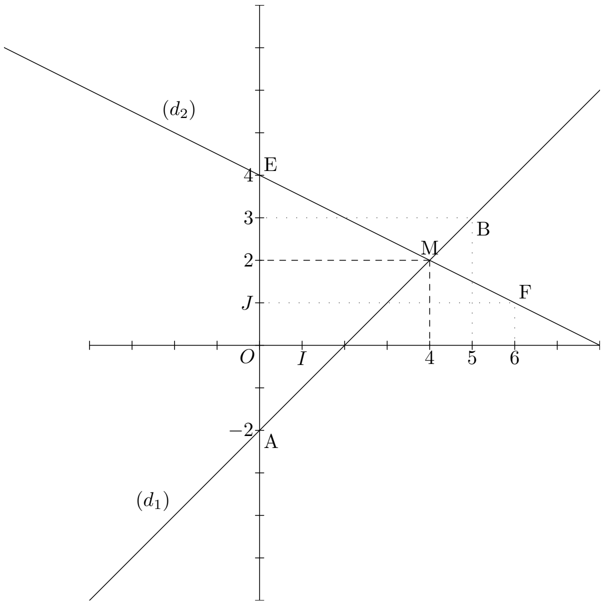
$$x_M - 2 = -\frac{1}{2}x_M + 4$$
$$x_M + \frac{1}{2}x_M = 4 + 2$$
$$\frac{3}{2}x_M = 6$$
$$x_M = 6 \times \frac{2}{3}$$
$$x_M = 4$$

   On remplace x_M par 4 dans (1) :

$$y_M = 4 - 2$$
$$y_M = 2$$

   D'où les coordonnées de $M(4; 2)$.

2. Vérifions sur la figure suivante.



   Soit A le point de (d_1) d'abscisse $x_A = 0$. y_A correspond à l'ordonnée à l'origine, d'où $y_A = -2$.
   Soit B le point de (d_1) d'abscisse $x_B = 5$. $y_B = x_B - 2 = 5 - 2 = 3$

   La droite (d_1) passe par les points $A(0; -2)$ et $B(5; 3)$.

   Soit E le point de (d_2) d'abscisse $x_E = 0$. y_E correspond à l'ordonnée à l'origine, d'où $y_E = 4$.
   Soit F le point de (d_2) d'abscisse $x_B = 6$.
   $y_F = -\frac{1}{2}x_F + 4 = -\frac{1}{2} \times 6 + 4 = -3 + 4 = 1$

   La droite (d_2) passe par les points $E(0; 4)$ et $F(6, 1)$.

9.2 Les exercices

9.2.1 Exercices corrigés

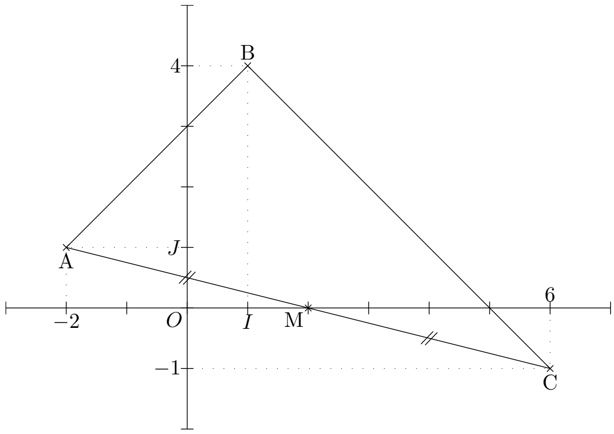
Exercice 1

Enoncé Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité graphique le centimètre.

1. Placer les points $A(-2; 1)$, $B(1; 4)$ et $C(6; -1)$.
   On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC ; on donnera les valeurs exactes.
3. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
4. Soit M le milieu de $[AC]$. Calculer les coordonnées du point M.

Solution

1. Plaçons les points A, B et C dans le repère suivant.



2. Calculons AB, AC et BC.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 1-(-2) \\ 4-1 \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array}\right.$. D'où $AB = \sqrt{(3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$AB = \sqrt{\mathbf{9} \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} 6-(-2) \\ -1-1 \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} 8 \\ -2 \end{array}\right.$. D'où $AC = \sqrt{(8^2+(-2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$

$AC = \sqrt{\mathbf{4} \times 17} = \sqrt{4} \times \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$.

$\overrightarrow{BC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} 6-1 \\ -1-4 \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{BC}\left|\begin{array}{l} 5 \\ -5 \end{array}\right.$. D'où $BC = \sqrt{(5^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$AB = \sqrt{\mathbf{25} \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

3. Montrons que le triangle ABC est rectangle en B.

En utilisant les résultats précédents,
$AC^2 = \left(\sqrt{68}\right)^2 = 68$
$A\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}C^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2 + \left(\sqrt{50}\right)^2 = 18 + 50 = 68$

Comme $A\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}C^2 = AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

4. Calculons les coordonnées du point M.

M est milieu du segment $[AC]$ avec $A(-2;1)$ et $C(6;-1)$.

Alors $M\left(\dfrac{x_A + y_C}{2}; \dfrac{y_A + y_C}{2}\right)$ $\qquad M\left(\dfrac{-2+6}{2}; \dfrac{1+(-1)}{2}\right)$ $\qquad M(2;0)$

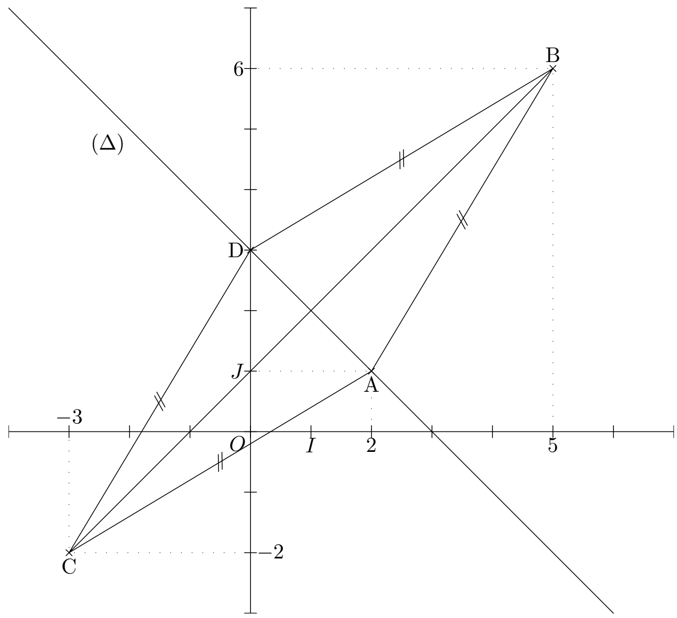
Exercice 2

Enoncé Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, I, J) ; l'unité graphique est le centimètre.

1. Placer les points $A(2;1)$, $B(5;6)$ et $C(-3;-2)$.
2. Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.
3. (a) Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par A et de coefficient directeur (-1).
   (b) Démontrer que le point $D(0;3)$ appartient à la droite (Δ).
4. Démontrer que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $ACDB$?

Solution

1. Plaçons les points A, B et C dans un repère.



2. Montrons que ABC est isocèle en A.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 5-2 \\ 6-1 \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array}\right.$

D'où $AB = \sqrt{(3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} -3-2 \\ -2-1 \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -5 \\ -3 \end{array}\right.$

D'où $AC = \sqrt{((-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

Comme $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

3. (a) Déterminons une équation de la droite (Δ).
   (Δ) étant une droite oblique, son équation est de la forme $y = mx + p$.
   Son coefficient directeur étant $m = -1$, on a $y = -x + p$.
   A étant un point de (Δ), ses coordonnées vérifient l'équation de (Δ) :
   $y_A = -x_A + p$
   $1 = -2 + p$
   $p = 1 + 2$
   $p = 3$
   D'où l'équation de (Δ) : $y = -x + 3$.

   (b) Montrons que $D(0;3)$ appartient à la droite (Δ).
   $y_E = 3$
   $-x_E + 3 = -0 + 3 = 3$
   Comme $y_E = -x_E + 3$, le point D est sur (Δ).

4. Montrons que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{CD}\left|\begin{array}{l} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{CD}\left|\begin{array}{l} 0-(-3) \\ 3-(-2) \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{CD}\left|\begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array}\right.$. Or, on sait que $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array}\right.$.

Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, D est l'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

5. Montrons que $ACDB$ est un losange.

Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, le quadrilatère $ACDB$ est un parallélogramme.
De plus, les côtés consécutifs $[AB]$ et $[AC]$ étant de même longueur, $ACDB$ est un losange.

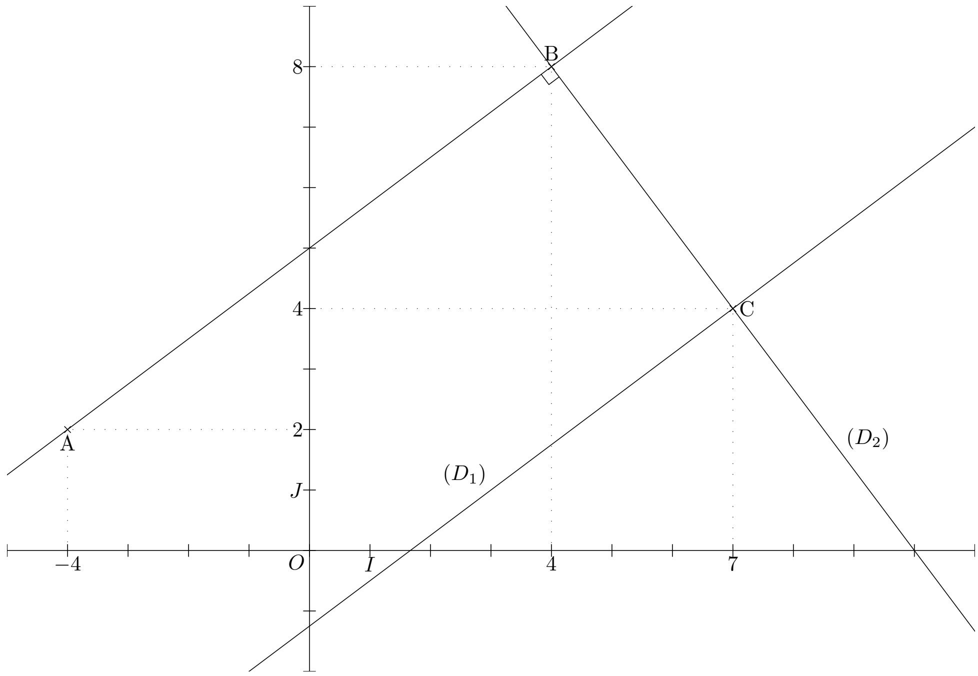
Exercice 3

Enoncé On se place dans un repère orthonormal $(O; I, J)$ d'unité graphique $1cm$.

1. Placer les points :
   $A(-4; 2)$; $B(4; 8)$ et $C(7; 4)$.
2. Tracer la droite (AB).
3. Vérifier que la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + 5$ est la droite (AB).
4. Tracer la droite (D_1) qui passe par le point C et qui est parallèle à la droite (AB).
5. Déterminer un équation de la droite (D_1).
6. Tracer la droite (D_2) qui passe par le point B et qui est perpendiculaire à la droite (AB).
7. Déterminer une équation de la droite (D_2).

Solution

1. Traçons la droite (AB) sur la figure suivante.



2. Vérifions que la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + 5$ est la droite (AB).
   (AB) étant oblique, son équation peut s'écrire sous la forme $y = mx + p$.

   Calculons m.

   $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

   $m = \frac{8 - 2}{4 - (-4)}$

   $m = \frac{6}{8}$

   $m = \frac{3}{4}$

   Calculons p.

   $y_A = \frac{3}{4}x_A + p$

   $2 = \frac{3}{4} \times (-4) + p$

   $2 = -3 + p$

   $p = 2 + 3$

   $p = 5$

   D'où l'équation de la droite (AB) : $y = \frac{3}{4}x + 5$.
3. Traçons la droite (D_1) sur la figure précédente.

4. Déterminons un équation de la droite (D_1).

   (D_1) étant oblique, son équation peut s'écrire sous la forme $y = mx + p$.
   (D_1) étant parallèle à (AB), alors $m = \frac{3}{4}$.
   C étant un point de (D_1), alors

   $y_C = \frac{3}{4}x_C + p$

   $4 = \frac{3}{4} \times 7 + p$

   $\frac{16}{4} = \frac{21}{4} + p$

   $p = \frac{16}{4} - \frac{21}{4}$

   $p = -\frac{5}{4}$

   D'où l'équation de la droite (D_1) : $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

5. Traçons la droite (D_2) sur la figure précédente.

6. Déterminons un équation de la droite (D_2).

   (D_2) étant oblique, son équation peut s'écrire sous la forme $y = mx + p$.
   (D_2) étant perpendiculaire à (AB), alors $m \times \frac{3}{4} = -1$, d'où $m = -\frac{4}{3}$.
   B étant un point de (D_2), alors

   $y_B = -\frac{4}{3}x_B + p$

   $8 = -\frac{4}{3} \times 4 + p$

   $\frac{24}{3} = -\frac{16}{3} + p$

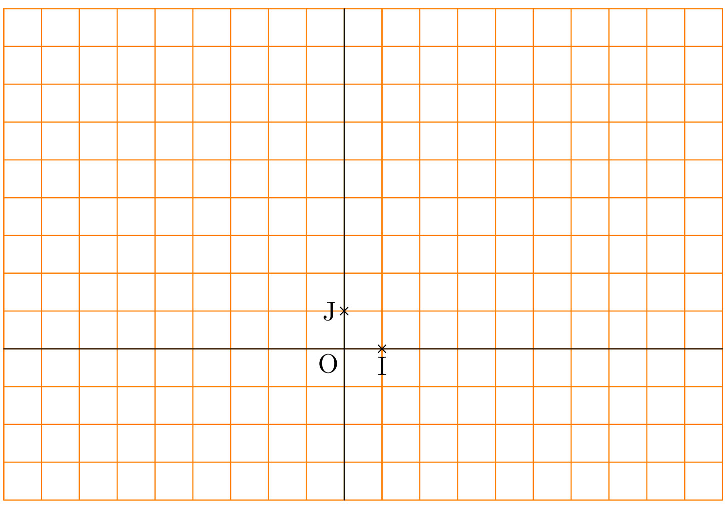
   $p = \frac{24}{3} + \frac{16}{3}$

   $p = \frac{40}{3}$

   D'où l'équation de la droite (D_2) : $y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$.

9.2.2 Autres exercices

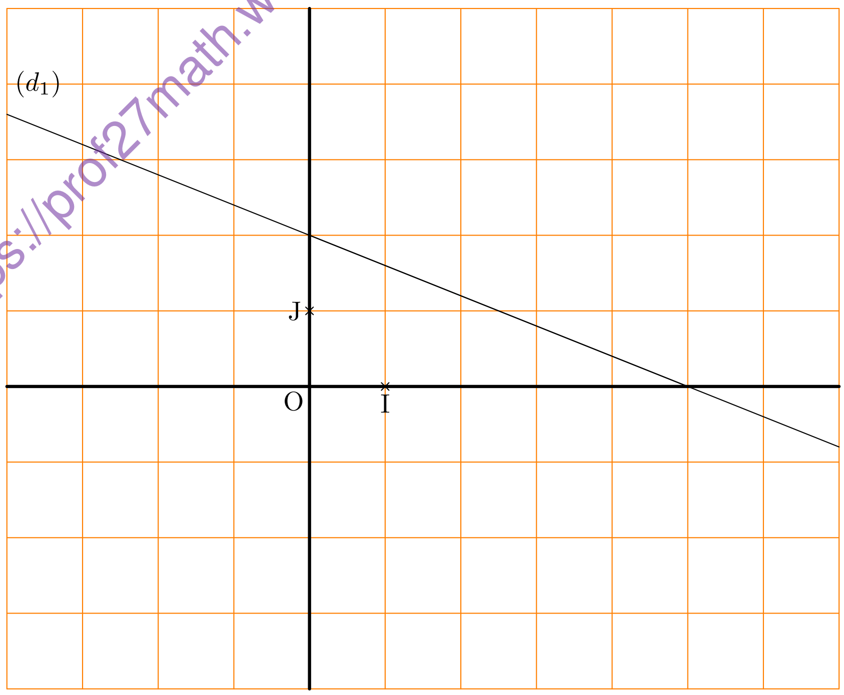
Exercice 4



Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

1. Représenter les deux points $A(-3; 4)$ et $B(2; 7)$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Calculer la distance AB.
4. Déterminer une équation de la droite (AB).
5. Déterminer une équation de la droite (d), parallèle à l'axe des ordonnées, et passant par le point B. La tracer.

Exercice 5



Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\ I,\ J)$. L'unité de longueur est le centimètre.

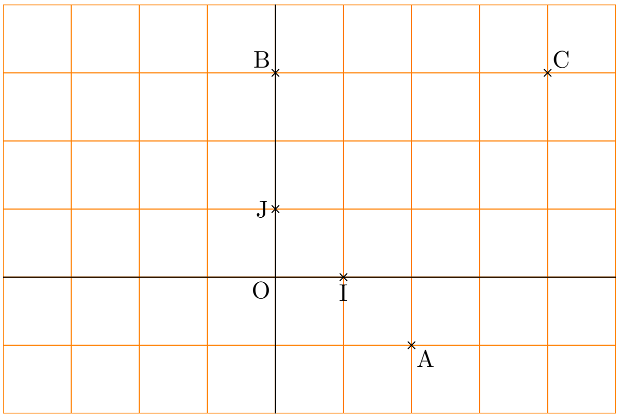
1. Donner sans justification une équation de la droite (d_1) représentée sur cette figure.
2. Représenter sur cette même figure la droite (d_2) d'équation $y = \frac{2}{3}x - 2$.
3. Donner sans justification une équation de la droite (d_3) passant par O et parallèle à (d_2).

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (unité : $1\,cm$).
On donne la droite (d) d'équation $y = 2x - 1$; le point A de coordonnées $(2; 3)$ et le point B de coordonnées $(0; 5)$.

1. Placer les points A et B.
2. Montrer que le point A est sur la droite (d).
3. Construire la droite (d).
4. Calculer :
   - les coordonnées du milieu I de $[AB]$;
   - la distance AB ;
   - les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5. (Δ) est une droite perpendiculaire à (d). Quel est son coefficient directeur ?
6. (Δ) est la droite perpendiculaire à (d) qui passe par le point B. Tracer la droite (Δ) et, sans calcul, donner une équation de (Δ).

Exercice 7



Dans le repère orthonormal (O, I, J) ci-dessus, on a placé les points A, B et C : $A(2; -1)$; $B(0; 3)$; $C(4; 3)$.
On ne demande pas de refaire la figure.

1. On considère les droites (OC), (BC) et (AB). Leurs équations figurent dans la liste suivante :
   $y = -2x + 3 \qquad y = 2x + 3 \qquad y = 3$
   $y = \frac{3}{4}x \qquad x = 3$
   Recopier et compléter les phrases suivantes :
   - la droite (OC) a pour équation ....
   - la droite (BC) a pour équation ....
   - la droite (AB) a pour équation ....
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer la longueur AC.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\ I,\ J)$ (unité : $1\,cm$).

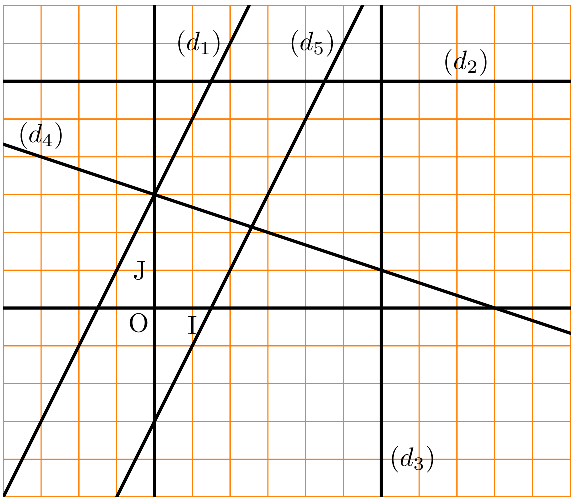
1. Placer les points $E(6;3)$; $F(2;5)$ et $G(-2;-3)$ et tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[EG]$.
2. (a) Calculer les coordonnées du centre H de $(\mathcal{C})$.
   (b) Calculer le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.
3. (a) Déterminer la longueur HF.
   (b) En déduire la nature du triangle EFG.
4. (a) Construire le point K image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $EFGK$? Justifier.

Exercice 9

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O,\ I,\ J)$. L'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points $A(3;5)$; $B(-1;2)$; $C(1;1)$.
   Calculer les coordonnées du point K, milieu du segment $[AB]$.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Construire le point E, image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.
   (a) Quelle est la nature du quadrilatère $CAEB$?
   (b) Calculer les coordonnées du point E.
4. (a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   (b) La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en H ; quelle est la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{KHI}$?

Exercice 10



Le plan est muni du repère orthonormal $(O,\ I,\ J)$. Parmi les huit équations de droites suivantes, figurent celles de chacune des cinq droites tracées sur la figure :

$y = 6$	$y = 2x - 3$	$y = 6x$	$y = 2x +$
$y = -3x + 1$	$y = -\dfrac{1}{3}x + 3$	$y = 3x + 3$	$x = 6$

1. Associer à chacune des droites de la figure l'équation qui lui convient ; on indiquera les réponses dans le tableau ci-dessous :

Droite	Equation de la droite
(d_1)	
(d_2)	
(d_3)	
(d_4)	
(d_5)	

2. Justifier votre choix uniquement pour la droite (d_1).

On ne demande pas d'autre justification ; aucun calcul n'est nécessaire, l'observation attentive de la figure suffit.

Exercice 11

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, I, J) *; l'unité graphique est le centimètre.*

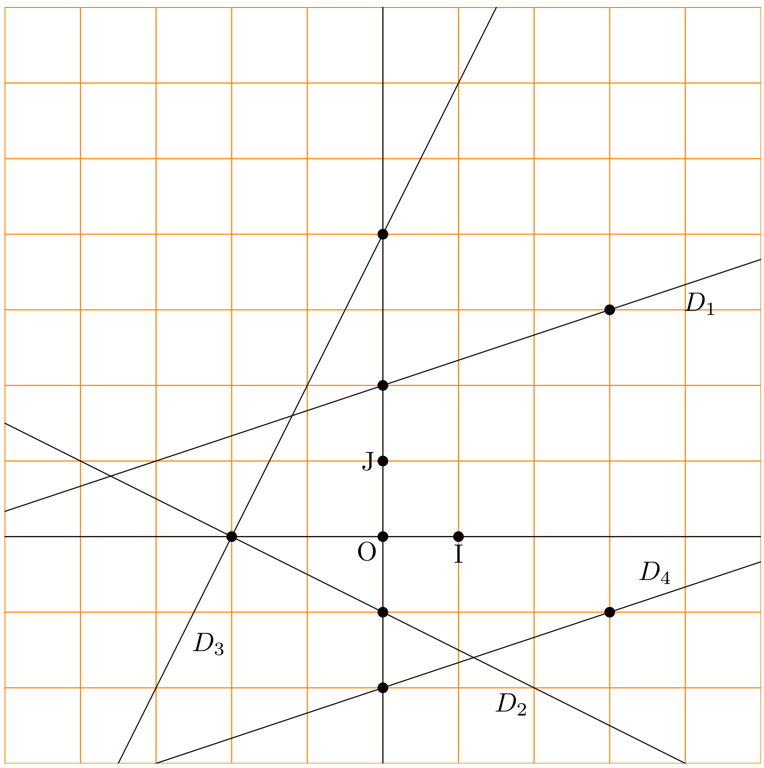
1. (a) Placer les points $P(4;0)$, $Q(0;8)$ et $M(2;4)$.
   (b) Vérifier que M est le milieu du segment $[PQ]$.
2. $(\mathcal{C})$ désigne le cercle circonscrit au triangle OPQ. Quel est le centre du cercle $(\mathcal{C})$? Tracer le cercle $(\mathcal{C})$. Calculer son rayon.
3. Soit (d) la droite passant par Q et perpendiculaire à la droite (OM). K désigne le point d'intersection des droites (OM) et (d).
   (a) Déterminer l'équation de la droite (OM).
   (b) Déterminer l'équation de la droite (d).
   (c) Calculer les coordonnées du point K.

Exercice 12

Voici les équations de huit droites :

$$y = \frac{1}{3}x + 2 \quad y = \frac{1}{3}x - 2 \quad y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad y = -\frac{1}{2}x - 1$$
$$y = 2x + 4 \quad y = 3x - 1 \quad y = -3x + 1 \quad y = \frac{1}{2}x - 1$$

Quatre de ces huit droites sont représentées dans la figure ci-après.
$((O; I, j)$ est un repère orthonormal.)



1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	D_1	D_2	D_3	D_4
Equation de la droite	$y = \cdots$	$y = \cdots$	$y = \cdots$	$y = \cdots$

2. En utilisant les réponses de la question précédente :
   (a) Expliquer pourquoi les droites D_1 et D_4 sont parallèles.
   (b) Expliquer pourquoi les droites D_2 et D_3 sont perpendiculaires.

Exercice 13

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan. L'unité est le centimètre. On considère les points suivants : $A(2;3)$, $B(6;1)$ et $C(-1;-3)$.

1. Faire une figure et placer les points.
2. Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[BC]$.
3. (a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Construire le point D image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   Calculer les coordonnées de D.
4. Calculer les valeurs exactes des longueurs AD et BC.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.

Exercice 14

On prend le centimètre pour unité de longueur.
Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J).

1. Placer les points : $A(2;-2)$, $B(-3;1)$ et $C(1;2)$.
   On complètera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. (a) Calculer les distances AB, AC et BC.
   (b) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle.
3. Calculer les coordonnées du point M, milieu du segment $[AC]$.
4. (a) Construire le point D, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   (b) Que représente le point M pour le segment $[BD]$? Justifier.
5. La droite parallèle à (BC) passant par M coupe la droite (AB) en un point N.
   Calculer les coordonnées du point N.

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
L'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points : $A(-1;0)$; $B(1;2)$ et $C(3;4)$.
2. Montrer que $AB = \sqrt{8}$; $AC = \sqrt{32}$ et $BC = \sqrt{40}$.
3. En déduire que le triangle ABC est rectangle et préciser l'angle droit.
4. Placer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $CDBA$? Justifier la réponse.

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\ I,\ J)$, l'unité étant le centimètre, on considère les points : $A(2;3)$; $B(5;6)$; $C(7;4)$; $D(4;1)$.

1. Faire la figure sur papier millimétré.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et celles du vecteur $\overrightarrow{DC}$; en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
3. Calculer AC et BD.
4. Démontrer que $ABCD$ est un rectangle. (On pourra utiliser les résultats obtenus en 3.)

