

موقع الأستاذ بلوحسين لرياضيات التعليم المتوسط

<https://prof27math.weebly.com/>

## المراجعة الشاملة

(دروس ملخصة + تمارين محلولة)

السنة الرابعة متوسط

مجموعة الأستاذ بلوحسين لرياضيات التعليم المتوسط

<https://www.facebook.com/groups/prof27math/>





# الرياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

## مقدمة

سمحت إصلاحات المنظومة التربوية بإعادة الإعتبار إلى شهادة التعليم المتوسط إذا أصبحت ركيزة أساسية في الإنقال إلى التعليم الثانوي كما أنها جاءت بنمط جديد من التقويم الذي يعتمد على المقاربة بالكفاءات، وفي هذا الإطار ومساهمة منا لرفع نسبة النجاح والحد من التسرب المدرسي، نضع بين أيدي تلاميذنا المقبلين على إمتحان شهادة التعليم المتوسط، هذا الكتاب أملين أن يكون فضاءً آخرًا في متواول لهم يسمح لهم بالتحضير الجيد لمادة..... وتعزيز كفاءاتهم ومكتسباتهم العلمية.

ولقد حرصنا على تقديم مواد الكتاب بمنهجية تربوية بسيطة، في متواول للتلميذ بحيث يجدون ملخصات لأهم المعارف المستهدفة المرفقة بسلسلة من التمارين وبعض وضعيات الإدماج التقويمية ومواضيع إمتحانات، مرفقة بحلولها.

في الأخير لا يسعنا إلا أن نشجع تلاميذنا على الجهد والمثابرة حتى يكون النجاح حلفهم.

المؤلف: تاوريرت جمال

مفتش التربية و التكوين لمادة الرياضيات

## الفهرس

قواسم عدد طبيعي- القاسم المشترك الأكبر- الكسور غير القابلة للاختزال	3
تمارين	.....
4	.....
9	.....
الحساب على الجذور	.....
تمارين	.....
10	.....
حساب الحرفي- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد	15
تمارين	.....
16	.....
المترابعات من الدرجة الأولى بمجهول واحد	23
تمارين	.....
24	.....
جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين	27
التمارين	.....
28	.....
الدالة الخطية - الدالة التالية	33
تمارين	.....
34	.....
الإحصاء	44
تمارين	.....
45	.....
خاصية طالس	48
تمارين	.....
49	.....
حساب المثلثات في المثلث القائم	54
تمارين	.....
55	.....
الأشعة والانسحاب	60
تمارين	.....
61	.....
المعالم	63
تمارين	.....
64	.....
الدوران - المضلعات المنتظمة - الزوايا	65
تمارين	.....
67	.....
الهندسة في الفضاء	70
تمارين	.....
71	.....
مواضيع مقتربة مع حلولها	75

# قواعد عدد طبيعي - القاسم المشترك الأكبر - الكسور غير القابلة للاختزال

أذكر الأهم:

## 1. قاسم عدد طبيعي

**تعريف:**  $a, b$  عدادان طبيعيان حيث:  $b \neq 0$ .

( $a = k \times b$ ) معناه (يوجد عدد طبيعي  $k$  حيث:  $a = k \times b$ ).  
نقول أيضاً أن  $a$  يقبل القسمة على  $b$  أو أن  $b$  يقسم  $a$  أو أن  $a$  مضاعف لـ  $b$ .

**مثال:** العدد 3 يقسم العدد 81 لأن  $3 \times 27 = 81$   
**ملاحظة:** العدد 1 يقسم كل الأعداد الطبيعية.

## 2. خواص قاسم عدد طبيعي

$a, b$  عدادان طبيعيان حيث:  $a > b$  و  $n$  عدد طبيعي غير معروف.

**الخاصية 1:** إذا قسم  $n$  كلا من  $a$  و  $b$  فإنه يقسم كلا من  $(a+b)$  و  $(a-b)$ .

**الخاصية 2:** إذا قسم  $n$  كلا من  $a$  و  $b$  فإنه يقسم باقي القسمة الإقليدية لـ  $a$  على  $b$ .

## 3. القاسم المشترك الأكبر

**تعريف:** نسمي القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين أكبر قواسمهما المشتركة.

**مثال:** القواسم المشتركة للعددين 12 و 30 هي: 1، 2، 3 و 6 ومنه:  $\text{PGCD} (30; 12) = 6$ .

**خاصية:** مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين هي مجموعة قواسمهما المشتركة الأكبر.

## 4. الكسور غير القابلة للاختزال

**تعريف 1:** ( $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما) معناه ( $\text{PGCD}(a; b) = 1$ ).

**تعريف 2:** (الكسر  $\frac{a}{b}$  غير قابل للاختزال) معناه ( $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما).

**مثال:** العددان 25 و 26 أوليان فيما بينهما ومنه الكسر  $\frac{25}{26}$  غير قابل للاختزال.

## أتدرب:

التمرين 1: 1- حدد المساواة التي تعبّر عن القسمة الإقلية للعدد 1512 على 21.

2- أكتب  $\frac{720}{1512}$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين 1:

نعتبر العددين الطبيعيين 63 و 105.

1. عين قائمة قواسم كل من هذين العددين.

2. ما هو القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين؟ هل هما أوليان فيما بينهما؟ ببر.

3. اجعل الكسر  $\frac{63}{105}$  غير قابل للاختزال.

التمرين 2:

نعتبر العددين 286 و 130.

1- باستعمال خوارزمية إقليدس عين (130; 286).

2- ليكن الكسر  $\frac{286}{130} = A$ . أكتب  $A$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين 3:

## أنمي كفاءاتي:

المأساة 1:

يعرض بائع زهور للبيع 75 زهرة نرجس و 90 زهرة أقحوان.

1. باستعمال كل الزهور، هل يمكنه تشكيل 5 باقات متماثلة؟ 6 باقات؟

2. ما هو أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور؟ ما هو عدد زهور النرجس و زهور الأقحوان في كل باقة؟

المأساة 2:

نعتبر العددين 3073 و 1317.

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317.

2. يشارك تلميذ في مسابقة في الرياضيات حسب الفرق. يوجد 3073 تلميذة و 1317 تلميذ. يجب تكوين فرق متماثلة (لها نفس عدد التلاميذ و نفس التوزيع بين البنات والأولاد) بتعيين كل مشارك في فريق من الفرق.

أ) ما هو أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها؟

ب) عين في هذه الحالة تشكيلة كل فريق. (عدد البنات و عدد الأولاد).

المشكلة 3:

نعتبر العددين 540 و 300.

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300.
2. نريد أن نفرش قاعة مستطيلة الشكل طولها  $m$  و عرضها  $3m$  بزرابي مربعة الشكل وكلها متماثلة.
  - ما هو طول كل زريبة حتى يكون عدد الزرابي المستعملة أصغر ما يمكن؟
  - عين حينئذ عدد الزرابي المستعملة.

المشكلة 4:

يملك أحد هوا الطوابع البريدية 1631 طابعا جزائريا و 932 طابعا أجنبيا. يريد بيع كل طوابعه على شكل مجموعات متماثلة (لها نفس عدد الطوابع و نفس التوزيع بين الطوابع الجزائرية والأجنبية).

1. عين أكبر عدد من المجموعات التي يمكن تشكيلها.
2. عين حينئذ عدد الطوابع الجزائرية و عدد الطوابع الأجنبية في كل مجموعة.

## حلول التمارين و المسائل

حل التمارين 1

$$1. 1512 = 21 \times 72 + 0. \text{ حاصل القسمة هو } 72 \text{ بينما الباقي } 0.$$

$$2. \text{ لدينا: } 1512 = 21 \times 72 \text{ و } 72 = 10 \times 7. \text{ وبالتالي:}$$

$$\frac{10}{21} \text{ غير قابل للاختزال.}$$

$$\frac{720}{1512} = \frac{10 \times 72}{21 \times 72} = \frac{10}{21}$$

حل التمارين 2

$$1. \text{ قواسم العدد } 63 \text{ هي: } 1, 3, 7, 9, 21, 63.$$

$$\text{قواسم العدد } 105 \text{ هي: } 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.$$

$$2. \text{ نلاحظ من القائمتين أن قواسمهما المشتركة هي: } 1, 3, 7, 21,$$

و وبالتالي فإن:

$$PGCD(105; 63) = 21. \text{ و بما أن } 1 \neq PGCD(105; 63). \text{ فإن العددين } 105 \text{ و } 63 \text{ ليسا أوليين فيما بينهما.}$$

$$3. \text{ لدينا: } 105 = 21 \times 5 \text{ و } 63 = 21 \times 3 \text{ و منه: } \frac{63}{105} = \frac{21 \times 3}{21 \times 5} = \frac{3}{5}$$

### حل التمارين 3

الكسر  $\frac{3}{5}$  غير قابل للاختزال.

.1

	2	
286	130	26
	26	0

الحاصل ←  
القاسم و المقسم ←  
الباقي ←

$$286 = 130 \times 2 + 26$$

$$130 = 26 \times 5 + 0$$

آخر باق غير معدوم للقسمات الإقلية المتتابعة هو 26  
 $PGCD(286; 130) = 26$  و وبالتالي:

2. حسب نتائج السؤال الأول لدينا:  $286 = 26 \times 11$  و  $26 = 26 \times 5 + 0$  منه:

$$A = \frac{286}{130} = \frac{26 \times 11}{26 \times 5} = \frac{11}{5}$$

الكسر  $\frac{11}{5}$  غير قابل للاختزال.

### حل المسألة 1

1. عدد الزهور المعروضة للبيع هو:  $165 = 75 + 90$ . لدينا:  $33 = 5 : 3$  و وبالتالي يمكن البائع تشكيل 5 باقات متماثلة بحيث تشمل كل باقة 15 زهرة نرجس و 18 زهرة أقحوان لأن:  $15 = 75 : 5$  و  $18 = 90 : 5$ .

في حين:  $165 : 6 = 27.5$

و وبالتالي لا يمكن للبائع تشكيل 6 باقات متماثلة (العدد 27.5 ليس عدداً طبيعياً).

2. إذا رمزاً إلى أكبر عدد ممكن من الباكات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور بالرمز  $n$  فيجب أن يقسم  $n$  كلاً من العددان 75 و 90 و وبالتالي فإن  $n$  قاسم مشترك للعددين 75 و 90 و بالإضافة إلى ذلك فإن  $n$  هو أكبر هذه القواسم. إذن  $n$  هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 75 و 90. لنحسب باستعمال مثلاً خوارزمية إقليدس  $PGCD(90, 75)$ .

$$\begin{array}{r} 90 = 75 \times 1 + 15 \\ 75 = 15 \times 5 + 0 \end{array}$$

إذن أكبر عدد ممكن من الباكات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور هو: 15. لدينا:  $5 : 15 = 15 : 75$  و  $6 : 15 = 15 : 90$  وبالتالي فعدد زهور النرجس في كل باقة هو: 5 بينما عدد زهور الأقحوان في كل باقة هو: 6. نجد في كل باقة 11 زهرة.

## حل المسألة 2

1. لنحسب باستعمال مثلا خوارزمية إقليدس  $PGCD(3073, 1317)$ .

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } 3073 &= 1317 \times 2 + 439 \\ \text{آخر باق غير معدوم هو } 439 \text{ ومنه: } \\ 1317 &= 439 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

$$PGCD(3073, 1317) = 439$$

2. ) بما أن كل الفرق متماثلة وأن كل تلميذ سواء كان بنتاً أو ولداً ينتمي إلى إحدى الفرق فإن عدد الفرق يقسم كلاماً من عدد الأولاد و عدد البنات أي يقسم 3073 و 1317 . وبما أننا نبحث عن أكبر عدد من الفرق فإن هذا العدد هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317 أي 439 . وبالتالي فإن أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها هو 439 .

$$\text{ب) عدد البنات في كل فريق هو: } 7 = 3073 \div 439$$

$$\text{عدد الأولاد في كل فريق هو: } 3 = 1317 \div 439$$

يتشكل كل فريق من 10 تلاميذ من بينهم 7 بنات و 3 أولاد.

## حل المسألة 3

1. لتعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300 نستعمل مثلا تقنية

عمليات الطرح المتتابعة و التي ترتكز على القاعدة التالية:

$$a > b \quad PGCD(a; b) = PGCD(b; a - b)$$

$$PGCD(540; 300) = PGCD(300; 240) \quad 540 - 300 = 240 \quad \text{و منه:}$$

$$PGCD(540; 300) = PGCD(240; 60) \quad 300 - 240 = 60 \quad \text{و منه:}$$

$$PGCD(540; 300) = PGCD(180; 60) \quad 240 - 60 = 180 \quad \text{و منه:}$$

$$PGCD(540; 300) = PGCD(120; 60) \quad 180 - 60 = 120 \quad \text{و منه:}$$

$$PGCD(540; 300) = PGCD(60; 60) \quad 120 - 60 = 60 \quad \text{و منه:}$$

$$PGCD(540; 300) = 60 \quad \text{و هكذا نجد أن:}$$

2. • طول القاعة هو  $540\text{cm}$  و عرضها  $300\text{cm}$ . لتفريش القاعة و بدون استعمال

أجزاء من زرابي يجب أن يكون ضلع الزربية قاسماً لكل من العددين 540 و 300

و ليكون عدد الزرابي المستعملة أصغر ما يمكن يجب أن تكون الزرابي أكبر ما

يمكن و وبالتالي يجب أن يكون ضلع الزربية القاسم المشترك الأكبر للعددين 540

و 300 . و هكذا فإن طول ضلع كل زربية هو:  $60\text{cm}$

• عدد الزرابي على طول القاعة هو:  $9 = 540 \div 60$  بينما عددها على عرض

القاعة هو:  $5 = 300 \div 60$  . وبالتالي فعدد الزرابي المطلوب هو:  $45 = 9 \times 5$  .

#### حل المسألة 4

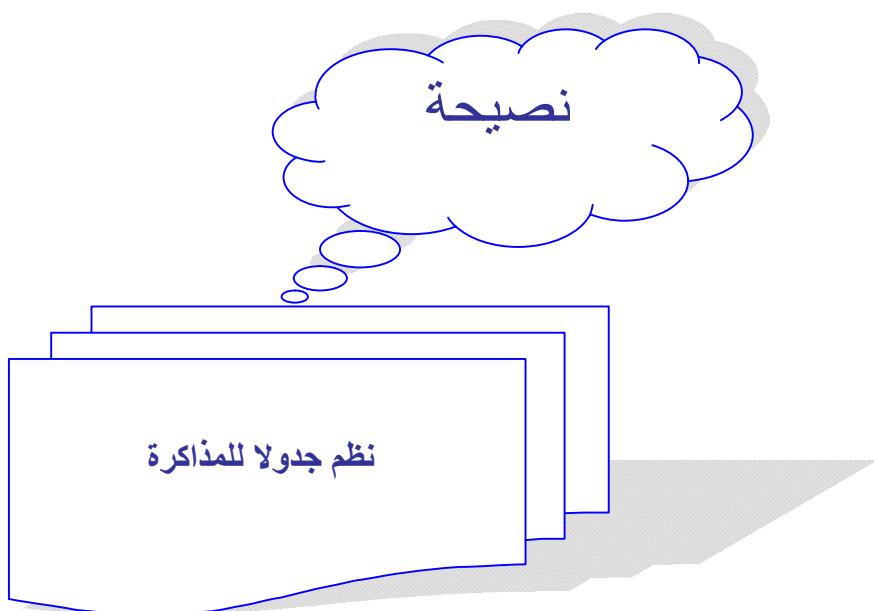
1. إذا رمزنَا إلى أكبر عدد ممكِن من المجموعات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الطوابع بالرمز  $n$  فيجب أن يقسم  $n$  كل 1631 و 932 و بالتالي فإن  $n$  قاسم مشترك للعددين 1631 و 932 و بالإضافة إلى ذلك فإن  $n$  هو أكبر هذه القواسم. إذن  $n$  هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 1631 و 932. باستعمال خوارزمية إقليدس يكون:

$$1631 = 932 \times 1 + 699$$

$$\text{لدينا: } PGCD(1631; 932) = 233 \quad \text{و منه: } 962 = 699 \times 1 = 233 \\ 699 = 233 \times 3 + 0$$

و بالتالي فإن أكبر عدد للمجموعات التي يمكن للهاوي تشكيلها هو: 233.

2. لدينا:  $7 = 932 \div 233$  و  $4 = 1631 \div 233$  في كل مجموعة يوجد إذن 7 طوابع جزائرية و 4 طوابع أجنبية.



## الحساب على الجذور

2

أتذكر الأهم:

### 5. الجذر التربيعي لعدد موجب

تعريف: الجذر التربيعي للعدد الموجب  $a$  هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي  $a$  و نرمز له بالرمز  $\sqrt{a}$ . لدينا:  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

مثال:  $\sqrt{2}$  هو الجذر التربيعي للعدد 2. لدينا:  $2 = (\sqrt{2})^2$ .

### 6. المعادلة من الشكل $x^2 = a$

- إذا كان  $a < 0$  فإن المعادلة  $x^2 = a$  لا تقبل حلولا.
- إذا كان  $a = 0$  فإن المعادلة  $x^2 = 0$  تقبل حلًا واحدًا وهو 0.
- إذا كان  $a > 0$  فإن المعادلة  $x^2 = a$  تقبل حلتين و هما  $\sqrt{a}$  و  $-\sqrt{a}$ .

مثال: للمعادلة  $3 = x^2$  حلان هما  $\sqrt{3}$  و  $-\sqrt{3}$ .

### 7. خواص

الخاصية 1: إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين فإن:  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ .

الخاصية 2: إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين حيث  $b \neq 0$  فإن:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

الخاصية 3: إذا كان  $a$  عدداً موجباً فإن:  $\sqrt{a^2} = a$ .

الخاصية 4: إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين فإن:  $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ .

أمثلة:  $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$  ،  $\sqrt{36} = 6$  ،  $\sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2}$  ،  $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$

ملاحظة: إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين غير معدومين حيث  $a < b$  فإن:

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

مثال: لدينا من جهة 5  $= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$  و لدينا من جهة ثانية 7  $= 4+3$

$$\text{و بالتالي: } \sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

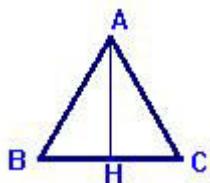
لدينا من جهة 8  $= \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$  و لدينا من جهة ثانية 4  $= 10-6=4$

و بالتالي:  $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$

## تمارين ومسائل

### أُدْرِبْ:

التمرين 1: علماً أن مساحة قاعة مربعة الشكل هي  $18,49 m^2$  عين بالметр طول ضلعها.



التمرين 2: مثلث مقايس الأضلاع و لتكن النقطة  $H$  منتصف القطعة  $[BC]$ .

1. أحسب الطول  $AH$  إذا علمت أن  $BC = 7 cm$ .

2. أحسب الطول  $AH$  إذا علمت أن  $BC = acm$ .

التمرين 3: نعتبر العددين  $A$  و  $B$  بحيث:

$$B = (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) \quad A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$$

1. أكتب العددين  $A$  و  $B$  على الشكل  $a + b\sqrt{5}$  حيث  $a$  و  $b$  عددان طبيعيان.

2. عين القيمة المدورية إلى  $-10$  للعدد  $A$ .

3. أحسب قيمة مقربة إلى  $-10$  بالتقسان للعدد  $B$ .

### أُنْمِي كفاءاتِي:

المأساة 1: نهدف إلى إثبات أن العدد  $\sqrt{2}$  ليس عدداً ناطقاً. إذا كان  $\sqrt{2}$  عدداً ناطقاً فإنه

يمكن كتابة على شكل كسر غير قابل للاختزال  $\frac{p}{q}$  حيث  $p$  و  $q$  عددان طبيعيان

غير معديمين.

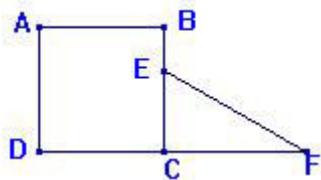
1. تتحقق أن  $2q^2 = p^2$  ثم استنتج أن  $p^2$  عدد زوجي.

2. بين أنه إذا كان  $p$  زوجياً يكون  $p^2$  زوجياً و إذا كان  $p$  فردياً يكون  $p^2$  فردياً ثم استنتج أن العدد  $p$  زوجي.

3. بوضع  $p' = 2p$  و بإتباع نفس منهجية السؤال السابق أثبت أن العدد  $p'$  زوجي.

4. اشرح لماذا أجوبة السؤالين 2 و 3 مناقضة للمعطيات ثم استنتج أن  $\sqrt{2}$  ليس عدداً ناطقاً.

المسألة 2: مربع طول ضلعه  $ECF \cdot x \text{ cm}$ . مثلث قائم في النقطة  $C$ . النقطة  $E$  نقطة من القطعة المستقيمة  $[BC]$  و  $FC = 4\text{cm}$ .



1. عبر عن  $A$  مساحة  $ABCD$  بواسطة  $x$  ثم أحسب  $x = 2 + \sqrt{2}$  من أجل  $A$ .

2. \* نفرض  $BE = 0,5\text{cm}$  و  $x \geq 1$ . احسب  $A'$  مساحة المثلث  $ECF$ .

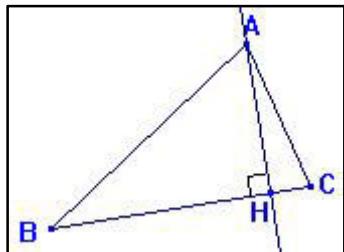
\* نضع  $S = A + A'$ . أحسب  $S$  بواسطة  $x$  ثم تحقق أن:  $-1 < x < 2$ .

\* أحسب  $S$  من أجل  $x = 2 + \sqrt{2}$ . تعطى النتيجة على الشكل  $a + b\sqrt{2}$ .

المسألة 3:

$ABC$  مثلث و  $H$  المسقط العمودي لـ  $A$  على  $(BC)$

حيث:  $AH = 12\sqrt{3}$  ،  $BH = 5\sqrt{3}$  و  $HC = 9\sqrt{3}$ .



1. بين أن:  $AC = 13\sqrt{3}$  و  $AB = 15\sqrt{3}$  وأن:  $P_{ABC} = 45\sqrt{3}$ .

2. أحسب  $P$  محيط المثلث  $ABC$ .

3. أحسب  $S$  مساحة المثلث  $ABC$ .

4. هل المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $A$ ? علل.

حل التمرين 1

إذا رمنا إلى طول ضلع القاعدة بالرمز  $x$  يكون لدينا:  $x^2 = 18,49$  لأن

مساحة المربع هي  $x^2$ . للمعادلة  $x^2 = 18,49$  حلان هما  $-4,3$  و  $4,3$ .

علماً أن الأطوال أعداد موجبة

فإن  $x = 4,3$ . وهكذا طول ضلع القاعدة المربعة الشكل هو  $4,3\text{m}$ .

حل التمرين 2

المثلث  $AHC$  قائم في النقطة  $H$ . لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \quad \text{و منه: } AC^2 = AH^2 + HC^2$$

بما أن  $H$  منتصف  $[BC]$  فإن:  $HC = \frac{BC}{2}$  وبالتالي:

و علماً أن:  $AC = BC$  فإن:  $AH^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{2^2}$  أي:  $AH^2 = \frac{3BC^2}{2^2}$

$$\therefore AH = \sqrt{\frac{3 \times 7^2}{2^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \quad \text{و منه: } AH^2 = \frac{3 \times 7^2}{2^2}$$

$$\therefore AH = \sqrt{\frac{3 \times a^2}{2^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{و منه: } AH^2 = \frac{3 \times a^2}{2^2}$$

.1

حل التمرين 3

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$$

$$A = 5 + \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{16 \times 5}$$

$$\therefore A = 5 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$A = 5 + 6\sqrt{5}$$

$$B = (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$$

$$B = (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 2 + 2^2 - ((\sqrt{5})^2 - 1)$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5} + 4 - 5 + 1$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5}$$

2. باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: ...  $A = 18,41640...$ .

إذن  $18,42$  هي القيمة المدوره إلى  $10^{-2}$  للعدد  $A$  لأن  $5 \geq 6$ .

3. باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: ...  $B = 13,94427...$ .

إذن  $13,94$  قيمة مقربة إلى  $10^{-2}$  بالنقصان للعدد  $B$ .

حل المسألة 1

1. بوضع:  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  يكون لدينا:  $2 = \frac{p^2}{q^2}$  و منه:  $p^2 = 2q^2$ . بما أن  $p^2$  زوجي.

يكتب على الشكل:  $2k$  فإن  $p^2$  عدد زوجي.

2. \*نفرض أن  $p$  زوجي و منه:  $p = 2k$  حيث  $k$  عدد طبيعي و وبالتالي:

و هكذا  $p^2 = 2(k')^2 = 2k^2$  مع  $p^2 = 2(2k^2) = 4k^2$ . إذن:  $p^2$  عدد زوجي.

\* نفرض أن  $p$  فرديا و منه:  $p = 2k + 1$  حيث  $k$  عدد طبيعي

$$p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

و هكذا  $+1 = 2k^2 + 2k$  مع  $p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k^2 + 2k + 1$ . إذن:  $p^2$  عدد فردي.

و منه لو كان  $p$  عددا فرديا لكان  $p^2$  عددا فرديا وبما أن  $p^2$  زوجي فإن  $p$  زوجي.

3. بما أن  $p$  زوجي نضع  $p = 2p'$  و منه:  $p^2 = 4p'^2$  و بعد التعويض في العلاقة:

$$p^2 = 2q^2 \text{ نحصل على } 4p'^2 = 2q^2 \text{ و نجد هكذا: } q^2 = 2p'^2$$

وباستعمال نتائج السؤال الثاني نستنتج أن العدد  $q$  زوجي لأنه في نفس وضعية  $p$ .

4. استنتجنا في السؤالين 2 و 3 أن العددان  $p$  و  $q$  زوجيان و بالتالي فإن العدد

قاسم مشترك لهما و هذا يعني أن الكسر  $\frac{p}{q}$  غير قابل للاختزال و هذا منافق للفرضية " قسم مشترك لهما و هذا يعني أن الكسر  $\frac{p}{q}$  غير قابل للاختزال و هذا منافق للفرضية "

كسر غير قابل للاختزال " إذن  $\sqrt{2}$  ليس عددا ناطقا.

### حل المسألة 2

$$A = (2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2} \quad . \text{ من أجل } \sqrt{2} \text{ لدينا: } x = 2 + \sqrt{2} \quad . \text{ 1}$$

$$\text{الي: } A' = \frac{CF \times CE}{2} = \frac{4 \times (x - 0,5)}{2} = 2(x - 0,5) \quad . \text{ 2}$$

$$A' = 2x - 1$$

$$\text{لدينا: } S = x^2 + 2x - 1 \quad . \text{ و منه: } S = x^2 + (2x - 1) \quad *$$

$$S = (2 + \sqrt{2})^2 + 2(2 + \sqrt{2}) - 1 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 + 4 + 2\sqrt{2} - 1 \quad *$$

$$\text{و منه: } S = 9 + 6\sqrt{2}$$

### حل المسألة 3

1. \* بما أن المثلث  $ABH$  قائم في النقطة  $H$  يكون لدينا حسب مبرهنة

فيتاغورس:  $AB^2 = BH^2 + AH^2$  أي:

$$AB^2 = (9\sqrt{3})^2 + (12\sqrt{3})^2 = 9^2 \times 3 + 12^2 \times 3$$

و منه:  $AB = 15\sqrt{3}$  و بالتالي:  $AB^2 = 225 \times 3 = 15^2 \times 3$  أي:  $AB = \sqrt{15^2 \times 3}$

\* بما أن المثلث  $ACH$  قائم في النقطة  $H$  يكون لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:

$$AC^2 = (5\sqrt{3})^2 + (12\sqrt{3})^2 = 5^2 \times 3 + 12^2 \times 3 \quad . \text{ أي: } AC^2 = HC^2 + AH^2$$

و منه:  $AC = 13\sqrt{3}$  و بالتالي:  $AC^2 = 169 \times 3 = 13^2 \times 3$  أي:  $AC = \sqrt{13^2 \times 3}$

2. لدينا:  $BC = 9\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$  و بالتالي:  $BC = BH + HC$

$$\text{نعلم أن: } P = AB + BC + CA = 15\sqrt{3} + 21\sqrt{3} + 13\sqrt{3} \quad . \text{ و منه: } P = AB + BC + CA$$

و هكذا نجد أن:  $P = 49\sqrt{3}$

3. مساحة المثلث  $ABC$  هي:  $S = \frac{BC \times AH}{2}$ . و بالتالي:

$$S = 378 \quad S = \frac{21\sqrt{3} \times 12\sqrt{3}}{2} = 21 \times 6 \times (\sqrt{3})^2$$

4. لدينا من جهة:  $BC^2 = (21\sqrt{3})^2 = 1323$  و لدينا من جهة ثانية:

$$AB^2 + AC^2 = 15^2 \times 3 + 13^2 \times 3 = 1182$$

نلاحظ أن:  $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$  و بالتالي فالمثلث  $ABC$  ليس قائما في النقطة  $A$ .

نصيحة

أحسن استغلال وقتك  
واجعل وقتا للجد و الاجتهاد  
ووقتا للعب و المرح.

# 3

## حساب الحرفي- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

**أذكر الأهم:**

### 8. المتطابقات الشهيرة

**تعريف:** من أجل كل عددين  $a$  و  $b$  تسمى المساويات الآتية متطابقات شهيرة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\text{أمثلة: } (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2, (x + \sqrt{2})^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$$

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

### 9. النشر و التحليل

\* تحليل عبارة جبرية يعني كتابتها على شكل جداء و يتم ذلك إما باستعمال العامل المشترك أو باستعمال المتطابقات الشهيرة.

\* نشر و تبسيط عبارة جبرية يعني إجراء مختلف العمليات قصد تبسيطها و كتابتها على شكل خططي.

**مثال:** \* نشر و تبسيط العبارة  $(x+2)^2 - 3(x-1)$  يعطي:

\* تحليل العبارة  $(x+2)^2 + (x+2)(x-1)$  يعطي:

### 10. معادلة جداء (معدوم)

**تعريف:** تسمى كل معادلة من الشكل:  $(ax+b)(cx+d) = 0$  حيث:  $a, b, c$  و  $d$  أعداد حقيقة معلومة مع  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  معادلة جداء (معدوم) و يؤول حلها إلى حل المعادلتين:  $ax+b=0$  و  $cx+d=0$ .

**لدينا:**  $ax+b=0$  (أو  $cx+d=0$ ) يعني  $(ax+b)(cx+d)=0$

**مثال:** نعتبر المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية:  $(x+1)(2x-3)=0$

$.x = \frac{3}{2}$  يعني أن:  $x = 0$  أو  $x = -1$  أي:  $2x - 3 = 0$  أو  $x + 1 = 0$

و هكذا فإن للمعادلة:  $(x+1)(2x-3)=0$  حلان هما:  $-1$  و  $\frac{3}{2}$ .

## تمارين ومسائل

### أتدرب:

التمرين 1:

نعتبر العبارة الجبرية:  $A = (3x-5)^2 - (2x-1)(3x-5)$

1. انشر و بسط العبارة  $A$ .
2. حل العبارة  $A$ .

3. احسب قيمة  $A$  من أجل  $x = \frac{5}{3}$  ثم من أجل  $x = \sqrt{3}$ .

التمرين 2:

نعتبر العبارة الجبرية:  $E = (2x+3)^2 - 3(2x+3)$

1. انشر و بسط العبارة  $E$ .

2. حل العبارة  $E$  ثم احسب قيمة  $E$  من أجل  $x = -2$  ثم من أجل  $x = 0$ .

3. حل المعادلة:  $E = 0$ .

التمرين 3:

نعتبر العبارة الجبرية:  $F = (x-4)(2x+1) - (x^2 - 16)$

1. انشر، بسط ثم رتب العبارة  $F$ .

2. حل العبارة  $F$  بعد ملاحظة وجود متطابقة شهيرة.

3. اختر العبارة التي تراها مناسبة لحل المعادلين:  $F = 0$  و  $F = 12$ .

التمرين 4:

نعتبر العبارة الجبرية:  $G = (x^2 - 9) - 2(x-3)$

1. انشر، بسط ثم رتب العبارة  $G$ .

2. حل العبارة  $G$ .

3. اختر العبارة التي تراها مناسبة لحساب قيمة  $G$  من أجل  $x = -1$  ثم

من أجل  $x = 0$

حل المعادلة:  $0 = (x-3)(x+1)$ .

التمرين 5:

عمر أحمد حاليا هو 11 سنة بينما عمر فؤاد هو 26 سنة.

بعد كم سنة يصبح عمر فؤاد ضعف عمر أحمد؟

## أنمى كفاءاتي:

1. حل العبارات الجبرية التالية:

المسألة 1:

$$I = (x + 7)^2 - 36$$

$$J = 4x^2 + 8x + 4$$

$$K = (x + 13)(x + 1) - 4(x + 1)^2$$

2. في الشكل المقابل  $AEGF$  مربع

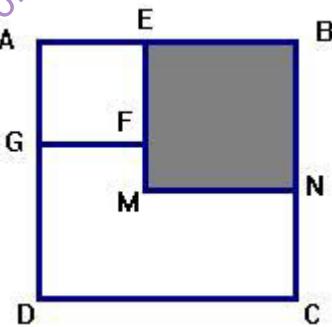
$$\text{حيث } AE = x + 1.$$

$$\text{مربع } EBNM \text{ طول ضلعه } 6 \text{ و } DG = 6.$$

\* عبر بواسطة  $x$  عن  $S$  مساحة الجزء غير

المظلل في الشكل.

\* من أجل أي قيمة لـ  $x$  تكون المساحة  $S$  مساوية أربع مرات مساحة المربع  $AEGF$ ؟



1. أنشر ثم بسط العبارة:  $P = (x + 12)(x + 2)$

المسألة 2:

2. حل العبارة:  $Q = (x + 7)^2 - 25$

3.  $x$  عدد موجب.  $ABC$  مثلث قائم في النقطة  $A$  بحيث:  $AB = 5$

$$BC = x + 7$$

$$\text{أثبت أن: } AC^2 = x^2 + 14x + 24$$

4. عين قيمة العدد  $x$  التي يكون من أجلها:  $AC^2 = 15(x + 2)$

1. تحقق أن المثلث، الذي أطواله الأعداد الطبيعية المتتابعة 3، 4 و 5، مثلث قائم.

المسألة 3:

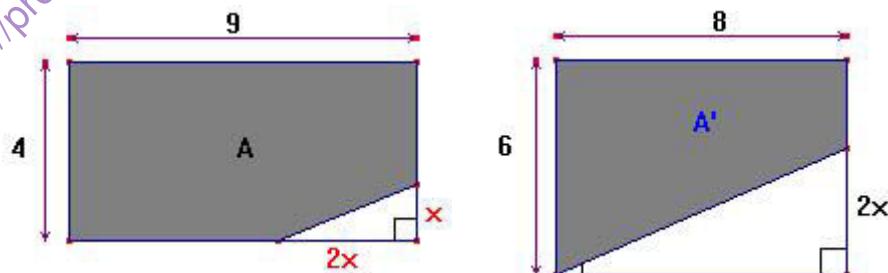
2. نريد معرفة ما إذا كانت توجد مثلثات أخرى أطوالها أعداد طبيعية متتابعة.

نفرض وجود مثلث يحقق ذلك و نرمز إلى طول أكبر ضلعي الزاوية القائمة بالرمز  $x$ .

\* عبر بواسطة  $x$  عن طولي كل من أصغر ضلعي الزاوية القائمة والوتر.

\* عين قيمة  $x$ . ماذا تستنتج؟

المأسأة 4



1. عبر عن المساحة المظللة  $A$

بواسطة  $x$ . حل العبارة المحصل عليها.

2. عبر عن المساحة المظللة  $A'$  بواسطة  $x$ . حل العبارة المحصل عليها.

3. عين قيم  $x$  التي تكون من أجلها المساحتان  $A$  و  $A'$  متساويتين.

## حلول التمارين و المسائل

$$A = (9x^2 - 30x + 25) - (6x^2 - 10x - 3x + 5) \quad .1$$

حل التمارين 1

$$A = 9x^2 - 30x + 25 - 6x^2 + 10x + 3x - 5$$

$$A = 3x^2 - 17x + 20$$

$$A = (3x - 5)[(3x - 5) - (2x - 1)] \quad .2$$

$$A = (3x - 5)(3x - 5 - 2x + 1)$$

$$A = (3x - 5)(x - 4)$$

$$* \text{ من أجل } A = 0 \text{ لدينا: } x = \frac{5}{3} \text{ و منه: } .3$$

$$* \text{ من أجل } A = 29 - 17\sqrt{3} \text{ لدينا: } x = \sqrt{3} \text{ و منه: } .$$

$$(2x + 3)^2 - 3(2x + 3) = 4x^2 + 12x + 9 - 6x - 9 = 4x^2 + 6x \quad .1$$

حل التمارين 2

$$E = 4x^2 + 6x \quad \text{وهكذا نجد أن:}$$

2. في هذه الحالة يمكن تحليل العبارة  $E$  باستعمال عامل مشترك.  
لدينا:  $E = 4x^2 + 6x = 2x(2x + 3)$  و إذا استعملنا العبارة الأولى يكون لدينا:

$$E = (2x + 3)^2 - 3(2x + 3) = (2x + 3)(2x + 3 - 3) = (2x + 3)2x$$

و هكذا نجد أن:  $E = 2x(2x + 3)$

من أجل  $x = -2$  لدينا:  $E = 2(-2)[2(-2) + 3] = 4$  أما من أجل  $x = 0$  فإن:

$E = 2x(2x + 3) = 0$  يعني  $2x = 0$  أو  $2x + 3 = 0$  وهذا يعني أن:

$$x = -\frac{3}{2} \text{ أو } x = 0. \text{ حل المعادلة } E = 0 \text{ هما إذن: } 0 \text{ و } -\frac{3}{2}.$$

### حل التمرين 3

.1

$$F = (x - 4)(2x + 1) - (x^2 - 16) = 2x^2 + x - 8x - 4 - x^2 + 16$$

و هكذا نجد أن:  $F = x^2 - 7x + 12$

$$F = (x - 4)(2x + 1) - (x^2 - 16) = (x - 4)(2x + 1) - (x - 4)(x + 4) .2$$

$$F = (x - 4)[(2x + 1) - (x + 4)] = (x - 4)(2x + 1 - x - 4)$$

و هكذا نجد أن:  $F = (x - 4)(x - 3)$

\* لحل المعادلة  $F = 0$  نختار العبارة:  $F = (x - 4)(x - 3) = 0$

و هكذا فإن  $F = 0$  يعني  $x - 4 = 0$  أو  $x - 3 = 0$  أي:  $x = 4$  أو  $x = 3$ . وهذا يعني أن:  $x = 4$  أو  $x = 3$ .

إذن للمعادلة  $F = 0$  حلان هما 3 و 4.

\* لحل المعادلة  $F = 12$  نختار العبارة:  $F = x^2 - 7x + 12$

و هكذا فإن  $F = 12$  يعني  $x^2 - 7x + 12 = 12$  أي:  $x^2 - 7x = 0$

نلاحظ أن:  $x(x - 7) = 0$  و وبالتالي فإن:  $F = 12$  يعني  $x = 0$  أو  $x = 7$ .

إذن للمعادلة  $F = 12$  حلان هما: 0 و 7.

### حل التمرين 4

.1

$$G = (x^2 - 9) - 2(x - 3) = x^2 - 9 - 2x + 6 = x^2 - 2x - 3$$

و هكذا نجد أن:  $G = x^2 - 2x - 3$

### حل التمرين 5

إذا رمزنا بالرمز  $x$  إلى عدد السنوات التي يصبح بعدها عمر فؤاد ضعف عمر احمد يكون حينئذ عمر فؤاد هو  $x+26$  و يكون عمر احمد هو  $11+x$ .

لدينا إذن:  $22+2x = 26+x$  و هذا يعني أن:  $2x - x = 26 - 22$ . نجد هكذا:  $x = 4$ . و بالتالي يصبح عمر فؤاد ضعف عمر احمد بعد 4 سنوات. يكون عمر احمد 15 سنة و يكون عمر فؤاد 30 سنة.

### حل المسألة 1

$$I = (x+7)^2 - 36 = (x+7-6)(x+7+6) = (x+1)(x+13) . \quad 1$$

$$J = 4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1) = 4(x+1)^2$$

$$K = (x+13)(x+1) - 4(x+1)^2 = (x+1)[(x+13) - 4(x+1)]$$

$$K = (x+1)(x+13 - 4x - 4) = (x+1)(9-3x)$$

2. \* من الواضح أن  $ABCD$  مربع طول ضلعه  $6(x+1)$  أي:  $x+7$  و بالتالي

مساحته هي:  $(x+7)^2$ . من جهة ثانية مساحة المربع المظلل هي: 36

$$\text{و بالتالي يكون لدينا: } S = (x+7)^2 - 36$$

3 \* مساحة المربع  $AEFG$  هي:  $S' = (x+1)^2$ . لنعين  $x$  بحيث يكون:

$$S' = 4S' \text{ يعني } (x+1)^2 - 36 = 4(x+1)^2 \text{ أي و بعد ملاحظة أن } S = I$$

$$(x+1)(x+13) - 4(x+1)^2 = 0 \text{ أي: } K = 0 \text{ و هذا يعني أن: }$$

$x = 3$  أي:  $x+1 = 0$  أو  $x = -1$ . نجد هكذا:  $x = -1$  أو  $x = 3$

و بما أن  $x$  عدد موجب نأخذ هكذا  $x = 3$

$$\cdot P = (x+12)(x+2) = x^2 + 2x + 12x + 24 = x^2 + 14x + 24 \quad .1$$

$$\cdot Q = (x+7)^2 - 25 = (x+7-5)(x+7+5) = (x+2)(x+12) \quad .2$$

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث القائم  $ABC$  يكون لدينا:

$$\cdot AC^2 = (x+7)^2 - 25 \quad \text{أي: } AC^2 = BC^2 - AB^2 \quad \text{و منه: } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

نلاحظ أن:  $AC^2 = Q$  و أن:  $Q = P$  وبالتالي:  $AC^2 = P$

.5. بما أن:  $(x+2)^2 = 15(x+2)$  فإن:  $AC^2 = 15(x+2)$  يعني أن:

$$(x+12)(x+2) - 15(x+2) = 0 \quad \text{أي: } (x+12)(x+2) = 15(x+2)$$

و منه:  $x = -2$  أو  $x = 3$  و بما أن  $x \geq 0$  فإن:  $x = 3$ .

$$1. \text{لدينا: } 25 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \quad \text{و لدinya: } 25 = 5^2 \quad \text{و منه: } 5^2 = 5^2$$

و هكذا حسب عكس مبرهنة فيتاغورس فإن المثلث قائم.

2. \* بما أن أطوال هذا المثلث هي أعداد طبيعية متتابعة و علما أن طول أكبر ضلعي الزاوية القائمة هو  $x$  فإن طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو  $(x-1)$  بينما طول الوتر هو  $(x+1)$ .

\* بما أن المثلث قائم يكون لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:

$$(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 \quad \text{أي: } x^2 - 2x + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{أي: } x^2 - 4x = 0 \quad \text{و هذا يعني أن: } x = 4 \quad \text{أي: } x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 4$$

القيمة  $x = 0$  غير مناسبة لأن في هذه الحالة يكون طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو  $-1 = -1$  و نعلم أن الأطوال أعداد موجبة دائمًا. الحل الوحيد هو إذن:  $x = 4$  و في هذه الحالة فإن طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو  $3 = 4 - 1$  بينما طول الوتر هو  $5 = 4 + 1$ .

نستنتج أن المثلث الوحيد الذي يجيب على السؤال هو المثلث المعرف في السؤال الأول.

1. مساحة المستطيل في الشكل الثاني هي:  $36 = 9 \times 4$  و مساحة المثلث

$$\text{غير المظلل هي: } \frac{(2x)x}{2} \quad \text{و وبالتالي فمساحة الشكل المظلل}$$

$$\text{هي: } A = 36 - x^2$$

$$\text{لدينا: } A = (6-x)(6+x)$$

2. مساحة المستطيل في الشكل الأول هي:  $48 = 6 \times 8$  و مساحة المثلث غير المظلل

$$A' = \frac{8 \times (2x)}{2} = 8x \quad \text{و بالتالي فمساحة الشكل المظلل هي:}$$

$$A' = 8(6-x) \quad \text{لدينا:}$$

3. يعني أن:  $A = A'$

$$(6-x)(6+x) - 8(6-x)(6+x) = 8(6-x)$$

$$(6-x)(x-2) = 0 \quad \text{أي: } (6-x)[(6+x)-8] = 0$$

و هذا يعني:  $x = 6$  أو  $x = 2$  أي:  $x = 6$  أو  $x = 2$ .

نلاحظ من الشكل أن العدد  $x$  يجب أن يكون أصغر من 3 و إلا لكان  $x > 6$ .  
 تكون المساحتان  $A$  و  $A'$  متساويتين من أجل  $x = 2$ .

### تمارين إضافية

التمرين 1: نعتبر العبارة الجبرية:  $E = (2x-3)^2 - (2x-3)(4x-5)$

1. انشر ثم بسط العبارة  $E$ .

2. حل العبارة  $E$ .

3. احسب قيمة  $E$  من أجل  $x = \sqrt{5}$ . تعطى النتيجة على الشكل  $a+b\sqrt{5}$ .

4. حل المعادلة:  $E = 0$ .

التمرين 2: نعتبر العبارتين الجبريتين:  $A = (2x-1)^2 - (2x-1)(-x-3)$

و  $B = 2x^2 - 9x + 4$

1. حل العبارة  $A$ .

2. بين أن:  $A = B$ .

3. احسب قيمة  $A$  من أجل  $x = \frac{2}{3}$ . تعطى النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

4. حل المعادلة:  $(2x-1)(x-4) = 0$ .

# المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

4

أذكر الأهم:

## 11. المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هي متباينات تكتب بعد تحويلها على أحد الأشكال الآتية:  $ax > b$  ،  $ax \leq b$  ،  $ax \geq b$  حيث  $a$  و  $b$  عدوان حقيقيان و  $x$  المجهول.