Exercice 17

Dans un repère orthonormal, le point A a pour coordonnées $(-2;3)$ et le point B a pour coordonnées $(4;-5)$. A partir des coordonnées des points A et B on propose les calculs suivants :

$$\left(\frac{-2+4}{2};\frac{3-5}{2}\right) \qquad (4+2;-5-3) \qquad \sqrt{(4+2)^2+(-5-3)^2}$$

Dans chaque cas, quelle est la notion géométrique ainsi mise en évidence ? (La figure n'est pas demandée.)

Deuxième partie

Partie numérique

Chapitre 10

Le calcul numérique

10.1 Le cours

10.1.1 Priorités sur les opérations

Règles de base

Pour calculer une expression numérique, il est impératif de respecter les étapes suivantes :

1. Effectuer les calculs dans les parenthèses en respectant les autres règles.
2. Calculer les puissances ou les transformer.
3. Effectuer les multiplications et les divisions.
4. Effectuer les additions et les soustractions (voir les nombres relatifs).

Applications

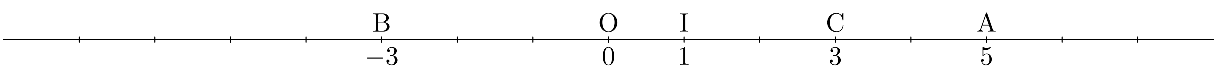
Enoncé
Calculons, en détaillant, les expressions suivantes :
$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$
$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$.

Solution
$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$
$A = (12 - 5) - (5 \times 9 + 9) \div 6 + 8$
$A = 7 - (45 + 9) \div 6 + 8$
$A = 7 - 54 \div 6 + 8$
$A = 7 - 9 + 8$
$A = -2 + 8$
$A = 6$

$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$
$B = [(5 + 8) \times 4 - 3] \div 7 - 21$
$B = [13 \times 4 - 3] \div 7 - 21$
$B = (52 - 3) \div 7 - 21$
$B = 49 \div 7 - 21$
$B = 7 - 21$
$B = -14$

10.1.2 Les nombres relatifs

L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'axe gradué des nombres relatifs, on précise la position d'un point par son abscisse :
- si le point est à droite de l'origine, son signe sera positif $(+)$;
- si le point est situé à gauche de l'origine O, son signe sera négatif $(-)$;
- la distance du point à l'origine O donne la valeur absolue de l'abscisse.

Sur l'exemple ci-dessus,
- le point A a pour abscisse $(+5)$ ou 5 : on note $A(5)$;
- le point B a pour abscisse (-3) : on note $B(-3)$;

- le point C a pour abscisse $(+3)$ ou 3 : on note $C(3)$.

Tout nombre relatif sera défini par
- son signe positif ou négatif ;
- sa valeur absolue.

Ainsi,
3 ou $(+3)$ est un nombre positif de valeur absolue 3. (-4) est un nombre négatif de valeur absolue 4.

Lorsque deux points de l'axe sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine, leurs abscisses sont opposées.

Sur notre exemple, B et C sont symétriques par rapport à O : les nombres 3 et (-3) sont opposés. Alors,

- (-3) est l'opposé de $(+3)$. On écrira : $-3 = -(+3)$.

- 3 est l'opposé de (-3). On écrira : $3 = -(-3)$.

Utilisation des écritures simplifiées

On peut supprimer un certain nombre de parenthèses comme le montrent les exemples suivants :
$+(+5) = 5$
$+(-5) = -5$
$-(+5) = -5$
$-(-5) = 5$.

Par contre, il est impossible d'écrire deux signes ($+$, $-$, $\times$ et $\div$) côte à côte sans les séparer par des parenthèses.
Ainsi,
- $(-8) \times (+4)$ peut s'écrire -8×4,
- mais $(+9) \times (-6)$ s'écrit $9 \times (-6)$.

En tenant compte des remarques précédentes, on obtient les simplifications des écritures suivantes :
$A = (+8) + (-4) \times (+5) - (-6) = 8 - 4 \times 5 + 6$
$B = (-7) - (-5) + (+3) \times (-4) - (+9) = -7 + 5 + 3 \times (-4) - 9$

NB : Par la suite, les explications seront données en utilisant des écritures simplifiées.

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs 5, (-9), 3, (-4) et 6 :
$A =$ 5 -9 +3 -4 +6

Pour additionner deux nombres de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et on garde le signe en question.
Ainsi,
7+4 $=$ 11
-3-4 $=$ -7

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

-8 +5 $=$ -3	$8 > 5$ *donc le signe du résultat sera celui de* *(-8)* *et pour la valeur absolue :* $8 - 5 = 3$
-4 +10 $=$ 6	$10 > 6$ *donc le signe du résultat sera celui de* *10* *et pour la valeur absolue :* $10 - 6 = 4$
9 -6 $=$ 3	$9 > 6$ *donc le signe du résultat sera celui de* *9* *et pour la valeur absolue :* $9 - 6 = 3$
5 -7 $=$ -2	$7 > 5$ *donc le signe du résultat sera celui de* *(-7)* *et pour la valeur absolue :* $7 - 5 = 2$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs. Ainsi,
$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 =$ 5 -9 +3 -4 +6 $=$ 14 -13 $=$ 1
$B = -5 + 12 + 4 - 9 - 7 + 2 =$ -5 +12+4 -9-7 +2 $=$ 18 -21 $=$ -3

Multiplications et divisions de nombres relatifs

La multiplication (ou la division) de deux nombres de même signe donne un résultat positif :
$4 \times 7 = 28$
$(-5) \times (-4) = 20$
$\dfrac{-7}{-3} = \dfrac{7}{3}$

La multiplication (ou la division) de deux nombres relatifs de signes contraires donne un résultat négatif :
$8 \times (-3) = -24$
$(-2) \times 7 = -14$
$\dfrac{-5}{6} = -\dfrac{5}{6}$
$\dfrac{9}{-4} = -\dfrac{9}{4}$

Plus généralement,
- si un produit contient un nombre pair de facteurs négatifs, le résultat est positif.
- si un produit contient un nombre impair de facteurs négatifs, le résultat est négatif.

Ainsi,
$A = 3 \times (-1) \times 2 \times (-1) \times (-2) = -12$
$B = 5 \times (-3) \times (-1) \times 2 \times (-2) \times (-3) = 180$

10.1.3 Les fractions

Définition

Une fraction A est le résultat de la division d'un numérateur par un dénominateur :

$$A = \frac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}$$

Si le résultat de cette division est un entier, on pourra se passer de l'écriture fractionnaire :

$B = \dfrac{15}{3} = 5.$

Si le résultat de cette division n'est pas un entier, on essaiera autant que possible de simplifier cette fraction en la remplaçant par une fraction égale ayant un numérateur et un dénominateur entiers aussi petits que possible :

$C = \dfrac{70}{80} = \dfrac{7}{8}$

Egalité de deux fractions

Lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un nombre non nul, on ne change pas la valeur de la fraction :

$A = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times \mathbf{5}}{3 \times \mathbf{5}} = \dfrac{10}{15}$

On utilisera cette technique pour simplifier une fraction, c'est-à-dire trouver si possible une fraction lui étant égale qui a le numérateur (et le dénominateur) entier le plus petit possible :

$B = \dfrac{36}{48} = \dfrac{6 \times \mathbf{6}}{8 \times \mathbf{6}} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3 \times \mathbf{2}}{4 \times \mathbf{2}} = \dfrac{3}{4}.$

$C = \dfrac{54}{81} = \dfrac{6 \times \mathbf{9}}{9 \times \mathbf{9}} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2 \times \mathbf{3}}{3 \times \mathbf{3}} = \dfrac{2}{3}.$

Comparaison de fractions

Deux fractions de même dénominateur (positif) sont rangées dans l'ordre de leurs numérateurs :

$\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$ car $5 < 7$.

Si les deux fractions à comparer n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les "réduire au même dénominateur".

Enoncé Comparons $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{4}$.

Solution

$\frac{5}{6} = \frac{5\times\mathbf{2}}{6\times\mathbf{2}} = \frac{10}{12}$

$\frac{3}{4} = \frac{3\times\mathbf{3}}{4\times\mathbf{3}} = \frac{9}{12}$

$\frac{10}{12} > \frac{9}{12}$, alors $\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$.

Addition et soustraction

Pour additionner (resp. soustraire) deux fractions de même dénominateur, on ajoute (resp. soustrait) les numérateurs et on conserve le dénominateur :

$A = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$

$B = \frac{9}{7} - \frac{4}{7} = \frac{9-4}{7} = \frac{5}{7}$

Si les deux fractions n'ont pas le même dénominateur, on commence par les "réduire au même dénominateur" :

$C = \frac{5}{8} + \frac{7}{6} = \frac{5\times\mathbf{3}}{8\times\mathbf{3}} + \frac{7\times\mathbf{4}}{6\times\mathbf{4}} = \frac{15}{24} + \frac{28}{24} = \frac{15+28}{24} = \frac{43}{24}$

$D = \frac{7}{12} - 2 = \frac{7}{12} - \frac{24}{12} = \frac{7-24}{12} = -\frac{17}{12}$

Multiplication de deux fractions

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$A = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4\times 3}{7\times 5} = \frac{12}{35}$

Le plus souvent, une fois les produits écrits, il est préférable de les décomposer plutôt que de les effectuer en vue de simplifier le résultat :

$B = \frac{25}{42} \times \frac{49}{40} = \frac{25\times 49}{42\times 40} = \frac{5\times\mathbf{5}\times 7\times\mathbf{7}}{6\times\mathbf{7}\times\mathbf{5}\times 8} = \frac{5\times 7}{6\times 8} = \frac{35}{48}$

Division de deux fractions

Pour obtenir l'inverse d'une fraction, on échange la place du numérateur et du dénominateur :

$\frac{4}{9}$ est l'inverse de $\frac{9}{4}$

$\frac{1}{23}$ est l'inverse 23.

Le produit de deux nombres inverses est égal à 1 :

$\frac{4}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{4 \times 9}{9 \times 4} = 1$

Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse de cette fraction :

$A = \frac{3}{7} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$

$B = \frac{\frac{5}{11}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{11} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{11 \times 3} = \frac{10}{33}$

$C = \frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{5} + \frac{1}{5}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6 \times 3}{5 \times 2} = \frac{18}{10} = \frac{9 \times \mathbf{2}}{5 \times \mathbf{2}} = \frac{9}{5}$

Il faut calculer numérateur et dénominateur avant de pouvoir faire l'inversion.

Application

Enoncé

Calculer C et D et donner chaque résultat sous la forme la plus simple possible :

$$C = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad D = \frac{\frac{8}{7} - 2}{\frac{9}{14}}$$

Conseils Dans ce type d'exercices, il faut respecter les règles de calculs sur les fractions sous oublier les priorités sur les opérations.

Solution

$C = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3 \times 5}{2 \times 12}$

$C = \frac{1}{4} + \frac{\mathbf{3} \times 5}{2 \times \mathbf{3} \times 4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{2 \times 4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{8}$

$C = \frac{1 \times \mathbf{2}}{4 \times \mathbf{2}} + \frac{5}{8} = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{2+5}{8}$

$C = \frac{7}{8}$

$D = \frac{\frac{8}{7} - 2}{\frac{9}{14}} = \frac{\frac{8}{7} - \frac{14}{7}}{\frac{9}{14}} = \frac{\frac{8-14}{7}}{\frac{9}{14}} = \frac{-\frac{6}{7}}{\frac{9}{14}}$

$D = -\frac{6}{7} \times \frac{14}{9} = -\frac{6 \times 14}{7 \times 9} = -\frac{2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{7} \times 2}{\mathbf{7} \times 3 \times \mathbf{3}}$

$D = -\frac{4}{3}$

10.1.4 Les racines carrées

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif tel que son carré est égal à a :

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

Si la racine carrée d'un nombre est un entier ou une fraction, on se passera de l'écriture avec les racines :
$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{0,01} = 0,1 = \frac{1}{10}$

Dans les autres cas, on essaiera généralement de simplifier les racines carrées, c'est-à-dire réécrire $\sqrt{a}$ sous la forme $b\sqrt{c}$ ou c est un entier le plus petit possible.

Les formules

Soit a et b deux nombres **positifs** non nuls.

$$\sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

On se sert de ces formules pour simplifier les écritures des racines en "extrayant des carrés" :

$\sqrt{50} = \sqrt{\mathbf{25} \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{48} = \sqrt{\mathbf{16} \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{98}{25}} = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}} \frac{\sqrt{\mathbf{49} \times 2}}{5} = \frac{\sqrt{49} \times \sqrt{2}}{5} = \frac{7}{5}\sqrt{2}$

Application : simplification d'expression

Enoncé

On donne : $A = 3\sqrt{75} - \sqrt{27} + 8\sqrt{3}$

Ecrire A sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers relatilfs, b positif, le plus petit possible.

Solution

NB : Pour identifier la valeur de b, on peut chercher dans l'expression A la racine la plus "simple" qui est $\sqrt{3}$, *d'où* $b = 3$.

$A = 3\sqrt{75} - \sqrt{27} + 8\sqrt{3}$
$A = 3\sqrt{\mathbf{25} \times 3} - \sqrt{\mathbf{9} \times 3} + 8\sqrt{3}$
$A = 3\sqrt{25} \times \sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3} + 8\sqrt{3}$
$A = 3 \times 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$
$A = 15\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$
$A = 20\sqrt{3}$

Application : racines carrées, distributivité et identités remarquables

Enoncé

On donne :
$A = (3\sqrt{2} - 4)(1 + \sqrt{2})$
$B = (5\sqrt{3} + 2)^2$
$C = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$
$D = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

Calculer A, B et C et D en donnant les résultats sous la forme la plus simple possible.

Solution

$A = (3\sqrt{2} - 4)(1 + \sqrt{2})$
On utilise la distributivité.

$A = 3\sqrt{2} \times 1 + 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 4 \times 1 - 4 \times \sqrt{2}$
$A = 3\sqrt{2} + 6 - 4 - 4\sqrt{2}$
$A = 2 - \sqrt{2}$

$C = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$
On utilise : $(a - b)(a + b) = (a)^2 - (b)^2$.

$C = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2$
$C = 7 - 2$
$C = 5$

$B = (5\sqrt{3} + 2)^2$
On utilise : $(a + b)^2 = (a)^2 + 2 \times (a) \times (b) + (b)^2$.

$B = (5\sqrt{3})^2 + 2 \times (5\sqrt{3}) \times (2) + (2)^2$
$B = 75 + 20\sqrt{3} + 4$
$B = 79 + 20\sqrt{3}$

$D = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$
On utilise : $(a - b)^2 = (a)^2 - 2 \times (a) \times (b) + (b)^2$.

$D = (\sqrt{3})^2 - 2 \times (\sqrt{3}) \times (\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2$
$D = 3 - 2\sqrt{6} + 2$
$D = 5 - 2\sqrt{6}$

10.1.5 Les puissances

Définitions

Soit a un nombre quelconque et n un entier positif non nul.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

Il y a deux cas bien connus :
- "a au carré" : $a^2 = a \times a$.
- "a au cube" : $a^3 = a \times a \times a$.

Enfin, un nombre à la puissance 0 est égal à 1 : $a^0 = 1$

La principale utilisation des puissances est le système décimal :

$10 = 10^1$ | $0,1 = 10^{-1}$
$100 = 10^2$ | $0,01 = 10^{-2}$
$1\,000 = 10^3$ | $0,001 = 10^{-3}$
$1\,000\,000 = 10^6$ | $0,000\,001 = 10^{-6}$
$1\,000\,000\,000 = 10^9$ | $0,000\,000\,001 = 10^{-9}$

Voici d'autres exemples d'utilisation des puissances :

$A = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$B = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \dfrac{1}{625}$

$C = 13^0 = 1$

Puissances d'un même nombre a

Soit a un nombre non nul.
Soient m et n, deux entiers relatifs.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

Conseil Pour limiter les erreurs sur les nombres relatifs, il est fortement conseillé de faire apparaître dans le détail des calculs quelle est l'opération effectuée sur les exposants (addition, soustraction ou multiplication).

D'où les exemples suivants :

$A = 7^5 \times 7^{-2} = 7^{5+(-2)} = 7^3$

$B = \dfrac{10^4}{10^{-3}} = 10^{4-(-3)} = 10^{4+3} = 10^7$

$C = \left(10^{-3}\right)^{-4} = 10^{(-3)\times(-4)} = 10^{12}$

Puissances de deux nombres a et b

Soient a et b deux nombres non nuls.
Soient m et n, deux entiers relatifs.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

D'où les exemples suivants :

$A = 2^8 \times 3^8 = (2 \times 3)^8$

$B = \dfrac{15^7}{6^7} = \left(\dfrac{15}{6}\right)^7 = \left(\dfrac{5 \times \mathbf{3}}{2 \times \mathbf{3}}\right)^7 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^7$

10.1.6 Ecriture scientifique

Définition

Tout nombre décimal positif non nul peut s'écrire sous forme scientifique.
C'est le produit d'un nombre décimal compris entre 1 et 10 par une puissance de 10.

D'où les écritures scientifiques suivantes :

$A = 35\,000 = 3,5 \times 10^4$ *On a décalé la virgule de 4 places vers la gauche.*
$B = 0,000\,048\,2 = 4,82 \times 10^{-5}$ *On a décalé la virgule de 5 places vers la droite.*

Application

Enoncé Ecrire B sous forme d'écriture scientifique : $B = \dfrac{13 \times 10^{14} \times 10^6}{25 \times (10^3)^7}$

Conseils

Dans ce genre d'exercices, une première étape consiste à séparer les puissances de 10 du reste à l'aide de deux fractions.
Après avoir simplifié chacune des deux fractions, il faut écrire si besoin le nombre décimal en écriture scientifique.
En multipliant les puissances de 10, on ontient le résultat cherché.

Solution

$$B = \frac{13 \times 10^{14} \times 10^6}{25 \times (10^3)^7} = \frac{13}{25} \times \frac{10^{14} \times 10^6}{(10^3)^7} = 0,52 \times \frac{10^{14+6}}{10^{3\times 7}} = 0,52 \times \frac{10^{20}}{10^{21}} = 0,52 \times 10^{20-21}$$

$$B = 0,52 \times 10^{-1} = 5,2 \times 10^{-1} \times 10^{-1} = 5,2 \times 10^{(-1)+(-1)}$$

$$B = 5,2 \times 10^{-2}$$

10.2 Les exercices

10.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1

Enoncé

On considère les nombres

$$A = \frac{7}{18} \times \frac{2}{7} - \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 \qquad B = \frac{3 \times 10^2 \times 5 \times 10^4}{12 \times (10^3)^3}$$

$$C = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$$

En précisant les différentes étapes du calcul :

1. Ecrire A sous la forme d'une fraction la plus simple possible.
2. Donner l'écriture scientifique de B.
3. Ecrire C sous la forme $a\sqrt{5}$, a étant un nombre entier relatif.

Solution

1. Ecrivons A sous la forme d'une fraction la plus simple possible.
$$A = \frac{7}{18} \times \frac{2}{7} - \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 = \frac{\mathbf{7} \times 2}{18 \times \mathbf{7}} - \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{3}\right)^2 = \frac{\mathbf{2} \times 1}{\mathbf{2} \times 9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1-4}{9} = -\frac{3}{9} = \frac{\mathbf{3} \times 1}{\mathbf{3} \times 3}$$

$A = -\frac{1}{3}$

2. <u>Donnons l'écriture scientifique de B.</u>
$B = \frac{3 \times 10^2 \times 5 \times 10^4}{12 \times (10^3)^3} = \frac{3 \times 5}{12} \times \frac{10^2 \times 10^4}{(10^3)^3} = 1,25 \times \frac{10^{2+4}}{10^{3\times 3}} = 1,25 \times \frac{10^6}{10^9} = 1,25 \times 10^{6-9}$
$B = 1,25 \times 10^{-3}$

3. <u>Ecrivons C sous la forme $a\sqrt{5}$, a étant un nombre entier relatif.</u>
$C = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$
$C = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{\mathbf{25} \times 5} - 7\sqrt{\mathbf{9} \times 5}$
$C = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{5} - 7\sqrt{9} \times \sqrt{5}$
$C = 2\sqrt{5} + 2 \times 5\sqrt{5} - 7 \times 3\sqrt{5}$
$C = 2\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 21\sqrt{5}$
$C = -9\sqrt{5}$

<u>**Exercice 2**</u>

Enoncé

$A = \frac{8}{3} + 5 \div \left(1 - \frac{2}{5}\right)$

$B = \frac{55 \times 10^3 \times 2^{10}}{10^4 \times 2^9}$

$C = \left(4 + \sqrt{5}\right)\left(4 - \sqrt{5}\right)$

$D = 2\sqrt{45} + \sqrt{81} - 3\sqrt{20} + 2$

Démontrer que $A = B = C = D$.

Solution

$A = \frac{8}{3} + 5 \div \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{8}{3} + 5 \div \left(\frac{5}{5} - \frac{2}{5}\right) = \frac{8}{3} + 5 \div \frac{3}{5} = \frac{8}{3} + 5 \times \frac{5}{3} = \frac{8}{3} + \frac{25}{3} = \frac{8+25}{3} = \frac{33}{3} = 11$

$B = \frac{55 \times 10^3 \times 2^{10}}{10^4 \times 2^9} = 55 \times \frac{2^10}{2^9} \times \frac{10^3}{10^4} = 55 \times 2^{10-9} \times 10^{3-4} = 55 \times 2 \times 10^{-1} = 110 \times 10^{-1} = 11$

$C = \left(4 + \sqrt{5}\right)\left(4 - \sqrt{5}\right) = (4)^2 - (\sqrt{5})^2 = 16 - 5 = 11$

$D = 2\sqrt{45} + \sqrt{81} - 3\sqrt{20} + 2$
$D = 2\sqrt{\mathbf{9} \times 5} + 9 - 3\sqrt{\mathbf{4} \times 5} + 2$
$D = 2\sqrt{9} \times \sqrt{5} + 9 - 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} + 2$
$D = 2 \times 3\sqrt{5} + 9 - 3 \times 2\sqrt{5} + 2$
$D = 6\sqrt{5} + 9 - 6\sqrt{5} + 2 = 11$

On a bien $A = B = C = D = 11$.

10.2.2 Autres exercices

<u>**Exercice 3**</u>

1. Calculer A et B. On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

$$A = \frac{1}{3} \times 4 + \frac{7}{6} \qquad B = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} - \frac{2}{1 - \frac{2}{7}}$$

2. Développer et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs :

$$C = 2 \times \left(3 - 2\sqrt{5}\right)^2$$

Exercice 4

1. On donne les expressions numériques :

$$A = \frac{5}{7} - \frac{2}{7} \times \frac{4}{3} \qquad B = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \div \frac{2}{3} + 1$$

Calculer A et B. On écrira les résultats sous la forme de fractions aussi simples que possible.

2. Ecrire les nombres C, D et E ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier et b un entier positif le plus petit possible.

$$C = \sqrt{300} \qquad D = 2\sqrt{12} - \sqrt{27} \qquad E = \sqrt{21} \times \sqrt{14}$$

Exercice 5

Calculer et mettre le résultat sous la forme de fraction irréductible en précisant les calculs intermédiaires.

$$A = 3 - 3 \div \frac{9}{2} \qquad B = \frac{10^{-8} \times 0,7 \times 10^{12}}{21 \times 10^3}$$

Exercice 6

1. Ecrire le nombre A sous la forme d'une fraction la plus simple

$$A = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{10}{3}$$

2. Ecrire B sous la forme $a\sqrt{3}$ avec a entier : $B = \sqrt{5} \times \sqrt{15}$.
3. Soit $C = 2x^2 - 3$. Calculer C pour $x = \sqrt{3}$.

Exercice 7

On donne les nombres A et B suivants :

$$A = 2 - \frac{3}{4} \times \frac{8}{21} \qquad B = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) \div \frac{-7}{12}$$

Donner une écriture fractionnaire de chacun des nombres A et B, le dénominateur étant un entier positif inférieur à 10.

Exercice 8

Calculer et donner la valeur exacte la plus simple possible des nombres suivants :

$$A = 36 - 6 \times 4 \qquad B = 4\sqrt{75} - 5\sqrt{3}$$

$$C = \frac{10 + 5}{10 - 5} \qquad D = \left(2\sqrt{3} - 5\right)\left(2\sqrt{3} + 5\right)$$

$$E = \sqrt{100 - 64} \qquad F = \left(4 - \frac{2}{3}\right)\left(2 - \frac{4}{3}\right)$$

Exercice 9

1. Ecrire A sous forme fractionnaire la plus simple possible

$$A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

2. Ecrire B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers positifs et le plus petit possible

$$B = \sqrt{98} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8}$$

Exercice 10

Exprimer chacun des nombres A, B, C et D sous forme d'une fraction irréductible en faisant apparaître les étapes du calcul :

$$A = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \div \frac{5}{2} \qquad B = \frac{13 \times 10^{14} \times 10^6}{2 \times (10^3)^7}$$

$$C = \sqrt{\frac{49}{100}} + \frac{(\sqrt{3})^2}{10} \qquad D = \frac{1}{20}\left(\sqrt{14} - 1\right)\left(\sqrt{14} + 1\right)$$

Exercice 11

On considère les nombres :

$$A = \frac{11}{7} - \frac{9}{7} \times \frac{5}{3} \qquad B = \sqrt{20} - \sqrt{125} + 2\sqrt{245}$$

On détaillera les étapes des calculs et on écrira :

1. A sous la forme d'une fraction la plus simple possible.
2. B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers avec b entier positif le plus petit possible.

Exercice 12

Calculer, puis simplifier (on donnera les résultats sous la forme de fractions les plus simples possibles) :

$$A = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{25}{7} \qquad B = \left(\frac{2}{8} - \frac{3}{15}\right) \div \frac{3}{10} \qquad C = \frac{25 \times 10^2 \times 121}{11 \times 150 \times 3}$$

Exercice 13

1. Calculer et donner le résultat sous la forme d'un entier relatif ou d'une fraction irréductible :

$$A = \left(2 + 3\sqrt{5}\right)\left(2 - 3\sqrt{5}\right) \qquad B = \frac{3\sqrt{45}}{6\sqrt{20}}$$

$$C = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} \qquad D = \frac{2 \times 10^{-3} \times 5}{10^{-5}}$$

2. Soit $E = \sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$.
   Ecrire le nombre E sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers.

Exercice 14

On donne les nombres

$$A = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 \qquad B = \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)^2 \qquad C = \left(3 - \sqrt{5}\right)^2 - 2\left(1 - \sqrt{45}\right)$$

En écrivant les différentes étapes des calculs :

1. Prouver que $A = B$.
2. Prouver que C est un nombre entier.

Exercice 15

1. Calculer A, B et C (faire apparaître les étapes de chaque calcul et donner le résultat sous la forme la plus simple possible) :

$$A = \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} \qquad B = \left(3 - \sqrt{5}\right)^2 + 2\left(25 + \sqrt{45}\right) \qquad C = \frac{-2,4 \times 10^7 \times 8 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}}$$

2. (a) Que peut-on dire des nombres A et B ?
   (b) Que peut-on dire des nombres B et C ?