أمثلة:

- \* المتراجحة  $-2x < -1$  هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
- \* المتراجحة  $0 \geq -3x - 2$  هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد لأنه يمكن كتابتها على الشكل:  $2 \geq -3x$ .

## 12. حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- \* حل متراجحة يعني إيجاد كل الأعداد  $x$  التي تحقق المتباينة.
- \* تسمى الأعداد التي تتحقق المتباينة حلول المتراجحة.

مثال: نعتبر المعادلة:  $3x - 5 \geq x + 3$

لدينا:  $3x - 5 \geq x + 3$  يعني  $3x - x \geq 3 + 5$  أي  $2x \geq 8$  أي  $x \geq \frac{8}{2}$ .

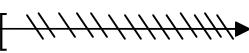
إذن حلول المتراجحة  $3x - 5 \geq x + 3$  هي كل الأعداد الأكبر من أو تساوي 4.

## 13. تمثيل مجموعة حلول متراجحة على مستقيم مدرج

و  $b$  عدوان حقيقيان حيث  $a > 0$ .

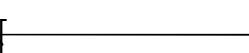
\* حلول المتراجحة  $ax < b$  هي الأعداد  $x$  التي تحقق  $\frac{b}{a} < x$  و تمثيلها على

مستقيم مدرج هو كما يلي:

  $\frac{b}{a}$  الحلوه ممثله في الجزء غير المشطبه عليه

\* حلول المتراجحة  $ax \geq b$  هي الأعداد  $x$  التي تحقق  $\frac{b}{a} \geq x$  و تمثيلها على

مستقيم مدرج هو كما يلي:

  $\frac{b}{a}$

ملاحظة هامة جدا: إذا كان  $a < 0$  نغير اتجاه المتباينة عند القسمة على  $a$ .

## تمارين ومسائل

### أتدرب:

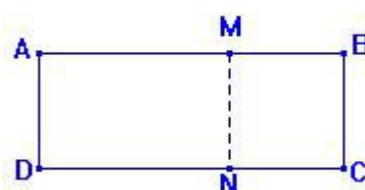
- التمرين 1:** نعتبر المتراجحة التالية:  $-5x + 7 > 2x + 21$
1. هل العدد 2 حل لهذه المتراجحة؟
  2. حل هذه المتراجحة ثم مثل حلولها على مستقيم مدرج.

- التمرين 2:** حل المتراجحة التالية ثم مثل حلولها على مستقيم مدرج:
- $$\frac{2x+1}{3} - 1 \leq \frac{x-1}{2}$$

- التمرين 3:** حل المتراجحة  $3 - 8x > 7x$  ثم مثل مجموعة حلولها على مستقيم مدرج.
2. حل المتراجحة  $2 - 5x - 1 > -2x$  ثم مثل مجموعة حلولها على مستقيم مدرج.
3. مثل على مستقيم مدرج مجموعة حلول الجملة التالية:
- $$\begin{cases} 7x > 8x - 3 \\ -2x + 1 > -5x - 2 \end{cases}$$

### أنمى كفاءاتي:

- المسلة 1:** يقترح أحد التوادي لكراء أشرطة الفيديو على زبنائه حلین هما:
- الحل الأول:** يشارك الزبون بمبلغ  $150DA$  ويدفع مبلغ  $20DA$  عند كراء كل شريط.
- الحل الثاني:** لا يشارك الزبون بأي مبلغ ويدفع مبلغ  $32DA$  عند كراء كل شريط.
- انطلاقاً من أي عدد للأشرطة المقتناة يكون أفضل للزبون اختيار الحل الأول.



- المسلة 2:** يمثل المستطيل  $ABCD$  قاعة يمكن تقسيمها إلى قاعتين مستطيلتين بواسطة جدار متحرك ممثل بالقطعة  $[MN]$ .

$$AD = 10m , AB = 30m \\ MB = x m$$

عين قيم  $x$  التي يكون من أجلها ربع مساحة القاعة أصغر من مساحة القاعة  $AMND$ .

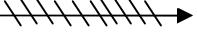
## حلول التمارين و المسائل

**حل التمارين 1**

1. بتعويض العدد 2 في المتراجحة يكون لدينا:  $-5 \times 2 + 7 > 2 \times 2 + 21$  أي:  $25 > 3$  و بما أن هذه المتباينة خاطئة فإن 2 ليس حلّاً للمتراجحة.

2.  $-7x + 7 > 2x + 21$  يعني  $-5x - 2x > 21 - 7$  أي  $-7x > 14$  بقسمة طرفي المتباينة على العدد (-7) و علماً أن  $0 < -7$  نتحصل بعد تغيير اتجاهها على  $x < -2$ .

حلول المعادلة هي إذن كل الأعداد الأصغر تماماً من العدد (-2) و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



**حل التمارين 2**

الحلول  $-2$

$$\frac{2x - 2}{3} \leq \frac{x - 1}{2} \text{ أي } \frac{2x + 1 - 3}{3} \leq \frac{x - 1}{2}$$

يعني  $\frac{2x + 1}{3} - 1 \leq \frac{x - 1}{2}$  وهذا يعني  $(2x - 2) \leq 3(x - 1)$

$$4x - 4 \leq 3x - 3 \text{ أي } 4x - 3x \leq -3 + 4$$

أي  $x \leq 1$  وهذا يعني  $x \leq 1$ . إذن حلول المعادلة هي إذن كل الأعداد الأصغر من أو تساوي العدد 1 و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



**حل التمارين 3**

الحلول  $1$

$$7x > 8x - 3 \text{ يعني } 7x - 8x > -3 \text{ و لدينا } .1$$



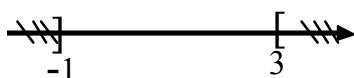
حل المسألة 1

$$2. -2x + 1 > -5x - 2 \quad \text{يعني} \quad -2x + 1 > -5x - 2$$

$$3. \text{ حلول الجملة هي الحلول المشتركة بين} \begin{cases} 7x > 8x - 3 \\ -2x + 1 > -5x - 2 \end{cases}$$

$$\text{المتراجحتين } 7x > 8x - 3 \quad \text{و} \quad -2x + 1 > -5x - 2$$

فحلولها هي الأعداد المقصورة بين العددين 1 و 3 ولدينا:



ليكن  $x$  عدد الأشرطة المقتناة.

الحل الأول: المبلغ المدفوع عند كراء  $x$  شريط فيديو هو:  $150 + 20x$

الحل الثاني: المبلغ المدفوع عند كراء  $x$  شريط فيديو هو:  $32x$

يكون الحل الأول أفضل من الحل الثاني إذا كان المبلغ المدفوع في الحل الأول أقل منه في الحل الثاني و يؤول ذلك إلى حل المتراجحة:  $32x > 150 + 20x$

$$32x > 150 + 20x \quad \text{يعني} \quad 32x - 20x > 150 \quad \text{أي} \quad x > \frac{150}{12} \quad x > 12,5$$

و هكذا يكون أفضل للزبون اختيار الحل الأول انطلاقاً من كراء 13 شريط فيديو.

حل المسألة 2

مساحة  $AMND$  هي  $10(30-x)^2$  بينما مساحة  $MBCN$  هي

$$.10x \ m^2$$

يكون ربع مساحة  $AMND$  أصغر من مساحة  $MBCN$  يعني  $10x < 10(30-x)^2$

و هذا يعني  $300 - 10x < 40x$  أي  $300 < 50x$  و بالتالي  $x > 6$ .

نصيحة

احذر شرود الذهن أثناء  
الدرس والمذاكرة.

## حمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

**أذكر الأهم:**

### 14. جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

**تعريف:** نسمى جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ حيث } a, b, a', b', c, c' \text{ أعداد حقيقة معلومة.}$$

### 15. الحل الجبري لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

#### • طريقة الجمع

لحل جملة باستعمال طريقة الجمع نقوم بضرب المعادلتين في أعداد مختارة بهدف جعل معاملي أحد المجهولين متعاكسيين بحيث يتم التخلص منه بالجمع طرف لطرف.

**مثال:** حل الجملة  $\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$  (1) في (2) نقوم مثلاً بضرب طرفي المعادلة (2) في 2

لتحصل على الجملة  $\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$  (1) و (2') طرف لطرف

نحصل على المعادلة  $6x = 12$  ذات الحل  $x = 2$ . لحساب  $y$  نعرض  $x$  بقيمتها 2 في إحدى المعادلتين و لكن (2) فنحصل على  $5 = 2 + y$  أي  $y = 3$  و أخيراً نتحقق من أن (2;3) حل للجملة. إذن (2;3) هو الحل الوحيد للجملة.

#### • طريقة التعويض

لحل جملة باستعمال طريقة التعويض نكتب أحد المجهولين بواسطة الآخر في إحدى المعادلتين ثم نعرضه في المعادلة الأخرى بهدف الحصول على معادلة بمجهول واحد.

**مثال:** حل الجملة  $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = 4 \end{cases}$  (1) و (2) نجد نكتب مثلاً  $x$  بواسطة  $y$  في (2)

ثم نقوم بتعويضه في (1) لنجد  $2(y + 4) + y = -1$  فنحصل على  $-3 = y$  وبعد تعويض  $y$  بقيمتها في إحدى المعادلتين نجد  $x = 1$ .

## تمارين ومسائل

إذن (3) هو الحل الوحيد للجملة.

### أتدرب:

التمرين 1: حل باستعمال طريقة التعويض الجملة التالية:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 30 & (1) \\ 2x + y = 7 & (2) \end{cases}$$

التمرين 2: أوجد عددين علماً أن مجموعهما 50 وأن الفرق بين العدد الأول و ضعف العدد الثاني هو 5.

### أنمى كفاءاتي:

المأساة 1: حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ 7x + 4y = 104 & (2) \end{cases}$$

2. تكون حمولة إحدى الشاحنات من 20 صندوق وزن بعضها  $28\text{kg}$  وزن البعض الآخر  $16\text{kg}$ . علماً أن وزن حمولة الشاحنة هو  $416\text{kg}$  عين عدد الصناديق التي وزنها  $28\text{kg}$  و عدد الصناديق التي وزنها  $16\text{kg}$ .

المأساة 2: حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

2. ثمن باقة زهور مكونة من 5 زهور نرجس و زهرتي أقحوان هو  $13DA$  بينما ثمن باقة مكونة من زهرة نرجس و زهرتي أقحوان هو  $8DA$ . ما هو ثمن باقة زهور مكونة من 4 زهور نرجس و 3 زهور أقحوان؟

المأساة 3: عين طول و عرض قاعة مستطيلة الشكل علماً أنه إذا زاد طولها بـ  $1m$  و زاد عرضها بـ  $3m$  زادت مساحتها بـ  $25m^2$  أما إذا نقص كل من عرضها و طولها بـ  $1m$  نقصت مساحتها بـ  $9m^2$ .

المأسأة 4:

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 50x + 75y = 21750 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

2. لزيارة أحد المتاحف فإن ثمن تذكرة الدخول بالنسبة للكبار هو  $75DA$

بينما ثمنها

بالنسبة للصغار هو  $50DA$ . علماً أن في هذا اليوم كان عدد الزوار 360 زائراً وأن مداخيل المتحف قدرت بـ  $21750DA$  حدد عدد الصغار وعدد الكبار الذين قاموا بزيارة المتحف في هذا اليوم.

## حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1

باستعمال المعادلة (2) نكتب مثلاً  $y$  بواسطة  $x$  فنحصل على  $y = 7 - 2x$ . لنعرض  $y$  بعبارته بواسطة  $x$  في المعادلة (1) فنحصل هكذا على:  $30 = 3x - 5(7 - 2x)$  أي  $30 = 3x - 35 + 10x$  أي  $13x = 65$ . لنعرض الآن  $x$  بـ 5 في (2) فنحصل على  $7 - 10 = -3$  أي  $y = -3$ . إذن  $(5; -3)$  هو الحل الوحيد للجملة.

حل التمرين 2

إذا رمزا إلى العددين بـ  $x$  و  $y$  يكون لدينا:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

لنستعمل مثلاً طريقة الجمع لحل هذه الجملة و من أجل ذلك نقوم بضرب طرفي (1) في 2 لنحصل على الجملة  $\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$  و بجمع (1') و (2)

طرفاً لطرف نحصل على  $105 = 3x$  أي  $x = \frac{105}{3} = 35$ . للحصول على  $y$  نعرض مثلاً  $x = 35$  في (1) لنحصل على  $50 = 35 + y$  أي  $y = 50 - 35 = 15$ . هكذا فإن حل الجملة الوحيد هو الثنائي  $(35; 15)$ .

1. حل الجملة نستعمل مثلا طريقة الجمع فنقوم بضرب طرفي المعادلة (1) في (-4)

لتحصل على الجملة  $\begin{cases} -4x - 4y = -80 & (1') \\ 7x + 4y = 104 & (2) \end{cases}$  وبالجمع طرف لطرف نحصل

على:  $3x = 24$  أي  $x = 8$ . بالتعويض في (1) نجد  $y = 20 - 8 = 12$  أي  $y = 12$ .  
إذن (12; 8) هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن  $x$  عدد الصناديق التي وزنها  $28\text{kg}$  و  $y$  عدد الصناديق التي وزنها  $16\text{kg}$ .

- بما أن عدد الصناديق في الشاحنة 20 فإن  $x + y = 20$ .
- حمولة الشاحنة هي  $28x + 16y = 416$  و منه  $28x + 16y = 416$ .

نحصل هكذا على الجملة  $\begin{cases} x + y = 20 \\ 28x + 16y = 416 \end{cases}$

بقسمة طرفي المعادلة الثانية على العدد 4 نحصل على الجملة  $\begin{cases} x + y = 20 \\ 7x + 4y = 104 \end{cases}$  المعرفة في السؤال الأول و التي حلها (12; 8).

إذن عدد الصناديق التي وزنها  $28\text{kg}$  هو 8 بينما عدد الصناديق التي وزنها  $16\text{kg}$  هو 12.

1. حل الجملة نستعمل مثلا طريقة الجمع فنقوم بضرب طرفي المعادلة (2) في (-1)

لتحصل على الجملة  $\begin{cases} 5x + 2y = 13 & (1) \\ -x - 2y = -8 & (2') \end{cases}$  وبالجمع طرف لطرف

نحصل على:  $4x = 4$  أي  $x = 1$ . بالتعويض في (1) نجد  $5 + 2y = 13$  أي  $2y = 8$  و منه  $y = 4$ .

إذن (1; 4) هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن  $x$  ثمن زهرة نرجس و  $y$  ثمن زهرة أقحوان.

\* ثمن باقة زهور مكونة من 5 زهور نرجس و زهرتي أقحوان هو  $5x + 2y$ .

\* ثمن باقة مكونة من زهرة نرجس و زهرتي أقحوان هو  $x + 2y$ .

و هكذا يكون لدينا:  $\begin{cases} 5x + 2y = 13 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$  و بما أن حل هذه الجملة هو (1; 4) فإن:

### حل المسألة 3

ليكن  $x$  طول القاعة و  $y$  عرضها و منه مساحتها هي  $xy$ .  
إذا زاد طولها بـ  $1m$  و زاد عرضها بـ  $3m$  تصبح مساحتها

$$(x+1)(y+3)$$

أما إذا نقص كل من عرضها و طولها بـ  $1m$  تصبح مساحتها  $(x-1)(y-1)$

$$\begin{cases} (x+1)(y+3) = xy + 25 & (1) \\ (x-1)(y-1) = xy - 9 & (2) \end{cases}$$

يكون هكذا لدينا: وهذا يعني:

$$\begin{cases} 3x + y = 22 & (1') \\ x + y = 10 & (2') \end{cases}$$

أي  $\begin{cases} 3x + y + 3 + xy = xy + 25 \\ -x - y + 1 + xy = xy - 9 \end{cases}$

$$(1) \quad (2)$$

لحل هذه الجملة نستعمل مثلا طريقة التعويض فنحصل هكذا من (2') على  $x = 10 - y$   
و بعد التعويض في (1') نحصل على  $22 = 3x + 10 - x$  أي  $2x = 12$  و بالتالي  $x = 6$   
و منه  $y = 4$  بعد التعويض في إحدى المعادلات.  
و هكذا فإن طول القاعة هو  $6m$  و عرضها هو  $4m$ .

### حل المسألة 4

نستعمل مثلا طريقة **الجمع فنقوم**

$$\begin{cases} x + y = 360 & (1) \\ 50x + 75y = 21750 & (2) \end{cases}$$

#### الجمع فنقوم

بضرب طرف في المعادلة (1) في 75 لنجصل على الجملة  
 $\begin{cases} 75x + 75y = 27000 \\ 50x + 75y = 21750 \end{cases}$

و بالطرح طرف لطرف نحصل على:  $25x = 5250$  أي  $x = 210$ . بالتعويض في (1)  
نجد  $210 + y = 360$  أي  $y = 150$ .

إذن  $(210; 150)$  هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن  $x$  عدد الصغار و  $y$  عدد الكبار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم.

\* عدد الزوار في هذا اليوم هو  $x + y$ .

\* مداخيل المتحف في هذا اليوم هي  $50x + 75y$ .

### حل المسألة 5

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 50x + 75y = 21750 \end{cases}$$

و هكذا يكون لدينا:

بما أن الحل الوحيد لهذه الجملة حسب السؤال الأول هو (210; 150) فإن:

- عدد الصغار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم هو 210.
- عدد الكبار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم هو 160.

إذا رمزا إلى مساحة المربع بـ  $A$  و إلى مساحة المستطيل بـ  $A'$  يكون لدينا:

$$A = 255 m^2 \quad \text{أي} \quad \begin{cases} A + A' = 850 \\ 7A - 3A' = 0 \end{cases} \quad \text{نجد بعد الحل:}$$

$$\begin{cases} A + A' = 850 \\ \frac{A}{A'} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$. A' = 595 m^2$$

### تمرين إضافي

التمرين:

انطلق أحد الرجالين من مدينة  $A$  نحو مدينة  $B$  على الساعة 8 بسرعة متوسطة قدرها  $5 km/h$  في حين انطلق دراج على الساعة 10 من نفس المدينة  $A$

نحو  $B$  بسرعة متوسطة قدرها  $28 km/h$ .

على بعد أي مسافة من المدينة  $A$  يلتقي الدراج بالرجل وفي أي ساعة؟

نصيحة

لا تتردد في انجاز  
الوظائف  
المذكورة، فـ

# 6

## الدالة الخطية – الدالة التألفية

**أتذكر الأهم:**

### الدالة الخطية

**.16.**

**تعريف:**  $a$  عدد معطى. نعرف دالة خطية لما نرافق بكل عدد  $x$  العدد  $ax$  . و نرمز:  $x \mapsto ax$  . العدد  $ax$  هو صورة العدد  $x$  بـ و نكتب:  $(x) = ax$  . يسمى العدد  $a$  معامل الدالة الخطية .

**الممثل البياني لدالة خطية:** التمثيل البياني للدالة الخطية  $x \mapsto ax$  هو المستقيم الذي يمر من المبدأ و الذي معادلته:  $y = ax$  .  $a$  هو معامل توجيه المستقيم .  
**مثال:** الدالة  $x \mapsto 3x$  هي الدالة الخطية ذات المعامل 3 و تمثيلها البياني هو المستقيم ذو المعادلة  $y = 3x$  . 3 هو معامل توجيه المستقيم .

### الدالة التألفية

**.17.**

**تعريف:**  $a$  و  $b$  عددان معلومان. نعرف دالة تألفية لما نرافق بكل عدد  $x$  العدد  $ax + b$  . و نرمز:  $x \mapsto ax + b$  . العدد  $ax + b$  هو صورة العدد  $x$  بـ و نكتب:  $(x) = ax + b$  . يسمى العدد  $a$  معامل الدالة التألفية .

**الممثل البياني لدالة تألفية:** التمثيل البياني للدالة التألفية  $x \mapsto ax + b$  هو المستقيم الذي معادلته:  $y = ax + b$  . يسمى العدد  $a$  معامل توجيه المستقيم و يسمى  $b$  الترتيب عند المبدأ .

**مثال:** الدالة  $x \mapsto -2x + 1$  هي الدالة التألفية ذات المعامل -2 و تمثيلها البياني هو المستقيم ذو المعادلة  $y = -2x + 1$  . -2 هو معامل توجيه المستقيم .

### النسبة المئوية

**.18.**

\* أخذ  $t\%$  من  $x$  هو حساب  $x \mapsto \frac{t}{100}x$  . الدالة الخطية المرفقة هي الدالة:

\* زيادة  $x$  بـ  $t\%$  هو حساب الدالة الخطية المرفقة هي  $\left(1 + \frac{t}{100}\right)x$ .

$$x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$$

\* خفض  $x$  بـ  $t\%$  هو حساب الدالة الخطية المرفقة هي الدالة:

$$x \mapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right)x$$

## تمارين ومسائل

### أتدرب:

التمرين 1:

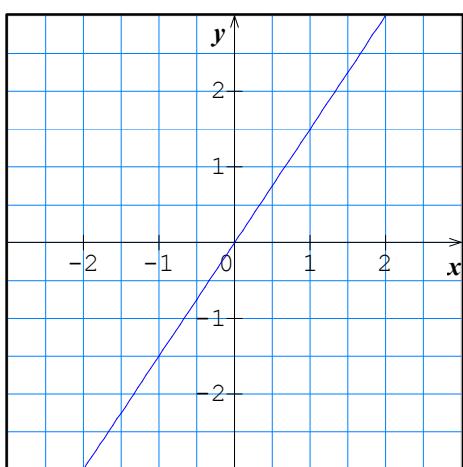
نعتبر الدالة الخطية:  $x \mapsto 2x$ .

1. عين صورة العدد  $(-3)$ .

2. عين العدد الذي صورته  $1$ .

التمرين 2:

عين معامل الدالة الخطية التي تحقق  $-5 = (2)$  ثم مثلاها بيانيا.



التمرين 3:

التمثيل البياني المقابل هو لدالة

خطية.

أجب عن الأسئلة التالية باستعمال

التمثيل البياني.

1. عين صورة العدد  $1$ .

2. عين العدد الذي صورته  $\frac{3}{2}$ .

3. أكمل الجدول التالي:

$x$	-2		1	
$(x)$		-1		3

أحسب  $a$  معامل الدالة الخطية.

التمرين 4:

نعتبر الدالة التالية:  $g: x \mapsto -2x + 5$ .

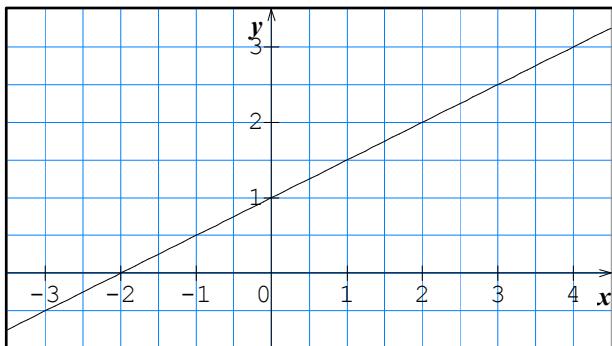
1. عين صورة العدد 2. ثم عين العدد الذي صورته -2.

2. ارسم التمثيل البياني للدالة  $g$ .

التمرين 5:

لتكن الدالة التالية التي تحقق:  $-5 = (-1) \cdot 4 + b$ .

عين عبارة الدالة التالية.



التمرين 6:

للممثل البياني المقابل

هو لدالة تالية.

أجب عن الأسئلة

التالية باستعمال التمثيل البياني.

1. عين صورة كل من -3 و 2.

2. عين العدد الذي صورته  $\frac{5}{2}$ .

3. أحسب  $a$  معامل الدالة.

أعط العبارة الجبرية له.

التمرين 7:

لتكن الدالة التالية التي تتحقق:  $1 = (1) \cdot 5 + b$ .

عين عبارة الدالة التالية.

التمرين 8:

نعتبر الدالتين  $g$  و  $f$  حيث  $f: x \mapsto 2x + 3$  و  $g: x \mapsto -3x + 2$ .

1. أرسم في معلم متعامد و متجانس المستقيمين ( $D$ ) و ( $D'$ ) الممثلين

للدالتين

و  $g$  على الترتيب.

2. حل بيانياً الجملة التالية:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

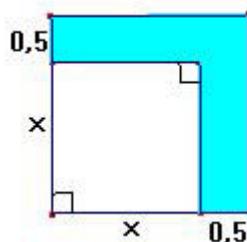
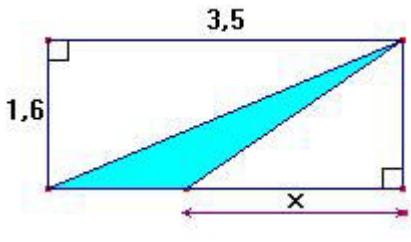
التمرين 9:

- رفع تاجر ثمن سلعه بنسبة 9%. ثمن سلعة  $DA$  ليصبح ثمنها بعد الزيادة  $y$ .  
 1. عبر عن  $y$  بدلالة  $x$ .  
 2. ثمن جهاز  $A$  قبل الزيادة هو  $217DA$ . ما هو ثمنه بعد الزيادة؟  
 3. ثمن جهاز  $B$  بعد الزيادة هو  $545DA$ . ما هو ثمنه قبل الزيادة؟

**التمرين 10** خفض تاجر ثمن إحدى سلعه المقدر بـ  $390DA$  مرتين متتاليتين الأولى بنسبة 10% و الثانية بنسبة 15%.

1. ما هو الثمن النهائي لهذه السلعة؟  
 2. ما هي نسبة التخفيض الإجمالية؟ ما هو رأيك؟

**التمرين 11** في كل حالة من الحالات التالية عبر عن  $(x)$  مساحة الجزء المظلل بدلالة  $x$ .



## أنمي كفاءاتي:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$ . **المسألة 1:**

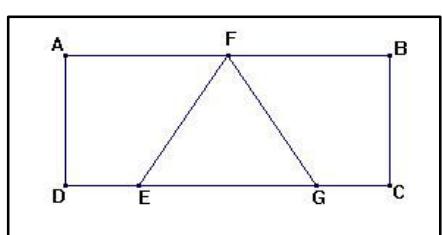
1. نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  حيث  $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

و  $g(x) = -3x + 9$

أ-. أحسب  $f(0)$  ،  $f(2)$  ،  $f(-2)$  ،  $g(0)$  ،  $g(2)$  ،  $g(-2)$ .

ب-. عين العدد الذي صورته 5 بالدالة  $g$ .

ت-. أرسم التمثيلين البيانيين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب.



2.  $ABCD$  مستطيل حيث:  $AB = 6\text{cm}$  ،  $AD = 3\text{cm}$

$[AB]$  منتصف ،  $F$  منتصف  $[AD]$ .

$DE = CG$  و  $G$  نقطة من  $[DC]$  حيث:

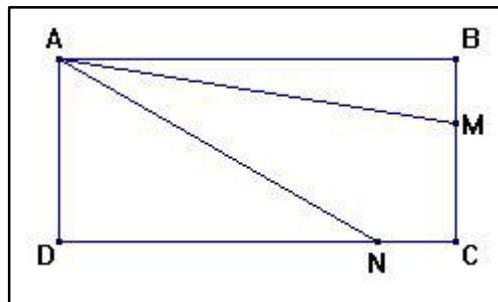
$DE = x$  نضع

أ. علماً أن النقط  $D, E, G, C$  تحافظ على هذا الترتيب حدد بين أي قيم يتغير  $x$ .

بـ. أحسب بدلالة  $x$  المساحات  $(x)A, (x)B, (x)C$  للمضلعات  $AFED$  و  $FBCG$  على الترتيب.

تـ. عين بيانيا باستعمال السؤال الأول قيمة  $x$  التي ينقسم من أجلها المستطيل  $ABCD$  إلى 3 أجزاء لها نفس المساحة.

ثـ. تحقق من صحة النتيجة بالحساب.



**المشكلة 2**

مستطيل  $ABCD$  حيث:

$AD = 4\text{cm}$  ،  $AB = 6\text{cm}$

نقطة  $M$

من  $[BC]$  و  $N$  نقطة من  $[CD]$  حيث:

$BM = CN = x$ . انظر الشكل المقابل

1. عبر بدلالة  $x$  عن  $A(x)$  مساحة

المثلث  $ABM$ .

2. أحسب  $B(X) = -2x + 12$  بدلالة  $x$  ثم بين أن مساحة المثلث  $ADN$  هي

3. نعتبر الدالتين التالية  $g : x \mapsto 3x$  و  $f : x \mapsto -2x + 12$

- أرسم التمثيلين البيانيين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  للدالتين  $g$  و  $f$  على الترتيب.

- عين إحداثيات نقطة تقاطع  $(d_1)$  و  $(d_2)$ .

- عين قيمة  $x$  التي يكون من أجلها  $B(x) = A(x)$ . ببر الإجابة ثم

أحسب من أجل القيمة المحصل عليها مساحة الرباعي  $AMCN$ .

## حلول التمارين و المسائل

1. لدينا  $-6 = 2(-3) = (-3) - 3$ . إذن صورة العدد  $(-3)$  هي العدد  $(-6)$ .

**حل التمارين 1**

2. العدد الذي صورته  $1$  هو العدد  $x$  الذي يتحقق  $1 = 2x = 0,5$  أي  $x = 0,5$ .

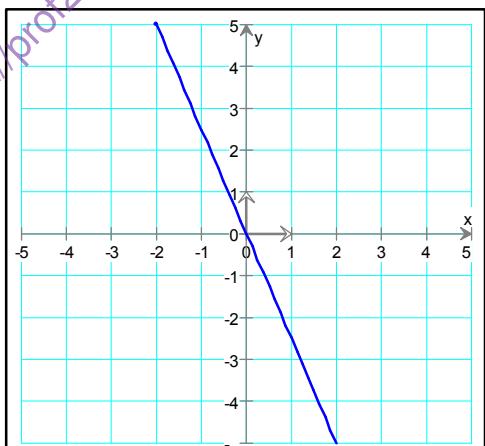
بما أن دالة خطية فإن  $x \mapsto ax$ :

أو بصيغة أخرى  $(x) = ax$ .

**حل التمارين 2**

$a = -\frac{5}{2}$  أي  $2 \times a = -5$  (2) = -5

ومنه معامل الدالة الخطية هو  $-\frac{5}{2}$ .



لرسم المستقيم الممثل للدالة الخطية يكفي، إضافة إلى المبدأ، رسم نقطة ثانية و هي مثلاً النقطة (2; -5) لأن  $(2; -5)$ .

حل التمرين 3

1. صورة العدد 1 هو

$$\text{العدد } -\frac{3}{2} \text{. لدينا هكذا } (-1) = -\frac{3}{2}$$

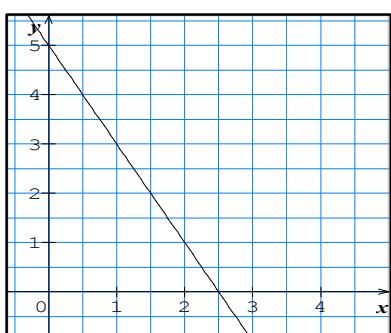
$$2. \text{ العدد الذي صورته } \frac{3}{2} \text{ هو العدد 1. لدينا هكذا } (1) = \frac{3}{2}$$

$x$	-2	-1	1	2
$(x)$	-3	-1,5	1,5	3

$$(2) = 3, \quad (-2) = -3 . 3$$

4. معامل الدالة الخطية هو معامل التناصية و لدينا مثلاً:

$$a = \frac{3 - 1,5}{1} \text{ أي } a = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$



$$g(2) = -2(2) + 5 . 1$$

$$. g(2) = 1 \text{ و منه}$$

إذن صورة 2 هي 1. العدد الذي صورته 2 هو العدد  $x$  الذي يحقق  $g(x) = -2$

$$-2x = -7 \text{ وهذا يعني } -2x + 5 = -2$$

$$. x = \frac{7}{2} \text{ أي }$$

3. انظر الرسم المقابل.

حل التمرين 5

بما أن دالة تألفية فإن  $f(x) = ax + b$ . نعلم أن معامل توجيهها هو

نفسه معامل التناصية و هكذا يكون لدينا:  $a = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$  و منه

$$a = \frac{4 - (-5)}{3} = \frac{9}{3}$$

إذن  $3 = a$ .  $a = 3$  يعني  $4 - b = 3(2) + b = 6$  أي  $b = 4 - 6 = -2$  و منه  $a = 3$ .

نجد هكذا أن العبارة الجبرية للدالة التألفية هي:  $f(x) = 3x - 2$ .

حل التمرين 6

1. نقرأ من التمثيل البياني أن:  $f(2) = -\frac{1}{2}$  و أن  $f(-3) = 2$ .

2. نقرأ من التمثيل البياني أن العدد الذي صورته  $\frac{5}{2}$  هو 3.

3. لدينا مثلا:  $f(0) = 0$  أي  $a = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{0 - (-2)}{0 - (-2)} = 1$  و منه:  $f(-2) = -2$ .

و وبالتالي  $a = \frac{1}{2}$ . معامل توجيه الدالة هو  $\frac{1}{2}$ .

4. نعلم أن  $b$  هو الترتيب عند المبدأ و بما أن  $f(0) = 1$  فإن  $b = 1$ .

العبارة الجبرية للدالة هي إذن:  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ .

حل التمرين 7

بما أن دالة تألفية فإن  $f(x) = ax + b$ .

لدينا  $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 5 \end{cases}$  يعني  $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=5 \end{cases}$  نحصل هكذا على جملة معادلتين من

الدرجة الأولى بمجهولين  $a$  و  $b$  و لنستعمل مثلا طريقة الجمع لحلها و من أجل ذلك نقوم

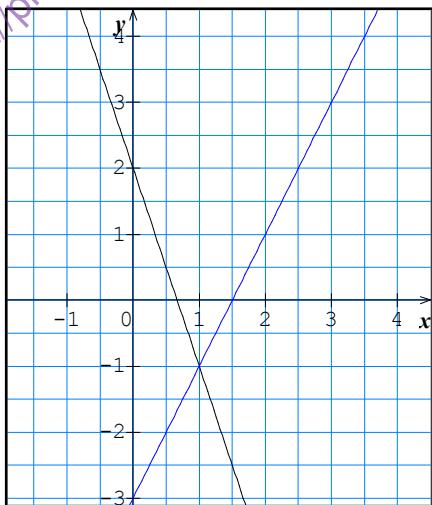
بضرب طرفي المعادلة الأولى في  $(-1)$  لنحصل على  $\begin{cases} -a-b=-1 \\ 2a+b=5 \end{cases}$

بالجمع طرف لطرف نجد:  $a = 4$  ثم بالتعويض مثلا في العادلة الأولى نحصل على  $b = -3$  أي  $4+b=1$ .

العبارة الجبرية للدالة هي إذن:  $f(x) = 4x - 3$ .

### حل التمرين 8

1. يكفي تعين نقطتين لرسم المستقيم ( $D$ )  
لدينا مثلا  $(0, 0,5)$  و منه يمر  
المستقيم ( $D$ ) من النقطتين  $(0, 0,5)$  و  $(2, 0,5)$ .



نفس الشيء بالنسبة للمستقيم ( $D'$ ) فهو مثلا يمر من النقطتين  $(-3, 0)$  و  $(2, 1)$  لأن  $g(0) = -3$  و  $g(2) = 1$ .

2. نلاحظ ان الجملة المقرحة يمكن كتابتها

$$\text{على الشكل التالي: } \begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

فإن حل هذه الجملة هي إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين ( $D$ ) و ( $D'$ ).

نقرأ من التمثيلين البيانيين أن المستقيمين ( $D$ ) و ( $D'$ ) يتقاطعان في النقطة  $(-1, 1)$ .

الحل الوحيد للجملة هو إذن  $(-1, 1)$ .

### حل التمرين 9

1. بما أن نسبة الزيادة هي  $9\%$  فإن الزيادة هي  $\frac{9}{100}x$  و هكذا يكون

$$\text{لدينا: } y = x + \frac{9}{100}x$$

$$y = x + 0,09x$$

$$\text{و بالتالي: } y = 1,09x$$

2. في هذه الحالة لدينا  $x = 217$  و منه  $y = 1,09 \times 217 = 236,53$  أي  $y = 236,53$ .  
و بالتالي ثمن الجهاز  $A$  بعد الزيادة هو  $236,53DA$ .

3. في هذه الحالة لدينا  $x = 545$  و منه  $y = 1,09x = 545$  أي  $500$ .  
و بالتالي ثمن الجهاز  $B$  قبل الزيادة هو  $500DA$ .

### حل التمرين 10

1. إذا رمزا إلى ثمن السلعة بعد تخفيض الأول بـ  $P_1$  و إلى ثمنها بعد التخفيض الثاني بـ  $P_2$ . بما أن نسبة التخفيض في المرة الأولى هي  $10\%$

### حل التمرين 11

• بالنسبة للشكل الأول لدينا:

$$A(x) = (x + 0,5)^2 - x^2$$

$$A(x) = x^2 + x + 0,25 - x^2$$

$$A(x) = x + 0,25$$

$$A(x) = \frac{1,6 \times 3,6}{2} - \frac{1,6 \times x}{2}$$

$$A(x) = 0,8 \times 3,6 - 0,8 \times x$$

$$A(x) = -0,8x + 2,88$$

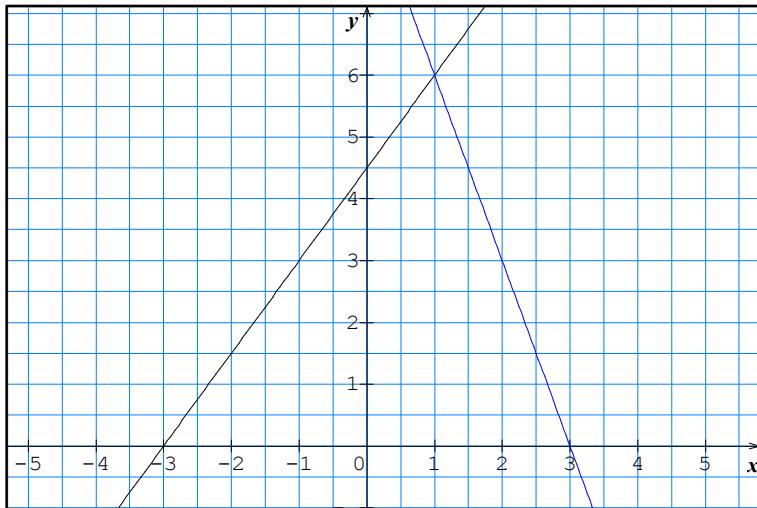
• بالنسبة للشكل الثاني لدينا:

$$g : x \mapsto -3x + 9 \quad \text{و} \quad : x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \cdot 1$$

$$\cdot g(2) = 3 \quad , \quad (2) = \frac{15}{2} \quad , \quad g(0) = 9 \quad , \quad (0) = \frac{9}{2} \quad .$$

$$\cdot x = \frac{4}{3} \quad . \quad \text{نجد} \quad g(x) = 5 \quad . \quad \text{يعني} \quad -3x + 9 = 5$$

### حل المسألة 1



2. علماً أن النقط  $D$ ،  $E$ ،  $G$  تحافظ على هذا الترتيب يكون لدينا:

أـ العدد  $x$  يتغير بين القيمتين  $0$  و  $3$  أي  $0 \leq x \leq 3$

بـ لدينا:  $A(x) = -3x + 9$  أي  $A(x) = \frac{3(6-2x)}{2}$  و لدينا:

$$C(x) = B(x) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \text{ أي } B(x) = \frac{(3+x) \times 3}{2}$$

تـ نلاحظ أن  $C(x) = B(x) = f(x)$  وأن  $A(x) = g(x)$  وبالتالي  $C(x) = A(x)$ .

يكون لدينا  $A(x) = B(x) = C(x) = f(x) = g(x)$  من أجل  $x = 1$  فاصلة نقطة تقاطع  $(d_1)$  و  $(d_2)$ .

ثـ بالنسبة للتحقق نقترح طريقتين:

\* الطريقة الأولى:  $-3x + 9 = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$  يعني  $C(x) = B(x) = f(x)$  أي

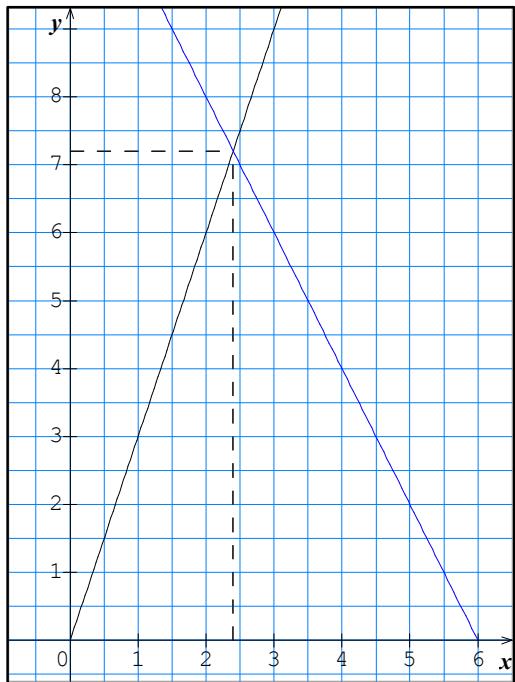
$$x = 1 \text{ و هكذا نجد } -9x = -6x + 18 = 3x + 9$$

\* الطريقة الثانية: مساحة المستطيل هي  $18 = 6 \times 3$  و وبالتالي فإن ثلثها هو  $6$

$$x = 1 \text{ و هكذا يكون لدينا: } -3x + 9 = 6 - 3x = -3 \text{ أي }$$

حل المسألة 2

$$A(x) = 3x \quad \text{و منه} \quad A(x) = \frac{6 \times x}{2} \cdot 1$$



2. النقط  $D$ ،  $N$  و  $C$  في استقامية  
و منه:

$$DN = 6 - x \quad \text{أي} \quad DN = DC - NC$$

و منه

$$B(x) = \frac{4 \times (6 - x)}{2} \quad \text{أي}$$

$$B(x) = 12 - 2x$$

- أنظر الشكل المقابل
- الفاصلة  $x$  لنقطة التقاطع تتحقق

$$3x = -2x + 12 \quad \text{أي} \quad (x) = g(x)$$

و منه  $x = \frac{12}{5}$  ثم بالتعويض مثلاً في  $(x)$

$$y = \frac{36}{5} \quad \text{نجد أن ترتيب نقطة التقاطع هي}$$

$$\left( \frac{12}{5}; \frac{36}{5} \right) \quad \text{إذن نقطة التقاطع هي}$$

$$\bullet \quad .x = \frac{12}{5} \quad \text{أي} \quad (x) = g(x) \quad A(x) = B(x)$$

لتكن  $C(x)$  مساحة الرباعي  $AMCN$ . لدينا:  $C(x) = 24 - (3x) - (-2x + 12)$ .

$$\text{نجد } C(x) = \frac{48}{5} = 9,6 \text{ cm}^2 \quad \text{و من أجل } x = \frac{12}{5} \quad C(x) = -x + 12$$

# الإحصاء

**أذكر الأهم:**

**19. التكرار المجمع المتزايد (الصاعد) - التكرار المجمع المتناقص (النازل)**

- تعريف:** - التكرار المجمع المتزايد لقيمة أو لفئة هو مجموع تكرار هذه القيمة أو الفئة و تكرارات القيم أو الفئات الأصغر منها.  
 - التكرار المجمع النازل لقيمة أو لفئة هو مجموع تكرار هذه القيمة أو الفئة و تكرارات القيم أو الفئات الأكبر منها.

**مثال:** تمثل السلسلة الإحصائية الآتية علامات 20 تلميذ في فرض لمادة الرياضيات

العلامات	8	9	10	11	12	13
التكرارات	3	6	2	5	3	1
التكرارات المجمعة المتزايدة	3	9	11	16	19	20
التكرارات المجمعة المتناقصة	20	17	11	9	4	1

**20. الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية**

**تعريف:** - الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية هو حاصل قسمة مجموع قيم هذه السلسلة على التكرار الكلي ( عدد قيمها ). و غالباً ما نرمز إليه بالرمز  $\bar{x}$ .

- الوسط الحسابي المتوازن لسلسلة إحصائية مرفقة بتكراراتها هو حاصل قسمة جداءات قيمها بتكراراتها على مجموع التكرارات.

- الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية مجمعة في فئات هو حاصل قسمة مجموع جداءات مراكز الفئات بتكراراتها على مجموع التكرارات.

**مثال:** تمثل السلسلة الإحصائية الآتية علامات 20 تلميذ في فرض لمادة الرياضيات

العلامات	8	9	10	11	12	13
التكرارات	3	6	2	5	3	1

$$\bar{x} = \frac{3 \times 8 + 6 \times 9 + 2 \times 10 + 5 \times 11 + 3 \times 12 + 1 \times 13}{3 + 6 + 2 + 5 + 3 + 1} = \frac{202}{201} = 10,10$$

**21. الوسيط**

**تعريف:** وسيط سلسلة إحصائية مرتبة هو قيمة المتغير التي تقسّم السلسلة إلى جزأين لهما نفس التكرار. و غالباً ما نرمز إليه بالرمز  $Me$ .

- إذا كان التكرار الكلي للسلسلة فردياً فوسيطها هو القيمة المركزية.
- إذا كان التكرار الكلي للسلسلة زوجياً فوسيطها هو وسط القيمتين المركزيتين.

**مثال:**

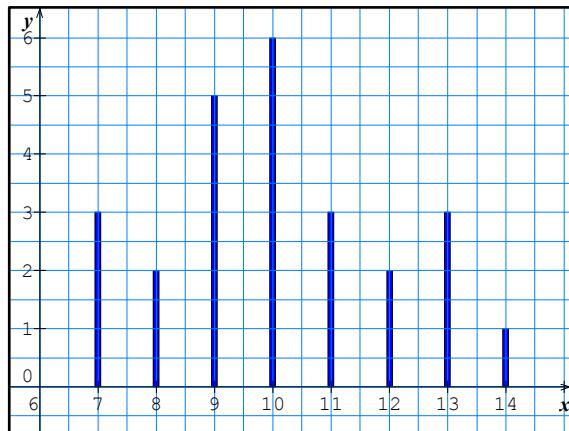
- وسيط السلسلة: 2 ، 3 ، 3 ، 5 ، 6 ، 6 ، 6 هو 5 لأن التكرار الكلي فردي (7).