Exercice 16

Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{2}{5} \qquad B = \frac{3}{7} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{3} \qquad C = \frac{4 \times 10^{12} \times 1,5}{9 \times 10^{11}}$$

Exercice 17

Calculer A et B (faire apparaître les étapes de chaque calcul et donner les résultats sous forme d'une fraction la plus simple possible) :

$$A = \frac{2,5 \times 10^{-7}}{5 \times 10^{-6}} \qquad B = \frac{\frac{5}{3} - 1}{1 - \frac{1}{6}}$$

Exercice 18

Ecrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible, chacun des nombres suivants :

$$A = 1 - \frac{5}{4} \times \frac{2}{15} \qquad B = 6 - 4\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2$$

Exercice 19

Calculer, en donnant le résultat d'abord en écriture décimale, puis en écriture scientifique :

$$C = 153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}$$

Exercice 20

1. Soit le nombre $A = \sqrt{500} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{20}$.
   Montrer que A peut se mettre sous la forme $a\sqrt{5}$, où a est un nombre entier.
2. Développer et réduire $B = \left(5 + \sqrt{2}\right)^2$.
3. Calculer C et D et donner chaque résultat sous la forme la plus simple possible :

$$C = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad D = \frac{\frac{8}{7} - 2}{\frac{9}{14}}$$

Exercice 21

1. Calculer et mettre les résultats de A et de B sous forme de fractions irréductibles : on précisera les calculs intermédiaires.
$$A = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \qquad B = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{6}$$
2. Ecrire C en notation scientifique :
$$C = \frac{5 \times 10^{-2} \times 9}{3 \times 20}$$
3. Ecrire l'expression D sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs :
$$D = \sqrt{45} - 7\sqrt{5} + \sqrt{20}$$

Exercice 22

Calculer et mettre sous la forme la plus simple possible (le détail des calculs devra apparaître sur la copie) :

$$A = \frac{7}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{16}{5} \qquad B = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) \qquad C = \sqrt{125} - \sqrt{20} - \sqrt{45}$$

Chapitre 11

L'arithmétique

L'arithmétique est la partie des mathématiques étudiant les nombres entiers.

11.1 Le cours

11.1.1 Division euclidienne

Définitions

La division euclidienne d'un entier a par un entier b donne deux résultats :
- un quotient q ;
- un reste r.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Alors, $a = b \times q + r$.

Si le reste de la division est nul,
- b est un diviseur de a.
- a est un multiple de b.

D'où les deux exemples suivants :

$$\begin{array}{ccc|cc} 7 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ \cline{4-5} 6 & 3 & & 3 & 4 \\ & 9 & 5 & & \\ & 8 & 4 & & \\ & 1 & 1 & & \end{array}$$

Alors, $725 = 21 \times 34 + 11$.

Le reste étant non nul, 21 n'est pas un diviseur de 725.

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 4 & 8 & 3 & 6 \\ \cline{5-6} 1 & 4 & 4 & & 4 & 3 \\ & 1 & 0 & 8 & & \\ & 1 & 0 & 8 & & \\ & & & 0 & & \end{array}$$

Alors, $1548 = 36 \times 43$.

Le reste étant nul, 36 est un diviseur de 1548.

Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair, c'est-à-dire s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Par exemple, 681 est divisible par 3 car $6 + 8 + 1 = 15$ (qui est divisible par 3).

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divible par 9.
Par exemple, 30 546 est divisible par 9 car $3 + 0 + 5 + 4 + 6 = 18$ (qui est divisible par 9).

Un nombre entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.

Liste des diviseurs d'un nombre

Pour chercher la liste des diviseurs d'un nombr entier, on utilise un tableau à deux colonnes :
- la première colonne commence par le nombre lui-même (le plus grand diviseur) ;
- la deuxième colonne commence par le nombre 1 (le plus petit diviseur).

En effet tout nombre est au moins divisible par 1 et par lui-même.

Ensuite, on essaie de compléter la deuxième colonne en cherchant les diviseurs dans l'ordre croissant. On complète alors la ligne de manière à ce que le produit des deux diviseurs de la ligne soit égal au nombre étudié.
La recherche se termine quand le diviseur trouvé a déjà été écrit dans la colonne de gauche.
Cherchons la liste des diviseurs de 24 :

24	1
12	2
8	3
6	4

Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Cherchons la liste des diviseurs de 64 :

64	1
32	2
16	4
8	8

Les diviseurs de 64 sont 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

Nombres premiers

Un nombre est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Ainsi, 11 est premier mais pas 10 car $10 = 2 \times 5$.

Voici, la liste des nombres entiers inférieurs à 50 :

	1	2	3		5		7		
	11		13				17		19
			23						29
	31						37		
	41		43				47		

11.1.2 Diviseurs communs à deux nombres et PGCD

Définitions

Un nombre entier est un diviseur commun à deux nombres entiers a et b s'il divise à la fois a et b.
Ainsi, 1 est diviseur commun à tout couple de nombres.

Parmi la liste des diviseurs commun à a et b, on s'intéressera en particulier au plus grand d'entre eux : le **P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur noté $PGCD(a;b)$.

Cherchons la liste des diviseurs communs à 36 et 48 :

36	1
18	2
12	3
9	4
6	6

48	1
24	2
16	3
12	4
8	6

Les diviseurs communs à 36 et 48 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

Nombres premiers entre eux

Deux nombres entiers a et b sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1, c'est-à-dire : $PGCD(a;b) = 1$.

Montrons que 45 et 28 sont premiers entre eux :

45	1
15	3
9	5

28	1
14	2
7	4

Le seul diviseur commun à 45 et 28 est 1 :
45 et 28 sont premiers entre eux.

11.1.3 Méthodes de recherche du PGCD

Lorsque les nombres sont grands, la recherche du PGCD à l'aide des tableaux de diviseurs est longue et difficile. C'est pourquoi, on a recours aux méthodes suivantes.

Méthode des soustractions successives

Principe Si un nombre entier divise deux nombres, il divise également leur différence.

Dans cette méthode, on utilise un tableau à trois colonnes contenant par ligne, de gauche à droite :
- le plus grand nombre ;
- le plus petit nombre ;
- leur différence.

Pour passer à la ligne suivante, on commence par placer dans l'ordre les deux derniers nombres de la ligne précédente.
Le dernier nombre non nul du tableau est le PGCD.

Cherchons par la méthode des soustractions successives le PGCD de 3 225 et 731.

a	b	$a-b$
3 225	731	2 494
2 494	731	1 763
1 763	731	1 032
1 032	731	301
731	301	430
430	301	129
301	129	172
172	129	43
129	43	86
86	43	43
43	43	0

D'où, $PGCD(3\,225; 731) = 43$.
Vérifions :
$3\,225 = \mathbf{43} \times 75$
$731 = \mathbf{43} \times 17$

Algorithme d'Euclide

Principe Si un nombre entier divise deux nombres, il divise également le reste de leur division euclidienne.

Dans cette méthode, on utilise un tableau à trois colonnes contenant par ligne, de gauche à droite :
- le plus grand nombre ;
- le plus petit nombre ;
- le reste de leur division euclidienne.

Pour passer à la ligne suivante, on commence par placer dans l'ordre les deux derniers nombres de la ligne précédente.
Le dernier nombre non nul du tableau est le PGCD.

Cherchons par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 3 225 et 731.

a	b	r	
3 225	731	301	$3\,225 = 731 \times 4 + 301$
731	301	129	$731 = 301 \times 2 + 129$
301	129	43	$301 = 129 \times 2 + 43$
129	43	0	$129 = 43 \times 3$

D'où, $PGCD(3\,225; 731) = 43$.
Vérifions :
$3\,225 = \mathbf{43} \times 75$
$731 = \mathbf{43} \times 17$

Application : simplification de fraction

Enoncé
Simplifier la fraction $\frac{851}{2\,331}$.

Solution

Cherchons par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 2 331 et 851.

a	b	r	
2 331	851	629	$2\,331 = 851 \times 2 + 629$
851	629	222	$851 = 629 \times 1 + 222$
629	222	185	$629 = 222 \times 2 + 185$
222	185	37	$222 = 185 \times 1 + 37$
185	37	0	$185 = 37 \times 5$

D'où, $PGCD(2\,331; 851) = 37$.
Vérifions :
$2\,331 = \mathbf{37} \times 63$
$851 = \mathbf{37} \times 23$

D'où la simplification :
$$\frac{851}{2\,331} = \frac{\mathbf{37} \times 23}{\mathbf{37} \times 63} = \frac{23}{63}$$

Application : nombres premiers entre eux

Enoncé
Montrer que les nombres 972 et 1 073 sont premiers entre eux.

Solution
Cherchons par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 1 073 et 972.

a	b	r	
1 073	972	101	$1\,073 = 972 \times 1 + 101$
972	101	163	$972 = 101 \times 9 + 163$
163	101	62	$163 = 101 \times 1 + 62$
101	62	39	$101 = 62 \times 1 + 39$
62	39	23	$62 = 39 \times 1 + 23$
39	23	16	$39 = 23 \times 1 + 16$
23	16	7	$23 = 16 \times 1 + 7$
16	7	2	$16 = 7 \times 2 + 2$
7	2	1	$7 = 2 \times 3 + 1$
2	1	0	$2 = 1 \times 2$

D'où, $PGCD(1\,073; 972) = 1$.

Les nombres 1 073 et 972 sont alors premiers entre eux.

11.2 Les exercices

11.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1

Enoncé
1. Calculer le PGCD de 110 et 88.
2. Un ouvrier dispose de plaques de métal de $110cm$ de longueur et de $88cm$ de largeur ; il a reçu la consigne suivante :
   “Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.”
   Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
3. Combien obtiendra-t-il de carrés par plaque ?

Solution
1. Calculons le PGCD de 110 et 88 par l'algorithme d'Euclide.

a	b	r	
110	88	22	$110 = 88 \times 1 + 22$
88	22	0	$88 = 22 \times 4$

D'où, $PGCD(110; 88) = 22$.
Vérifions :
$110 = \mathbf{22} \times 5$
$88 = \mathbf{22} \times 4$

2. Calculons la longueur du côté d'un carré.
   D'après la question précédente, $PGCD(110; 88) = 22$.
   On peut alors obtenir découper des carrés de côté $22cm$.
3. Calculons le nombre de carrés par plaque.
   $110 = \mathbf{22} \times 5$
   $88 = \mathbf{22} \times 4$
   La découpe donne cinq rangées de 4 carrés. On obtient donc 20 carrés par plaque.

Exercice 2

Enoncé

1. Les nombres 682 et 496 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.
2. Calculer le PGCD de 682 et de 496.
3. Simplifier la fraction $\dfrac{682}{496}$ pour la rendre irréductible, en indiquant la méthode.

Solution

1. Montrons que les nombres 682 et 496 ne sont pas premiers entre eux.
   682 et 496 étant deux nombres pairs, ils possèdent au moins 2 comme diviseur commun.
   682 et 496 ne sont pas premiers entre eux.
2. Calculons le PGCD de 682 et de 496 par l'algorithme d'Euclide.

a	b	r	
682	496	186	$682 = 496 \times 1 + 186$
496	186	132	$496 = 186 \times 2 + 124$
186	124	62	$186 = 124 \times 1 + 62$
124	62	0	$124 = 62 \times 2$

D'où, $PGCD(682; 496) = 62$.
Vérifions :
$682 = \mathbf{62} \times 11$
$496 = \mathbf{62} \times 8$

3. Simplifions la fraction $\dfrac{682}{496}$.
   $$\frac{682}{496} = \frac{\mathbf{62} \times 11}{\mathbf{62} \times 8} = \frac{11}{8}$$

11.2.2 Autres exercices

Exercice 3

1. Calculer le PGCD de 114 400 et 60 775.
2. Expliquer comment, sans utiliser la touche "fraction" d'une calculatrice, rendre irréductible la fraction $\dfrac{60\,775}{114\,400}$.
3. Donner l'écriture simplifiée de $\dfrac{60\,775}{114\,400}$.

Exercice 4

1. Démontrer que les nombres 65 et 42 sont premiers entre eux.
2. Démontrer que : $\dfrac{520}{336} = \dfrac{65}{42}$.

Exercice 5

On pose $M = \dfrac{20\,755}{9\,488} - \dfrac{3}{8}$.

1. Calculer le plus grand diviseur commun D aux deux nombres 20 755 et 9 488. On reportera avec soin sur la copie les calculs qui conduisent à D.
2. Le nombre M est-il décimal ? est-il rationnel ? Justifier.

Exercice 6

Un philatéliste possède 1 631 timbres français et 932 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et étrangers.

1. Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser ?
2. Combien y aura-t-il, dans ce cas, de timbres français et étrangers par lots ?

Exercice 7

Un collège décide d'organiser une épreuve sportive pour tous les élèves. Les professeurs constituent le plus grand nombre possible d'équipes. Chaque équipe doit comprendre le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Sachant qu'il y a 294 garçons et 210 filles, quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut composer ? Combien y a-t-il de filles et de garçons dans chaque équipe ?

Exercice 8

1. Montrer que $\frac{36}{47}$ est une fraction irréductible.
2. Montrer que $\frac{216}{282}$ est égale à la fraction irréductible $\frac{36}{47}$.

Exercice 9

1. Déterminer le pgcd des nombres 108 et 135.
2. Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires.
   Il veut faire des paquets de sorte que :
   – tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges,
   – tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires,
   – toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.
   (a) Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?
   (b) Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

Exercice 10

On considère la fraction $\frac{5\,148}{1\,386}$.

1. Déterminer, par la méthode de votre choix, le pgcd des nombres 5 148 et 1 386.
2. Utiliser le résultat de la question précédente pour rendre irréductible la fraction $\frac{5\,148}{1\,386}$.

Exercice 11

1. Les nombres 756 et 441 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.
2. La fraction $\frac{756}{441}$ est-elle irréductible ? Sinon, l'écrire sous forme irréductible en justifiant, sur la copie, par des calculs.
3. Calculer la somme : $D = \frac{756}{441} + \frac{19}{21}$.

Exercice 12

On considère la fraction $\frac{170}{578}$.

1. Montrer que cette fraction n'est pas irréductible.
2. Déterminer le PGCD des nombres 170 et 578 (faire apparaître les différentes étapes).
3. Ecire la fraction $\frac{170}{578}$ sous forme irréductible.

Chapitre 12

Le calcul littéral

12.1 Le cours

12.1.1 Généralités sur les expressions numériques

Définitions

Une expression numérique $E(x)$ est un procédé de calcul qui utilise un nombre x (appelé la variable) pour obtenir un nombre $E(x)$.

Par exemple, soit $E(x) = 5x + 3$.
Pour chaque valeur particulière de x, on obtient une valeur de $E(x)$:
$E(\mathbf{6}) = 5 \times \mathbf{6} + 3 = 30 + 3 = 33$
$E(\mathbf{-4}) = 5 \times (\mathbf{-4}) + 3 = -20 + 3 = -17$

La variable peut apparaître plusieurs fois dans l'expression, comme dans l'expression $A(y) = (4y - 3)(2y + 5)$.
D'où les valeurs particulières suivantes :
$A(\mathbf{2}) = (4 \times \mathbf{2} - 3)(2 \times \mathbf{2} + 5) = (8 - 3)(4 + 5) = 5 \times 9 = 45$
$A(\mathbf{-3}) = (4 \times (\mathbf{-3}) - 3)(2 \times (\mathbf{-3}) + 5) = (-12 - 3)(-6 + 5) = (-15) \times (-1) = 15$

NB : Certaines expressions numériques utilisent plusieurs variables ; elles ne seront pas étudiées ici.

Formes développées ou factorisée

Parmi les expressions numériques étudiées au collègue on distingue :
- celles formées comme une somme de différents termes : on parlera d'une forme développée de l'expression ;
- celles formées comme un produit de différents facteurs : on parlera d'une forme factorisée de l'expression.

Voici des exemples d'expressions sous forme développée :
$A(x) = 4x - 3$
$B(x) = 5x + 3 - 12x + 7$
$C(y) = 5y^2 - 3y + 1$
$D(x) = 8x^2 - 3$
$E(x) = x^2 - 4x + 5$
$F(x) = 4x^2 - 7x$

Voici des exemples d'expressions sous forme factorisée :
$G(x) = 5(2x + 3)$
$H(y) = 3y(-5y + 7)$
$I(x) = (4x - 1)(x + 2)$
$J(x) = (-3x - 2)(7x + 3)$
$K(y) = 3(y - 2)(y + 2)$
$L(x) = -(2x + 3)(4x + 7)$

12.1.2 Développement d'une expression

Principe

Développer une expression numérique consiste à rechercher sa forme développée.

La première étape consiste à développer chaque partie factorisée de l'expression.
La deuxième étape consiste à réduire l'expression, c'est-à-dire additionner les termes d'une même puissance de la variable.
Le plus souvent, on ordonnera les termes du développement par ordre de puissances décroissantes de la variable.

Utilisation de la distributivité

On pourra utiliser l'une des formules suivantes où a, b, c, d et k sont des nombres relatifs :

$$\boxed{\begin{array}{l} k(a+b) = \mathbf{k}a + \mathbf{k}b \\ (a+b)(c+d) = \mathbf{a}c + \mathbf{a}d + \mathbf{b}c + \mathbf{b}d \end{array}}$$

D'où les exemples de développements suivants :

$A(x) = 4(2x+3)$
$A(x) = \mathbf{4} \times (2x) + \mathbf{4} \times 3$
$A(x) = 8x + 12$

$B(x) = (3x+2)(x+5)$
$B(x) = (\mathbf{3x}) \times x + (\mathbf{3x}) \times 5 + \mathbf{2} \times x + \mathbf{2} \times 5$
$B(x) = 3x^2 + 15x + 2x + 10$
$B(x) = 3x^2 + 17x + 10$

Les formules ne font apparaîtrent que des additions dans les parenthèses. Cependant, ces formules sont utilisables en considérant les soustractions comme des additions de nombres négatifs.
D'où les exemples de développements suivants :

$C(x) = 5(4x-3)$
$C(x) = \mathbf{5} \times (4x) + \mathbf{5} \times (-3)$
$C(x) = 8x + 12$

$B(x) = (2x-7)(-3x-4)$
$B(x) = (\mathbf{2x}) \times (-3x) + (\mathbf{2x}) \times (-4) + (\mathbf{-7}) \times (-3x) + (\mathbf{-7}) \times (-4)$
$B(x) = -6x^2 - 8x + 21x + 28$
$B(x) = -6x^2 + 13x + 28$

Utilisation des identités remarquables

On pourra utiliser l'une des formules suivantes où a est un nombre relatif et b un nombre positif :

$$\boxed{\begin{array}{l} (a+b)^2 = (a)^2 + 2 \times (a) \times (b) + (b)^2 \\ (a-b)^2 = (a)^2 - 2 \times (a) \times (b) + (b)^2 \\ (a+b)(a-b) = (a)^2 - (b)^2 \end{array}}$$

L'emploi systématique des parenthèses permet d'éviter un grand nombre d'erreurs.
D'où les exemples de développements suivants :

$A(x) = (5x+3)^2$
$A(x) = (5x)^2 + 2 \times (5x) \times (3) + (3)^2$
$A(x) = 25x^2 + 30x + 9$

$B(x) = (3x-4)^2$
$B(x) = (3x)^2 - 2 \times (3x) \times (4) + (4)^2$
$B(x) = 9x^2 - 24x + 16$

$C(x) = (5x-7)(5x+7)$
$C(x) = (5x)^2 - (7)^2$
$C(x) = 25x^2 - 49$

Développement d'expressions plus complexes

Une grande partie des expressions étudiées au collège ne sont ni développée ni factorisée : elles sont formée d'une somme ou d'une soustraction de deux termes, eux-mêmes factorisée.

Par exemple,

$A(x) = 4(2x+5) + (x-3)(5x-7)$
$B(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3)$
$C(x) = (x-3)(x+5) - (-3x+2)(x-5)$

Dans ce cas, il est vivement conseillé d'utiliser des crochets pour encadrer chaque terme de la somme ou de la soustraction.
Une fois le contenu de chaque crochet développé et réduit, il faudra ensuite prendre garde à la règle suivante :

Si les crochets (ou parenthèses) sont précédés d'un signe $-$, quand on enlève ces crochets,
on doit changer tous les signes des termes des crochets.

Par exemple, $[8x-5]$ - $\left[4x^2 - 3x + 8\right] = 8x - 5$ - $4x^2 + 3x$ - 8

D'où les développements des exemples précédents :

$$\begin{aligned}
&A(x) = 4(2x+5) + (x-3)(5x-7)\\
&A(x) = [4(2x+5)] + [(x-3)(5x-7)]\\
&A(x) = [\mathbf{4} \times (2x) + \mathbf{4} \times 5] + [\mathbf{x} \times (5x) + \mathbf{x} \times (-7) + (-\mathbf{3}) \times (5x) + (-\mathbf{3}) \times (-7)]\\
&A(x) = [8x+20] + \left[5x^2 - 7x - 15x + 21\right]\\
&A(x) = [8x+20] + \left[5x^2 - 22x + 21\right]\\
&A(x) = 8x + 20 + 5x^2 - 22x + 21\\
&A(x) = 5x^2 - 14x + 41
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3)\\
&B(x) = \left[(2x-3)^2\right] - [(4x+1)(x-3)]\\
&B(x) = \left[(2x)^2 - 2 \times (2x) \times (3) + (3)^2\right] - [(\mathbf{4x}) \times x + (\mathbf{4x}) \times (-3) + \mathbf{1} \times x + \mathbf{1} \times (-3)]\\
&B(x) = \left[4x^2 - 12x + 9\right] - \left[4x^2 - 12x + x - 3\right]\\
&B(x) = \left[4x^2 - 12x + 9\right] - \left[4x^2 - 11x - 3\right] \qquad \textit{Attention aux changements de signes.}\\
&B(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 11x + 3\\
&B(x) = -x + 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C(x) = (x-3)(x+5) - (-3x+2)(x-5)\\
&C(x) = [(x-3)(x+5)] - [(-3x+2)(x-5)]\\
&C(x) = [\mathbf{x} \times x + \mathbf{x} \times 5 + (-\mathbf{3}) \times x + (-\mathbf{3}) \times 5] - [(-\mathbf{3x}) \times x + (-\mathbf{3x}) \times (-5) + \mathbf{2} \times x + \mathbf{2} \times (-5)]\\
&C(x) = \left[x^2 + 5x - 3x - 15\right] - \left[-3x^2 + 15x + 2x - 10\right]\\
&C(x) = \left[x^2 + 2x - 15\right] - \left[-3x^2 + 17x - 10\right] \qquad \textit{Attention aux changements de signes.}\\
&C(x) = x^2 + 2x - 15 + 3x^2 - 17x + 10\\
&C(x) = 4x^2 - 15x - 5
\end{aligned}$$

12.1.3 Factorisation d'une expression

Utilisation d'un facteur commun

Pour factoriser une expression, une des techniques consiste à mettre en évidence un facteur commun.

D'où les exemples de factorisations suivants :

$$\begin{aligned}
&A(x) = 15x - 12\\
&A(x) = \mathbf{3} \times (5x) - \mathbf{3} \times 4\\
&A(x) = 3(5x-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B(x) = 6x^2 + 10x\\
&B(x) = (\mathbf{2x}) \times (3x) + (\mathbf{2x}) \times 5\\
&B(x) = 2x(3x+5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C(x) = (3x+2)(4x-1) + (3x+2)(-6x+8)\\
&C(x) = (\mathbf{3x+2}) \times (4x-1) + (\mathbf{3x+2}) \times (-6x+8)\\
&C(x) = (3x+2)\,[(4x-1) + (-6x+8)]\\
&C(x) = (3x+2)\,[4x - 1 - 6x + 8]\\
&C(x) = (3x+2)(-2x+7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D(x) = (3x-4)^2 - (2x-5)(3x-4)\\
&D(x) = (\mathbf{3x-4}) \times (3x-4) + (2x-5) \times (\mathbf{3x-4})\\
&D(x) = (3x-4)\,[(3x-4) - (2x-5)] \qquad \textit{Attention aux changements de signes.}\\
&D(x) = (3x-4)\left[3x - 4 - 2x + 5\right]\\
&D(x) = (3x-4)(x+1)
\end{aligned}$$

Utilisation des identités remarquables

Une autre technique de factorisation consiste à mettre en évidence une identité remarquable.

D'où les exemples de factorisations suivants :

$A(x) = 9x^2 + 42x + 49$
$A(x) = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times (7) + (7)^2$ *De la forme* $(a+b)^2$.
$A(x) = (3x+7)^2$

$B(x) = 25x^2 - 60x + 36$
$B(x) = (5x)^2 - 2 \times (5x) \times (6) + (6)^2$ *De la forme* $(a-b)^2$.
$B(x) = (5x-6)^2$

$C(x) = 9x^2 - 64$
$C(x) = (3x)^2 - (8)^2$ *De la forme* $(a-b)(a+b)$.
$C(x) = (3x-8)(3x+8)$

12.1.4 Equations du premier degré

Généralités

Une équation à une inconnue x est une égalité entre deux expressions numériques de variable x.
Résoudre une telle équation consiste à chercher la ou les valeurs de x (si elles existent) qui vérifient l'égalité.

Soit l'équation $2x + 3 = 5x - 9$.
Vérifions si la valeur 3 est une solution de cette équation.
$2 \times \mathbf{3} + 3 = 6 + 3 = 9$
$5 \times \mathbf{3} - 9 = 15 - 9 = 6$
L'égalité n'étant pas vérifiée, 3 n'est pas une solution de cette équation.

Une équation est du premier degré si elle peut se ramener à une équation de la forme $ax + b = 0$ où a et b sont deux nombres.

Voici des exemples d'équations du premier degré :

- $7x + 3 = 0$
- $3x - 7 = 5$
- $7x + 8 = 3x - 2$
- $-3x + 4(x+3) = 5(2x+4) + 6x$
- $4x^2 - 3x + 1 = 4x^2 + 9$ *Les* $4x^2$ *s'éliminent.*

Voici des exemples d'équations qui ne sont pas du premier degré (contre-exemples) :

- $5x^2 - 3x + 1 = 0$
- $5x^2 + 3 = 7x - 2$
- $(3x-8)^2 = 5$
- $(5x+1)(-2x+3) = 0$
- $6x(4x-3) = 2x + 7$

Résolution d'une équation du premier degré

Principe Si on ajoute, on soustrait, on multplie ou on divise par un nombre non nul les deux côtés d'une équation, on obtient une autre équation ayant les mêmes solutions que la première.