- وسيط السلسلة:  $3, 3, 5, 6, 6, 6, 7$  هو  $\frac{5+6}{2} = 5,5$  لأن التكرار الكلي زوجي (8)

## مسائل

### أنمی كفاءاتي:

**المسألة 1:**



المخطط بالأعمدة المقابل يمثل توزيع علامات تلاميذ إحدى أقسام السنة الرابعة متوسط في فرض الرياضيات.

1. كم عدد تلاميذ هذا القسم؟
2. أعط جدول التكرارات المجمعة.
3. ما هو عدد التلاميذ الذين تحصلوا على نقاط تفوق أو تساوي 9؟
4. ما هو معدل القسم في الفرض؟
5. ما هي النقطة الوسيطة؟

**المسألة 2:**

علامات الرياضيات المحصل عليها من قبل 150 تلميذ إحدى الإكماليات في الامتحان التجاري لشهادة التعليم المتوسط هي موزعة في الجدول الموالي:

العلامات $n$	العلامات	$0 \leq n < 4$	$4 \leq n < 8$	$8 \leq n < 12$	$12 \leq n < 16$	$16 \leq n < 20$
عدد التلاميذ	14	$x$	55	20	9	

1. احسب العدد  $x$  ثم ارسم المدرج التكراري لهذه السلسلة.
2. بعد تعين مراكز الفئات أحسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة.
3. عين الفئة التي ينتمي إليها الوسيط.
4. ما هو عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أقل من 12؟
5. ما هي نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12؟

## حلول المسائل

حل المسألة: 1

1. عدد تلاميذ القسم هو 25 .

2

العلامات	7	8	9	10	11	12	13	14
التكرارات	3	2	5	6	3	2	3	1
النكرارات المجمعة المتزايدة	3	5	10	16	19	21	24	25
النكرارات المجمعة المتناقصة	25	22	20	15	9	6	4	1

3. عدد التلاميذ الذين تحصلوا على نقاط تفوق أو تساوي 9 هو 20 .

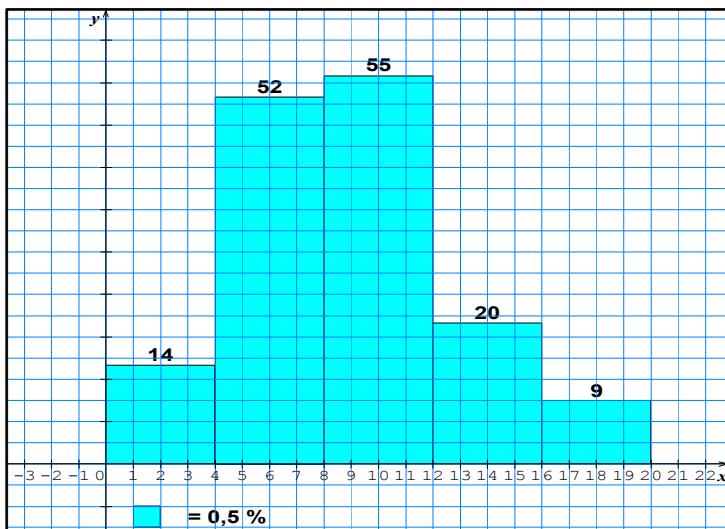
$$4. \text{معدل } \bar{x} = \frac{3 \times 7 + 2 \times 8 + 5 \times 9 + 6 \times 10 + 3 \times 11 + 2 \times 10 + 3 \times 13 + 1 \times 14}{3 + 2 + 5 + 6 + 3 + 2 + 3 + 1} = 10,08$$

القسم هو إذن 10,08 .

5. النقطة الوسيطة هي 12 .

حل المسألة: 2

1. لدينا:  $x = 52$  و منه  $14 + x + 55 + 20 + 9 = 155$



.2

العلامات $n$	$0 \leq n < 4$	$4 \leq n < 8$	$8 \leq n < 12$	$12 \leq n < 16$	$16 \leq n < 20$
مركز الفئة	2	6	10	14	18
عدد التلاميذ	14	52	55	20	9

$$\bar{x} = 8,88 \quad \bar{x} = \frac{2 \times 14 + 6 \times 52 + 10 \times 55 + 14 \times 20 + 18 \times 9}{150} = \frac{1332}{150}$$

3. القيمة الوسيطة هي القيمة الموافقة للعلامة المحصورة بين 75 و 76 و اللذان ينتميان إلى الفئة  $12 < n \leq 8$  وهي الفئة الوسيطة.

4. عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أقل من 12 هو 121.

5. التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12 هم التلاميذ الذين تتراوح علاماتهم بين 12 و 20 و هكذا عددهم هو 29 لأن  $121 - 92 = 29$ . وبالتالي فإن نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12 هي:  $\frac{29}{150} \times 100 = 19,34$  أي 19,34.



# 8

## خاصية طالس

أتذكر الأهم:

### مبرهنة طالس .22

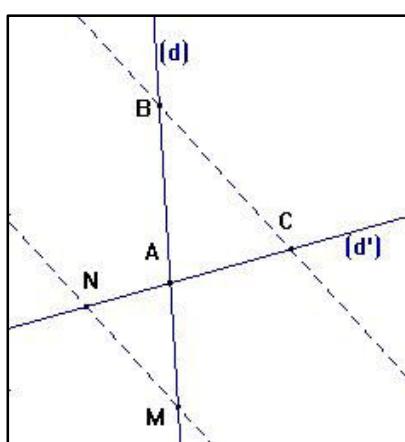
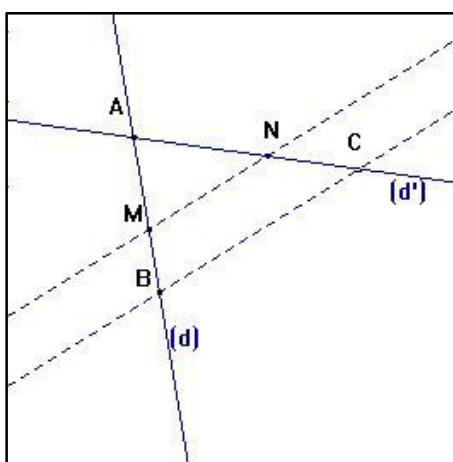
**نص المبرهنة:**  $(d)$  و  $(d')$  مستقيمان متقاطعان في النقطة  $A$ .  $C$  و  $N$  نقطتان من  $(d')$  تختلفان عن  $A$ .  $B$  و  $M$  نقطتان من  $(d)$  تختلفان عن  $A$ .

إذا كان المستقيمان  $(BC)$  و  $(MN)$  متوازيين فإن  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

**ملاحظة:**

- تسمح مبرهنة طالس من حساب طول بمعرفة الأطوال الثلاثة الأخرى.
- تسمح مبرهنة طالس من إثبات أن مستقيمين غير متوازيان بحيث أنه في شروط

مبرهنة طالس إذا كان  $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$  يكون المستقيمان  $(BC)$  و  $(MN)$  غير متوازيين.



### المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس .23

**نص المبرهنة:**  $(d)$  و  $(d')$  مستقيمان متقاطعان في النقطة  $A$ .

*https://prof27math.weebly.com/*

و  $M$  نقطتان من  $(d)$  تختلفان عن  $A$ .  $C$  و  $N$  نقطتان من  $(d')$  تختلفان عن  $A$ .  
 إذا كان  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  وإذا كانت  $M, A, B$ ،  $N, C, A$  ينتمي إلى نفس ترتيب النقط يكون  $MN \parallel BC$

## تمارين ومسائل

المستقيمان  $(BC)$  و  $(MN)$  متوازيين .

### أتدرب:

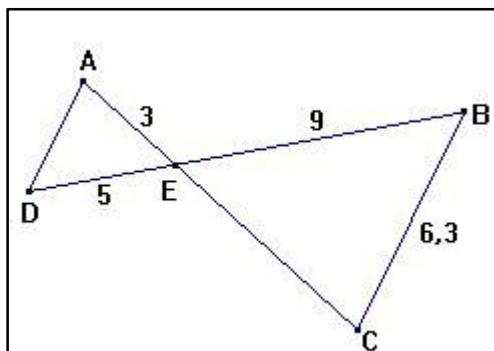
التمرين 1:

باستعمال معطيات الشكل

المقابل و علما أن المستقيمين  $(BC)$

و  $(AD)$

متوازيان احسب كلا من  $AD$  و  $EC$ .

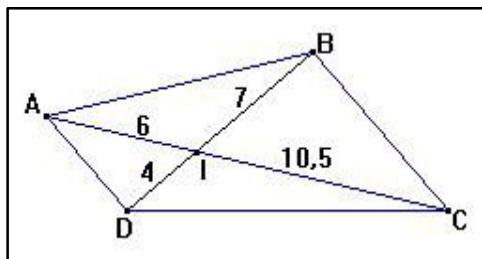


التمرين 2: باستعمال معطيات الشكل

المقابل

برهن أن المستقيمين  $(BC)$

و  $(AD)$  متوازيان.



التمرين 3:

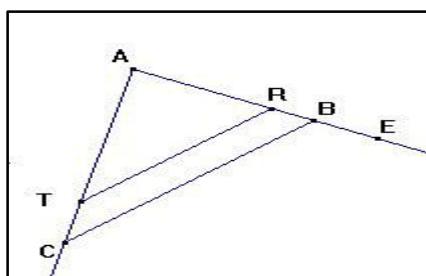
مثلث  $ABC$  حيث:  $AB = 6\text{cm}$

$R \cdot BC = 10\text{cm}$  و  $AC = 7,2\text{cm}$

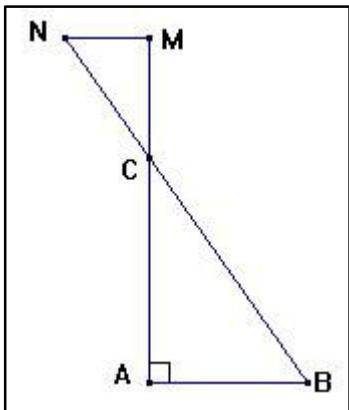
و  $E$  نقطتان

من  $(AC)$  و  $T$  نقطة من  $(BC)$

حيث  $(RT) \parallel (AB)$



متوازيان ،  $BE = 2\text{cm}$  و  $AR = 4,5\text{cm}$



**التمرين 4:**  $AB = 5$  مثلث قائم في  $A$  حيث:

و  $BC = 13$ . النقط  $M$ ،  $C$ ،  $A$  في استقامة

و النقط  $N$ ،  $C$ ،  $B$  في استقامة كذلك بحيث:

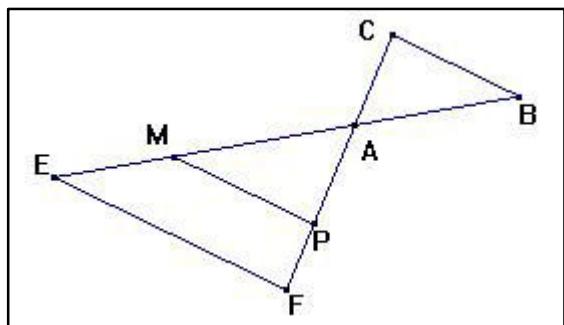
$$CN = 2,6 \quad \text{و} \quad CM = 2,4$$

1. أحسب الطول  $AC$ .

2. بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(MN)$  متوازيان.

3. أحسب الطول  $MN$ .

4. عين دون إجراء حسابات طبيعة المثلث  $CMN$ .



**التمرين 5:** النقاط  $E$ ،  $M$ ،  $A$ ،  $P$ ،  $B$  في

استقامة بهذا

الترتيب. النقط

$C$ ،  $A$ ،  $P$  في استقامة بهذا

الترتيب. المستقيمان  $(MP)$  و  $(EF)$  متوازيان.

$$\cdot MP = 4,8\text{cm} \quad \cdot AM = 6\text{cm}$$

$$\cdot EF = 6\text{cm} \quad \cdot AP = 3,6\text{cm}$$

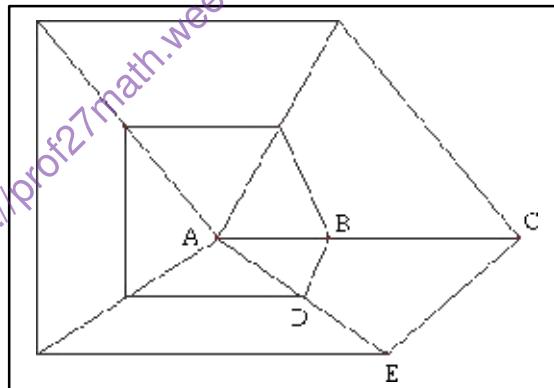
$$\cdot AB = 7,5\text{cm} \quad \cdot AC = 4,5\text{cm}$$

1. بين أن المثلث  $AMP$  مثلث قائم.

2. أحسب  $AE$  ثم استنتج الطول  $ME$ .

3. بين أن المستقيمين  $(MP)$  و  $(BC)$  متوازيان.

4. استنتاج دون إجراء حسابات أن المستقيمين  $(EF)$  و  $(BC)$  متوازيان.



التمرين 6:

يمثل الشكل المقابل نسيج عنكبوت.

النقط  $A, D, E$  من جهة و النقط  $A, B, C$  من جهة أخرى في استقامية و بنفس الترتيب.  
لدينا:  $AD = 10\text{cm}$ ,  $AE = 19\text{cm}$   
 $.AB = 16\text{cm}$ ,  $BC = 14,4\text{cm}$

1. أحسب  $\frac{AB}{AC}$  و اكتب النتيجة

على شكل غير قابل للاختزال.

2. هل المستقيمان  $(BD)$  و  $(CE)$  متوازيان؟

حل التمارين

## حلول التمارين

حل التمارين 1

المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متقاطعان في  $E$ .  
و بما أن المستقيمين  $(BC)$  و  $(AD)$  متوازيان  
فإن حسب مبرهنة طالس:

$$AD = \frac{6,3}{9} \times 5 \quad EC = \frac{9}{5} \times 3 \quad \text{و منه } \frac{EC}{3} = \frac{9}{5} = \frac{6,3}{AD} \quad \text{أي } \frac{EC}{EA} = \frac{EB}{ED} = \frac{BC}{AD}$$

نجد بعد الحساب:  $AD = 3,5$  و  $EC = 5,4$ .

حل التمارين 2

المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متقاطعان في  $I$ .  
ترتيب النقط  $A, I, C$  هو نفسه ترتيب النقط  $B, D, C$ . لدينا من جهة أخرى  
 $\frac{IC}{IA} = \frac{IB}{ID}$  و  $\frac{IB}{ID} = \frac{7}{4} = 1,75$  و  $\frac{IC}{IA} = \frac{10,5}{6} = 1,75$   
طالس فإن المستقيمين  $(BC)$  و  $(AD)$  متوازيان.

### حل التمرين 3

1. بما أن المستقيمين  $(TC)$  و  $(RB)$  يتقاطعان في النقطة  $A$  وبما أن المستقيمين  $(BC)$  و  $(RT)$  متوازيان فإن مبرهنة طالس

$$\frac{AT}{AC} = \frac{AR}{AB} = \frac{TR}{BC}$$

تسمح بكتابة:

$$AT = \frac{4,5 \times 7,2}{6} = 5,4 \text{ cm} \quad TR = \frac{AR \times BC}{AB} \quad AT = \frac{AR \times AC}{AB}$$

$$\text{و وبالتالي: } TR = \frac{4,5 \times 10}{6} = 7,5 \text{ cm}$$

النقط  $A$  ،  $B$  و  $E$  في استقامية بهذا الترتيب و منه  $AE = AB + BE$  أي  $AE = 8 \text{ cm}$

2. لدينا من جهة النقط  $A$  ،  $B$  و  $E$  هي بنفس ترتيب النقط  $A$  ،  $T$  و  $C$ .

و لدينا ن جهة ثانية  $\frac{AT}{AC} = \frac{5,4}{7,2} = \frac{3}{4}$  لأن  $\frac{AB}{AE} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  و  $\frac{AB}{AE} = \frac{AT}{AC}$  وبالتالي حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس فإن المستقيمين  $(BT)$  و  $(EC)$  متوازيان.

### حل التمرين 4

1. لدينا سبب مبرهنة فيتاغورس في المثلث القائم  $ABC$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\text{و منه } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 169 - 25 = 144 \text{ أي } AC^2 = 144 \text{ و وبالتالي}$$

$$AC = \sqrt{144}$$

$$\text{و هكذا نجد } AC = 12$$

2. المستقيمان  $(CA)$  و  $(CB)$  متتقاطعان في النقطة  $C$ . النقط  $C$  ،  $M$  و  $A$  هي بنفس

$$\frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN} \quad \text{أي} \quad \frac{CB}{CN} = 5 \quad \text{و لدينا} \quad \frac{CA}{CM} = 5$$

و هكذا حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين  $(AB)$  و  $(MN)$  متوازيان.

3. المستقيمان  $(CA)$  و  $(CB)$  متتقاطعان في النقطة  $C$ . النقطة  $M$  نقطة من  $(CA)$  و  $N$  نقطة من  $(CB)$

نقطة من  $(MN)$  و المستقيمان  $(AB)$  و  $(MN)$  متوازيان. لدينا حسب مبرهنة طالس

$$MN = \frac{AB}{5} \quad \text{و هكذا فإن} \quad \frac{AB}{MN} = \frac{CA}{CM} = 5 \quad \text{و منه} \quad \frac{AB}{MN} = \frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN}$$

$$\text{و وبالتالي} \quad MN = 1$$

4. بما أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  فإن المستقيم  $(AM)$  عمودي على المستقيم  $(AB)$

و بما أن المستقيم  $(AB)$  يوازي المستقيم  $(MN)$  فإن المستقيم  $(AM)$  عمودي كذلك على المستقيم  $(MN)$  نستنتج هكذا أن المثلث  $CMN$  قائم في النقطة  $M$ .

حل التمرين 5

$$1. \text{ لدينا من جهة: } AM^2 = 6^2 = 36 \text{ و لدينا من جهة ثانية: } MP^2 + PA^2 = (4,8)^2 + (3,6)^2$$

$$\text{و بالتالي فإن: } AM^2 = MP^2 + PA^2$$

نستنتج حسب عكس مبرهنة فيتاغورس أن المثلث  $AMP$  مثلث قائم في النقطة  $P$ .  
2. المستقيمان  $(AF)$  و  $(AE)$  متقطعان في النقطة  $A$ .  $M$  نقطة من  $(AE)$  و نقطة من  $(AF)$  و بالإضافة إلى ذلك فإن المستقيمين  $(EF)$  و  $(MP)$  متوازيان.

$$\text{و منه يكون لدينا حسب مبرهنة طالس} \\ \frac{AM}{AE} = \frac{AP}{AF} = \frac{MP}{EF}$$

$$\text{و منه: } AE = 7,5 \text{ cm} \text{ يعني} \frac{6}{4,8} = \frac{4,8}{6} \text{ أي } AE = 7,5 \text{ cm} \text{ و منه: } \frac{AM}{AE} = \frac{MP}{EF}$$

بما أن النقط  $A$  و  $E$  في استقامية بهذا الترتيب فإن  $AM + ME = AE$  و بالتالي فإن  $ME = AE - AM$

3. المستقيمان  $(AM)$  و  $(AP)$  متقطعان في النقطة  $A$ .  $B$  نقطة من  $(AM)$  و نقطة من  $(AP)$ . النقط  $M$  و  $B$  في استقامية و بنفس ترتيب النقط  $P$  ،  $A$  و  $C$ .

$$\text{و لدينا من جهة ثانية } \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{3,6}{4,5} = 0.8 \text{ أي } \frac{AM}{AB} = \frac{6}{7,5} = 0.8$$

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين  $(MP)$  و  $(BC)$  متوازيان.

4. المستقيمان  $(EF)$  و  $(BC)$  يوازيان نفس المستقيم  $(MP)$  فهما إذن متوازيان.

حل التمرين 6

$$\text{و بما أن } \frac{AB}{AC} = \frac{16}{16+14,4} = \frac{16}{30,4} = \frac{160}{304} = 1.$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{10}{19} \text{ إذن } \frac{AB}{AC} = \frac{16 \times 10}{16 \times 19} = \frac{10}{19} \text{ . إذن } PGCD(304;160) = 16$$

2. المستقيمان  $(AC)$  و  $(AE)$  متقطعان في النقطة  $A$ .  $B$  نقطة من  $(AC)$  و

نقطة من  $(AE)$ . النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  في استقامية و بنفس ترتيب النقط  $A$  ،  $D$  و  $E$ .

$$\text{و لدينا } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \text{ و منه } \frac{AD}{AE} = \frac{10}{19} \text{ و } \frac{AB}{AC} = \frac{10}{19}$$

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين  $(BD)$  و  $(CE)$  متوازيان.

## 9

### حساب المثلثات في المثلث القائم

أذكر الأهم:

24. **النسب المثلثية في مثلث قائم**

تعاريف:  $ABC$  مثلث قائم في النقطة  $A$ .

و لتكن مثلا  $\angle B$  إحدى زواياه الحادة. يسمى  $[AC]$  الضلع

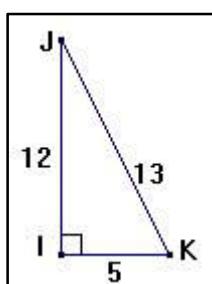
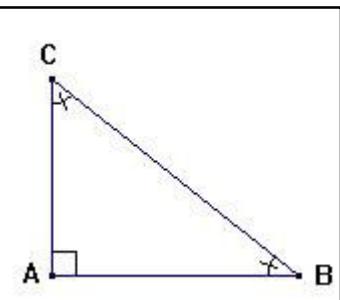
المقابل لـ  $\angle B$  بينما يسمى  $[AB]$  الضلع المجاور لـ  $\angle B$ .

نعرف الثلاث نسب التالية:

$$\tan B = \frac{AC}{AB} , \sin B = \frac{AC}{BC} , \cos B = \frac{AB}{BC}$$

**مثال:**  $IJK$  مثلث قائم في النقطة  $I$  حيث  $IK = 13\text{cm}$  ،  $IJ = 12\text{cm}$  و  $JK = 5\text{cm}$

لدينا:



$$\tan J = \frac{5}{12} , \cos J = \frac{12}{13} , \sin J = \frac{5}{13} \quad \bullet$$

$$\tan K = \frac{12}{5} , \cos K = \frac{5}{13} , \sin K = \frac{12}{13} \quad \bullet$$

**ملاحظات:**

- جيب إحدى الزوايا الحادة في مثلث قائم يساوي جيب تمام الزاوية

الأخرى.

- جيب و جيب تمام زاوية حادة هي أعداد محصورة بين العددين 0 و 1.

### 25. العلاقات بين النسب المثلثية

إذا كان  $x$  قياسا لإحدى الزوايا الحادة في مثلث قائم فإن:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{و} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

**مثال:** لنعين مثلا  $\cos 60^\circ$  علما أن  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا:  $\cos^2 60^\circ = 1 - \sin^2 60^\circ$  و منه  $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

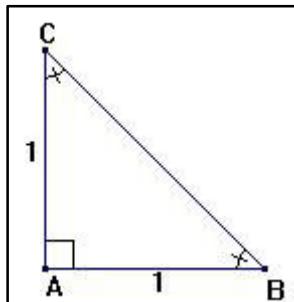
### تمارين ومسائل

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \cos^2 60^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

التمرين 1:

### أتربي:

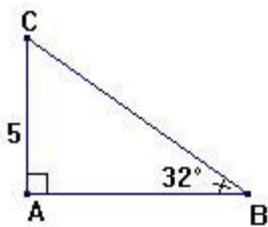
أنشئ باستعمال مسطرة غير مدرجة و مدور زاوية قيسها  $a$  علما أن  $\sin a = 0,6$



باستعمال مثلث قائم  $ABC$  في النقطة  $A$  حيث  $AB = AC = 1\text{cm}$  عين القيم المضبوطة لكل من  $\tan 45^\circ$  و  $\cos 45^\circ$  و  $\sin 45^\circ$ .

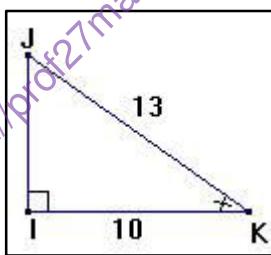
التمرين 2:

التمرين 3:  
أتربي مثلث قائم في النقطة  $A$  حيث  $AC = 5\text{cm}$  حيث  $\angle B = 32^\circ$ . أحسب قيمة مقربة إلى 0,01 لكل من  $BC$  و  $AB$ .



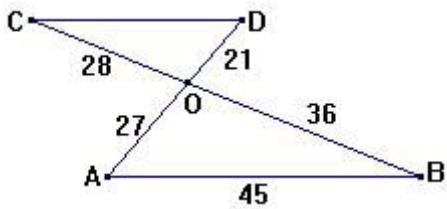
التمرين 4:

$\triangle IJK$  مثلث قائم في النقطة  $I$  حيث  $IK = 10\text{cm}$  و  $JK = 13\text{cm}$ .  
عين المدور إلى  $10^2$  لقياس الزاوية  $\angle K$ .



أنمی كفاءاتي:

مسألة:



المستقيمان  $(AD)$  و  $(BC)$  متقاطعان في  $O$ .  
حيث:

$OD = 21\text{cm}$  ،  $OA = 27\text{cm}$  ،  $AB = 45\text{cm}$   
 $OC = 28\text{cm}$  ،  $OB = 36\text{cm}$ .

1. برهن أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$  متوازيان.

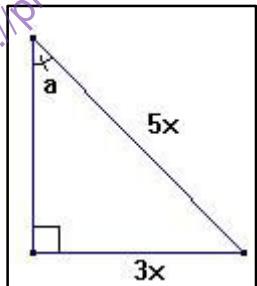
2. أحسب الطول  $CD$ .

3. أثبت أن المثلث  $AOB$  قائم.

4. عين قيس الزاوية  $\angle ABO$  بالنقرية إلى الوحدة من الدرجة.

## حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1



$$\text{نعلم أن } \sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ و منه } \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

نشئ مثلثا قائما وتره  $5x$  و طول أحد ضلعي

الزاوية القائمة هو  $3x$  بحيث  $x$  عدد موجب ( طول ) معطى.

حل التمرين 2

بما أن  $AB = AC$  فإن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين و قائم في  $A$  و بالتالي  $\angle B = \angle C = 45^\circ$

لدينا:  $\cos B = \frac{AB}{BC}$ . لحسب القيمة المضبوطة لـ  $BC$  و ذلك

بنطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث  $ABC$ :

$$BC = \sqrt{2} \text{ cm أي } BC^2 = 1+1 = 2 \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$$

نجد هكذا أن  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و بالتالي  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

و يمكن أن نثبت بنفس الطريقة أن  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

لدينا مثلا من جهة أخرى  $\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$  و بالتالي

حل التمرين 3

لدينا  $BC = \frac{5}{\sin 32^\circ}$  و بالتالي فإن

نجد باستعمال آلة حاسبة  $BC \approx 9,43 \text{ cm}$ . لدينا من جهة ثانية

$AB \approx 8,00 \text{ cm}$ . نجد باستعمال آلة حاسبة  $AB = \frac{5}{\tan 32^\circ}$  و منه

حل التمرين 4

لدينا  $K = 39,72^\circ$  ثم باستعمال آلة حاسبة نجد:

1. المستقيمان  $(BC)$  و  $(AD)$  متقطعتان في  $O$ . النقط  $C, O, A$ ،  $D$  في استقامية و بنفس ترتيب النقط  $A, O, D$ .

$$\text{لدينا: } \frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9} \text{ و هكذا فإن } \frac{OD}{OA} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$  متوازيان.

2. المستقيمان  $(BC)$  و  $(AD)$  متقطعتان في  $O$ .  $D$  نقطة من  $(OA)$  و  $C$  نقطة من  $(OB)$ . و بالإضافة إلى ذلك المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  متوازيان.

و منه حسب مبرهنة طالس فإن:  $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$ . لدينا هكذا  $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}$  و وبالتالي  $CD = \frac{7 \times 45}{9} = \frac{9}{7} \times 45 = \frac{45}{CD}$

3. لدينا في المثلث  $AOB$ :  $AB^2 = 45^2 = 2025$  من جهة  $OA^2 + OB^2 = AB^2 = 27^2 + 36^2 = 2025$  من جهة ثانية و منه  $AB = 45$ . نستنتج حسب عكس مبرهنة فيتاغورس أن المثلث  $AOB$  قائم في النقطة  $O$ .

4. في المثلث القائم  $AOB$  لدينا:  $\tan \angle ABO = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$  و منه و باستعمال آلة حاسبة نجد  $\angle ABO \approx 37^\circ$ .

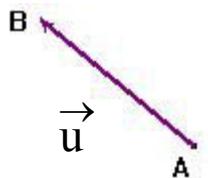
# الأشعة والانسحاب

أذكر الأهم:

## .26. مفهوم الشعاع

**تعريف:** الانسحاب الذي يحول النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$  يعرف شعاعاً نرمز إليه بالرمز  $\overrightarrow{AB}$ . غالباً ما نكتب  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ . يعرف الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  بـ:

- منحى وهو منحى المستقيم  $(AB)$ .



- اتجاهه وهو من  $A$  نحو  $B$ .
- طوله وهو طول القطعة  $[AB]$ .

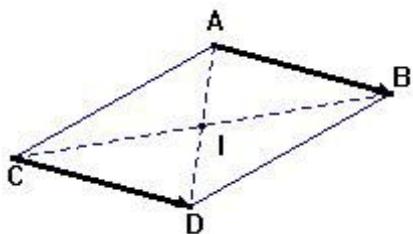
**ملاحظة:** الانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  هو الانسحاب الذي يحول  $A$  إلى  $B$ .

## 3. تساوي شعاعين

**تعريف:** الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما نفس المنحى، نفس الطول ونفس الاتجاه.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  يعني متوازي أضلاع  $ABDC$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  يعني للقطعتين  $[AD]$  و  $[BC]$  نفس المنتصف  $I$ .

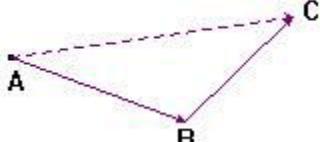
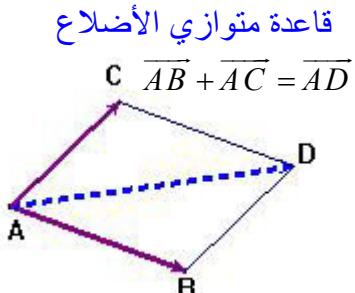


**ملاحظة:**  $I$  منتصف  $[AB]$  يعني  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ .

## 4. تركيب انسحابين – مجموع شعاعين

علاقة شال

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

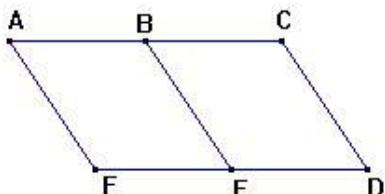


**حالة خاصة:** نقول أن  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$  ونكتب:

## تمارين

$$\cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

### أتدرب:



التمرين 1:  $ABEF$  و  $BCDE$  متوازياً أضلاع .  $B$  منتصف  $[AC]$  و  $E$  منتصف

$$[DF]$$

باستعمال فقط نقط الشكل المقابل عين:

شعاعاً يساوي الشعاع  $\overrightarrow{BA}$  و شعاعاً

يساوي الشعاع  $\overrightarrow{EC}$ .

شعاعاً منهان يختلف عن منهان الشعاع  $\overrightarrow{FD}$ .

صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{CD}$

شعاعاً يساوي الشعاع  $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$  و شعاعاً يساوي الشعاع  $\overrightarrow{AF}$ .

التمرين 2: أنشئ مثلثاً كييفياً  $ABC$  ثم عين نقطة  $D$  كيفية على  $[BC]$ .

أنشئ النقطة  $E$  التي تحقق  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA}$

أنشئ النقطة  $F$  التي تتحقق  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ .

التمرين 3:  $A, B, C$  3 نقاط من المستوى حيث:  $AC = 4\text{cm}$ ,  $AB = 5\text{cm}$

$$\text{و } BC = 6\text{cm}$$

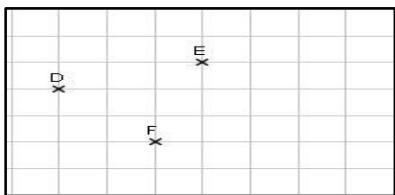
أنشئ المثلث  $ABC$ .

أنشئ النقطة  $M$  صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{BC}$ .

أعط شعاعاً يساوي الشعاع  $\overrightarrow{MA}$ .

أنشئ النقطة  $K$  التي تتحقق  $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ .

برهن أن  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AK}$ . ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة  $A$  ؟



التمرين 4: مثلث  $DEF$ .

أنشئ النقطة  $G$  صورة النقطة  $F$   
بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{DE}$

أنشئ النقطة  $H$  نظيرة النقطة  $G$  بالنسبة إلى النقطة  $F$ .  
3. ما هي طبيعة الرباعي  $DEFH$  ؟ علل.

### حلول التمارين

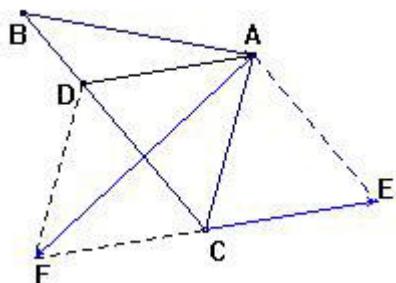
#### حل التمرين 1

لدينا  $\overline{EC} = \overline{FB}$  بينما  $\overline{BA} = \overline{EF} = \overline{CB} = \overline{DE}$

لدينا عدة أشعة منحاها يختلف عن منحى  $\overline{FD}$  مثل:  $\overline{BE}$ ,  $\overline{EC}$

لدينا  $\overline{AF} = \overline{CD}$  و منه صورة بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{CD}$  هي النقطة  $F$ .

باستعمال علاقة شال نجد:  $\overline{FB} + \overline{BC} = \overline{FC}$  بينما باستعمال قاعدة متوازي  $\overline{AB} + \overline{AF} = \overline{AE}$ .  
الأضلاع نجد:



#### حل التمرين 2

أنظر الشكل المقابل.  
النقطة  $E$  هي صورة  
النقطة  $C$  بالانسحاب  
الذي شعاعه  $\overrightarrow{DA}$ . و منه فإن  $ADCE$  متوازي  
أضلاع.

يتم إنشاء النقطة  $F$  بحيث يكون  $ADFC$  متوازي أضلاع.

#### حل التمرين 3

أنظر الشكل المقابل.

لدينا  $\overline{AM} = \overline{BC}$

و منه فإن

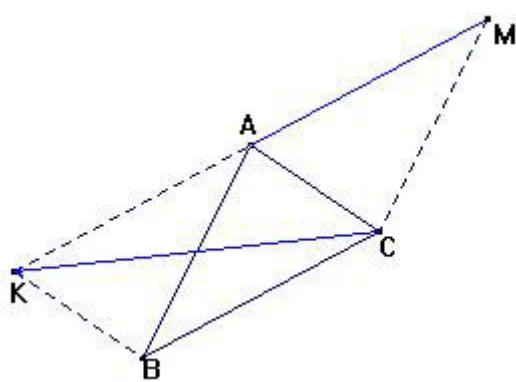
الرباعي  $ABCM$  متوازي أضلاع.

من  $\overline{AM} = \overline{BC}$  نستنتج أن

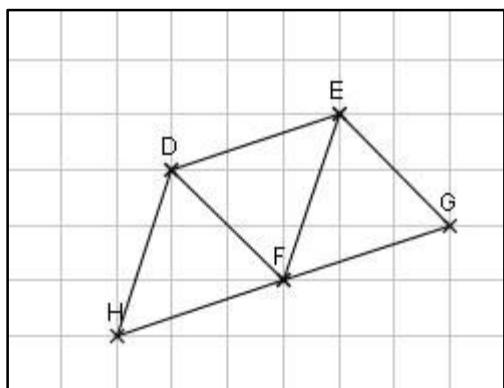
$\overline{MA} = \overline{CB}$  و منه  $\overline{MA} = -\overline{CB}$

باستعمال قاعدة متوازي

الأضلاع ننشئ



حل التمرين 4



لدينا  $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DE}$

و بالتالي فالرباعي

$DEGF$  متوازي أضلاع.

النقطة  $F$  هي منتصف

[ $GH$ ]

لدينا من السؤال 1:  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FG}$

و بما أن  $F$  هي منتصف القطعة [ $GH$ ] فإن

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{HF}$  و منه نستنتج أن:

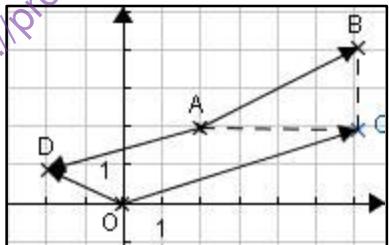
و بالتالي فالرباعي  $DEFH$  متوازي

أضلاع.

نصيحة

أبعد وسائل التسلية و الترفيه عن  
مكان المذاكرة.

# المعالم



**أذكر الأهم:**

**5. قراءة إحداثي شعاع في معلم**

**مثال:** نقرأ في الشكل المقابل:

$$\overrightarrow{BC}(0;-2), \overrightarrow{AC}(4;0), \overrightarrow{AB}(4;2)$$

$$\overrightarrow{OD}(-2;1), \overrightarrow{OC}(6;2), \overrightarrow{AD}(-4;-1)$$

**6. تمثيل شعاع بمعرفة إحداثيه**

**مثال:** لقد تم في الشكل المقابل تمثيل الأشعة التالية:

$\overrightarrow{AB}$  حيث  $A(1;1)$  و  $B(4;2)$ .

$$\overrightarrow{w}(-2;4), \overrightarrow{v}(3;-1) \text{ و } \overrightarrow{u}(-2;3)$$

**7. حساب إحداثي شعاع بمعرفة مبدأ و نهاية ممثل له.**

إذا كانت  $B(x_B; y_B)$  و  $A(x_A; y_A)$  فإن:

$$AB = \sqrt{17} \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; Y_B - Y_A)$$

**مثال:** إذا كان  $A(3;2)$  و  $B(-1;3)$  فإن  $\overrightarrow{AB}(-4;1)$  و منه

**8. حساب إحداثي منتصف قطعة مستقيمة**

إذا كانت  $M(x_M; y_M)$  و  $B(x_B; y_B)$  وكانت  $M$  منتصف  $[AB]$  فإن:

$$Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2} \quad \text{و} \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

**مثال:** إذا كانت  $A(3;2)$  و  $B(-1;3)$  فإن منتصف  $[AB]$  هي النقطة

$$M\left(1; \frac{5}{2}\right) \text{ و منه}$$

**9. حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد و متجانس**

في معلم متعامد و متجانس إذا كانت  $B(x_B; y_B)$  و  $A(x_A; y_A)$  فإن:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

**مثال:** إذا كانت  $A(3;2)$  و  $B(-1;3)$  فإن

$$AB = \sqrt{17}$$

## تمارين

### أتدرب:

**التمرين 1:** المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس ( $O; I, J$ ). وحدة الطول هي السنتمتر.

علم النقط  $C(-2; 5)$  ،  $A(2; 3)$  ،  $B(-2; 1)$ .

احسب الأطوال  $AB$  ،  $AC$  و  $BC$ .

احسب إحداثي النقطة  $E$  منتصف القطعة المستقيمة  $[BC]$ .

هل المستقيم  $(AE)$  محوراً للقطعة المستقيمة  $[BC]$ ؟

عين إحداثي النقطة  $D$  بحيث يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع.

**التمرين 2:** المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس ( $O; I, J$ ). وحدة الطول هي السنتمتر.

علم النقط  $D(2; -2)$  ،  $A(-2; 2)$  ،  $B(1; 5)$  ،  $C(5; 1)$ .

تحقق أن النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{DC}$ .

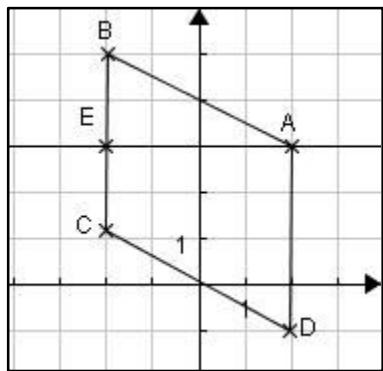
احسب الأطوال  $AB$  ،  $AC$  و  $BC$  ثم بين أن المثلث  $ABC$  قائم.

ما هي طبيعة الرباعي  $ABCD$ ؟

عين إحداثي النقطة  $E$  منتصف القطعة  $[AC]$ .

بين أن النقطة  $E$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ .

## حلول التمارين



أنظر الشكل المقابل.

حل التمرين 1

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} . 2$$

بنفس الطريقة نجد:  $BC = 4$  و  $AC = 2\sqrt{5}$

. 3. لدينا  $E(-2; 3)$  أي  $E\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{5+1}{2}\right)$

4. بما أن المستقيم  $(AB)$  يمر من  $A$  رأس المثلث  $ABC$  و النقطة  $E$  منتصف القطعة  $[BC]$  و بما أن

المثلث  $ABC$  متساوي الساقين في  $A$  فإن  $(AE)$  محور لقطعة المستقيمة  $[BC]$ .  
نفرض أن  $D(x; y)$  منه  $\overrightarrow{AD}(x - 2; y - 3)$  و لدينا  $\overrightarrow{BC}(0; -4)$ .

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 3 = -4 \end{cases} \text{ أي } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ يعني } ABCD \text{ متوازي أضلاع يعني}$$

نجد هكذا أن  $D(-1; -1)$ .

حل التمرين 2

أنظر الشكل المقابل.

يكفي أن نبين أن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$   
لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(3; 3) \text{ أي } \overrightarrow{AB}(1+2; 5-2)$$

$$\overrightarrow{DC}(3; 3) \text{ أي } \overrightarrow{DC}(5-3; 1+2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$BC = 4\sqrt{2} \text{ و } AC = 5\sqrt{2}, AB = 3\sqrt{2}$$

$$\text{لدينا: } AB^2 + BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 50$$

$$\text{و لدينا من جهة ثانية: } AC^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$$

و منه:  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ . نستنتج حسب عكس

مبرهنة طالس أن المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $A$ .

بما أن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  فإن  $ABCD$  متوازي أضلاع و بما أن إحدى زواياه قائمة فهو إذن مستطيل.

$$\text{لدينا: } E\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ و منه } E\left(\frac{-2+5}{2}; \frac{2+1}{2}\right)$$

المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  و  $E$  منتصف وتره فهي إذن مركز الدائرة المحيطة

بالمثلث  $ABC$ . أو باتباع طريقة ثانية يكون لدينا من جهة:

$$EA = EC = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ و } EA = EB = EC \text{ و هكذا فإن } EB = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

على أن النقطة  $E$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ .

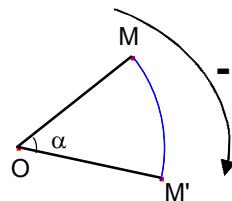
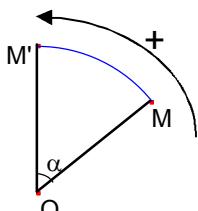
# 12

## الدوران – المضلعات المنتظمة – الزوايا

أذكر الأهم:

### 10. الدوران

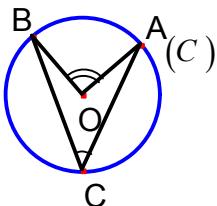
**تعريف:**  $O$  نقطة،  $\alpha$  قيس بالدرجات لزاوية و اتجاه معطى.  
صورة النقطة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $O$  و زاويته  $\alpha$  في الاتجاه المعطى هي النقطة'  $M'$  بحيث:  $\overline{MOM}' = \alpha^\circ$  و  $OM' = OM$  ( محسوبة في الاتجاه المعطى ).



$M'$  هي صورة  $M$  في الاتجاه الموجب  $M$ ' هي صورة  $M$  في الاتجاه الموجب  
**ملاحظة:** دوران مركزه  $O$  و زاويته  $180^\circ$  هو تناول مركزي مركزه النقطة  $O$ .  
**خواص:**\* الدوران يحافظ على المسافات، على الاستقامة و على أقياس الزوايا.  
\* الدوران يحول الأشكال الهندسية إلى أشكال تفاصيلها و لها نفس الخصائص.

### 11. الزاوية المركزية و الزاوية المحيطية

#### تعريف:



\* الزاوية  $\angle ACB$  زاوية محيطية في الدائرة  $(C)$ .

\* الزاوية  $\angle AOB$  زاوية مركزية في الدائرة  $(C)$ .

\* الزاوية المركزية  $\angle AOB$  و الزاوية المحيطية  $\angle ACB$  تحصران نفس القوس  $\overarc{AB}$  من الدائرة  $(C)$ .

**خواص:**\* قيس زاوية محيطية في دائرة هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها.  $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$   
\* كل الزوايا المحيطية في دائرة و التي تحصر نفس القوس متقاربة.

### 12. المضلعات المنتظمة

**تعريف:** المضلع المنتظم هو مضلع كل زواياه متقابلة و كل أضلاعه لها نفس الطول.

**مثال:** المربع هو مضلع منتظم.

**خواص:**

\* يسمى مركز الدائرة المحيطة بالمضلع المنتظم مركز المضلع المنتظم.

\* كل الزوايا المركزية في مضلع منتظم متساوية.

## تمارين

### أتدرب:

**التمرين 1:**

نعتبر مثلثا قائما  $ABC$  في النقطة  $A$ .

أنشئ صورة المثلث  $ABC$  بالدوران الذي مركزه

$B$  وزاويته  $90^\circ$  و في الاتجاه الموجب.

أنشئ صورة المثلث  $ABC$  بالانسحاب الذي

شعاعه  $\overrightarrow{AB}$ .