Pour résoudre une équation du premier degré, on peut utiliser les étapes suivantes :
- on développe, et on réduit les deux membres de l'équation ;
- on regroupe les constantes à droite en ajoutant la même valeur des deux côtés ;
- on regroupe les termes contenant l'inconnue à gauche en ajoutant la même valeur des deux côtés ;
- on divise si possible des deux côtés par le coefficient de l'inconnue ;
- on conclut.

Résolvons par exemple l'équation suivante : $5(2x-3)+3x-7=2(2x+9)$

$$\begin{array}{rcll}
5(2x-3)+3x-7 & = & 2(2x+9) & \textit{On développe.}\\
5\times(2x)+5\times(-3)+3x-7 & = & 2\times(2x)+2\times 9 & \\
10x-15+3x-7 & = & 4x+18 & \\
13x-22 & = & 4x+18 & \\
13x-22+\mathbf{22} & = & 4x+18+\mathbf{22} & \textit{On regroupe les constantes.}\\
13x & = & 4x+40 & \\
13x-\mathbf{4x} & = & 4x+40-\mathbf{4x} & \textit{On regroupe les termes en } x.\\
9x & = & 40 & \\
\dfrac{9x}{\mathbf{9}} & = & \dfrac{40}{\mathbf{9}} & \textit{On divise par le coefficient } 9.\\
x & = & \dfrac{40}{9} &
\end{array}$$

$\dfrac{40}{9}$ est la solution de l'équation. *On conclut.*

Résolvons de même l'équation suivante : $3(2x+4)-2x=5(x+3)$

$$\begin{array}{rcll}
3(2x+4)-2x & = & 5(x+3) & \textit{On développe.}\\
3\times(2x)+3\times 4-2x & = & 5\times x+5\times 3 & \\
6x+12-2x & = & 5x+15 & \\
4x+12 & = & 5x+15 & \\
4x+12-\mathbf{12} & = & 5x+15-\mathbf{12} & \textit{On regroupe les constantes.}\\
4x & = & 5x+3 & \\
4x-\mathbf{5x} & = & 5x+3-\mathbf{5x} & \textit{On regroupe les termes en } x.\\
-x & = & 3 & \\
\dfrac{-x}{\mathbf{-1}} & = & \dfrac{3}{\mathbf{-1}} & \textit{On divise par le coefficient } (-1).\\
x & = & -3 &
\end{array}$$

-3 est la solution de l'équation. *On conclut.*

Cas particuliers

Equations se ramenant à $0x=0$

Résolvons l'équation suivante : $5(3x+4)-11=3(4x+3)+3x$

$$\begin{array}{rcll}
5(3x+4)-11 & = & 3(4x+3)+3x & \textit{On développe.}\\
5\times(3x)+5\times 4-11 & = & 3\times(4x)+3\times 3+3x & \\
15x+20-11 & = & 12x+9+3x & \\
15x+9 & = & 15x+9 & \\
15x+9-\mathbf{9} & = & 15x+9-\mathbf{9} & \textit{On regroupe les constantes.}\\
15x & = & 15x & \\
15x-\mathbf{15x} & = & 15x-\mathbf{15x} & \textit{On regroupe les termes en } x.\\
0x & = & 0 &
\end{array}$$

Tout nombre est solution de l'équation. *On conclut.*

NB : on peut bien évidemment conclure dès que les deux membres de l'équation sont identiques, sans faire les regroupements.

Equations se ramenant à $0x = k$ où k est un nombre non nul

Résolvons l'équation suivante : $2(7x-5)+4x = 6(3x-2)+5$

$$\begin{array}{rcll}
2(7x-5)+4x & = & 6(3x-2)+5 & \textit{On développe.} \\
2\times(7x)+2\times(-5)+4x & = & 6\times(3x)+6\times(-2)+5 & \\
14x-10+4x & = & 18x-12+5 & \\
18x-10 & = & 18x-7 & \\
18x-10+\mathbf{10} & = & 18x-7+\mathbf{10} & \textit{On regroupe les constantes.} \\
18x & = & 18x+3 & \\
18x-\mathbf{18x} & = & 18x+3-\mathbf{18x} & \textit{On regroupe les termes en } x. \\
0x & = & 3 &
\end{array}$$

Il n'y a pas de solution. *On conclut.*

Résolution de problèmes

Principe Pour résoudre certains problèmes à l'aide d'une équation du premier degré, il faut tout d'abord mettre en équation le problème, c'est-à-dire, choisir une inconnue et traduire l'énoncé en fonction de cette inconnue.

Résolvons le problème suivant.

Enoncé
Trouver trois nombres consécutifs dont le somme soit égale à 192.

Solution
Appelons x le plus petit des trois nombres.
Les deux autres sont alors $(x+1)$ et $(x+2)$.
La somme des trois nombres étant égale à 192, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{array}{rcll}
x+(x+1)+(x+2) & = & 192 & \textit{On développe.} \\
x+x+1+x+2 & = & 192 & \\
3x+3 & = & 192 & \\
3x+3-\mathbf{3} & = & 192-\mathbf{3} & \textit{On regroupe les constantes.} \\
3x & = & 189 & \\
\dfrac{3x}{\mathbf{3}} & = & \dfrac{189}{\mathbf{3}} & \textit{On divise par le coefficient } 3. \\
x & = & 63 &
\end{array}$$

Les trois nombres sont 63, 64 et 65. *On conclut le problème.*

12.1.5 Inéquations

Généralités

Une inéquation à une inconnue x est une inégalité entre deux expressions numériques de variable x.
Résoudre une telle inéquation consiste à chercher les valeurs de x (si elles existent) qui vérifient l'inégalité.

Soit l'inéquation $3x+2 < 4x-5$.
Vérifions si la valeur (-2) est une solution de cette équation.
$3\times(-\mathbf{2})+2 = -6+2 = -4$
$4\times(-\mathbf{2})-5 = -8-5 = -13$
L'inégalité n'étant pas vérifiée, (-2) n'est pas une solution de cette inéquation.

Résolution d'une inéquation du premier degré

Principe La technique de résolution d'une inéquation ressemble à la technique de résolution d'une équation. Cependant, lors de la division par le coefficient de l'inconnue, **si celui-ci est négatif, il faudra inverser le sens de l'inéquation**.

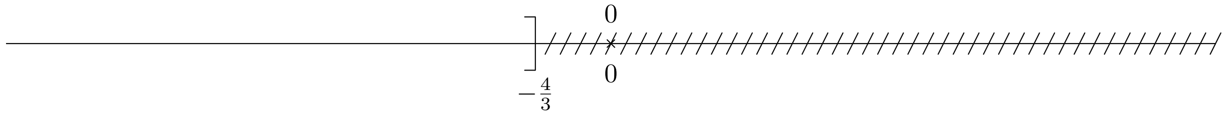
Pour résoudre une inéquation du premier degré, on peut utiliser les étapes suivantes :

- on développe, et on réduit les deux membres de l'équation ;
- on regroupe les constantes à droite en ajoutant la même valeur des deux côtés ;
- on regroupe les termes contenant l'inconnue à gauche en ajoutant la même valeur des deux côtés ;
- on divise si possible des deux côtés par le coeficient de l'inconnue **en faisant attention à son signe** ;
- on conclut sur l'axe graduée des nombres relatifs **en hachurant la partie qui n'est pas solution**.

Résolvons par exemple l'équation suivante : $7(2x-3)-3x \leqslant 8x-25$

$$\begin{array}{rcll}
7(2x-3)-3x & \leqslant & 8x-25 & \textit{On développe.} \\
7\times(2x)+7\times(-3)-3x & \leqslant & 8x-25 & \\
14x-21-3x & \leqslant & 8x-25 & \\
11x-21 & \leqslant & 8x-25 & \\
11x-21+\mathbf{21} & \leqslant & 8x-25+\mathbf{21} & \textit{On regroupe les constantes.} \\
11x & \leqslant & 8x-4 & \\
11x-\mathbf{8x} & \leqslant & 8x-4-\mathbf{8x} & \textit{On regroupe les termes en } x. \\
3x & \leqslant & -4 & \\
\dfrac{3x}{\mathbf{3}} & \leqslant & \dfrac{-4}{\mathbf{3}} & \textit{On divise par le coefficient } \textbf{positif } 3. \\
x & \leqslant & -\dfrac{4}{3} &
\end{array}$$

D'où les solutions :

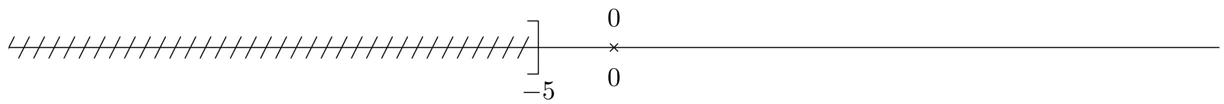


NB : Après avoir hachurée la partie qui n'est pas solution, on tourne le crochet vers les solutions car la valeur $-\dfrac{4}{3}$ *est acceptable.*

De même, résolvons l'équation suivante : $4(x-2)-2 < 3(3x+5)$

$$\begin{array}{rcll}
 & & & \textit{On développe.} \\
4(x-2)-2 & < & 3(3x+5) & \\
4\times x+4\times(-2)-2 & < & 3\times(3x)+3\times 5 & \\
4x-8-2 & < & 9x+15 & \\
4x-10 & < & 9x+15 & \textit{On regroupe les constantes.} \\
4x-10+\mathbf{10} & < & 9x+15+\mathbf{10} & \\
4x & < & 9x+25 & \textit{On regroupe les termes en } x. \\
4x-\mathbf{9x} & < & 9x+25-\mathbf{9x} & \\
-5x & < & 25 & \\
\dfrac{-5x}{\mathbf{-5}} & > & \dfrac{25}{\mathbf{-5}} & \textit{On divise par le coefficient } \textbf{négatif } (-5) \\
x & > & -5 & \textit{On inverse l'ordre.}
\end{array}$$

D'où les solutions :



NB : Après avoir hachurée la partie qui n'est pas solution, on tourne le crochet vers la partie hachurée car la valeur (-5) *n'est pas acceptable.*

12.1.6 Equation de type “produit nul”

Généralités

En collège, on étudie également certaines équations à une inconnue du second degré.
Les seules équations du second degré que l'on peut résoudre à ce stade sont les équations de type “produit nul”.
Comme son nom l'indique, une équation de type “produit nul” comprend :
- un membre constitué d'un produit de deux facteurs du premier degré ;
- l'autre membre nul.

Voici quelques exemples d'équations de type “produit nul” :
- $(2x-3)(4x+1)=0$.
- $(3x-5)(3x+5)=0$.
- $3x(5x+2)=0$.
- $5(x-1)(2x+3)=0$.

Résolution d'une équation de type “produit nul”

Principe Un produit est nul si l'un des facteurs est nul.
Par ce principe, une équation de type “produit nul” se ramène à deux résolutions d'équations du premier degré.

Résolvons par exemple l'équation suivante : $(2x-3)(x-5)=0$.
Ce produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{rcl}2x-3&=&0\\2x-3+\mathbf{3}&=&0+\mathbf{3}\\2x&=&3\\\dfrac{2x}{\mathbf{2}}&=&\dfrac{3}{\mathbf{2}}\\x&=&\dfrac{3}{2}\end{array}\quad\text{ou}\quad\begin{array}{rcl}x-5&=&0\\x-5+\mathbf{5}&=&0+\mathbf{5}\\x&=&5\end{array}$$

$\frac{3}{2}$ et 5 sont les solutions de cette équation.

De même, résolvons l'équation suivante : $(3x-5)(-2x+7)=0$.
Ce produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{rcl}3x+5&=&0\\3x+5-\mathbf{5}&=&0-\mathbf{5}\\3x&=&-5\\\dfrac{3x}{\mathbf{3}}&=&\dfrac{-5}{\mathbf{3}}\\x&=&-\dfrac{5}{3}\end{array}\quad\text{ou}\quad\begin{array}{rcl}-2x+7&=&0\\-2x+7-\mathbf{7}&=&0-\mathbf{7}\\-2x&=&-7\\\dfrac{-2x}{\mathbf{-2}}&=&\dfrac{-7}{\mathbf{-2}}\\x&=&\dfrac{7}{2}\end{array}$$

$-\frac{5}{3}$ et $\frac{7}{2}$ sont les solutions de cette équation.

Autres équations du second degré

Pour réussir à résoudre les autres équations du second degré, le principe consistera à les transformer en une équation de type “produit nul” :
- regrouper tous les termes du côté gauche pour faire apparaître un côté droit nul ;
- factoriser le côté gauche.

Résolvons par exemple l'équation suivante : $4x^2=9$.

$$\begin{array}{rcll}4x^2&=&9&\\4x^2-\mathbf{9}&=&9-\mathbf{9}&\\4x^2-9&=&0&\quad\textit{De la forme } (a)^2-(b)^2.\\(2x)^2-(3)^2&=&0&\\(2x-3)(2x+3)&=&0&\end{array}$$

Ce produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{rcl} 2x-3 &=& 0 \\ 2x-3+\mathbf{3} &=& 0+\mathbf{3} \\ 2x &=& 3 \\ \dfrac{2x}{\mathbf{2}} &=& \dfrac{3}{\mathbf{2}} \\ x &=& \dfrac{3}{2} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} 2x+3 &=& 0 \\ 2x+3-\mathbf{3} &=& 0-\mathbf{3} \\ 2x &=& -3 \\ \dfrac{2x}{\mathbf{2}} &=& \dfrac{-3}{\mathbf{2}} \\ x &=& -\dfrac{3}{2} \end{array}$$

$-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$ sont les solutions de cette équation.

De même, résolvons l'équation suivante : $(3x-1)(x+4) = (3x-1)(4x+7)$.

$$\begin{array}{rcl} (3x-1)(x+4) &=& (3x-1)(4x+7) \\ (3x-1)(x+4) - (\mathbf{3x-1})(\mathbf{4x+7}) &=& (3x-1)(4x+7) - (\mathbf{3x-1})(\mathbf{4x+7}) \\ (3x-1)(x+4) - (3x-1)(4x+7) &=& 0 \\ (\mathbf{3x-1})(x+4) - (\mathbf{3x-1})(4x+7) &=& 0 \qquad \textit{On a un facteur commun : } (3x-1). \\ (3x-1)\left[(x+4)-(4x+7)\right] &=& 0 \\ (3x-1)\left[x+4-4x-7\right] &=& 0 \\ (3x-1)(-3x-3) &=& 0 \end{array}$$

Ce produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{rcl} 3x-1 &=& 0 \\ 3x-1\mathbf{1} &=& 0+\mathbf{1} \\ 3x &=& 1 \\ \dfrac{3x}{\mathbf{3}} &=& \dfrac{1}{\mathbf{3}} \\ x &=& \dfrac{1}{3} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} -3x-3 &=& 0 \\ -3x-3+\mathbf{3} &=& 0+\mathbf{3} \\ -3x &=& 3 \\ \dfrac{-3x}{\mathbf{-3}} &=& \dfrac{3}{\mathbf{-3}} \\ x &=& -1 \end{array}$$

-1 et $\dfrac{1}{3}$ sont les solutions de cette équation.

12.1.7 Système de deux équations à deux inconnues

Généralités

Résoudre une équation du premier degré à deux inconnues x et y revient à chercher les couples de valeurs $(x;y)$ qui vérifient l'égalité donnée.

Soit l'équation $2x+5y=12$.
Vérifions si le couple $(1;2)$ est une solution de l'équation :
$2\times\mathbf{1}+5\times\mathbf{2}=2+10=12$
Le couple $(1;2)$ est une bien une solution de l'équation.
NB : il y a en a une infinité !

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues x et y revient à chercher le ou les couples de valeurs $(x;y)$ qui sont solution des deux équations à la fois. Les systèmes étudiés au collège ont un couple solution unique.

Soit le système $\left\{\begin{array}{r} 3x+2y=13 \\ x+2y=9 \end{array}\right.$
Testons le couple de valeurs $(1;5)$:
$3\times\mathbf{1}+2\times\mathbf{5}=3+10=13$
$\mathbf{1}+2\times\mathbf{5}=1+10=11$
$(1;5)$ est solution de la première équation mais pas de la seconde : $(1;5)$ n'est pas solution du système.

Résolution par substitution

Principe Dans cette méthode, on exprime une des inconnues en fonction de l'autre dans une équation. On remplace ensuite dans l'autre équation.

Résolvons par exemple le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x-4y=18 & (1) \\ 5x+\ \ y=7 & (2) \end{array}\right.$$

Exprimons y en fonction de x dans l'équation (2) :
$5x + y = 7$
$5x + y - \mathbf{5x} = 7 - \mathbf{5x}$
$y = -5x + 7$ (3)

On remplace y par $(-5x + 7)$ dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
3x - 4y &= 18\\
3x - 4(-5x + 7) &= 18\\
3x - [\mathbf{4} \times (-5x) + \mathbf{4} \times 7] &= 18\\
3x - [-20x + 28] &= 18\\
3x + 20x - 28 &= 18\\
23x - 28 &= 18\\
23x - 28 + \mathbf{28} &= 18 + \mathbf{28}\\
23x &= 46\\
\frac{23x}{\mathbf{23}} &= \frac{46}{\mathbf{23}}\\
x &= 2
\end{aligned}$$

On remplace x par 2 dans l'équation (3) :
$y = -5x + 7$
$y = -5 \times \mathbf{2} + 7$
$y = -10 + 7$
$y = -3$

Le couple $(2; -3)$ est la solution du système.
Vérifions :
$3 \times \mathbf{2} - 4 \times (-\mathbf{3}) = 6 - (-12) = 6 + 12 = 18$
$5 \times \mathbf{2} + (-\mathbf{3}) = 10 - 3 = 7$

NB : cette méthode est particulièrement adaptée quand l'une des inconnues s'expriment facilement en fonction de l'autre. C'était le cas dans cet exemple avec y dans l'équation (2).

De même, résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & (1)\\ 4x - 6y = 16 & (2) \end{cases}$$

Exprimons x en fonction de y dans l'équation (1) :
$x - 2y = 3$
$x - 2y + \mathbf{2y} = 3 + \mathbf{2y}$
$x = 2y + 3$ (3)

On remplace x par $(2y + 3)$ dans l'équation (2) :

$$\begin{aligned}
4x - 6y &= 16\\
4(2y + 3) - 6y &= 16\\
\mathbf{4} \times (2y) + \mathbf{4} \times 3 - 6y &= 16\\
8y + 12 - 6y &= 16\\
2y + 12 &= 16\\
2y + 12 - \mathbf{12} &= 16 - \mathbf{12}\\
2y &= 4\\
\frac{2y}{\mathbf{2}} &= \frac{4}{\mathbf{2}}\\
y &= 2
\end{aligned}$$

On remplace y par 2 dans l'équation (3) :
$x = 2y + 3$
$x = 2 \times \mathbf{2} + 3$
$x = 4 + 3$
$x = 7$

Le couple $(7; 2)$ est la solution du système.
Vérifions :
$\mathbf{7} - 2 \times \mathbf{2} = 7 - 4 = 3$
$4 \times \mathbf{7} - 6 \times \mathbf{2} = 28 - 12 = 16$

Résolution par combinaison

Principe Dans cette méthode, on cherche à isoler une inconnue en multipliant les équations par des coefficients, puis en ajoutant les équations membre à membre.

Résolvons par exemple le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 3 & (1)\\ 5x + 2y = -5 & (2) \end{cases}$$

$\begin{cases} 4x + 3y = 3 & \times 2 \\ 5x + 2y = -5 & \times(-3) \end{cases}$

$\begin{cases} 8x + 6y = 6 \\ -15x - 6y = 15 \end{cases}$

Ajoutons membre à membre :

$8x - 15x + 6y - 6y = 6 + 15$

$-7x = 21$

$\dfrac{-7x}{\mathbf{-7}} = \dfrac{21}{\mathbf{-7}}$

$x = -3$

Remplaçons x par (-3) dans l'équation (1) :

$4x + 3y = 3$

$4 \times (-3) + 3y = 3$

$-12 + 3y = 3$

$-12 + 3y + \mathbf{12} = 3 + \mathbf{12}$

$3y = 15$

$\dfrac{3y}{\mathbf{3}} = \dfrac{15}{\mathbf{3}}$

$y = 5$

Le couple $(-3; -5)$ est la solution du système.

Vérifions :

$4 \times (-\mathbf{3}) + 3 \times \mathbf{5} = -12 + 15 = 3$

$5 \times (-\mathbf{3}) + 2 \times \mathbf{5} = -15 + 10 = -5$

De même, résolvons le système suivant :

$\begin{cases} -3x + 5y = 14 & (1) \\ 9x - 2y = 10 & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} -3x + 5y = 14 & \times 3 \\ 9x - 2y = 10 & \times 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -9x + 15y = 42 \\ 9x - 2y = 10 \end{cases}$

Ajoutons membre à membre :

$-9x + 9x + 15y - 2y = 42 + 10$

$13y = 52$

$\dfrac{13y}{\mathbf{13}} = \dfrac{52}{\mathbf{13}}$

$y = 4$

Remplaçons y par 4 dans l'équation (1) :

$-3x + 5y = 14$

$-3x + 5 \times 4 = 14$

$-3x + 20 = 14$

$-3x + 20 - \mathbf{20} = 14 - \mathbf{20}$

$-3x = -6$

$\dfrac{-3x}{\mathbf{-3}} = \dfrac{-6}{\mathbf{-3}}$

$x = 2$

Le couple $(2; 4)$ est la solution du système.

Vérifions :

$-3 \times \mathbf{2} + 5 \times \mathbf{4} = -6 + 20 = 14$

$9 \times \mathbf{2} - 2 \times \mathbf{4} = 18 - 8 = 10$

Application : résolution d'un problème

Principe La première étape consiste à choisir les deux inconnues, puis à traduire l'énoncé à l'aide de ses deux inconnues.

Enoncé

Une marchande vend des mangues et des ignames :

– Madame FRUIT achète $6\,kg$ de mangues et $2\,kg$ d'ignames pour 14€.
– Madame LEGUME achète $3\,kg$ de mangues et $8\,kg$ d'ignames pour $24,50$€.

1. Ecrire un système d'équations traduisant les données.
2. Résoudre le système pour trouver le prix de $1\,kg$ de mangues et celui de $1\,kg$ d'ignames.

Solution

1. Ecrivons un système d'équations traduisant les données.

   Appelons m le prix de $1\,kg$ de mangues et i celui de $1\,kg$ d'ignames.
   $6\,kg$ de mangues et $2\,kg$ d'ignames coûtent 14€, d'où l'équation : $6m + 2i = 14$.
   $3\,kg$ de mangues et $8\,kg$ d'ignames coûtent $24,50$€, d'où l'équation : $3m + 8i = 24,50$.

   D'où le système, $\begin{cases} 6m + 2i = 14 \\ 3m + 8i = 24,50 \end{cases}$

2. Résolvons le système pour trouver le prix de 1 kg de mangues et celui de 1 kg d'ignames.

$$\begin{cases} 6m+2i=14 & (1) \\ 3m+8i=24,50 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6m+2i=14 & \times 1 \\ 3m+8i=24,50 & \times(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6m+2i=14 \\ -6m-16i=-49 \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre :

$6m-6m+2i-16i=14-49$

$-14i=-35$

$\dfrac{-14i}{\mathbf{-14}}=\dfrac{-35}{\mathbf{-14}}$

$i=2,50$

Remplaçons i par 2, 50 dans l'équation (1) :

$6m+2i=14$

$6m+2\times 2,50+3y=14$

$6m+5=14$

$6m+5-\mathbf{5}=14-\mathbf{5}$

$6m=9$

$\dfrac{6m}{\mathbf{6}}=\dfrac{9}{\mathbf{6}}$

$m=1,50$

Le couple $(1,50;2,50)$ est la solution du système.

Vérifions :

$6\times\mathbf{1,50}+2\times\mathbf{2,50}=9+5=14$

$3\times\mathbf{1,50}+8\times\mathbf{2,50}=4,50+20=24,50$

1 kg de mangues coûte 1, 50 €.

1 kg d'ignames coûte 2, 50 €.

Application : intersection de deux droites

En géométrie analytique, on se servira des systèmes de deux équations à deux inconnues pour chercher les coordonnées du point d'intersection de deux droites.

12.2 Les exercices

12.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1

Enoncé

On considère l'expression $A=(x+5)^2-(x+5)(2x+1)$.

1. Développer et réduire A.
2. Factoriser l'expression A.
3. Résoudre l'équation $(x+5)(-x+4)=0$.

Solution

1. Développons A.

$A=(x+5)^2-(x+5)(2x+1)$

$A=\left[(x+5)^2\right]-\left[(x+5)(2x+1)\right]$

$A=\left[(x)^2+2\times(x)\times(5)+(5)^2\right]-\left[(x\times(2x)+x\times 1+5\times(2x)+5\times 1\right]$

$A=\left[x^2+10x+25\right]-\left[2x^2+x+10x+5\right]$

$A=\left[x^2+10x+25\right]-\left[2x^2+11x+5\right]$

$A=x^2+10x+25-2x^2-11x-5$

$A=-x^2-x+20$

2. Factorisons A.

$A=(x+5)^2-(x+5)(2x+1)$

$A=(\mathbf{x+5})(x+5)-(\mathbf{x+5})(2x+1)$

$A=(x+5)\left[(x+5)-(2x+1)\right]$

$A=(x+5)\left[x+5-2x-1\right]$

$A=(x+5)(-x+4)$

3. Résolvons l'équation $(x+5)(-x+4)=0$.
   Ce produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :
   $$\begin{array}{rcl} x+5 &=& 0 \\ x+5-\mathbf{5} &=& 0-\mathbf{5} \\ x &=& -5 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} -x+4 &=& 0 \\ -x+4-\mathbf{4} &=& 0-\mathbf{4} \\ -x &=& -4 \\ \dfrac{-x}{\mathbf{-1}} &=& \dfrac{-4}{\mathbf{-1}} \\ x &=& 4 \end{array}$$
   -5 et 4 sont les solutions de cette équation.

Exercice 2

Enoncé

On donne $E=(4x-1)(x+5)-(4x-1)^2$.

1. Montrer que E peut s'écrire $3(4x-1)(-x+2)$.
2. Calculer la valeur de E pour $x=\dfrac{1}{4}$, et pour $x=0$.
3. Résoudre l'équation $E=0$.

Solution

1. Montrons que E peut s'écrire $3(4x-1)(-x+2)$.
   Pour cela, factorisons E.
   $E=(4x-1)(x+5)-(4x-1)^2$
   $E=(\mathbf{4x}+\mathbf{1})(x+5)-(\mathbf{4x}+\mathbf{1})(4x+1)$
   $E=(4x+1)\left[(x+5)-(4x-1)\right]$
   $E=(4x+1)\left[x+5-4x+1\right]$
   $E=(4x+1)(-3x+6)$
   $E=(4x+1)\left[\mathbf{3}\times(-x)+\mathbf{3}\times 2\right]$
   $E=(4x+1)\left[\mathbf{3}(-x+2)\right]$
   $E=(4x+1)\times 3\times(-x+2)$
   On a bien $E=3(4x-1)(-x+2)$.
2. Calculons la valeur de E pour $x=\dfrac{1}{4}$, et pour $x=0$.
   Utilisons la forme factorisée pour calculer ces valeurs.
   $$E\left(\frac{1}{4}\right)=3(4\times\frac{1}{4}-1)(-\frac{1}{4}+2)$$
   $$E\left(\frac{1}{4}\right)=3(1-1)(-\frac{1}{4}+2)$$
   $$E\left(\frac{1}{4}\right)=3\times 0\times(-\frac{1}{4}+2)$$
   $$E\left(\frac{1}{4}\right)=0$$
   $E(0)=3(4\times 0-1)(-0+2)$
   $E(0)=3\times(-1)\times 2$
   $E(0)=-6$
3. Résolvons l'équation $E=0$.
   $3(4x-1)(-x+2)=0$
   Ce produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :
   $$\begin{array}{rcl} 4x-1 &=& 0 \\ 4x-1+\mathbf{1} &=& 0+\mathbf{1} \\ 4x &=& 1 \\ \dfrac{4x}{\mathbf{4}} &=& \dfrac{1}{\mathbf{4}} \\ x &=& -\dfrac{1}{4} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} -x+2 &=& 0 \\ -x+2-\mathbf{2} &=& 0-\mathbf{2} \\ -x &=& -2 \\ \dfrac{-x}{\mathbf{-1}} &=& \dfrac{-2}{\mathbf{-1}} \\ x &=& 2 \end{array}$$
   $-\dfrac{1}{4}$ et 2 sont les solutions de cette équation.

Exercice 3

Enoncé
On considère l'expression $D = (2x+3)^2 - (x-4)^2$.

1. Développer et réduire D.
2. Ecrire D sous la forme d'un produit de deux facteurs.
3. Calculer D pour $x = \sqrt{3}$. (On donnera la valeur exacte du résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec a et b entiers.)

Solution

1. Développons D.
   $D = (2x+3)^2 - (x-4)^2$
   $D = \left[(2x+3)^2\right] - \left[(x-4)^2\right]$
   $D = \left[(2x)^2 + 2\times(2x)\times 3 + (3)^2\right] - \left[(x)^2 - 2\times x\times 4 + (4)^2\right]$
   $D = \left[4x^2 + 12x + 9\right] - \left[x^2 - 8x + 16\right]$
   $D = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 8x - 16$
   $D = 3x^2 + 20x - 7$
2. Factorisons D.
   $D = (2x+3)^2 - (x-4)^2$
   $D = [(2x+3) - (x-4)]\,[(2x+3) + (x-4)]$
   $D = [2x + 3 - x + 4]\,[2x + 3 + x - 4]$
   $D = (x+7)(3x-1)$
3. Calculons D pour $x = \sqrt{3}$.
   On utilise la forme développée.
   $D\left(\sqrt{3}\right) = 3\left(\sqrt{3}\right)^2 + 20\sqrt{3} - 7$
   $D\left(\sqrt{3}\right) = 3\times 3 + 20\sqrt{3} - 7$
   $D\left(\sqrt{3}\right) = 9 + 20\sqrt{3} - 7$
   $D\left(\sqrt{3}\right) = 2 + 20\sqrt{3}$

Exercice 4

Enoncé

1. Résoudre le système suivant :
   $$\begin{cases} 3x - 7y = 18,8 \\ x - 5y = 10 \end{cases}$$
2. Résoudre l'inéquation $4x - 5 \leqslant 10x + 1$. Représenter en couleur les solutions sur une droite graduée.
3. Le nombre 4 vérifie-t-il l'équation $x^2 - 5x = 4$? Indiquer les calculs. On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

Solution

1. Résolvons le système suivant par substitution : $\begin{cases} 3x - 7y = 18,8 & (1) \\ x - 5y = 10 & (2) \end{cases}$

Exprimons x en fonction de y dans l'équation (2) :
$x - 5y = 10$
$x - 5y + \mathbf{5y} = 10 + \mathbf{5y}$
$x = 5y + 10 \quad (3)$

On remplace x par $(5y + 10)$ dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= 18,8 \\ 3(5y + 10) - 4y &= 18 \\ \mathbf{3} \times (5x) + \mathbf{3} \times 10 - 7y &= 18,8 \\ 15y + 30 - 7y &= 18,8 \\ 8y + 30 &= 18,8 \\ 8y + 30 - \mathbf{30} &= 18,8 - \mathbf{30} \\ 8y &= -11,2 \\ \frac{8y}{\mathbf{8}} &= \frac{-11,2}{\mathbf{8}} \\ y &= -1,4 \end{aligned}$$

On remplace y par $-1,4$ dans l'équation (3) :
$x = 5y + 10$
$x = 5 \times (\mathbf{-1,4}) + 10$
$x = -7 + 10$
$x = 3$

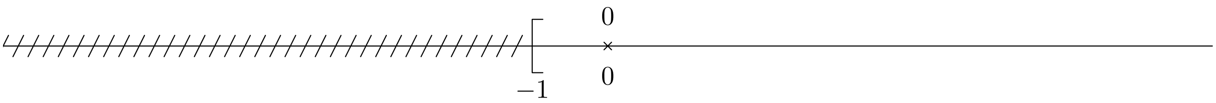
Le couple $(3; -1,4)$ est la solution du système.
Vérifions :
$3 \times \mathbf{3} - 7 \times (\mathbf{-1,4}) = 9 - (-9,8) = 9 + 9,8 = 18,8$
$\mathbf{3} - 5 \times (\mathbf{-1,4}) = 3 - (-7) = 3 + 7 = 10$

2. Résolvons l'inéquation $4x - 5 \leqslant 10x + 1$.

$$\begin{array}{rcl} 4x - 5 & \leqslant & 10x + 1 \\ 4x - 5 + \mathbf{5} & \leqslant & 10x + 1 + \mathbf{5} \\ 4x & \leqslant & 10x + 6 \\ 4x - \mathbf{10x} & \leqslant & 10x + 6 - \mathbf{10x} \\ -6x & \leqslant & 6 \\ \dfrac{-6x}{\mathbf{-6}} & \geqslant & \dfrac{6}{\mathbf{-6}} \\ x & \geqslant & -1 \end{array}$$

On divise par le coefficient **négatif** (-6).

D'où les solutions :



NB : Après avoir hachurée la partie qui n'est pas solution, on tourne le crochet vers les solutions car la valeur (-1) *est acceptable.*

3. Vérifions si 4 est solution de l'équation $x^2 - 5x = 4$.
   Remplaçons x par 4 dans le membre de gauche :
   $\mathbf{4}^2 - 5 \times \mathbf{4} = 16 - 20 = -4$ et non 4.
   Le nombre 4 n'est pas une solution de l'équation l'équation $x^2 - 5x = 4$.

Exercice 5

Enoncé

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

2. Le CDI d'un collège a acheté 2 exemplaires d'une même bande dessinée et 3 exemplaires d'un même livre de poche pour la somme de 30 €.
   Une bande dessinée coûte 5 € de plus qu'un livre.
   Quel est le prix en euros d'une bande dessinée ?
   Quel est le prix en euros d'un livre de poche ?

Solution

1. Résolvons le système : $\begin{cases} 2x + 3y = 30 & (1) \\ x - y = 5 & (2) \end{cases}$

   Exprimons x en fonction de y dans l'équation (2) :
   $x - y = 5$
   $x - y + \mathbf{y} = 5 + \mathbf{y}$
   $x = y + 5 \quad (3)$

   On remplace y par 4 dans l'équation (3) :
   $x = y + 5$
   $x = \mathbf{5} + 4$
   $x = 9$

   On remplace x par $(y + 5)$ dans l'équation (1) :
   $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 30 \\ 2(y + 5) + 3y &= 30 \\ \mathbf{2} \times y + \mathbf{y} \times 5 + 3y &= 30 \\ 2y + 10 + 3y &= 30 \\ 5y + 10 &= 30 \\ 85y + 10 - \mathbf{10} &= 30 - \mathbf{10} \\ 5y &= 20 \\ \frac{5y}{\mathbf{5}} &= \frac{20}{\mathbf{5}} \\ y &= 4 \end{aligned}$$

   Le couple $(9; 4)$ est la solution du système.
   Vérifions :
   $2 \times \mathbf{9} + 3 \times \mathbf{4} = 18 + 12 = 30$
   $\mathbf{3} - \mathbf{4} = 9 - 4 = 5$

2. Retrouvons le prix d'une bande dessinée et celui d'un livre de poche.
   Appelons x le prix d(une bande dessinée et y celui d'un livre de poche.
   2 bandes dessinées et 3 livres de poche coûtent 30 €, d'où l'équation : $2x + 3y = 30$.
   Une bande dessinée coûte 5 € de plus qu'un livre de poche, d'où l'équation $x - y = 5$.

   D'où le système $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$
   D'après la question précédente, $x = 9$ et $y = 4$.
   Une bande dessinée coûte 9 €.
   Une livre de poche coûte 4 €.

12.2.2 Autres exercices

Exercice 6

On considère l'expression $E = (2x - 3)(5 - 2x) - (2x - 3)^2$

1. Développer et réduire E.
2. Factoriser E.
3. Résoudre l'équation $(2x - 3)(-4x + 8) = 0$.

Exercice 7

On considère l'expression $D = (2x - 7)^2 - 36$.

1. Développer et réduire D.
2. Factoriser D.
3. Calculer la valeur exacte de D quand $x = \sqrt{2}$.

Exercice 8

On donne l'expression suivante $E = 9x^2 - 25 + (3x + 5)(x - 2)$

1. Factoriser $9x^2 - 25$, puis factoriser E.
2. Résoudre l'équation $(3x + 5)(4x - 7) = 0$.

Exercice 9

On donne l'inéquation $x + 5 \leqslant 4(x + 1) + 7$.

1. Expliquer pourquoi chacun des nombres suivants est ou n'est pas une solution de l'inéquation : -5 ; -3 ; 0 ; 3.
2. Résoudre l'inéquation.
3. Représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Exercice 10

Une régate, ou course de voiliers, est organisée à La Rochelle. Deux types de voiliers participent à la régate :
– les« 420 » qui ont à bord deux personnes,
– les« optimists » qui sont manoeuvrés par une seule personne.
On compte au départ de la régate 48 voiliers et 80 personnes.

1. Si x est le nombre de« 420 » au départ et y le nombre d'« optimists », traduire les données par un système de 2 équations à 2 inconnues.
2. Quel est le nombre de voiliers de chaque catégorie ?

Exercice 11

On pose $E = (5x - 2)(x + 7) + (5x - 2)^2$.

1. Développer et réduire E.
2. Factoriser E.
3. Calculer E pour $x = \dfrac{2}{5}$.
4. Résoudre l'équation $(5x - 2)(6x + 5) = 0$.

Exercice 12

1. Développer et réduire $D = (a + 5)^2 - (a - 5)^2$.
2. On pose $D = 10\,005^2 - 9\,995^2$.
   Sans utiliser la calculatrice, en se servant de la question 1, trouver la valeur de D (indiquer les étapes du calcul).

Exercice 13

Factoriser A et B, développer et réduire C :

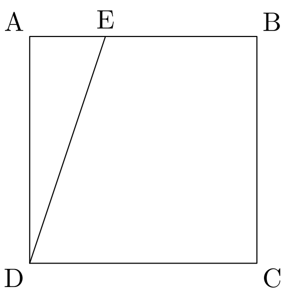
$$A = (x - 1)^2 - (8 - x)(x - 1) \qquad B = x^2 - 26x + 169 \qquad C = (4x + 1)^2 - (5x - 2)(3x - 1)$$

Exercice 14

Soit $E = 4x^2 - 12x + 9$.

1. Calculer E pour $x = -\dfrac{4}{3}$.
2. (a) Factoriser E.
   (b) En utilisant le résultat de la question précédente, résoudre l'équation $E = 0$.

Exercice 15



$ABCD$ est un carré de côté $6\,cm$. E est un point du segment $[AB]$; on pose $EB = x$.

1. Exprimer en fonction de x la longueur AE puis l'aire du triangle ADE.
2. Déterminer x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit le triple de l'aire du triangle ADE.

Exercice 16

1. (a) Développer et réduire l'expression $D = (2x+5)(3x-1)$.
   (b) Développer et réduire l'expression $E = (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2$.
   Application : Déterminer trois nombres entiers positifs consécutifs, $(x-1)$, x et $(x+1)$ dont la somme des carrés est $4\,802$.
2. (a) Factoriser l'expression $F = (x+3)^2 - (2x+1)(x+3)$.
   (b) Factoriser l'expression $G = 4x^2 - 100$.
   Application : Déterminer un nombre positif dont le carré du double est égal à 100.

Exercice 17

On considère l'expression $E = (3x-1)^2 - 81$.

1. Calculer la valeur de E lorsque $x = 0$.
2. Calculer la valeur de E lorsque $x = \dfrac{10}{3}$.
3. Factoriser E.

Exercice 18

1. Factoriser
   (a) $9 - 12x + 4x^2$
   (b) $(3-2x)^2 - 4$
2. En déduire une factorisation de $E = (9 - 12x + 4x^2) - 4$
3. Résoudre l'équation $(1-2x)(5-2x) = 0$.
4. Montrer que pour $x = \dfrac{3}{2}$, E est un entier.

Exercice 19

Résoudre les équations ou inéquations :

$$x(2x-7) = 0 \qquad 4x^2 = 100 \qquad \frac{5x+1}{6} > \frac{3x-3}{8}$$

Exercice 20

Dans un restaurant, un couple commande 1 pizza et 2 jus de fruit et paye 11 €.
A la table voisine, des amis commandent 5 pizzas et 9 jus de fruit et payent 53 €.
Toutes les pizzas sont au même tarif et tous les jus de fruits ont un prix identique.
On appelle x le prix en euro d'une pizza et y le prix en enro d'un jus de fruit.

1. Ecrire un système d'équations traduisant les données.
2. Calculer le prix d'une pizza et clui d'un jus de fruit.

Exercice 21

Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour $70,30$ €.
Une canard et un poulet valent ensemble $20,70$ €.
Déterminer le prix d'un poulet et celui d'un canard.

Exercice 22

On considère l'inéquation : $4x + 7 > 2 - 3x$.

1. (a) Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ? Justifier la réponse.
   (b) Le nombre (-1) est-il solution de cette inéquation ? Justifier la réponse.
2. Résoudre l'inéquation $4x + 7 > 2 - 3x$ et représenter ses solutions sur une droite graduée.

Chapitre 13

La proportionnalité

13.1 Le cours

13.1.1 Proportionalité sur un tableau

Définitions

Un **tableau de valeurs** de deux grandeurs x et y est constituée de deux lignes :
– une première ligne donne les valeurs de x ;
– une deuxième ligne donne les valeurs de y ;
– chaque colonne donne un couple de valeurs $(x; y)$.

Dans un **tableau de proportionnalité**, on passe des valeurs de x à celles de y en multipliant par un même nombre appelé “coefficient de proportionnalité”.

Par exemple, dans le tableau de proportionnalité suivant, on multiplie les valeurs de x par 3 pour obtenir les valeurs de y :

x	2	7	5
y	6	21	15

$\times 3$

NB : Le coefficient de proportionnalité n'est pas forcément un nombre entier.

Méthodes de vérification

Utilisation des fractions Chaque couple de valeur $(x; y)$ permet d'écrire une fraction $\frac{x}{y}$. Si toutes ces fractions sont égales, x et y sont proportionnels.

Soit le tableau suivant :

x	6	27	15
y	8	36	20

Simplifions les trois fractions $\frac{6}{8}$, $\frac{27}{36}$ et $\frac{15}{20}$.

$$\frac{6}{8} = \frac{\mathbf{2} \times 3}{\mathbf{2} \times 4} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{27}{36} = \frac{\mathbf{9} \times 3}{\mathbf{9} \times 4} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{15}{20} = \frac{\mathbf{5} \times 3}{\mathbf{5} \times 4} = \frac{3}{4}$$

Toutes les fractions étant égales, c'est un tableau de proportionnalité.

Utilisation des produits en croix Une option consiste à montrer l'égalité de deux fractions à l'aide des “produits en croix”.

Soit le tableau suivant :

x	15	2
y	9	1,2

Pour comparer les fractions $\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{1,2}$, comparons les produits en croix :
$15 \times 1,2 = 18$

$9 \times 2 = 18$
Les produit en croix étant égaux, c'est un tableau de proportionnalité.

Quatrième proportionnelle

Principe Connaissant trois valeurs d'un tableau de proportionnalité, on cherche à calculer la "quatrième proportionnelle".
On commencera par nommer la valeur manquante, puis par écrire les égalités des fractions et donc des produits en croix avant de conclure.
Examinons le problème résolu suivant.

Enoncé
Au marché, une cliente a acheté $2,5kg$ de tomates au prix de 8,50 €.
Quel est le prix de $4kg$ de tomates ?

Solution
On peut résumer la situation dans le tableau de proportionnalité suivant :

Poids de tomates (en kg)	2,5	4
Prix des tomates (en €)	8,50	p

Appelons p le prix de $4kg$ de tomates.

$\frac{2,5}{8,5} = \frac{4}{p}$
$2,5 \times p = 8,50 \times 4$
$2,5p = 34$
$\frac{2,5p}{\mathbf{2,5}} = \frac{34}{\mathbf{2,5}}$
$p = 13,60$

$4kg$ de tomates coûtent 13,60 €.
NB : certains préfèreront calculer p directement : $p = \frac{8,5 \times 4}{2,5}$.
De même , donnons un deuxième problème résolu.

Enoncé
Un champ rectangulaire a pour dimensions $120m \times 75m$.
Sur un plan, la longueur du champ est $8cm$.
Quelle est sa largeur ?

Solution
On peut résumé la situation dans le tableau de proportionnalité suivant :

Dimensions réelles (en m)	75	120
Dimensions sur le plan (en cm)	l	8

Appelons l la largeur (en cm) du champ sur le plan.

$\frac{75}{l} = \frac{120}{8}$
$120 \times l = 75 \times 8$
$120l = 600$
$\frac{120l}{\mathbf{120}} = \frac{600}{\mathbf{120}}$
$l = 5$

La largeur du champ sur le plan est $5cm$.

Du tableau au graphique

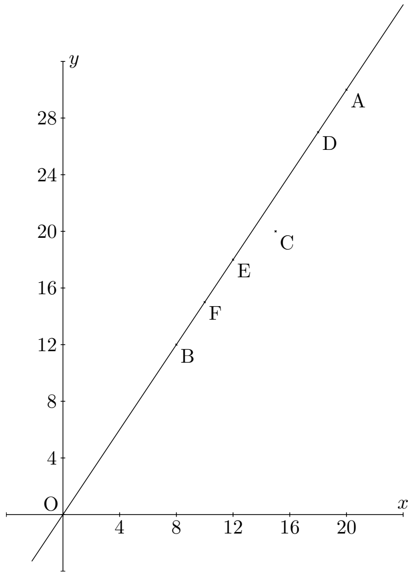
Principe A partir du tableau de valeurs, chaque couple de valeurs $(x; y)$ permet de définir les coordonnées d'un point $M(x; y)$.
On peut alors placer ces points dans un repère où x sera placé en abscisse et y en ordonnée.

Dans une situation de proportionnalité, tous les points sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

NB : un tel graphique peut rapidement montrer que deux grandeurs **ne sont pas proportionnels**.

Soit le tableau suivant :

x	20	8	15	18	12	10
y	30	12	20	27	18	15



Plaçons les points suivants dans le repère ci-contre : $A(20; 30)$; $B(8; 12)$; $C(15; 20)$; $D(18; 27)$; $E(12; 18)$; $F(10; 15)$.

Sur le graphique, on remarque que tous les points sauf C semblent alignés sur une droite passant par l'origine : ce n'est pas une situation de proportionnalité.

13.1.2 Proportionnalité et fonctions

Généralités sur les fonctions

Une fonction f de la variable x est un procédé de calcul qui permet d'associer à toute valeur de x une valeur notée $f(x)$.
On utilise la notation suivante :

$$\boxed{f : x \longmapsto f(x)}$$

Donnons quelque exemples de fonctions.
$f : x \longmapsto 3x - 5$.
$g : x \longmapsto 7x^2 - 3x + 5$.
$h : x \longmapsto 1,3x$.

Il sera souvent utile de tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction f. Pour cela, dans un repère, on placera en abscisses les valeurs de x et en ordonnées les valeurs de $f(x)$.
Une équation de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est $y = f(x)$.
On obtiendra des points de passage en réalisant des tableaux de valeurs de la fonction f dans lesquels on choisit des valeurs de x et on calcule les valeurs de $f(x)$ correspondantes.
Voici un exemple de tableau de valeurs pour la fonction $f : x \longmapsto 2x + 5$.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	7	9	11	13	15

Fonctions linéaires

Une fonction f est dite linéaire si elle est de la forme

$$\boxed{f : x \longmapsto a \times x}$$

a désigne le coefficient de linéarité

Le tableau de valeurs d'une fonction linéaire à l'allure suivant :

x						
$f(x)$						

$\times a$

Une fonction linéaire modélise donc une situation de proportionnalité : x et $f(x)$ sont proportionnels.

La représentation graphique d'une fonction linéaire f est une droite (d_f).

- Cette droite passe par l'origine (ordonnée à l'origine nul) ;
- son coefficient directeur est a ;
- son équation est $y = ax$.

Etudions par exemple les variations de la circonférence d'un cercle en fonction de son rayon.

Appelons r le rayon de ce cercle et $\mathcal{P}(r)$ sa circonférence.

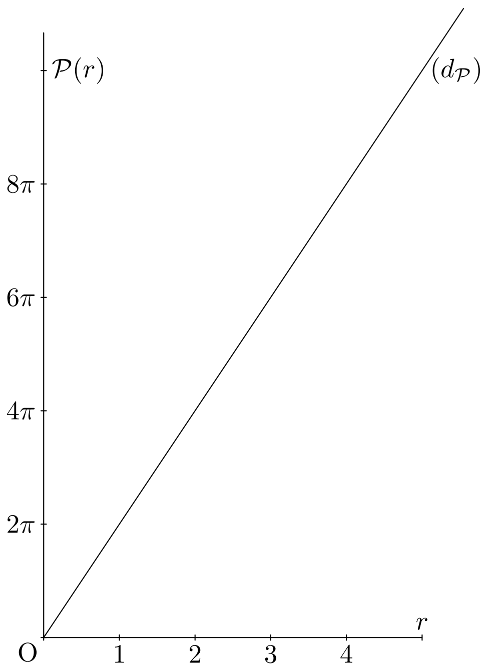
On a la relation : $\mathcal{P}(r) = 2\pi \times r$

D'où le tableau de valeurs suivant :

r	0	1	2	3	4
$\mathcal{P}(r)$	0	2π	4π	6π	8π

Dans le repère ci-contre, la droite $(d_{\mathcal{P}})$ est la représentation graphique de la fonction linéaire $\mathcal{P} : r \longmapsto 2\pi \times r$.

La circonférence d'un cercle est proportionnelle à son rayon.



Un contre-exemple : les fonctions affines

Une fonction f est dite affine si elle est de la forme

$$\boxed{f : x \longmapsto ax + b}$$

Si $b = 0$, on trouve le cas particulier des fonctions linéaires. Par la suite on prendra $b \neq 0$.

Une fonction affine ne modélise pas une situation de proportionnalité : x et $f(x)$ ne sont pas proportionnels.

La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite (d_f) :

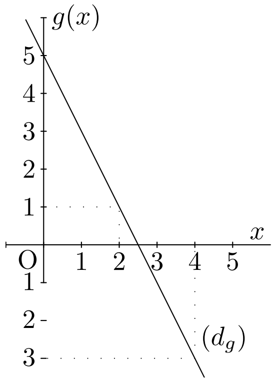
- son ordonnée à l'origine est b ;
- son coefficient directeur est a ;
- son équation est $y = ax + b$.

Etudions par exemple la fonction affine g définie par $g : x \longmapsto -2x + 5$.

Soit le tableau de valeurs suivant :

x	0	2	4
$g(x)$	5	1	-3

Dans le repère ci-contre, la droite (d_g) est la représentation graphique de la fonction affine g.



Autre contre-exemple : la fonction carrée

Soit h la fonction carrée définie par
$h : x \longmapsto x^2$.

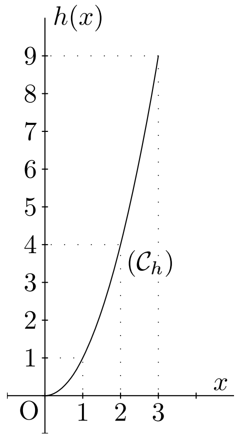
Soit le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

Dans le repère ci-contre, la courbe $(\mathcal{C}_h)$ est la représentation graphique de la fonction h.

Cette courbe passe par l'origine mais n'est pas une droite.



13.1.3 Les pourcentages

Calcul d'un pourcentage

Un pourcentage est avant tout une fraction ayant 100 comme dénominateur.
Un calcul de pourcentage peut se ramener à un calcul de quatrième proportionnelle.

Enoncé
A l'entraînement au brevet, 177 élèves de troisième étaient présents. 12 d'entre eux ont eu une note supérieure à 30/40.
Calculer le pourcentage d'élèves de troisième à avoir une note supérieure à 30/40.

Solution
Résumons la situation dans le tableau de proportionnalité suivant :

Nombre d'élèves présents	177	100
Nombres d'élèves ayant une note supérieure à 30/40	12	p

$p\,\%$ d'élèves ont une note supérieure à 30/40.
Calculons p.

$\dfrac{177}{12} = \dfrac{100}{p}$

$177 \times p = 12 \times 100$

$177p = 1\,200$

$\dfrac{177p}{\mathbf{177}} = \dfrac{1\,200}{\mathbf{177}}$

$p \approx 6,8$

$6,8\,\%$ des élèves ont eu une note supérieure à 30/40.

NB : certains préfèreront calculer p directement : $p = \dfrac{12 \times 100}{177}$.

Pourcentage d'une quantité

Comme pour le calcul d'un pourcentage, on utilise la quatrième proportionnelle.

Enoncé
Le corps humain est à $80\,\%$ constitué d'eau.
Quelle masse d'eau contient le corps d'une personne de $54kg$?

Solution

Résumons la situation dans le tableau de proportionnalité suivant :

Masse totale (en kg)	54	100
Masse d'eau (en kg)	m	80

Calculons m, la masse d'eau dans un corps de $54kg$.