**التمرين 2:**

سداسي منتظم مركزه

النقطة  $O$ .

ما هي صورة المثلث  $OEF$

بالتناول

المرکزی مركزه النقطة  $O$  ؟

ما هي صورة المثلث  $OAB$  بالتناول المحوري

الذي محوره المستقيم  $(OB)$  ؟

ما هو قيس كل من الزاويتين  $\angle ADB$  و  $\angle AOB$  ؟

ما هي صورة المثلث  $OAF$  بالدوران الذي

مركزه  $O$  وزاويته  $60^\circ$  في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة.

**التمرين 3:**

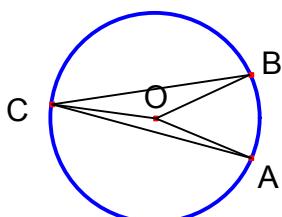
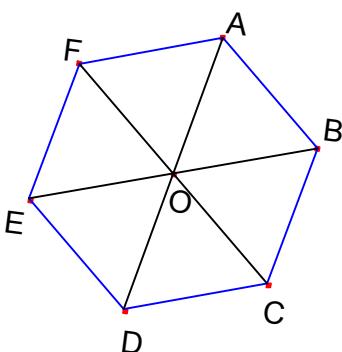
عين مع التبرير أقياس زوايا المثلث  $ABC$

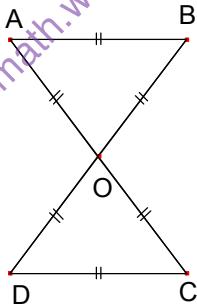
علما أن:  $\angle BOC = 162^\circ$  و  $\angle AOB = 46^\circ$ .

**التمرين 4:**

أعد رسم الشكل الآتي علما أن  $OA = 3cm$ .

بين أن الرباعي  $ABCD$  مستطيل.





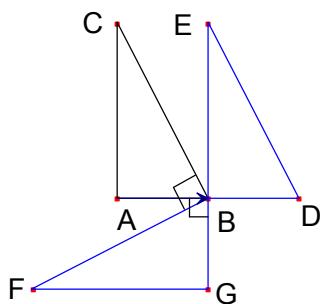
أنشئ النقطة  $E$  صورة النقطة  $O$  بالانسحاب الذي  
شعاعه  $\overrightarrow{BA}$ .

أنشئ النقطة  $F$  صورة النقطة  $C$  بالدوران الذي  
مركزه  $O$  و زاويته  $60^\circ$  في الاتجاه المعاكس  
لحركة عقارب الساعة.

بين أن النقط  $A, E, D, C, B, F$  تنتهي إلى  
نفس الدائرة.

ما نوع الرباعي  $ABFCDE$ ?  
عين شعاعاً يساوي الشعاع  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ .

## حلول التمارين



حل التمرين 1

من الواضح أن صورة النقطة  $B$  هي  $B$   
نفسها.

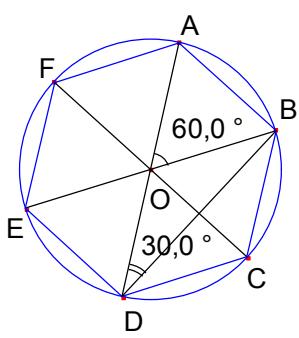
صورة النقطة  $A$  هي  $G$  و صورة النقطة

$C$  هي  $F$ .

و بالتالي صورة المثلث  $ABC$   $ABF$  بالدوران الذي  
مركزه  $B$  و زاويته  $90^\circ$  و في الاتجاه الموجب هو  
المثلث  $GBF$  القائم في النقطة  $G$ .

صورة النقطة  $A$  هي النقطة  $B$ ، صورة النقطة  
هي النقطة  $D$  و صورة النقطة

$C$  هي النقطة  $E$  و بالتالي صورة المثلث  $ABC$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  هو  
المثلث  $BDE$  القائم في النقطة  $B$ .



حل التمرين 2

صورة المثلث  $OEF$  بالتناظر الذي مركزه  $O$   
هو المثلث  $OBC$ .

صورة المثلث  $OAB$  بالتناظر الذي  
محوره  $(OB)$  هو المثلث  $OCB$ .

$$\angle ADB = 30^\circ \quad \angle DBA = \frac{1}{2} \angle AOB \quad \text{و بالتالي} \quad \angle AOB = 60^\circ$$

صورة المثلث  $OAF$  بالدوران الذي مركزه  $O$

حل التمرين 3

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 360^\circ$$

$$\angle COA = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC$$

$$\text{أي } \angle COA = 360^\circ - 46^\circ - 162^\circ \text{ و منه } \angle COA = 152^\circ.$$

الزاوية المحيطية  $\angle ACB$  و الزاوية المركزية  $\angle AOB$  تحرسان نفس القوس و بالتالي فإن:

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB \text{ أي } \angle ACB = \frac{1}{2} \times 46^\circ \text{ و أخيراً } \angle ACB = 23^\circ$$

لدينا كذلك قيس الزاوية  $\angle BAC$  هو نصف قيس الزاوية  $\angle BOC$  و منه  $\angle BAC = 81^\circ$

كذلك قيس الزاوية  $\angle CBA$  هو نصف قيس الزاوية  $\angle COA$  و منه  $\angle CBA = 76^\circ$

نتحقق أن مجموع أقياس زوايا مثلث هي  $180^\circ$ :  $23 + 81 + 76 = 180^\circ$ .

حل التمرين 4

أنظر الشكل المقابل.

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \text{ و منه حسب عكس}$$

مبرهنة

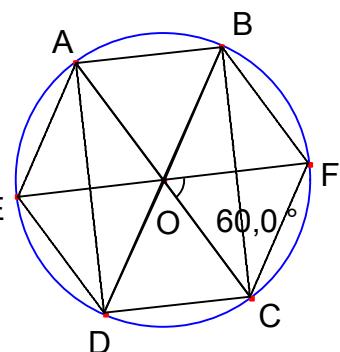
طلس فان  $(AB) \parallel (CD)$  و بما أن  $AB = CD$

فإن  $ABCD$  متوازي أضلاع و بما أن قطريه

متقابسان فإن  $ABCD$  مستطيل.

أنظر الشكل.

أنظر الشكل.

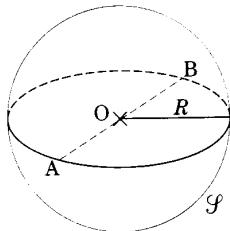


$.OF = OC = OE = BA = OA$  لأن  $OA = OB = OC = OD = OE = OF$

سداسي منتظم.

$ABFCDE$

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$$



## أتذكر الأهم:

## 13. الكرة و الجلة

**تعريف:** \* الكرة التي مركزها النقطة  $O$  و نصف قطرها  $R$  هي مجموعة كل النقط  $M$  من الفضاء بحيث:  $OM = R$ .

\* يسمى داخل الكرة التي مركزها النقطة  $O$  و نصف قطرها  $R$  الجلة التي مركزها النقطة  $O$  و نصف قطرها  $R$ .

\* الجلة التي مركزها النقطة  $O$  و نصف قطرها  $R$  هي مجموعه كل النقط  $M$  من الفضاء بحيث:  $OM \leq R$ .

## 14. مساحة الكرة - حجم

مساحة كرة نصف قطرها  $R$  هي:  $A = 4\pi R^2$

حجم جلة نصف قطرها  $R$  هو:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

**مثال:** \* مساحة كرة نصف قطرها  $\sqrt{3} \text{ cm}$  هو:  $A = 12\pi \text{ cm}^2$

\* حجم جلة نصف قطرها  $\sqrt{3} \text{ cm}$  هو:  $V = 4\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$

## 15. المقاطع المستوية لمجسمات مأولة

**تعريف:** يسمى تقاطع مستو بمحض مقطعياً لهذا المجسم.

**مثال:** مقطع كرة نصف قطرها  $r$  بحيث  $OH \leq r$  بمستو هو دائرة نصف قطرها  $\sqrt{r^2 - OH^2}$ .

هي المسقط العمودي للنقطة  $O$  على المستوي.

## 16. التكبير و التصغير

**تعريف:** إذا ضربنا كل أبعاد مجسم بعده موجب  $k$  تكون قد قمنا بتكبيره إذا كان  $k > 1$  و بتصغريه إذا كان  $0 < k < 1$ . يسمى العدد  $k$  معامل أو سلم التكبير ( التصغير ).

**خواص:** \* التكبير و التصغير لا يغيران طبيعة المجسمات.

\* التكبير و التصغير يحافظان على الزوايا.

\* إذا قمنا بتكبير أو تصغير مجسم بتكبير أو تصغير معامله  $k$  فإن:

أبعاده تضرب في العدد  $k$ .

مساحته تضرب في العدد  $k^2$ .

حجمه يضرب في العدد  $k^3$ .

## أتردّب:

التمرين 1: تغطي البحار و المحيطات حوالي  $70^\circ$  من مساحة سطح الكرة.  
أحسب بـ  $km^2$  المساحة التي تغطيها القارات ( مدوره إلى الوحدة ) إذا  
اعتبرنا الكرة الأرضية كرة نصف قطرها  $6730\ km$ .

التمرين 2: احسب بـ  $cm^3$  الحجم  $V$  لكرة السلة إذا اعتبرناها كرة نصف قطرها  $R = 12\ cm$ .

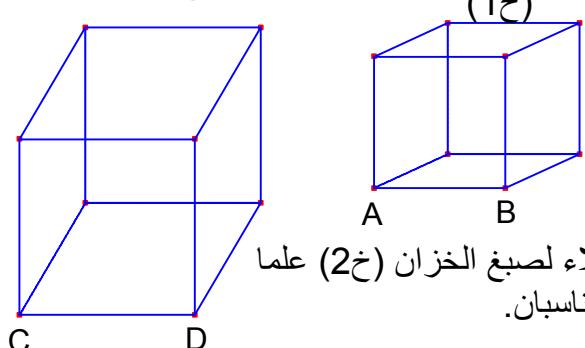
نقبل أن كرة المضرب عبارة عن كرة نصف قطرها  $R' \ cm$  و هي بهذا  
الشكل تصغير لكرة السلة بحيث أن معامل التصغير هو  $\frac{4}{15}$ .

احسب  $R'$ .

باستعمال طرفيتين مختلفتين أحسب بـ  $cm^3$  الحجم  $V'$  لكرة المضرب.

ملاحظة: يتم تدوير النتائج إلى الوحدة.

التمرين 3: (خ1) و (خ2) خزانان للمياه على شكل مكعب  
حيث:  $CD = 1,5AB$ .

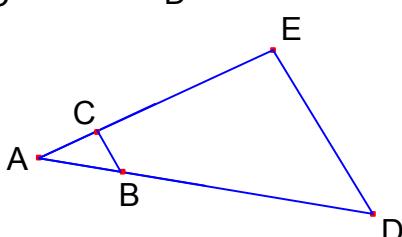


احسب حجم الخزان (خ1)  
علماً أن حجم الخزان (خ2) هو  
843,75 |

إذا لزمنا 3 kg من الطلاء  
لصبغ الخزان (خ1) كم يلزم من الطلاء لصبغ الخزان (خ2) علماً  
أن كثافة الطلاء و المساحة المصبوغة متاسبان.

التمرين 4: المثلث  $ADE$  مثلث مساحته  $A = 112\ cm^2$   
نقطة من  $[AD]$  هي  $B$  حيث  $AB = 0,25 \times AD$   
نقطة من  $[AE]$  هي  $C$  حيث  $AC = 0,25 \times AE$   
بين أن المستقيمين  $(DE)$  و  $(BC)$  متوازيان.

المثلث  $ABC$  تصغير للمثلث  $ADE$ . ما هو سلم التصغير؟

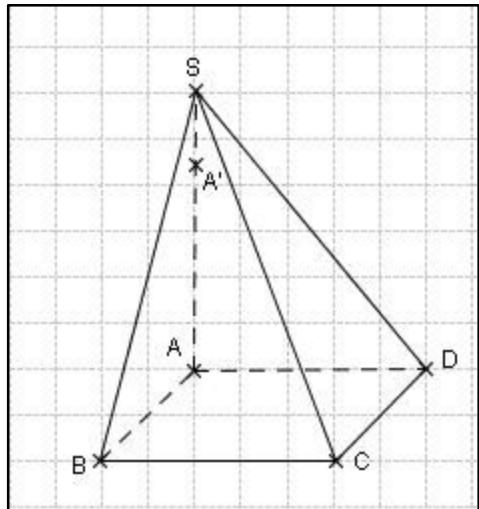


أحسب مساحة المثلث  $.ABC$ .

## أنمي كفاءاتي:

مسألة:

هرم رأسه  $S$  و قاعدته مستطيلة الشكل بحيث:



$$SD = 10 \text{ cm} , AD = 6 \text{ cm} , SA = 8 \text{ cm}$$

$$. SB = \frac{26}{3} \text{ cm} \text{ و } AB = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

لتكن  $A'$  نقطة من  $[SA]$  بحيث  $SA' = \frac{1}{4} SA$  .  
قطع الهرم بمستوى يمر من  $A'$  و مواز لقاعدته،  
هذا الأخير يقطع  $[SB]$  في  $B'$  و يقطع  $[SC]$  في  $C'$  و يقطع  $[SD]$  في  $D'$  .

بين أن المثلثين  $SAD$  و  $SAB$  قائمان.

بين أن  $SA$  هي ارتفاع الهرم.

يعتبر  $SA'B'C'D'$  هرم مصغر للهرم  $SABCD$ . ما هو معامل التصغير ؟  
ما هي طبيعة  $A'B'C'D'$  ؟ أحسب أبعاده.

## حلول التمارين و المسائل

حل التمارين 1

بما أن البحار و المحيطات تغطي نسبة  $70^\circ$  من مساحة الكره الأرضية  
فإن القارات تغطي نسبة  $30^\circ$  من هذه المساحة.

إذا رمنا إلى مساحة الكره الأرضية بـ  $A$  و إلى المساحة التي تغطيها

$$\text{القارات بـ } A' \text{ يكون لدينا: } A' = \frac{30}{100} \times A. \text{ نعلم أن } A = 4\pi 6730^2 \text{ و منه} \\ A = 181171600\pi \text{ km}^2$$

$$A' = 170750210 \text{ km}^2 \text{ أي } A' = \frac{3}{10} \times 181171600\pi \text{ km}^2$$

## حل التمرين 2

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{و منه} \quad V = \frac{4}{3}\pi(12)^3 \quad \text{وهكذا نجد} \quad V \approx 7238 \text{ cm}^3$$

$$R' = 3,2 \text{ cm} \quad R' = \frac{4}{15} \times 12 \quad \text{و منه} \quad R' = \frac{4}{15} R \quad -1$$

ب- \* الطريقة 1:  $V' = \left(\frac{4}{15}\right)^3 \times 7238 \quad \text{و منه} \quad V' = \left(\frac{4}{15}\right)^3 \times V$

$$\text{و بالتالي: } V' = 137 \text{ cm}^3$$

\* الطريقة 2:  $V' = \frac{4}{3}\pi(3,2)^3 \quad \text{و منه} \quad V' = \frac{4}{3}\pi R'^3$

$$\text{و بالتالي: } V' = 137 \text{ cm}^3$$

الخزان (خ2) هو تكبير للخزان (خ1) بحيث أن معامل التكبير هو

$$k = 1,5$$

## حل التمرين 3

نعلم أن  $V_2 = 1,5^3 \times V_1$  حيث  $V_1$  هو حجم (خ1) و  $V_2$  هو

حجم (خ2)

$$\text{و منه: } V_1 = \frac{V_2}{1,5^3} \quad \text{بعد الحساب نجد} \quad | V_1 = 250$$

نعلم أن  $A_2 = 1,5^2 \times A_1$  حيث  $A_1$  هي مساحة (خ1) و  $A_2$  هي مساحة (خ2).

أي  $A_2 = 2,25 \times A_1$  و بما أن كتلة الطلاء و المساحة المتصبعة متناسبان يلزم منا إذن

أي  $2,25 \times 3 \text{ kg}$  من الطلاء لصبغ الخزان (خ2).

## حل التمرين 4

النقط  $A, B, C, D$  في استقامية و بنفس ترتيب النقط  $A, C, E$  و لدينا:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{أي} \quad \frac{AC}{AE} = 0,25 \quad \text{و منه حسب عكس}$$

مبرهنة طالس المستقيمان ( $BC$ ) و ( $DE$ ) متوازيان.

لدينا  $AB = 0,25 \times AD$  و بالتالي فإن سلم التصغير هو 0,25.

مساحة المثلث  $ABC$  هي  $A = (0,25)^2 \times 112 \text{ cm}^2$

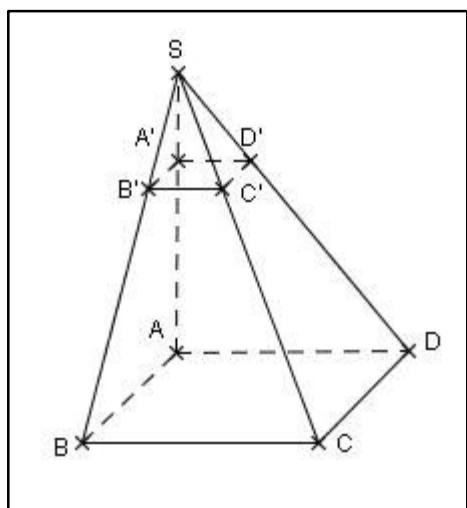
نجد هكذا  $A = 7 \text{ cm}^2$

حل المسألة

لدينا  $SD^2 = 10^2 = 100$  و  $SA^2 + AB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$  و بالتالي  $SD^2 = SA^2 + AB^2$ . نستنتج أن المثلث  $SAD$  قائم في النقطة  $A$ .

بنفس الكيفية نثبت إن المثلث  $SAB$  قائم في النقطة  $A$ .

من السؤال الأول نستنتج أن المستقيم  $(SA)$  عمودي على كل من المستقيمين  $(AB)$  و  $(AD)$  فهو إذن عمودي على المستوى الذي يشملهما و بالتالي فإن  $SA$  هي ارتفاع الهرم.



من  $SA' = \frac{1}{4}SA$  نستنتج أن معامل

التصغير هو  $\frac{1}{4}$ .

نعلم أن مقطع هرم بمستوى مواز لقاعدته هو تصغير لقاعدته و بما أن القاعدة مستطيل فإن تصغيرها مستطيل و هكذا فإن  $A'B'C'D'$  مستطيل و لدينا بما أن معامل التصغير هو  $\frac{1}{4}$ :

$$A'B' = C'D' = \frac{AB}{4} = \frac{5}{6} \text{ cm}$$

$$A'D' = B'C' = \frac{AD}{4} = 1,5 \text{ cm}$$

نصيحة

صاحب المجهدين  
و المتفوقين.

## مواضيع مقترحة

### الموضوع الأول

الجزء الأول ( 12 نقطة )

التمرين الأول:

أكتب العبارتين  $A$  و  $B$  التاليتين على الشكل  $a\sqrt{b}$  حيث  $a$  و  $b$  عداد طبيعيان و  $b$  أصغر ما يمكن.

$$B = 3\sqrt{32} - 2\sqrt{50} + 11\sqrt{2} \quad A = \sqrt{6} \times \sqrt{30}$$

التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (2x - 1)^2 + (4x^2 - 1)$ .

أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .

حل العبارة الجبرية  $E$ .

حل المعادلة  $4x(2x - 1) = 0$ .

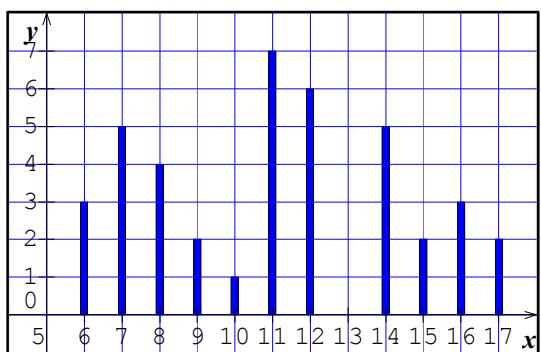
التمرين الثالث:

إليك المخطط بالأعمدة الممثل للتوزيع العلامات المتحصل عليها في اختبار مادة الرياضيات من قبل تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة المتوسط في إحدى المتوسطات.

ما هو عدد تلاميذ هذا القسم ؟

ما هو معدل القسم في الاختبار ؟

أحسب وسيط هذه السلسلة.



التمرين الرابع:

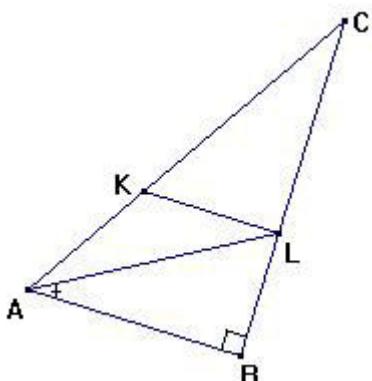
مثلث قائم في  $B$  بحيث:  $AB = 12\text{cm}$

و  $BC = 16\text{cm}$ . ننشئ على  $[BC]$  النقطة  $L$

بحيث  $BL = 6\text{cm}$  و على  $[AC]$  النقطة  $K$

بحيث  $AK = 7,5\text{cm}$ .

أحسب الطول  $AC$ .



بين أن المستقيمين  $(KL)$  و  $(AB)$  متوازيان.  
أحسب القيمة المقربة بالتقسان إلى الوحدة لقياس  
الزاوية  $\angle AEB$  بالدرجات.  
أحسب الطول  $KL$ .

### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

يقترح أحد نوادي الأنترنت على زبنائه خيارين:

الخيار الأول: يسدد الزبون مبلغ  $60DA$  للاستفادة من ساعة واحدة.

الخيار الثاني: يسدد الزبون اشتراكاً شهرياً قيمته  $150DA$  على أن يدفع  
مبلغ  $45DA$  للاستفادة من ساعة واحدة.

ما هو الخيار الأكثر فائدة لزبون استفاد من 7 ساعات خلال شهر واحد.

ما هو الخيار الأكثر فائدة لزبون استفاد من 12 ساعة خلال شهر واحد.

نسمى  $x$  عدد الساعات المستفاد منها من قبل زبون خلال شهر واحد و نسمى  $y$

المبلغ الشهري المسدود من قبل الزبون في حالة اختياره الخيار الأول بينما نسمى  $y_2$  المبلغ  
الذي سدد إذا فضل الخيار الثاني.

عبر عن كل من  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .

نختار في معلم متعدد الوحدات البيانية التالية:

على محور الفواصل يمثل  $1cm$  ساعة واحدة ويمثل  $1cm$  على محور التراتيب  $100DA$   
أنشئ في المعلم السابق المستقيمين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  الممثلين على التوالي للدالتين

$y_1$  و  $y_2$  المعرفتين كما يلي:  $y_1(x) = 60x$  و  $y_2(x) = 45x + 150$

اعتماداً على البيان حدد أفضل الخيارين تبعاً لعدد الساعات المستفاد منها خلال  
شهر واحد.

## الموضوع الثاني

### الجزء الأول (12 نقطة)

التمرين الأول:

أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 325 و 500.

أكتب الكسر  $\frac{325}{500}$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.