$\frac{54}{m} = \frac{100}{80}$

$100 \times m = 54 \times 80$

$100m = 4\,320$

$\frac{100m}{\mathbf{100}} = \frac{4\,320}{\mathbf{100}}$

$m \approx 43,2$

Un corps de $54kg$ contient $43,2kg$ d'eau.

NB : certains préfèreront calculer m directement : $m = \frac{54 \times 80}{100}$.

Augmentation et baisse

Pour modéliser une augmentation ou une baisse d'un pourcentage, on utilise des fonctions linéaires :

- augmenter de $p\,\%$ revient à **multiplier par** $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$;
- baisser de $p\,\%$ revient à **multiplier par** $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$;

Enoncé

C'est la période des soldes :

1. J'achète un pull dont le prix est 35 €; combien vais-je payer ce pull sachant qu'à la caisse on me fera une remise de 20% ?
2. J'achète aussi une chemise que je paie 24 €; quel était le prix de la chemise avant la réduction de 20% ?

Solution

1. Calculons le prix après remise d'un pull de 35 €.

   Faire une remise de 20 % revient à multiplier le prix par k : $k = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$.

   Soit x le prix avant remise et y le prix après remise. On a : $y = 0,8x$.
   Le prix du pull avant remise est 35 € d'où $x = 35$.
   On calcule y : $y = 0,8 \times 35 = 28$.
   Le prix après remise est 28 €.
2. Calculons le prix avant remise d'une chemise payée 36 € à la caisse.
   Le prix d'une chemise après remise est 24 € d'où $y = 24$.
   Calculons x.
   $24 = 0,8x$
   $\frac{24}{0,8} = \frac{0,8x}{0,8}$
   $x = 30$
   Le prix d'une chemise avant réduction est 30 €.

13.1.4 Proportionnalité et grandeurs physiques

Mouvements à vitesse constante

Dans un mouvement à vitesse constante v, la distance parcourue d est proportionnelle au temps de parcours t :

$$\boxed{d = v \times t}$$

Enoncé

Une voiture se déplace à vitesse constante entre Cayenne et Saint-Laurent du Maroni, deux villes distantes de $255km$.
Elle a parcouru les 60 premiers kilomètres (séparant Cayenne de Kourou) en $52min$.
Quelle temps a-t-elle mis pour rejoindre Cayenne à Saint-Laurent du Maroni ?

Solution

La vitesse étant constante, on peut résumer la situation dans le tableau de proportionnalité suivant :

Temps de parcours (en min)	52	t
Distance parcourue (en km)	60	255

Calculons t, le temps en minutes mis pour parcourir les $255km$.

$\dfrac{52}{60} = \dfrac{t}{255}$
$60 \times t = 52 \times 255$
$60t = 13\,260$
$\dfrac{60t}{\mathbf{60}} = \dfrac{13\,260}{\mathbf{60}}$
$t = 221$

$t = 221min = 180min + 41min = 3h\,41min$
La voiture a mis $3h\,41min$ pour rejoindre Cayenne à Saint-Laurent du Maroni.
NB : certains préfèreront calculer t directement : $t = \dfrac{52 \times 255}{60}$.

La loi d'Ohm

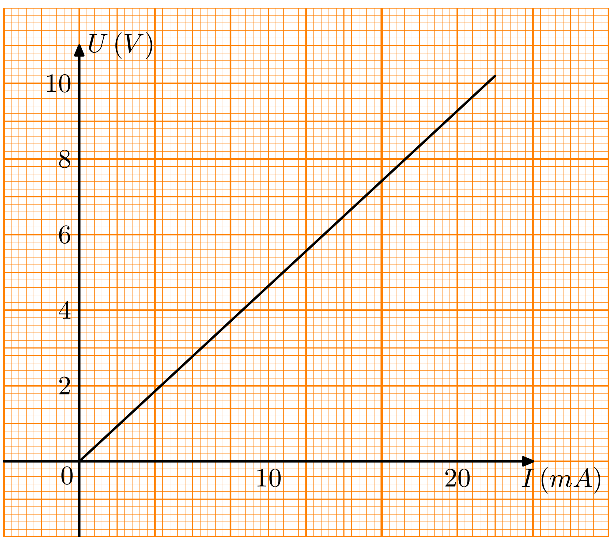
La tension U aux bornes d'une résistance est égale au produit de la valeur de la résistance par l'intensité I du courant qui la traverse :

$$\boxed{U = R \times I}$$

Enoncé

On a représenté sur le graphique ci-après la caractéristique d'une résistance.

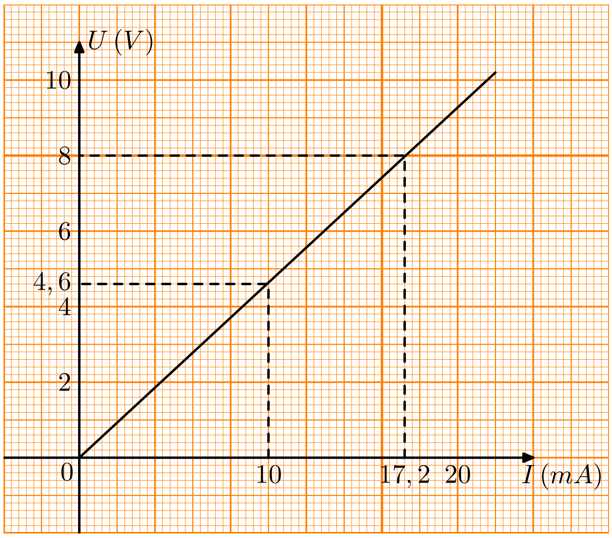
1. Déterminer graphiquement la tension aux bornes de cette résistance lorsqu'elle est traversée par un courant de $10mA$.
2. On applique maintenant une tension de $8V$ à ses bornes. Quelle est l'intensité du courant qui la traverse ?
3. Cette résistance est-elle égale à 47Ω, 470Ω ou $4\,700\Omega$?



Solution

1. Déterminons graphiquement U pour $I = 10mA$.
   Graphiquement, pour $I = 10mA$, on lit sur l'axe des ordonnées $U = 4,6V$.
2. Déterminons graphiquement I pour $U = 8V$.
   Graphiquement, pour $U = 8V$, on lit sur l'axe des abscisses $I = 17,2mA$.
3. Déterminons la valeur de la résistance R.
   Graphiquement, pour $I = 10mA$, $U = 4,6V$.
   Or $10mA = 10 \times 10^{-3}A = 10^{1+(-2-3}A = 0,01A$.
   D'après la loi d'Ohm, $U = R \times I$.
   $4,6 = R \times 0,01$
   $R = \dfrac{4,6}{0,01}$
   $R = 4\,600$

   La valeur la plus probable de R est $4\,700\Omega$.

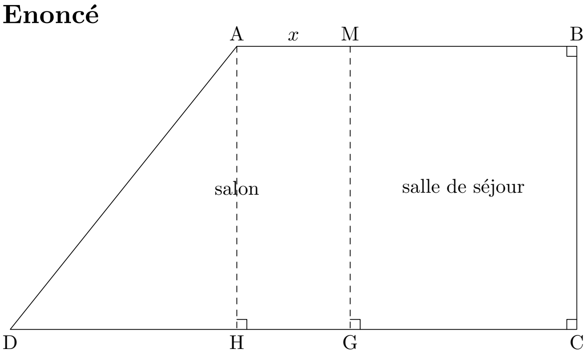


13.2 Les exercices

13.2.1 Exercices corrigés

Exercice 1

Enoncé



La figure ci-dessous est une vue de la surface au sol d'une pièce d'une maison d'habitation. Une partie sera recouverte de parquet (le salon) et l'autre de carrelage (la salle de séjour).

$ABCD$ est un trapèze rectangle tel que :
$AB = 6m$; $BC = 5m$; $CD = 10m$.
M est un point du segment $[AB]$; on pose $AM = x$
(x est une distance exprimée en mètre ; $0 < x < 6$).

1. Exprimer, en fonction de x, l'aire de $MBCG$ (salle de séjour) et celle de $AMGD$ (salon).
2. (a) Pour quelle valeur de x les deux aires sont-elles égales ?
   (b) Quelle est alors la valeur de chaque aire ?
3. On se propose de représenter graphiquement cette situation à l'aide de deux fonctions affines f et g.
   f est définie par : $f(x) = 5x + 10$ pour l'aire de $AMGD$;
   g est définie par : $g(x) = -5x + 30$ pour l'aire de $MBCG$.
   (a) Sur une feuille de papier millimétré, construire un repère orthogonal :
   – en abscisse, prendre $2cm$ pour 1 unité ($2cm$ pour $1m$) ;
   – en ordonnée, prendre $1cm$ pour 2 unités ($1cm$ pour $2m^2$).
   Représenter les fonctions affines f et g.
   (b) Par lecture graphique, retrouver la valeur de x telle que $f(x) = g(x)$ et l'aire correspondante. Mettre en évidence ces valeurs sur le graphique (pointillés, couleur, ...).
4. Pour le reste du problème, on prendra $x = 1$.
   (a) Par lecture graphique ou par un calcul, déterminer l'aire du salon $AMGD$ et celle de la salle $MBCG$.
   (b) Le salon $AMGD$ est revêtu du parquet au prix initial de 60 € le m^2. L'artisan accorde un rabais de 5%. Calculer le coût global après rabais pour le parquet.
   (c) La salle $MBCG$ est recouverte de carrelage. L'artisan accorde également un rabais de 5%.
   le montant global après rabais pour le carrelage est de 712,50 €.
   Calculer le prix pour un m^2 de carrelage avant rabais.

Solution

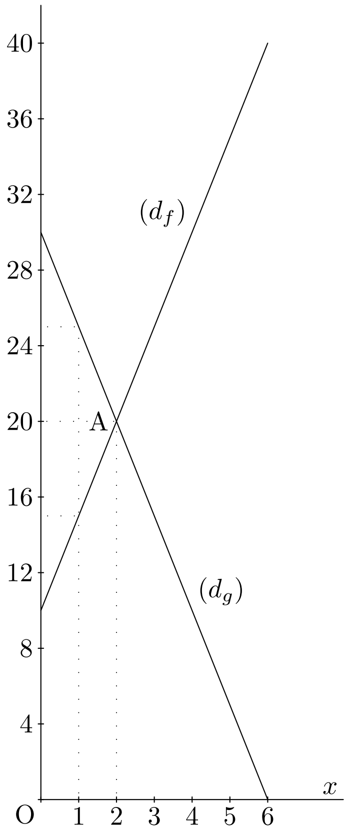
1. Exprimons en fonction de x, l'aire de $MBCG$ et celle de $AMGD$.
   $MBCG$ esr un rectangle avec $MB = AB - AM = 6 - x$ et $BC = 5$.
   D'où $\mathcal{A}_{MBCG} = MB \times BC = (6 - x) \times 5 = \mathbf{5} \times 6 + \mathbf{5} \times (-x) = 30 - 5x = -5x + 30$.

   $AMGD$ est un trapèze de bases $AM = x$ et $DG = CD - GC = CD - MB = 10 - (6 - x) = 10 - 6 + x = x + 4$ et de hauteur $MG = BC = 5$.
   D'où $\mathcal{A}_{AMGD} = \dfrac{(AM + DG) \times 5}{2} = \dfrac{(x + x + 4) \times 5}{2} = \dfrac{(2x + 4) \times 5}{2}$.
   $\mathcal{A}_{AMGD} = \dfrac{\mathbf{2} \times (x + 2) \times 5}{\mathbf{2}} = (x + 2) \times 5 = \mathbf{5} \times x + \mathbf{5} \times 2 = 5x + 10$.

2. (a) Calculons la valeur de x pour laquelle les deux aires sont égales.
   Résolvons l'équation :
$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}_{MBCG} & = & \mathcal{A}_{AMGD} \\
-5x + 30 & = & 5x + 10 \\
-5x + 30 - \mathbf{30} & = & 5x + 10 - \mathbf{30} \\
-5x & = & 5x - 20 \\
-5x - \mathbf{5x} & = & 5x - 20 - \mathbf{5x} \\
-10x & = & -20 \\
\dfrac{-10x}{\mathbf{-10}} & = & \dfrac{-20}{\mathbf{-10}} \\
x & = & 2
\end{array}$$
   Pour $x = 2$, l'aire du salon est égale à l'aire de la salle de séjour.

   (b) Calculons cette aire pour $x = 2$.
   $\mathcal{A}_{MBCG} = -5 \times \mathbf{2} + 30 = -10 + 30 = 20$.
   Vérifions en calculant l'autre aire :
   $\mathcal{A}_{AMGD} = 5 \times \mathbf{2} + 10 = 10 + 10 = 20$.
   Pour $x = 2$, les deux aires sont égales à $20m^2$.

3. (a) Représentons les fonctions affines f et g.



(b) Par lecture graphique, retrouvons la valeur de x telle que $f(x) = g(x)$ et l'aire correspondante.
Sur le graphique, les droites (d_f) et (d_g) se coupent au point $A(2; 20)$: pour $x = 2$, les deux aires sont égales à $20m^2$.

4. (a) Déterminons l'aire du salon $AMGD$ et celle de la salle $MBCG$ pour $x = 1$.
$\mathcal{A}_{AMGD} = 5 \times \mathbf{1} + 10 = 5 + 10 = 15.$
$\mathcal{A}_{MBCG} = -5 \times \mathbf{1} + 30 = -5 + 30 = 25.$
L'aire du salon mesure $15m^2$ et celle de la alle $25m^2$.

(b) Calculons le coût global après rabais pour le parquet.
Il y a $15m^2$ de parquet à mettre dans le salon. $1m^2$ coûtant 60 €, le prix avant remise est $15 \times 60 = 900$ €.
Faire une remise de 5 % revient à multiplier le prix par $1 - \dfrac{5}{100} = 1 - 0,05 = 0,95$.
$900 \times 0,95 = 855$
Le coût global du parquet après réduction est de 855 €.

(c) Calculer le prix pour un m^2 de carrelage avant rabais.
Le coût global après réduction est de 712,50 €.
$\dfrac{712,50}{0,95} = 750$
Le coût global avant réduction était de 750 €.
La salle de séjour nécessite $25m^2$ de carrelage :
$\dfrac{750}{25} = 30$
Le prix du carrelage avant remise était de 30 € le m^2.

Exercice 2

Enoncé

Un fournisseur d'accès à Internet propose à ses clients deux formules d'abonnement :
– une formule A comportant un abonnement fixe de 20€ par mois auquel s'ajoute le prix des communications au prix préférentiel de 2€ de l'heure ;
– une formule B offrant un libre accès à internet mais pour laquelle le prix des communications est de 4€ pour une heure de connexion.

Dans les deux cas, les communications sont facturées proportionnellement au temps de connexion.

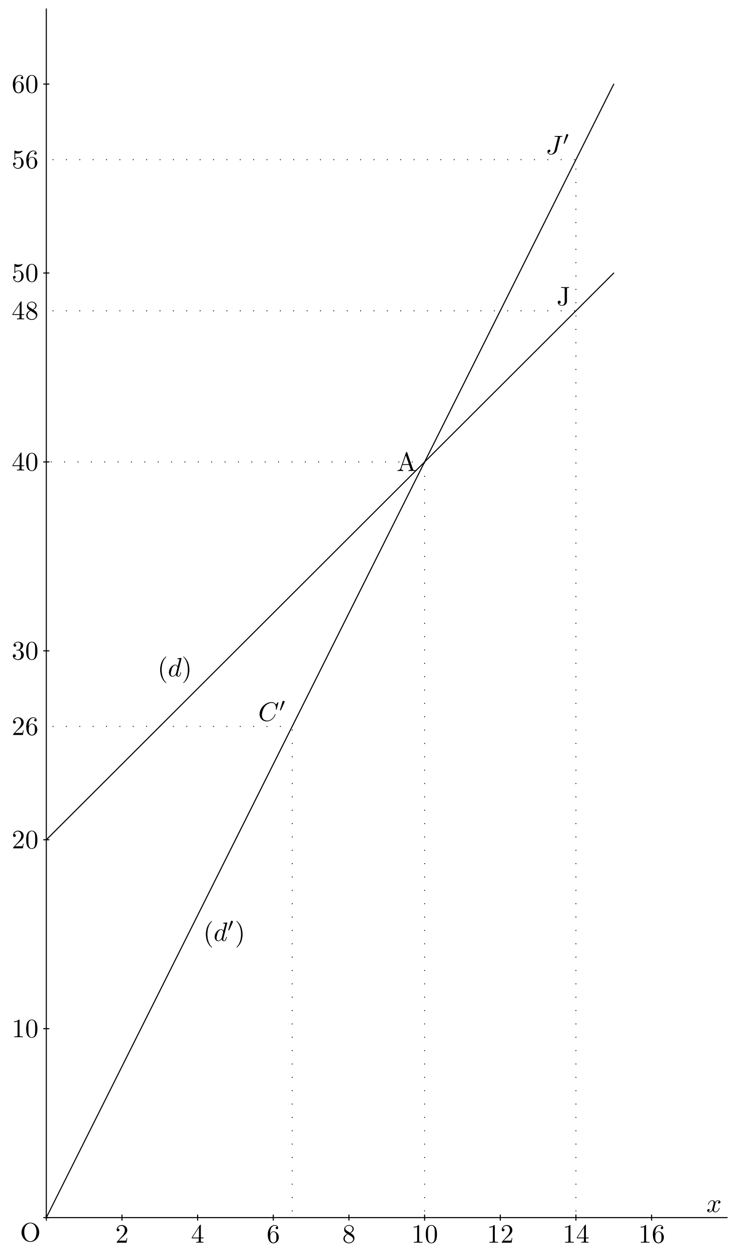
1. Pierre se connecte $7h30min$ par mois et Annie $15h$ par mois.
Calculer le prix payé par chacune des deux personnes selon qu'elle choisit la formule A ou la formule B.
Conseiller à chacune l'option qui est pour elle la plus avantageuse.
2. On note x le temps de connexion d'un client, exprimé en heures.
On appelle P_A le prix à payer en euros avec la formule A et P_B le prix à payer en euros avec la formule B.
Exprimer P_A et P_B en fonction de x.
3. Placer l'origine d'un repère orthogonal en bas et à gauche d'une feuille de papier millimétré.
En abscisses on choisit $1cm$ pour une unité et en ordonnées $1cm$ pour 5 unités.
Dans ce repère orthogonal, tracer :
– la droite (d), représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 2x + 20$;
– la droite (d'), représentation graphique de la fonction $g : x \longmapsto 4x$;
4. En faisant apparaître sur le graphique précédent les traits nécessaires, répondre aux deux questions suivantes :
   (a) Coralie, qui avait choisi la formule B, a payé 26€.
   Combien de temps a-t-elle été connectée ?
   (b) Jean se connecte $14h$ dans le mois.
   Combien va-t-il payer selon qu'il choisit la formule A ou la formule B ?
5. (a) Résoudre l'inéquation : $4x \leqslant 2x + 20$.
   (b) Que permet de déterminer la résolution de cette inéquation dans le contexte du problème ?

Solution

1. Calculer le prix payé par chacune des deux personnes selon qu'elle choisit la formule A ou la formule B.
   Pierre se connecte $7h30min$ par mois :
   – avec la formule A, il paierait $2 \times 7,5 + 20 = 15 + 20 = 40$ €;
   – avec la formule B, il paierait $4 \times 7,5 = 30$ €.
   – La formule B est plus avantageuse.

   Annie se connecte $15h$ par mois :
   – avec la formule A, il paierait $2 \times 15 + 20 = 30 + 20 = 50$ €;
   – avec la formule B, il paierait $4 \times 15 = 60$ €.
   – La formule A est plus avantageuse.
2. Exprimons P_A et P_B en fonction de x.
   Avec la formule A, chaque heure coûte 2 € à quoi s'ajoute l'abonnement de 20 € :
   d'où $P_A = 2x + 20$.

   Avec la formule B, chaque heure coûte 4 € :
   d'où $P_B = 4x$.
3. voir graphique.



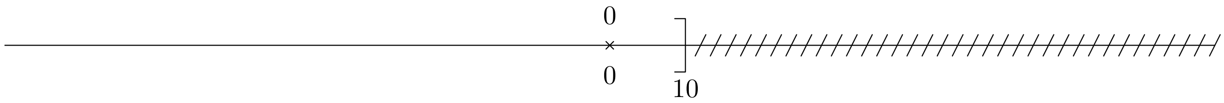
4. (a) Donnons le temps de Coralie.
Coralie a payé 26 € avec la formule B.
Sur le graphique le point C' de (d') d'ordonnée 26 a pour abscisse 6,5 : Coralie s'est connectée pendant $6h30min$.

(b) Donnons le prix à payer par Jean avec chacune des deux formules.
Jean se connecte $14h$.
Le point J de (d) d'abscisse 14 a pour ordonnée 48 : avec la formule A, Jean va payer 48 €.
Le point J' de (d') d'abscisse 14 a pour ordonnée 56 : avec la formule B, Jean va payer 56 €.

5. (a) Résolvons l'inéquation : $4x \leqslant 2x + 20$.

$$\begin{array}{rcl} 4x & \leqslant & 2x+20 \\ 4x - \mathbf{2x} & \leqslant & 2x+20-\mathbf{2x} \\ 2x & \leqslant & 20 \\ \dfrac{2x}{\mathbf{2}} & \leqslant & \dfrac{20}{\mathbf{2}} \\ x & \leqslant & 10 \end{array}$$

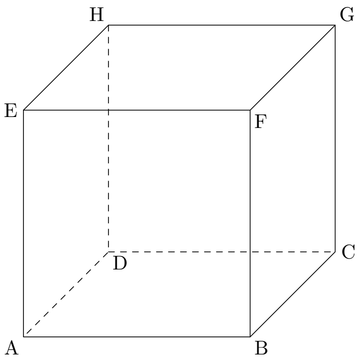
D'où les solutions :



(b) Interprétons ce résultat.
D'après la question précédente $P_A \leqslant P_B$ pour $x \leqslant 10$.
Pour $10h$ de connexion , les deux formules sont égales.
Pour moins de $10h$, la formule A est la plus avantageuse.
Pour plus de $10h$, la formule B est la plus avantageuse.

13.2.2 Autres exercices

Exercice 3



On considère le cube $ABCDEFGH$ dont les arêtes mesurent 6 cm. Sur l'arête $[DH]$ on considère un point S tel que $DS = x$.

1. Calculer le volume du cube en cm^3.
2. Entre quelles limites peut-on faire varier x ?
3. On considère les deux pyramides :
   – $\mathcal{P}_1$ de sommet S et de base $ABCD$;
   – $\mathcal{P}_2$ de sommet S et de base $EFGH$.

   (a) Montrer que le volume en cm^3 de $\mathcal{P}_1$ s'écrit $\mathcal{V}_1(x) = 12x$ et que le volume en cm^3 de $\mathcal{P}_2$ s'écrit $\mathcal{V}_2(x) = 72 - 12x$.

   (b) Représenter graphiquement les deux fonctions $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ dans un repère orthogonal pour x compris entre 0 et 6 (on prendra 1 cm pour unité graphique en abscisse et 1 cm pour 5 cm^3 en ordonnée).

   (c) Calculer le volume restant dans le cube lorsqu'on a enlevé les deux pyramides. Quelle remarque peut-on faire ?
4. Déterminer graphiquement le volume de la pyramide $SEFGH$ lorsque la pyramide $SABCD$ a un volume de 50 cm^3 (on pourra d'abord déterminer la valeur de x correspondant à $\mathcal{V}_1(x) = 50$).
5. (a) Calculer la valeur de x pour que $\mathcal{V}_1(x) = \mathcal{V}_2(x)$ et déterminer alors ces deux volumes.

   (b) Vérifier ce résultat sur le graphique.

Exercice 4

1. Quelles sommes représentent $3,85\%$ de 150 000 €, de 378 000 €, de 500 000 €, puis de 1 000 000 € ?
2. Quel pourcentage, valeur arrondie au centième près, de 500 000 €représentent 14 553 € ?
3. Quel pourcentage, valeur arrondie au centième près, de 1 000 000 €représentent 14 553 € ?

Exercice 5

Quand il vend un produit, un commerçant réalise un bénéfice de 35% sur son prix d'achat.
On note x le prix d'achat et y le prix de vente.

1. Montrer que y peut s'écrire sous la forme $y = 1,35x$.
2. Calculer le prix de vente d'un article acheté 22 € .
3. Calculer le prix d'achat d'un article vendu $48,6$ €.

Exercice 6

Un commerçant augmente les prix de tous ses articles de 8%.
Un objet coûte x €.

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Un lecteur DVD coûte, avant augmentation, 329 €. Combien coûtera-t-il après ?
3. Un téléviseur coûte, après augmentation, 540 €. Combien coûtait-il avant ?

Exercice 7

Le 7 novembre 1998, au retour du second voyage historique de John Glenn dans l'espace, la navette spatiale Discovery avait parcouru 5,8 millions de kilomètres.
Cette mission ayant duré 8 jours et 22 heures, calculer la vitesse moyenne en km/h de la navette. On donnera le résultat en écriture décimale arrondie au km/h, puis en écriture scientifique.

Exercice 8

Un automobiliste roule 15 minutes à la vitesse de 80 kilomètres par heure, puis 1 heure et 45 minutes à la vitesse de 120 kilomètres par heure.

1. Vérifier par le calcul que la distance totale parcourue est 230 km.
2. Calculer la vitesse moyenne sur cette distance totale.

Exercice 9

Un marchand a des crayons bleus, des crayons rouges et des crayons verts. Les crayons bleus représentent les 53% de la totalité des crayons. Les crayons rouges représentent les $\frac{3}{10}$ de la totalité des crayons.

1. Les crayons verts représentent un pourcentage de la totalité des crayons. Quel est ce pourcentage ?
2. En tout le marchand a 300 crayons. Combien a-t-il de crayons bleus ?

Exercice 10

Dans un restaurant qui reçoit 30 clients, on propose 2 menus différents. 18 clients choisissent le premier menu. Quel est le pourcentage des clients qui ont choisi ce premier menu ?

Exercice 11

Partie A

Madame Durand voyage en train.
Elle fait le voyage aller-retour Chambéry-Paris selon les horaires suivants :

Trajet aller	**Trajet retour**
Départ Chambéry : 6 H 01 min Arrivée Paris : 9 H 01 min	Départ Paris : 19 H 04 min Arrivée Chambéry : 21 H 58 min

La distance par le train Chambéry-Paris est de $542km$.

1. Calculer la vitesse moyenne du train à l'aller. Le résultat sera arrondi à l'unité.
2. Calculer la vitesse moyenne du train au retour. Le résultat sera arrondi à l'unité.

Partie B

Monsieur Dubois doit effectuer fréquemment des trajets, en train, entre Chambéry et Paris.
Il a le choix entre deux options :
Option A : le prix d'un trajet est 58€.
Option B : le prix total annuel en euros y_B est donné par $y_B = 29x + 300$, où x est le nombre de trajets par an.

1. Monsieur Dubois effectue 8 trajets dans l'année.
   Calculer le prix total annuel à payer avec chacune des deux options.
2. Monsieur Dubois effectue un nombre x de trajets dans l'année.
   On note y_A le prix total annuel à payer avec l'option A. Ecrire y_A en fonction de x.
3. Un employé de la gare doit expliquer, à une personne qui téléphone, le fonctionnement de l'option B.
   Rédiger son explication.
4. Pour l'option B, le prix total annuel est-il proportionnel au nombre de trajets ? Justifier.
5. Sur une feuille de papier millimétré, représenter les deux fonctions f et g définies par :
   $$f : x \longmapsto 58x \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto 29x + 300$$
   Pour le repère, on prendra :
   – l'origine en bas à gauche de la feuille ;
   – sur l'axe des abscisses $1cm$ pour 1 unité ;
   – sur l'axe des ordonnées $1cm$ pour 50 unités.
6. On vient de représenter graphiquement, pour chacune des deux options, le prix total annuel en fonction du nombre de trajets.
   (a) A l'aide du graphique, déterminer le nombre de trajets pour lequel le prix total annuel est plus avantageux avec l'option B. Faire apparaître le tracé ayant permis de répondre.
   (b) Retrouver ce résultat par un calcul.

<u>**Exercice 12**</u>

Un viticulteur propose un de ses vins aux deux tarifs suivants :
– **Tarif 1** : 7,5€ la bouteille, transport compris.
– **Tarif 2** : 6€ la bouteille, mais avec un forfait de transport de 18€..

1. Remplir le tableau donné ci-dessous :

Nombre de bouteilles	1	5			15
Prix au tarif 1 en €	7,5			97,5	
Prix au tarif 2 en €		48	78		

2. Exprimer le prix payé par le consommateur en fonction du nombre x de bouteilles achetées.
   Pour le tarif 1, le prix sera noté P_1.
   Pour le tarif 2, le prix sera noté P_2.
3. Tracer, sur une feuille de papier millimétré, les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :
   $$f(x) = 7,5x \quad \text{et} \quad g(x) = 6x + 18$$
   pour des valeurs de x comprises entre 0 et 15.
   On placera l'origine dans le coin inférieur gauche de la feuille et on prendra les unités suivantes :
   – Sur l'axe des abscisses : $1cm$ représente 1 bouteille.
   – Sur l'axe des ordonnées : $1cm$ représente 10€.

   Pour les questions 4 et 5, on laissera sur le graphique les traits de rappel utilisées pour faciliter la lecture.
4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique :
   (a) On veut acheter 6 bouteilles. Quel est le tarif le plus avantageux ?

(b) On dispose de 70€. Lequel des deux tarifs permet d'acheter le plus grand nombre de bouteilles ? Préciser le nombre de bouteilles.

5. Utilisation du graphique, vérification par le calcul.
   (a) Déterminer graphiquement pour combien de bouteilles le prix de revient est identique, quel que soit le tarif choisi. Donner ce nombre de bouteilles.
   Quel est le prix correspondant ?
   (b) Vérifier ces deux derniers résultats par des calculs.

Exercice 13

Toutes les lectures sur le graphique doivent être justifiées par des tracés en pointillé.

Partie A

Nicolas désire louer des cassettes vidéo chez VIDEOMATHS qui lui propose les deux possibilités suivantes pour une location à la journée :
Option A : Tarif à 3€ par cassette louée.
Option B : une carte d'abonnement de 15€ pour 6 mois avec un tarif de 1,5€ par cassette mouée.

1. (a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre de cassette louée en 6 mois	4	8	10	12
Prix payé en euros avec l'option A				
Prix payé en euros avec l'option B				

   (b) Préciser dans chaque cas l'option la plus avantageuse.
2. On appelle x le nombre de cassettes louées par Nicolas pendant 6 mois.
   (a) Exprimer en fonction de x la somme $A(x)$ payée avec l'option A.
   (b) Exprimer en fonction de x la somme $B(x)$ payée avec l'option B.

Partie B

On considère les fonctions définies par : $f(x) = 3x$ et $g(x) = 1,5x + 15$.
Dans toute la suite du problème, on admettra que la fonction f est associée à l'option A et que la fonction g est associée à l'option B.

1. Construire, dans un repère (O, I, J) orthogonal les représentations graphiques des fonctions f et g ; on placera l'origine en bas à gauche.
   En abscisse, $1cm$ représente 1 cassette ; en ordonnée $1cm$ représente 2€.
2. Les représentations graphiques de f et g se coupent en E.
   (a) Lire sur le graphique les coordonnées de E.
   (b) Que représente les coordonnées de E pour les options A et B.
3. Lire sur le graphique, la somme dépensée par Nicolas avec l'option A s'il loue 11 cassettes.
4. Nicolas dispose de 24€. Lire sur le graphique, le nombre de cassettes qu'il peur louer en 6 mois avec l'option B.
5. Déterminer par le calcul à partir de quelle valeur de x l'option B est plus avantageuse que l'option A pour 6 mois.

Partie C

Nicolas ne veut dépenser que 36€ en 6 mois pour louer des cassettes.

1. Lire sur le graphique de la **partie B** le nombre maximum de cassettes qu'il peut louer chez VIDEOMATHS avec chaque option, avec 36€ en 6 mois.
2. Il se renseigne auprès de la société CINEMATHS qui lui propose un abonnement de 7,5€ pour 6 mois permettant de louer chaque cassette à la journée pour 2,5€.
   L'objectif de cette partie est de déterminer parmi les trois tarifs, l'offre la plus avantageuse pour Nicolas.
   Soit x le nombre de cassettes louées par Nicolas en 6 mois.
   (a) Montrer que le prix payé par Nicolas chez CINEMATHS est donné par l'expression : $h(x) = 2,5x + 7,5$.
   (b) Calculer le nombre maximum de cassettes que Nicolas peut louer en 6 mois avec 36€ chez CINEMATHS.
   (c) En déduire l'offre la plus avantageuse pour Nicolas.

Exercice 14

Pour le paiement de la garderie dans une école, on propose deux formules :
– **Formule A** : on paie 40€ pour devenir adhérent pour l'année scolaire puis on paye 10€ par mois de garderie.
– **Formule B** : pour les non adhérents, on paye 18€ par mois.

1. Pour chacune des formules, calculer le prix payé pour 10 mois de garderie.
2. On appelle x le nombre de mois de garderie.
   On note y_A le prix payé avec la formule A et y_B le prix payé avec la formule B.
   Exprimer y_A puis y_B en fonction de x.
3. Représenter graphiquement les fonctions suivantes dans un même repère :
   $x \longmapsto y_A = 10x + 40$
   $x \longmapsto y_B = 18x$.
   L'origine du repère sera placée en bas et à gauche de la feuille de papier millimétré.
   On prendra $1cm$ pour 1 mois en abscisse.
   On prendra $1cm$ pour 10€ en ordonnée.
4. (a) A partir du graphique, déterminer le nombre de mois pour lequel les prix à payer sont les mêmes.
   (b) Retrouver ce résultat par le calcul.
5. A partir du graphique, déterminer la formule la plus avantageuse si on ne paie que 4 mois dans l'année.
6. On dispose d'un budget de 113€. Combien de mois de garderie au maximum pourra-t-on payer si l'on choisit la formule A ?

Exercice 15

Un opérateur téléphonique propose à ses clients trois formules de facturation mensuelle des communications.
Formule 1 : 0,12€ la minute.
Formule 2 : un abonnement fixe de 4,8€ et 0,04€ par minute.
Formule 3 : un forfait de 10€ pour 3h de communications.

Partie I

Calculer le montant des factures des communications selon les trois formules de tarification pour des durées de 35min, de 1h 20min et de 2h 45min.
Pour présenter les réponses, recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	35 min	1h 20min	2h 45min
Formule 1			
Formule 2			
Formule 3			

Partie II

Cette partie a pour but de rechercher la formule la plus avantageuse selon la durée des communications téléphoniques comprises entre 0 et 3 heures.

1. Soit x la durée, en minutes, des communications.
   Exprimer, en fonction de x, le coût des communications selon les différents tarifs ; on appellera $f_1(x)$ le prix obtenu en appliquant la formule n°1, $f_2(x)$ en appliquant la formule n°2, et $f_3(x)$ en appliquant la formule n°3.
2. Sur une feuille de papier millimétré, on considère un repère orthogonal. L'origine est placée en bas à gauche de la feuille. Sur l'axe horizontal, $1cm$ représente 15min ; sur l'axe vertical, $1cm$ représente 1,5€.
   (a) Tracer les représentations graphiques de f_1 , f_2 et f_3 en se limitant au cas où $0 \leqslant x \leqslant 180$.
   (b) Résoudre l'équation $0,12x = 0,04x + 4,8$.
   Résoudre l'inéquation $0,04x + 4,8 < 10$.
   (c) Utiliser le graphique de la question **a** pour répondre aux questions suivantes :
   – Quelle est la formule la plus avantageuse pour une durée de 1h30 de communications ?
   – Pour quelle durée de communications les formules 1 et 2 ont-elles le même coût ?
   – Pour quelles durées de communications la formule 3 est-elle la plus avantageuse ?

Chapitre 14

Gestion de données

14.1 Le cours

14.1.1 Séries statistiques

Généralités

Une série statistique étudie la répartition d'un "caractère" sur une "population".

Essayons d'expliciter ces deux notions sur les exemples suivants.

Lorsqu'on étudie la répartition des voitures vendues en France par marque,
- le caractère est la **marque** ;
- la population est l'**ensemble des voitures vendues en France**.

Lorsqu'on étudie les notes à un contrôle de mathématiques dans une classe,
- le caractère est la **note** ;
- la population est l'**ensemble des élèves de la classe**.

Lorsqu'on étudie le poids des poulets d'un élevage,
- le caractère est le **poids d'un poulet** ;
- la population est l'**ensemble des poulets de l'élevage**.

Lorsqu'on étudie la couleur des bonbons dans un paquet de bonbons,
- le caractère est la **couleur** ;
- la population est l'**ensemble des bonbons du paquet**.

Pour étudier un caractère d'une population, on note pour chaque éléments de la population la "valeur" du caractère. Cette valeur peut prendre différentes formes comme sur les exemples précédents :
- pour la marque de voitures : Renault, Peugeot, Mercedes, Toyota, ... ;
- pour la note d'un contrôle : 8/20, 9/20, 12/20, 15/20, ... ;
- pour le poids d'un poulet : $1,5kg$, $2,125kg$, $1,950kg$, ... ;
- pour la couleur d'un bonbon : rouge, vert, bleu, ...

Liste d'une série statistique sans classe

Pour une population de faible nombre, on pourra se contenter d'une liste.

Voici par exemple la série, ordonnée dans l'ordre croissant, des 15 notes obtenues en mathématiques par un élève au cours du premier semestre :

$$4 - 6 - 6 - 9 - 11 - 11 - 12 - 13 - 13 - 13 - 14 - 15 - 17 - 18 - 18$$

Tableau d'une série statistique sans utilisation des classes

Si les valeurs possibles du caractère sont connues, on synthétisera les résultats sous forme d'un tableau :
– la première ligne contient les valeurs du caractère ;
– la deuxième ligne contient "les effectifs".
L'effectif d'une valeur est le nombre d'éléments de la population correspondant à cette valeur du caractère.

Reprenons l'exemple de l'étude de la couleur des bonbons d'un paquet de 50 bonbons.
On a le tableau suivant :

Couleur des bonbons	Rouge	Vert	Jaune	Bleu	Marron	**Total**
Effectifs	6	11	18	4	11	**50**

Tableau d'une série statistique avec utilisation des classes

Si le caractère admet des valeurs numériques trop nombreuses, on regroupera les valeurs du caractère par classe.
On synthétisera les résultats sous forme d'un tableau à deux lignes :
– la première ligne contient les classes des valeurs du caractère ;
– la deuxième ligne contient "les effectifs".
Reprenons l'exemple de l'étude du poids des poulets dans un élevage de 500 poulets.
L'étude a donné le tableau suivant :

Poids p des poulets (en kg)	$1 \leqslant p < 1,5$	$1,5 \leqslant p < 2$	$2 \leqslant p < 2,5$	$2,5 \leqslant p < 3$	**Total**
Effectifs	83	209	146	62	**500**

14.1.2 Les graphiques

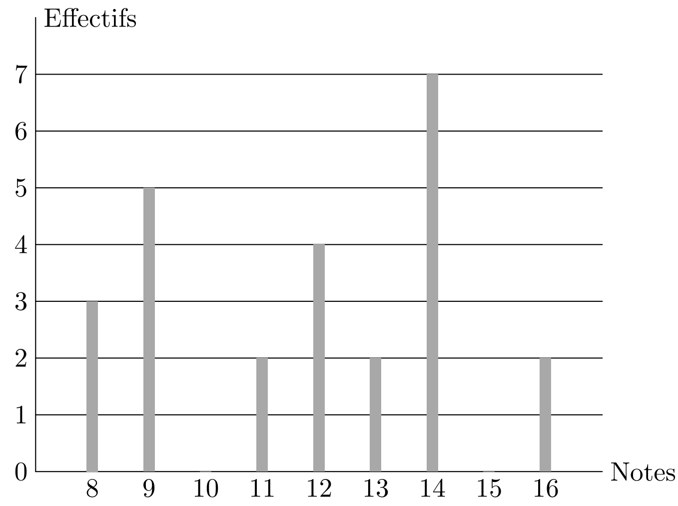
Diagramme en bâtons

Dans un diagramme en bâtons, on place
– en abscisses les valeurs du caractère ;
– en ordonnées les effectifs.
Pour chaque valeur du caractère, on trace un "bâton" de la hauteur de l'effectif.

Voici le diagramme en bâtons représentant la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques dans une classe de troisième.

Ce diagramme correspond au tableau suivant :

Notes	8	9	11	12	13	14	16	**Total**
Effectifs	3	5	2	4	2	7	2	**25**



Histogramme

Dans un histogramme, on place
– en abscisses les valeurs du caractère ;
– en ordonnées les effectifs.
Pour chaque valeur ou classe de valeurs du caractère, on trace un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif correspondant.

L'histogramme ci-contre donne les âges de jeunes sportifs participant à un stage de judo.

Cet histogramme correspond au tableau suivant :

Age	11	12	13	14	15	16	**Total**
Effectifs	15	25	15	20	10	5	**25**

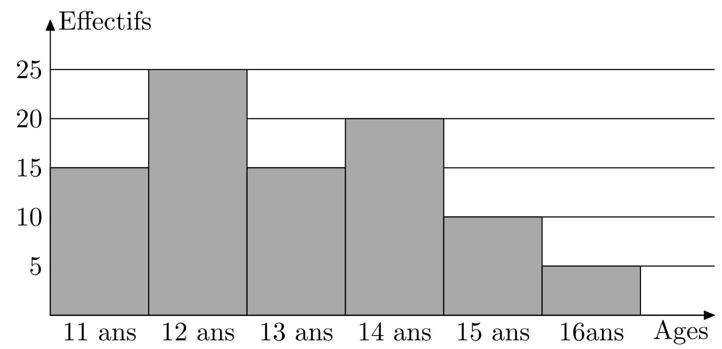


Diagramme circulaire

Dans un diagramme circulaire, à chaque valeur du caractère, on trace un secteur angulaire dont l'aire est proportionnelle à l'effectif correspondant.
Avant de pouvoir réaliser un tel diagramme, il est nécessaire de calculer les angles correspondants sachant que le total des effectifs correspondant à un angle de 360°.

Les angles et les effectifs sont proportionnels.

Le diagramme circulaire ci-contre décrit la répartition des dates de naissance de 1000 personnes par saison.
Il correspond au tableau suivant :

Saison	Printemps	Eté	Automne	Hiver	**Total**
Effectifs	217	325	147	312	**1000**
Angles (en °)	78	117	53	112	**360**

Pour calculer les angles, on utilise la quatrième proportionnelle avec la colonne "Total" comme le montre l'exemple du calcul du premier angle :

$$\frac{217 \times 360}{1000} \approx 78°.$$

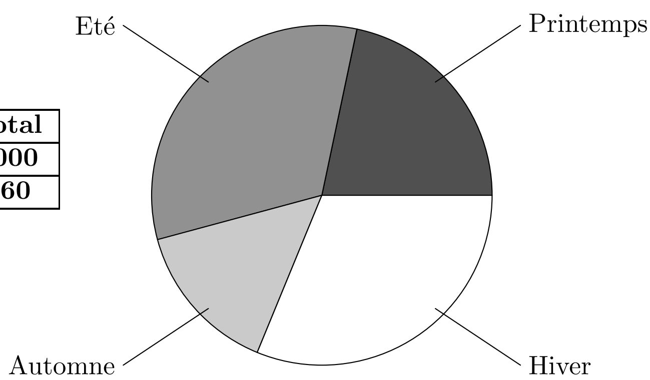


Diagramme semi-circulaire

Dans un diagramme semi-circulaire, à chaque valeur du caractère, on trace un secteur angulaire dont l'aire est proportionnelle à l'effectif correspondant.
Avant de pouvoir réaliser un tel diagramme, il est nécessaire de calculer les angles correspondants sachant que le total des effectifs correspondant à un angle de 180°.

Les angles et les effectifs sont proportionnels.

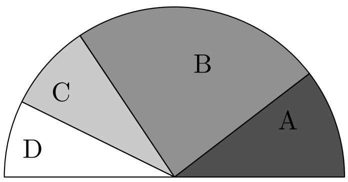
Le diagramme semi-circulaire ci-contre décrit les résultats d'un QCM d'un groupe de 48 personnes.

Il correspond au tableau suivant :

Réponse	A	B	C	D	**Total**
Effectifs	10	23	8	7	**48**
Angles (en °)	38	86	30	26	**180**

Pour calculer les angles, on utilise la quatrième proportionnelle avec la colonne "Total" comme le montre l'exemple du calcul du premier angle :

$$\frac{10 \times 180}{48} \approx 38°.$$



14.1.3 Fréquences et fréquences cumulées

Fréquences d'une série

Les fréquences d'une série donnent la répartition en pourcentage des valeurs du caractère.

Les fréquences sont proportionnelles aux effectifs.

Reprenons l'exemple de l'étude de la couleur des bonbons d'un paquet de 54 bonbons :

Couleur des bonbons	Rouge	Vert	Jaune	Bleu	Marron	**Total**
Effectifs	6	11	22	4	11	**54**
Fréquences (en %)	11,1	20,4	40,7	7,4	20,4	**100**

Pour calculer les fréquences (en %), on utilise la quatrième proportionnelle avec la colonne "Total" comme le montre l'exemple du calcul de la première fréquence :

$$\frac{6 \times 100}{54} \approx 11,1.$$

Ainsi, $11,1\,\%$ des bonbons sont de couleur rouge.

Fréquences cumulées croissantes d'une série

Lorsqu'on utilise les classes, il peut être intéressant de calculer les fréquences cumulées croissantes de la série.

Chaque fréquence cumulée est la somme des fréquences des classes précédentes et de celle de la classe en question.

Reprenons l'exemple de l'étude du poids des poulets dans un élevage de 500 poulets :

Poids p des poulets (en kg)	$1 \leqslant p < 1,5$	$1,5 \leqslant p < 2$	$2 \leqslant p < 2,5$	$2,5 \leqslant p < 3$	**Total**
Effectifs	83	209	146	62	**500**
Fréquences (en %)	16,6	41,8	29,2	12,4	**100**
Fréquences cumulées croissantes (en %)	16,6	58,4	87,6	100	

On peut calculer ces fréquences cumulées croissantes en procédant de proche en proche :
$16,6 + 41,8 = 58,4$
$58,4 + 29,2 = 87,6$
$87,6 + 12,4 = 100$ *Pour vérification.*

Ainsi, $58,4\,\%$ des poulets ont un poids inférieur à $2kg$.

On définit de façon analogue les effectifs cumulés croissants, d'où le tableau correspondant à l'exemple précédent :

Poids p des poulets (en kg)	$1 \leqslant p < 1,5$	$1,5 \leqslant p < 2$	$2 \leqslant p < 2,5$	$2,5 \leqslant p < 3$	**Total**
Effectifs	83	209	146	62	**500**
Effectifs cumulés croissants	83	292	438	500	

De même, on peut calculer ces effectifs cumulés croissants en procédant de proche en proche :
$83 + 209 = 292$
$209 + 146 = 438$
$438 + 62 = 500$ *Pour vérification.*

Ainsi, 292 poulets ont un poids inférieur à $2kg$.

14.1.4 Moyenne, médiane et étendue d'une série

Moyenne d'une série

La moyenne d'une série n'est applicacle que si les valeurs du caractère sont numériques.
On distinguera le calcul en fonction de l'utilisation ou non des classes.

Moyenne d'une série sans classes Dans ce cas, le calcul de la moyenne donne une valeur exacte.
C'est le quotient entre le total des valeurs de la population et l'effectif total de la population.

Calculons la moyenne m des notes obtenues à un contrôle de mathématiques dans une classe de troisième :

Notes	8	9	11	12	13	14	16	Total
Effectifs	3	5	2	4	2	7	2	25

$$m = \frac{(3\times 8)+(5\times 9)+(2\times 11)+(4\times 12)+(2\times 13)+(7\times 14)+(2\times 16)}{25} = \frac{295}{25} = 11,8$$

La moyenne des notes à ce contrôle de mathématiques est 11,8/20.

Moyenne d'une série avec classes Dans ce cas, le calcul de la moyenne n'est qu'approximative.

On calcule cette moyenne en considérant que chaque élément de la classe a pour valeur le milieu de cette classe.

Calculons la moyenne m du poids des poulets dans un élevage de 500 poulets :

Poids p des poulets (en kg)	$1 \leqslant p < 1,5$	$1,5 \leqslant p < 2$	$2 \leqslant p < 2,5$	$2,5 \leqslant p < 3$	Total
Effectifs	83	209	146	62	500
Milieu de la classe	1,25	1,75	2,25	2,75	

$$m = \frac{(1,25\times 83)+(1,75\times 209)+(2,25\times 146)+(2,75\times 62)}{500} = \frac{968,5}{500} = 1,937$$

La moyenne du poids des poulets de l'élevage est d'environ $1,9kg$.

Médiane d'une série

Comme pour la moyenne, la médiane d'une série n'est applicacle que si les valeurs du caractère sont numériques.
On distinguera le calcul en fonction du nombre pair ou impair du total des effectifs.

La médiane est une valeur séparant la série ordonnée en deux parties contenant autant d'éléments.

Médiane d'une série ayant un total des effectifs impairs Dans ce cas, la médiane correspond à une valeur de la série.

Donnons la médiane des notes obtenues à un contrôle de mathématiques dans une classe de troisième :

Notes sur 20	6	7	9	10	11	12	14	Total
Effectifs	3	5	2	4	2	7	2	25
Effectifs cumulés croissants	3	8	10	14	16	23	25	

$$\underbrace{6-6-6-\cdots-10-10}_{\text{12 notes}}-10-\underbrace{10-11-11-\cdots-14-14}_{\text{12 notes}}$$

Le total des effectifs étant 25, la médiane est la treizième note (12 notes avant, 12 notes après).
D'après le tableau précédent, la treizième note est 12.

La médiane des notes à ce contrôle de mathématiques est 12/20.

Médiane d'une série ayant un total des effectifs pairs Dans ce cas, la médiane peut prendre une valeur différente des valeurs prises par la population.

Donnons une médiane des notes obtenues à un contrôle de français dans une classe de troisième :

Notes sur 20	7	9	10	12	13	15	16	**Total**
Effectifs	2	3	7	2	4	6	4	**28**
Effectifs cumulés croissants	2	5	12	14	18	24	28	

$$\underbrace{7-7-9-\cdots-12-12}_{\text{14 notes}}-\underbrace{13-13-13-\cdots-16-16}_{\text{14 notes}}$$

Le total des effectifs étant 28, la médiane est une valeur comprise entre la quatorzième et la quinzième valeur, c'est-à-dire entre 12 et 13.
On peut choisir 12,5 comme médiane.

Une médiane des notes à ce contrôle de français est 12,5/20.

<u>Etendue d'une série</u>

L'étendue d'une série à valeurs numériques est la différence entre ses valeurs extrêmes.

L'étendue sert à mesurer la dispersion d'une série.

Donnons l'étendue E de la série des notes obtenues à un contrôle de français dans une classe de troisième :

Notes	7	9	10	12	13	15	16	**Total**
Effectifs	2	3	7	2	4	6	4	**28**

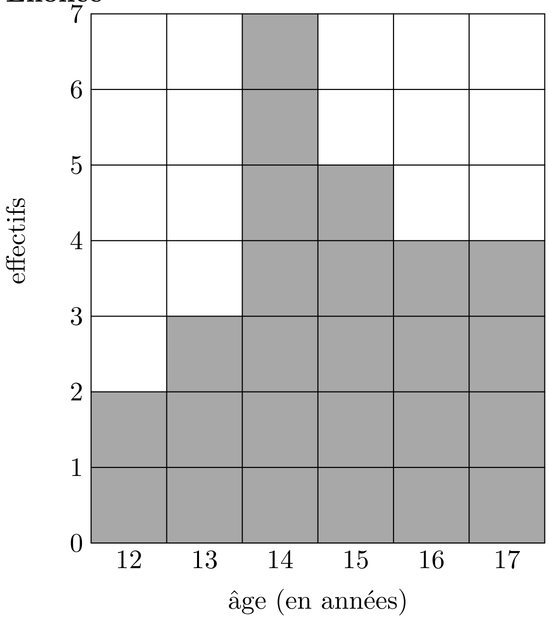
Les valeurs extrêmes sont 7 et 16, d'où l'étendue E :
$E = 16 - 7 = 9$

14.2 Les exercices

14.2.1 Exercices corrigés

<u>Exercice 1</u>

Enoncé



L'histogramme ci-contre donne les âges des adhérents d'un club de natation.

1. Combien d'adhérents compte ce club ?
2. Reproduire et compléter le tableau ci-après :

Age	12					
Effectif	2					
Fréquence	8%					

3. Quel est l'âge moyen des adhérents de ce club ?

Solution

1. Calculons le nombre d'adhérents du club.
   Ajoutons les différents effectifs :
   $2+3+7+5+4+4=25$
   Ce club de natation comporte 25 adhérents.
2. Complétons le tableau précédent.

Age	12	13	14	15	16	17	**Total**
Effectifs	2	3	7	5	4	4	**25**
Fréquences (en %)	8	12	28	20	16	16	**100**

   Pour calculer les fréquences, il suffit ici de multiplier les effectifs par 4.
3. Calculons l'âge moyen des adhérents de ce club.
   Appelons m cette âge moyen :
   $$m = \frac{(2\times 12)+(3\times 13)+(7\times 14)+(5\times 15)+(4\times 16)+(4\times 17)}{25} = \frac{368}{25} = 14,7$$
   L'âge moyen d'un adhérent du club de natation est environ 14,7 ans.

Exercice 2

Enoncé
Dans un centre d'examen, après avoir corrigé 432 copies, on a fait le bilan suivant :
– 168 copies ont une note strictement inférieure à 10 ;
– 264 copies ont une note supérieure ou égale à 10.
Représenter ce bilan par un diagramme semi-circulaire.

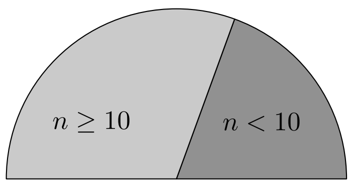
Solution

Résumons la situation dans le tableau suivant :

Note n	$n<10$	$n\geqslant 10$	**Total**
Effectifs	168	264	**432**
Angles (en ^{o}**)**	70	110	**180**

Pour les calculs d'angles :

$$\frac{168\times 180}{432} = 70^o \qquad \frac{264\times 180}{432} = 110^o$$



Exercice 3

Enoncé
Voici la série, ordonnée dans l'ordre croissant, des 15 notes obtenues en mathématiques par un élève au cours du premier semestre :

$$4-6-6-9-11-11-12-13-13-13-14-15-17-18-18$$

1. Quelle est la fréquence de la note 13 ?
2. Quelle est la note moyenne ?
3. Quelle est la note médiane ?
4. Quelle est l'étendue de cette série de notes ?

Solution

1. Donnons la fréquence de la note 13.
   3 élèves sur 15 ont eu une note de 13/20. D'où la fréquence : $\frac{3}{15} = \frac{1\times \mathbf{3}}{5\times \mathbf{3}} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100}$
   La fréquence de la note 13 est 20%.

2. Calculons la note moyenne m.

$$m = \frac{4 + (2 \times 6) + 9 + (2 \times 11) + 12 + (3 \times 13) + 14 + 15 + 17 + (2 \times 18)}{15} = \frac{180}{15} = 12$$

La note moyenne est 12/20.

3. Déterminons la note médiane.

$$\underbrace{4 - 6 - 6 - 9 - 11 - 11 - 12}_{\text{7 notes}} - 13 - \underbrace{13 - 13 - 14 - 15 - 17 - 18 - 18}_{\text{7 notes}}$$

Il y a 15 notes. La médiane est donc la huitième note, c'est à dire 13.

4. Calculons l'étendue de cette série de notes.
Les notes extrêmes sont 4 et 18 d'où l'étendue E de la série : $E = 18 - 4 = 14$.

Exercice 4

Enoncé
Le Conseil général d'un département compte 60 élus. Chacun d'eux représente l'un des trois partis, A, B et C.
– Le parti A compte 15 élus ;
– 45% des élus appartiennent au parti B ;
– le reste des élus représente le parti C.

1. Calculer le pourcentage des élus qui appartiennent au parti A.
2. Calculer le nombre d'élus du parti B.
3. Représenter par un diagramme circulaire de rayon $4cm$ la répartition du Conseil Général entre les partis A, B et C.

Solution
Donnons le tableau correspondant à la série donnée :

Partis	A	B	C	**Total**
Effectifs	15	b		**60**
Fréquences (en %)	a	45		**100**

1. Calculons le pourcentage a des élus qui appartiennent au parti A.

Les effectifs et les fréquences sont proportionnels d'où la quatrième proportionelle $a = \dfrac{15 \times 100}{60} = 25$.

25 % des élus appartiennent au parti A.

2. Calculons le nombre b d'élus du parti B.

Les effectifs et les fréquences sont proportionnels d'où la quatrième proportionelle $b = \dfrac{45 \times 60}{100} = 27$.

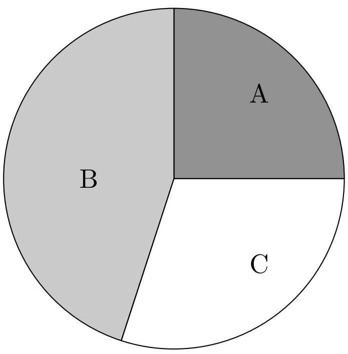
27 élus appartiennent au parti B.

3. Représentons par un diagramme circulaire la répartition du Conseil Général entre les partis A, B et C.

Aidons-nous du tableau suivant :

Partis	A	B	C	**Total**
Effectifs	15	27	18	**60**
Fréquences (en %)	25	45	30	**100**
Angles (en ^{o})	90	162	108	**360**

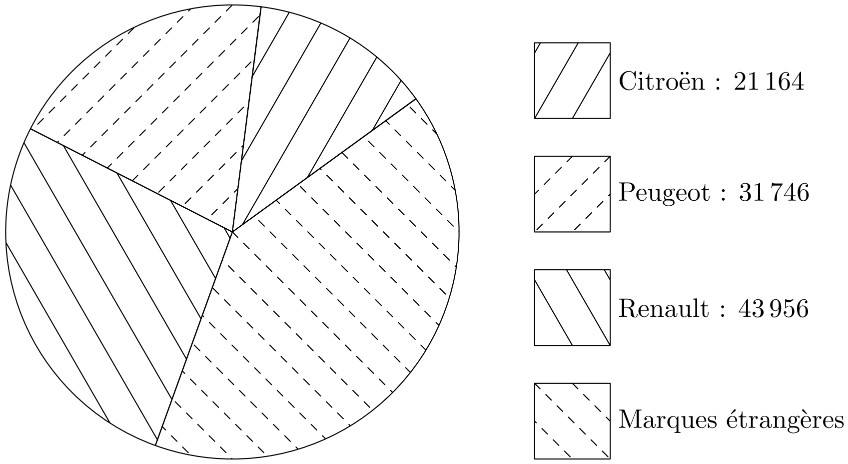
Pour calculer les angles, il suffit ici de multiplier les effectifs par 6.



14.2.2 Autres exercices

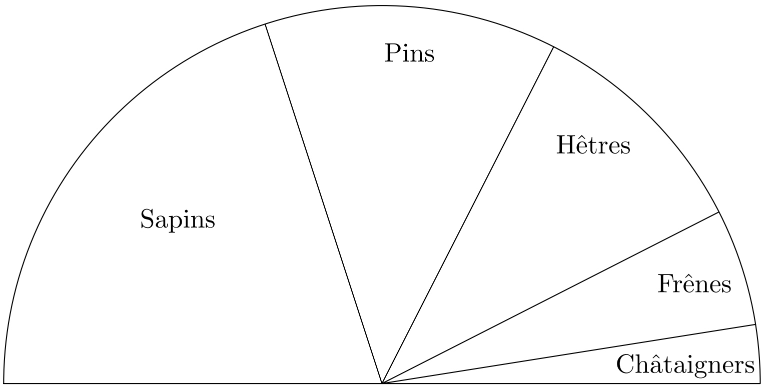
Exercice 5

162 800 voitures neuves ont été vendues en France pendant le mois d'octobre 1995. Le diagramme circulaire ci-dessous donne la répartition des ventes entre les diverses marques d'automobiles.



1. Combien de voitures de marques étrangères ont-elles été vendues pendant le mois d'octobre 1995 ?
2. Quel est, par rapport à la totalité des voitures vendues, le pourcentage des voitures de marque Renault ?
3. Calculer l'angle $\widehat{AOB}$ correspondant sur le diagramme aux voitures de marque Peugeot.

Exercice 6



Les arbres d'un hectare de forêt du Massif Central sont répartis en cinq espèces. Le schéma semi-circulaire ci-dessous est une représentation de cette répartition.

Exemple : On a compté 30 frênes. Ils sont représentés sur le schéma par un secteur angulaire de 18°.

Voici le tableau qui a permis cette représentation. Il est incomplet. On demande de le reproduire et de le compléter entièrement.

Espèce	Nombre d'arbres	Angle du secteur
Sapins		72°
Pins	75	
Frênes	30	18°
Hêtres		
Châtaigniers	15	
Total		

Exercice 7

Voici le nombre de skieurs fréquentant une station de ski pendant une semaine d'hiver :

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
5 760	3 700	1 750	3 400	6 900	8 200	11 800

1. Quel est le nombre moyen de skieurs par jour ?
2. Quel est le pourcentage de fréquentation le dimanche ? (Résultat arrondi au centième.)

Exercice 8

Une enquête, réalisée sur un échantillon de 30 enfants, porte sur le temps passé devant la télévision à leur retour de l'école entre 17 h 30 et 19 h 30. La répartition est donnée dans le tableau ci-dessous :

Temps t en heures	$0 \leqslant t < 0,5$	$0,5 \leqslant t < 1$	$1 \leqslant t < 1,5$	$1,5 \leqslant t < 2$
Nombre d'enfants	12	9	6	3

1. Douze enfants passent moins d'une demi-heure devant la télévision. Quel pourcentage du groupe de 30 enfants représentent-ils ?
2. Combien d'enfants passent moins d'une heure devant la télévision ? Combien d'enfants passent au moins une heure devant la télévision ?

Exercice 9

On a relevé la nationalité du vainqueur des 80 premiers Tours de France cyclistes (entre 1903 et 1993]) Le tableau ci-après donne le nombre de victoires par nationalité.

1. Reproduire le tableau sur la copie et calculer les fréquences en pourcentage.

	France	Belgique	Italie	Espagne	Autres
Nombres de victoires	36	18	8	6	12
Fréquences en %					

2. Construire un diagramme semi-circulaire représentant cette situation (on prendra 5 cm pour rayon du cercle). On justifiera correctement le calcul des angles.
3. L'espagnol Miguel Indurain a gagné l'épreuve en 1994 et 1995. Calculer le pourcentage de victoires espagnoles depuis la création du Tour de France.

Exercice 10

Voici la liste des notes sur 20 obtenues par Luc et Julie aux 6 devoirs de mathématiques du dernier trimestre :

Devoir	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	Moyenne
Note de Luc	12	5	18	11	19	a	
Note de Julie	20	15	4	9	x	y	12,5

1. (a) Calculer la moyenne de Luc, si la note obtenue au sixième devoir est 13.
   (b) Une meilleure note au devoir n°6 aurait-elle permis à Luc d'obtenir une moyenne de 15 ?
2. La note obtenue par Julie au devoir n°6 a augmenté de 25% par rapport à celle qu'elle a obtenue au devoir n° 5.
   (a) Exprimer y en fonction de x.
   (b) Calculer x et y.

Exercice 11

Dans deux classes de troisième de 24 élèves chacune, on demande aux collégiens combien de temps ils passent dans l'autobus pour se rendre au collège (tous prennent l'autobus).

1. Sachant que tous les élèves ont répondu, reproduire et compléter le tableau ci-dessous présentant les résultats de cette enquête :

Temps t en min	$0 \leqslant t < 15$	$15 \leqslant t < 30$	$30 \leqslant t < 45$	$t \geq 45$
Effectif	6	24		3

2. Quel est l'effectif d'élèves passant au moins 30 minutes dans l'autobus pour se rendre au collège ?
3. En déduire le pourcentage d'élèves passant au moins une demi-heure dans l'autobus pour se rendre au collège.

Exercice 12

Les numéros d'appel téléphonique en France commencent par 0l, 02, 03, 04 ou 05. Dans une entreprise ayant effectué 1500 appels, on a relevé le tableau suivant :

Début du numéro	01	02	03	04	05
Nombre d'appels		330	144	261	171

1. Quel est le nombre d'appels pour la région Ile-de-France (numéro commençant par 0l) ?
2. Quel est le pourcentage d'appels pour la région Nord-Ouest (numéro commençant par 03) ?

Exercice 13

On a répertorié les loisirs de 28 élèves d'une classe de troisième en 5 classes et on les a reportés dans le tableau figurant ci-après.

1. Compléter ce tableau (Les fréquences seront arrondies au dixième près et les angles au degré près).

Loisirs	Sport	Télé	Lecture	Musique	Info	Total
Effectif	7	8	3	4	6	28
Fréquence (%)	25			14,3		100
Angle (°)	45	51			39	180

2. Construire un diagramme semi-circulaire.

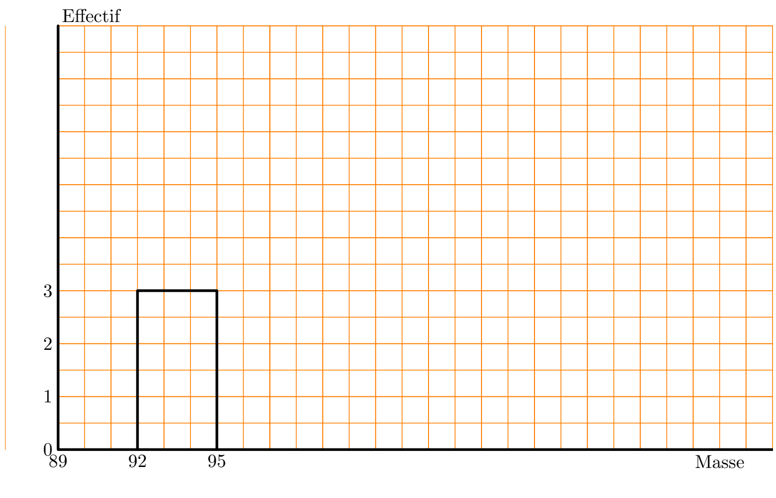
Exercice 14

Lors d'un contrôle, on a pesé 25 boîtes de conserve à la sortie d'une chaîne de remplissage. On a obtenu les masses suivantes en grammes :
101 - 95 - 97 - 101 - 99 - 103 - 93 - 97 - 106 - 100 - 97 - 104 - 95 - 105 - 103 - 97 - 100 - 106 - 94 - 99 - 101 - 92 - 104 - 102 - 103

1. Compléter le tableau suivant, où x désigne la masse en grammes.

	$92 \leqslant x < 95$	$95 \leqslant x < 98$	$98 \leqslant x < 101$	$101 \leqslant x < 104$	$104 \leqslant x < 107$
Effectifs					
Effectifs cumulés croissants					

2. Compléter l'histogramme des effectifs de cette série statistique :



3. Quel est le pourcentage du lot de ces 25 boîtes qui ont une masse strictement inférieure à 101 grammes ?

Exercice 15

Lors du recensement de 1990, on a pu établir le nombre d'habitants des quatre départements de la région Bourgogne.

1. Reproduire le tableau suivant puis le compléter :

	Nièvre	**Yonne**	**Côte-d'Or**	**Saône-et-Loire**	**Région Bourgogne (total)**
Nombre d'habitants en milliers	239,4		506,9	572,4	1 650
Pourcentage (arrondi à 0,01 près)		20,08			100

2. En 1990, $\frac{7}{40}$ des habitants de la Nièvre résidaient à Nevers.
   Combien y avait-il d'habitants à Nevers en 1990 ?

Exercice 16

Le gérant d'un cinéma a réalisé un sondage auprès de 400 personnes en leur demandant combien de films ils ont regardé dans ses salles pendant le mois qui vient de s'écouler. Il a ensuite dressé le tableau suivant :

Nombre de films regardés	**Effectifs**	**Effectifs cumulés croissants**
0	50	
1	60	
2	120	
3	40	
4	50	
5	30	
6		
7	20	
8	10	

1. Compléter ce tableau.
2. (a) Quel est le nombre de personnes qui ont regardé un seul film le mois dernier ?
   (b) Exprimer ce résultat en pourcentage.
3. Combien de personnes ont regardé moins de 4 films le mois dernier ?
4. Combien de films, en moyenne, les personnes interrogées ont-elles regardé le mois dernier ?
   Justifier par un calcul et arrondir le résultat à l'unité.

Exercice 17

Dans le tableau ci-dessous figurent les résultats obtenus par Sarah et David, deux élèves de troisième, avant les épreuves écrites du brevet des collèges. Toutes les notes y figurant sont sur 20.

	Français	Math	Lv1	SP	SVT	EPS	Techno	Musique	Arts	Option
Sarah	13	9	14	8	11	12	14	14	16	15
David	6	x	7	10	9	14	9	10	12	7

1. Quelle est la moyenne obtenue par Sarah ?
2. David a obtenu 9,5 de moyenne. Calculer la note x que David a obtenue en mathématiques.
3. Quel est le nombre maximum de points que peut obtenir un élève avant les épreuves écrites ?

Exercice 18

A la sortie d'une agglomération, on a relevé, un certain jour, la répartition par tranches horaires de 6400 véhicules quittant la ville entre 16 heures et 22 heures. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Tranche horaire	16h - 17h	17h - 18h	18h - 19h	19h - 20h	20h - 21h	21h - 22h
Nombre de véhicules	1 100	2 000	1 600	900	450	350

1. Représenter l'histogramme des effectifs de cette série statistique.
2. Calculer la fréquence de la tranche horaire 19h - 20h (on donnera le résultat arrondi à $0,01$ près, puis le pourcentage correspondant).
3. Calculer le pourcentage de véhicules quittant la ville entre 16h et 20h.

Exercice 19

Le groupe de onze latinistes de la 3ème B du collège a obtenu les notes suivantes à un devoir :

$$7\,;\,9\,;\,9,5\,;\,9,5\,;\,10\,;\,10\,;\,12\,;\,14\,;\,14\,;\,16\,;\,16\,;\,19$$

1. Calculer la moyenne du groupe.
2. Déterminer la médiane de cette série.

Exercice 20

Un groupe de 32 personnes décide de faire des randonnées à vélo. Afin de mieux connaître la valeur de chacun, il est convenu de faire une première balade de 28km, chacun roulant à son propre rythme.

1. Louise, qui fait partie du groupe, a mis 1h45min pour faire cette balade.
   (a) Etablir que le temps mis par Louise peut s'écrire 1,75h.
   (b) Calculer la vitesse moyenne de Louise exprimée en kilomètres par heure.
2. Chaque participant ayant calculé sa vitesse moyenne, on obtient les résultats regroupés dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau.

Vitesse moyenne V (en $km.h^{-1}$)	$5 \leqslant V < 10$	$10 \leqslant V < 15$	$15 \leqslant V < 20$	$20 \leqslant V < 25$	$25 \leqslant V < 30$	$30 \leqslant V < 35$
Effectif	6	10	4	2	8	2
Fréquence (en %)						

3. Le nombre de personnes étant trop important et les vitesses moyennes de chacun trop différentes, on décide, pour rendre les sorties plus agréables, de séparer les participants en deux groupes : celui des plus rapides et celui des moins rapides. Les deux groupes ont le même effectif.
   Quelle vitesse fallait-il atteindre ou dépasser lors de la première balade pour faire partie du groupe des plus rapides ?

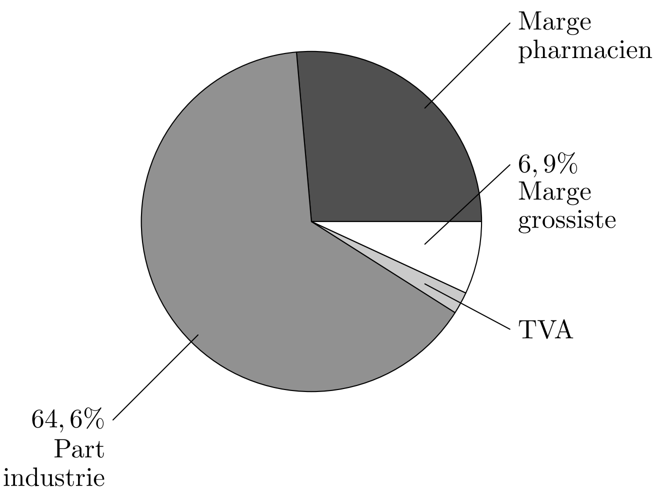
Exercice 21

Les températures moyennes enregistrées à Paris du 3 au 12 novembre 1999 sont exprimées en degré Celsius :

Jours	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Températures (en ° C)	13	11	12	11	10	12	12	9	8	9

1. Quelle est l'étendue de cette série ?
2. Quelle est sa médiane ?
3. Quelle est sa moyenne ?

Exercice 22



Voici un diagramme illustrant la décomposition du prix d'un médicament en 1996.
Un médicament coûte 15€ (toutes taxes comprises) et le pharmacien fait sur celui-ci une marge de 3,96 €.

1. Quel pourcentage du prix du médicament représente la marge du pharmacien ?
2. On souhaite schématiser cette décomposition du prix par un diagramme circulaire.
   Calculer la mesure de l'angle correspondant à la marge réalisée par le grossiste.

Exercice 23

On a mesuré lors d'un stage de jeunes basketteurs. Les tailles, en *cm*, sont les suivantes :

165	175	187	165	170
181	174	184	171	166
178	177	176	174	176

1. Calculer la taille moyenne de ces basketteurs.
2. Quelle est la taille médiane de ces sportifs ? Justifier.

Index

Agrandissement, 80
Angles
    Adjacents, 48
    Aigus, 47
    Alternes internes, 24, 48
    Angle droit, 47
    Angle nul, 47
    Angle plat, 47
    Au centre, 49
    Complémentaires, 48
    Correspondants, 25, 48
    Inscrits, 49
    Obtus, 47
    Opposés par le sommet, 48
    Supplémentaires, 48
Arc de cercle
    Aire, 55
    Longueur, 54
Arithmétique, 119

Bissectrice
    Définition, 41
    Point de concours, 42
Boule, 78
    Volume, 57

Cône de révolution, 77
    Agrandissement et réduction, 81
    Volume, 56
Carré, 33
    Aire, 55
    Périmètre, 54
Centre de gravité, 39
Cercle
    Circonférence, 54
    Longueur d'un arc, 54
Cercle circonscrit, 11, 40
Chasles, 65
Circonférence d'un cercle, 54
Coefficient directeur, 93
Combinaison, 134
Conversions
    Aires, 54
    Longueurs, 53
    Volumes, 56
Cosinus, 12
Critères de divisibilité, 119
Cube
    Volume, 56
Cylindre de révolution
    Volume, 56

Développement, 125
    Expressions complexes, 126
    Identités remarquables, 126
Diagramme circulaire, 161
Diagrammes en bâtons, 160
Disque
    Aire, 55
Distance entre deux points, 92
Distributivité
    Développement, 126
    Factoriser, 127
Diviseur, 119
Diviseurs communs, 120
Division euclidienne, 119
Droite des milieux, 24
Droites dans un repère, 92
    Coefficient directeur, 93
    Intersection, 95
    Points alignés, 93
    Recherche d'équation, 94
    Tracé, 94

Ecriture scientifique, 114
Effectifs cumulés d'une série, 162
Effectifs d'une série, 160
Equation "produit nul", 132
    Autres cas, 132
    Généralités, 132
    Résolution, 132
Equations
    De droite, 92
Equations du premier degré, 128
    Cas particuliers, 129
    Généralités, 128
    Résolution, 128
    Résolution de problèmes, 130
Etendue d'une série, 164
Expressions numériques, 125

Factorisation, 125, 127
    Identités remarquables, 128
Fonctions, 145
    Fonction carrée, 147
    Fonctions affines, 146
    Fonctions linéaires, 145
Formulaire
    Aires, 54
    Longueurs, 53
Formulaires
    Volumes, 56
Fréquences cumulées d'une série, 162

Fréquences d'une série, 162
Fractions, 109
    Addition et soustraction, 110
    Comparaison, 110
    Division, 110
    Egalité, 109
    Multiplication, 110
    Simplification et PGCD, 122

Géométrie analytique, 91

Hauteur
    Définition, 40
    Point de concours, 41
Hexagone régulier, 34
Histogramme, 160
Hypoténuse, 32

Idenités remarquables
    Factoriser, 128
Identités remarquables
    Factoriser, 126
Inéquations, 130
    Généralités, 130
    Résolution, 130

Loi d'Ohm, 149
Losange, 33
    Aire, 55

Médiane, 39
    Définition, 39
    Point de concours, 39
Médiane d'une série, 163
Médiarice
    Définitions, 40
Médiatrice
    Point de concours, 40
Milieu d'un segment
    Coordonnées, 91
    Vecteurs, 65
Moyenne d'une série, 162
Multiple, 119

Nombre d'or, 34
Nombres inverses, 110
Nombres opposés, 108
Nombres premiers, 120
Nombres premiers entre eux, 121
Nombres relatifs, 107
    Addition et soustraction, 108
    Ecritures simplifiées, 108
    Multiplication et division, 109
    Nombres opposés, 108

Orthocentre, 41

Périmètre, 53
Parallélogramme
    Aire, 55
    Vecteurs, 64, 66
Parallèlogramme, 32
Pavé droit, 73
    Volume, 56
Pentagone régulier, 34
PGCD, 120
    Algorithme d'Euclide, 121
    Méthode des soustractions successives, 121
    Nombres premiers entre eux, 122
    Simplification de fractions, 122
Polygones, 31
Pourcentages, 147
    Augmentation et baisse, 148
    Calcul d'un pourcentage, 147
    Pourcentage d'une quantité, 147
Priorités sur les opérations, 107
Prisme droit
    Volume, 56
Proportionalité
    Tableau, 143
Proportionnalité, 143
    Fonctions, 145
    Grandeurs physiques, 149
    Graphique, 144
    Quatrième proportionnelle, 144
Puissances, 113
    Formules, 113
Pyramide, 74
    Agrandissement et réduction, 80
    Volume, 56
Pythagore
    Réciproque, 10
    Théorème, 9

Quadrilatères, 32

Réduction, 80
Racines carrées, 111
    Distributivité et identités remarquables, 112
    Formules, 112
    Simplification, 112
Rectangle, 33
    Aire, 54
    Périmètre, 53
Repère, 91
Rotation, 66

Série statistique, 159
    Caractère, 159
    Etendue, 164
    Fréquences, 162
    Fréquences cumulées, 162
    Graphiques, 160
    Liste, 159
    Médiane, 163
    Moyenne, 162
    Population, 159
    Tableau avec classes, 160
    Tableau sans classes, 160
Sinus, 12
Sphère, 78

Substitution, 133
Symétrie axiale, 62
Symétrie centrale, 61
Systèmes à deux équations, 133
    Résolution de problèmes, 135
    Généralités, 133
    Résolution par combinaison, 134
    Résolution par substitution, 133

Tangente, 12
Thalès, 21
    Configurations, 21
    Réciproque, 22
    Théorème, 21
Translation, 64
Trapèze, 33
    Aire, 55
Triangle, 31
    Aire, 54
    Equilatéral, 32
    Isocèle, 32
    Rectangle, 32
Triangle rectangle
    Cercle circonscrit, 11
Trigonométrie, 12
    Calcul d'un angle, 12
    Calcul d'une longueur, 13
    Cosinus, 12
    Sinus, 12
    tangente, 12

Unités
    Aires, 54
    Longueurs, 53
    Volumes, 55

Vecteurs
    Caractérisation du milieu, 65
    Coordonnées, 92
    Définition, 64
    Règle du parallélogramme, 66
    Relation de Chasles, 65
Vitesse, 149