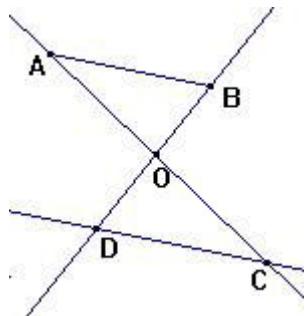
### التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (2x + 3)(2 - x) + (2x + 3)^2$ .

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .

2. حل العبارة الجبرية  $E$  إلى جداء عاملين من الشكل  $(ax + b)$ .

3. حل المعادلة  $(2x + 3)(x + 5) = 0$ .



### التمرين الثالث:

في الشكل المقابل لدينا المعطيات التالية:

$OD = 1,2\text{cm}$  ،  $OC = 2\text{cm}$  ،  $OB = 3\text{cm}$  ،  $OA = 5\text{cm}$

بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(DC)$  متوازيان.

احسب  $AB$  علماً أن  $DC = 4\text{cm}$

### التمرين الرابع:

.  $BC = 10\text{cm}$  ،  $AC = 6\text{cm}$  ،  $AB = 8\text{cm}$  . مثلث  $ABC$  مثلاً بحيث:

بین أن المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $A$ .

أحسب  $\tan A$  ثم أحسب قيس الزاوية  $\angle A$  بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة.

لتكن النقطة  $K$  من  $[AC]$  بحيث  $AK = 2\text{cm}$ . المستقيم الموازي للمستقيم  $(AB)$

و المار من النقطة  $K$  يقطع المستقيم  $(BC)$  في نقطة  $L$ . احسب الطول  $BL$ .

### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

#### القسم الأول:

مؤسسة تصنع عليا للتصبير، وتقترح نمطين من البيع:

النمط الأول:  $25DA$  للعببة الواحدة.

النمط الثاني:  $15DA$  للعببة الواحدة زائد مبلغ جزافي  $50DA$ .

1) احسب ثمن 30 علبة وثمن 50 علبة حسب النمط الأول، ثم حسب النمط الثاني.

2) نرمز بـ  $x$  إلى عدد العلب المنتجة، عبر بدالة  $x$  عن ثمنها حسب كل من النمطين.

3) لتكن  $P_2(x) = 15x + 50$  و  $P_1(x) = 25x$

أنشئ في معلم متعدد المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  الممثلين للدالتين  $P_1$  و  $P_2$  على الترتيب، (نأخذ على محور الفواصل  $0,5\text{cm}$  لكل علبة وعلى محور التراتيب  $1\text{cm}$  لكل

$) (100DA$

4) بقراءة بيانية بسيطة أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية:

أ) ما هو أكبر عدد من العلب التي يمكن شراءها بـ  $500 DA$  ؟

ب) من أجل أي عدد من العلب يكون الثمنان متساوين ؟

ج) ما هو الشرط الذي يكون من أجله النمط الثاني أفضل من النمط الأول بالنسبة إلى المشتري ؟

القسم الثاني:

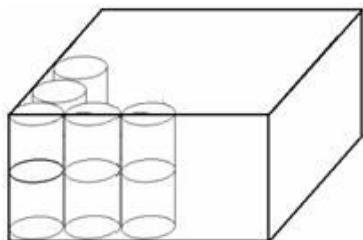
تصنع كلّ علبة على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها  $5 cm$  وارتفاعها  $20 cm$  ، ويغلف كلّ سطحها الجانبي بورقة إشهارية.

1) احسب القيمة المضبوطة لمساحة هذه الورقة، والقيمة المقربة بأخذ  $\pi = 3,14$ .

2) احسب سعة كلّ علبة بالسنتيمتر المكعب، ثم باللتر.

3) توضع العلب في صناديق على شكل متوازي مستطيلات كما هو مبين

في الشكل المرفق. ما هي أبعاد كلّ صندوق كي يسع 100 علبة ؟



## الموضوع الثالث

الجزء الأول ( 12 نقطة )

التمرين الأول:

أكتب على الشكل  $a\sqrt{5}$  حيث  $a$  عدد طبيعي كلا من العدددين التاليين:

$$B = 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{125} \quad A = \sqrt{12} \times \sqrt{15}$$

تحقق أن العدد  $\frac{A}{B}$  عدد طبيعي.

التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (2x + 5)^2 - (x - 2)^2$

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .

2. حل العبارة الجبرية  $E$  إلى جداء عاملين من الشكل  $(ax + b)$

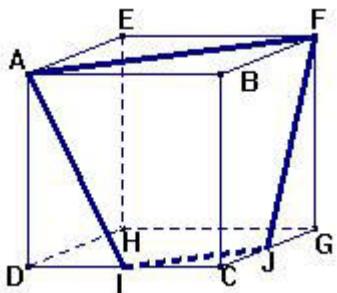
$$\text{حل المعادلة } (x + 7)(3x + 3) = 0$$

### التمرين الثالث:

يمثل المخطط نصف الدائري المرفق  
توزيع 630 تلميذ لإحدى المتوسطات  
حسب الصنف.

أحسب فيس الزاوية الموافقة لصنف النصف الداخلية.  
حدد جدول التكرارات و التكرارات النسبية ( التوازنات ) .

### التمرين الرابع:



مكعب طول حرفه  $3\text{cm}$ .

نعتبر النقاطين  $I$  و  $J$  حيث  $I$  منتصف  
القطعة  $[CD]$  و  $J$  منتصف القطعة  $[CG]$ .  
ما نوع الرباعي  $AJIF$ ? ببر إجابتك.  
ماذا يمثل هذا الرباعي بالنسبة للمكعب  
؟  
احسب محيط الرباعي  $AJIF$ .

### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

تقرح إحدى المجالات الأسبوعية على زبائنها خيارين لاقتناء مجلاتها:

الخيار الأول: يسدد الزبون مبلغ  $30DA$  للحصول على مجلة واحدة.

الخيار الثاني: يسدد الزبون اشتراكا سنويا قيمته  $300DA$  على أن يدفع مبلغ  $20DA$  للحصول على مجلة واحدة.

احسب المبلغ المسدود للحصول على 10 مجلات ثم على 50 مجلة بالنسبة لكل خيار.

نسمى  $x$  عدد المجالات التي يتحصل عليها زبون خلال سنة واحدة و ليكن  $y_1$   
المبلغ السنوي المسدود من قبل الزبون في حالة الخيار الأول و  $y_2$  المبلغ المسدود في حالة  
الخيار الثاني.

عبر عن كل من  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .

المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متاجنس  $(O; I, J)$  بحيث  $1\text{cm}$  يمثل 10  
مجلات على محور الفواصل بينما  $1\text{cm}$  يمثل  $200DA$  على محور التراتيب.  
أنشئ المستقيمين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  اللذين معادلتاهما:  $y_1 = 30x$  و  $y_2 = 20x + 300$  على  
الترتيب.

باستعمال التمثيل البياني السابق أجب عن الأسئلة التالية:

ما هو أحسن الخيارين إذا اشتري زبون 25 مجلة؟

ما هو المبلغ الذي يجب تسديده للحصول على 60 مجلة؟

بتسديد مبلغ  $1200 DA$  ما هو عدد المجلات المحصل عليها بالنسبة لـ الخيارين؟

حل المتراجحة التالية:  $30x + 300 \leq 20x$  ثم عقب على النتيجة.

## الموضوع الرابع

### الجزء الأول (12 نقطة)

التمرين الأول:

أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 147 و 84.

لمساعدة التلاميذ المعوزين قامت جمعية أولياء التلاميذ لإحدى المت ossates بتوزيع 147 كراساً و 84 قلماً عليهم بطريقة عادلة على شكل مجموعات متماثلة.

\* ما هو أكبر عدد ممكن من التلاميذ المستفيدين من هذه الإعانة؟

\* ما هو عدد الكراريس و عدد الأقلام التي يستفيد منها كل تلميذ؟

التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (3x - 2)^2 + (3x - 2)(x + 1)$ .

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .

2. حل العبارة الجبرية  $E$ .

3. حل المعادلة  $E = 0$ .

التمرين الثالث:

في الشكل المقابل لدينا المعطيات التالية:

$$OD = 2\sqrt{3} \text{ cm}, OA = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

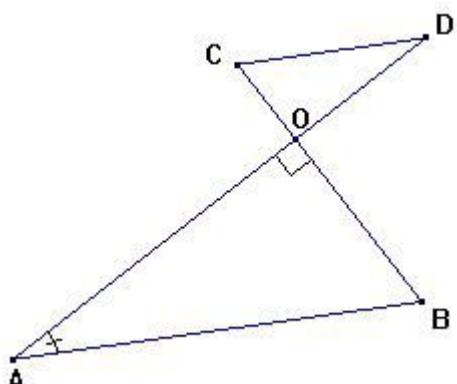
$$OC = 2 \text{ cm}$$

$$\angle AOB = 30^\circ \text{ و } \angle AOB = 90^\circ$$

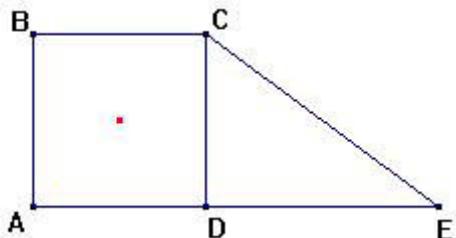
أحسب الطول  $OB$ .

بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$

متوازيان.



التمرين الرابع: المستوى منسوب إلى معلم متعمد و متجانس  $(O; I, J)$ .



علم النقطة  $(2; -5)$  ،  $B(4; 1)$  و  $C(-2; 3)$ .

أحسب الأطوال  $AB$  ،  $AC$  و  $BC$  ثم بين أن المثلث  $ABC$  قائم.

عين إحداثي النقطة  $D$  صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{BC}$ . ما هي طبيعة الرباعي  $ABCD$  ؟ علل إجابتك.

### الجزء الثاني: مسألة (8 نقاط)

اشترى أحمد و بومدين قطعتي أرض متجاورتين

كما هو موضح في الشكل المقابل علما أن:  $ABCD$  مربع و  $CDE$  مثلث قائم. وحدة الطول هي المتر ( $m$ ).

الفرع الأول:

دفع أحمد مبلغ  $320000DA$  ثمن القطعة المربعة  $ABCD$  علما أن ثمن المتر المربع هو  $200DA$ .

أحسب مساحة قطعة أحمد.

استنتج طول القطعة  $[AB]$ .

دفع بومدين  $250DA$  للمتر المربع بقصد شراء قطعته.

أحسب مساحة قطعة بومدين إذا علمت أن  $DE = 50m$ .

استنتاج ثمن قطعة بومدين.

الفرع الثاني:

اشترى بومدين من أحمد الجزء  $CDM$  حيث  $M$  نقطة من القطعة المستقيمة  $[DA]$ .

فيما يلي نأخذ:  $AB = 40m$  ،  $DE = 50m$  و نضع  $x$  مع  $DM = x$   $0 < x < 40$ .

أ) عبر عن المساحة  $A_{CDM}$  لل مثلث  $CDM$  بدلالة  $x$ .

ب) استنتاج المساحة  $F_{ABCM}$  للرباعي  $ABCM$  و المساحة  $G_{CME}$  للمثلث  $CME$  بدلالة  $x$ .

ج) أحسب قيمة  $x$  التي من أجلها تكون المساحتان  $F_{ABCM}$  و  $G_{CME}$  متساويتين. نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين بما:

$$f(x) = 20x + 1000 \quad g(x) = -20x + 1600$$

حيث  $x$  عدد موجب أصغر من 40.

مثل بيانيا في معلم متعمد الدالتين  $f$  و  $g$  (نأخذ على الورق المليمتر  $1cm$  لكل وحدتين على محور الفواصل و  $1cm$  لكل 200 وحدة على محور التراتيب). كيف يمكن إيجاد نتيجة السؤال 1 - ج باستعمال التمثيلات البيانية للسؤال 2.

باستعمال البيان فقط، أجب عن الأسئلة التالية مع التعليق:  
 ما هي مساحات القطع التابع لأحمد و لمودين إذا كانت  $M$  منتصف  
 القطعة  $[DA]$ ؟

ما هي قيمة  $x$  عندما تكون المساحة  $F_{ABCM}$  لقطعة أحمد هي 1500 ؟ ما هي  
 عندئذ المساحة  $G_{CME}$  لقطعة بومدين ؟

## الموضوع الخامس

### الجزء الأول (12 نقطة)

التمرين الأول:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 185 \\ 3x + 4y = 155 \end{cases} \quad \text{حل الجملة التالية:}$$

لشراء قلمين وخمسة كراريس دفعت أسماء مبلغ 185 DA بينما دفعت بشري  
 لشراء ثلاثة أقلام وأربعة كراريس مبلغ 155 DA.  
 ما هو سعر القلم الواحد وما هو سعر الكراس الواحد ؟

التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (5x - 2)^2 - (2x + 5)^2$ .

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .

2. حل العبارة الجبرية  $E$  إلى جداء عاملين من الشكل  $(ax + b)$ .

3. حل المعادلة  $(3x - 7)(7x + 3) = 0$ .

التمرين الثالث:

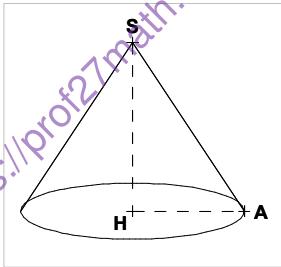
$ABC$  مثلث قائم في النقطة  $A$  بحيث:  $AB = 4\text{cm}$  و  $\angle ABC = 50^\circ$

أحسب الطول  $AC$  (يتم تدوير النتيجة إلى  $0,1\text{cm}$ ).

حدد وضعية النقطة  $O$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ . على إجابتك.

عين قيس الزاوية  $\angle AOB$ .

التمرين الرابع:



مخروط دوراني رأسه  $S$ ، ارتفاعه  $[SH]$  و نصف

قطر قاعدته  $[AH]$  بحيث:  $AH = 8\text{cm}$  و  $SH = 12\text{cm}$ .

عين قيس الزاوية  $\angle SHA$  ( يتم تدوير النتيجة إلى 0,1 ).

أحسب الطول  $SA$ .

نقوم بتصغير هذا المخروط للحصول على

مخروط جديد ارتفاعه  $h' = 8\text{cm}$ .

أحسب  $V$  حجم المخروط الأول.

أحسب  $k$  معامل ( سلم ) التصغير.

أحسب  $V'$  حجم المخروط المصغر.

الجزء الثاني: مسألة (8 نقاط)

يتلقى عامل في مصنع للمحافظ أجرة أسبوعية قدرها  $400DA$  زائد علاوة قدرها

$50DA$  عن كل محفظة ينجزها.

القسم الأول:

نرمز بـ  $x$  لعدد المحافظ المنجزة خلال الأسبوع و بالرمز  $y$  للأجرة الأسبوعية.

1 - أنقل وأكمل الجدول التالي :

$x$	0	2	8	15
$y$				

2- عبر عن  $y$  بدلالة  $x$

3 - مثل بيانيا التطبيق التالفي المعرف بـ:  $(x) = 50x + 400$

نأخذ  $1\text{cm}$  من أجل 2 وحدات على محور الفواصل و  $1\text{cm}$  من أجل 100 وحدة على محور التراتيب.

4 - إذا أراد هذا العامل أن تكون أجرته الأسبوعية  $1200DA$  ما هو عدد المحافظ التي يجب إنجازها في هذا الأسبوع ؟

القسم الثاني:

عادة هذا العامل أجرته الأسبوعية تقدر بـ  $1200DA$ . لكن في أحد الأسابيع وقع له عائق فلم ينجز إلا 75% من عدد المحافظ المعتادة .

1 - ما هو عدد المحافظ التي أنجزها في هذا الأسبوع ؟

2 - ما هي أجرته في هذا الأسبوع ؟

# تصحيح الموضوع الأول

الجزء الأول:  
حل التمرين الأول:

$$\cdot A = 6\sqrt{5} \quad A = \sqrt{6} \times \sqrt{6 \times 5} = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt{5} = (\sqrt{6})^2 \times \sqrt{5}$$
$$\cdot B = 13\sqrt{2} \quad B = 3\sqrt{16 \times 2} - 2\sqrt{25 \times 2} + 11\sqrt{2} = 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 11\sqrt{2}$$

حل التمرين الثاني:

$$\cdot E = 8x^2 - 4x \quad E = (4x^2 - 4x + 1) + (4x^2 - 1)$$

لدينا الاختيار بين العبارة الأولى و العبارة الثانية:

$$E = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(2x + 1) = (2x - 1)(2x - 1 + 2x + 1) = 4x(2x - 1) -$$
$$E = 8x^2 - 4x = 4x(2x - 1) -$$

$$x = \frac{1}{2} \quad 4x(2x - 1) = 0 \quad 4x = 0 \quad \text{أو} \quad 2x - 1 = 0 \quad \text{وهذا يعني} \quad x = 0 \quad \text{أو}$$

للمعادلة حلان هما 0 و  $\frac{1}{2}$ .

حل التمرين الثالث:

عدد تلاميذ القسم هو 40.

ليكن  $\bar{x}$  الوسط الحسابي لهذه السلسلة و هو معدل القسم. لدينا:  $11,1 = \bar{x}$   
وسط هذه السلسلة هو:  $M_e = 11$ .

حل التمرين الرابع:

المثلث  $ABC$  قائم في  $B$  و منه حسب مبرهنة فيتاغورس  $AC^2 = AB^2 + BC^2$   
و وبالتالي فإن  $AC = \sqrt{400} = 20cm$ . نستنتج أن  $AC = 20cm$ .  
ال المستقيمان  $(CA)$  و  $(CB)$  متلقاطعان في  $C$ . النقط  $C$ ،  $K$  و  $A$  في استقامية و

بنفس ترتيب النقط  $C$ ،  $L$  و  $B$  و لدينا بالإضافة إلى ذلك  $\frac{CA}{CK} = \frac{CB}{CL}$  لأن:

$$\frac{CB}{CL} = \frac{16}{10} = 1,6 \quad \text{و} \quad \frac{CA}{CK} = \frac{20}{12,5} = 1,6$$

نستنتج بتطبيق عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين  $(KL)$  و  $(AB)$  متوازيان.

$$\angle LAB = 26^\circ \quad \tan \angle LAB = \frac{BL}{AB} = \frac{6}{12} = 0,5 \quad \text{لدينا}$$

بتطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا  $\frac{CA}{CK} = \frac{CB}{CL} = \frac{AB}{KL} = 1,6$  و بالتالي

$$KL = 7,5\text{cm} \text{ و منه } KL = \frac{AB}{1,6} = \frac{12}{1,6}$$

### حل الجزء الثاني مسألة :

يدفع الزبون في حالة الخيار الأول  $420DA = 7 \times 60$  أما في حالة الخيار

الثاني يدفع  $465DA = 45 \times 7 + 150$  و بالتالي فال الخيار الأول أكثر فائدة.

يدفع الزبون في حالة الخيار الأول  $720DA = 12 \times 60$  أما في حالة الخيار

الثاني يدفع  $690DA = 45 \times 12 + 150$  و بالتالي فال الخيار الثاني أكثر فائدة.

$$y_2 = 45x + 150 \quad , \quad y_1 = 60x$$



نلاحظ أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 10 و هذا يعني أنه في حالة الخيارين يدفع الزبون نفس المبلغ و الذي هو  $600DA$ . كما نلاحظ أنه من أجل  $x$  اصغر من 10 يكون المستقيم ( $d_1$ ) أسفل المستقيم ( $d_2$ ) و بالتالي فإن أفضل الخيارين في هذه الحالة هو الخيار الأول أما من أجل  $x$  أكبر من 10 فإن أفضل الخيارين هو الخيار الثاني.

## تصحيح الموضوع الثاني

الجزء الأول :

حل التمرين الأول:

$$500 = 325 \times 1 + 175$$

$$325 = 175 \times 1 + 150$$

$$175 = 150 \times 1 + 25$$

$$150 = 25 \times 6 + 0$$

لدينا باستعمال خوارزمية إقليدس

$$\text{و منه } PGCD(500; 325) = 25$$

$$\cdot \frac{325}{500} = \frac{13}{20} \text{ و منه } \frac{325}{500} = \frac{13 \times 25}{20 \times 25}$$

حل التمرين الثاني:

$$E = (4x - 2x^2 + 6 - 3x) + (4x^2 + 12x + 9)$$

$$E = 2x^2 + 13x + 15$$

$$E = (2x + 3)(2 - x + 2x + 3)$$

$$E = (2x + 3)(x + 5)$$

$$2x + 3 = 0 \text{ أو } x + 5 = 0 \text{ وهذا يعني } (2x + 3)(x + 5) = 0$$

$$\text{أو } x = -5 \text{ و منه للمعادلة حلين هما } -\frac{3}{2} \text{ و } -5.$$

حل التمرين الثالث:

المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متقاطعان في  $O$ . النقط  $D$ ،  $O$  و  $B$  في استقامية

و بنفس ترتيب النقط  $C$ ،  $O$  و  $A$  كما أن  $\frac{OA}{OC} = 2,5$  أي  $\frac{OB}{OD} = 2,5$  و  $\frac{OA}{OC} = 2,5$

و منه حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين  $(AB)$  و  $(DC)$  متوازيان.

بتطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا  $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC}$  و منه

$$AB = DC \times \frac{OA}{OC} = DC \times 2,5 \text{ و بالتالي } AB = 10 \text{ cm. نجد هكذا } AB = 4 \times 2,5$$

حل التمرين الرابع :

$$\text{لدينا } AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100 \text{ و } AB^2 + AC^2 = 100 \text{ و منه } AB^2 + AC^2 = 100$$

نستنتج حسب مبرهنة فيتاغورس أن المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $A$ .

$\angle ACB = 53^\circ$  و  $\tan \angle ACB = \frac{4}{3}$  و منه  $\tan \angle ACB = \frac{AB}{AC}$

بنطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا  $\frac{CA}{CK} = \frac{CB}{CL} = \frac{AB}{KL}$  و منه

$$CL = \frac{CB \times CK}{CA} = \frac{10}{3} \text{ cm} \quad . \quad BL = BC - CL = 20 - \frac{10}{3} = \frac{50}{3} \text{ cm}$$

### حل الجزء الثاني: مسألة القسم الأول

ثمن 30 علبة حسب النمط الأول هو  $25 \times 30 = 750 DA$ .

ثمن 30 علبة حسب النمط الثاني هو  $15 \times 30 + 50 = 500 DA$ .

ثمن 50 علبة حسب النمط الأول هو  $25 \times 50 = 1250 DA$ .

ثمن 50 علبة حسب النمط الثاني هو  $15 \times 50 + 50 = 800 DA$ .

ثمنها حسب النمط الأول هو  $25x$  بينما ثمنها حسب النمط الثاني هو  $50 + 15x$ .  
أنظر الرسم المرفق.

أ) أكبر عدد من العلب التي يمكن شراؤها بـ  $500 DA$  هو 20 علبة.

ب) يكون الثمان علب متساوين من أجل 5 علب.

ج) الشرط الذي يكون من أجله النمط الثاني أفضل من النمط الأول بالنسبة للمشتري هو أن يكون عدد العلب المشتراء أكبر من 5.



### القسم الثاني:

القيمة المضبوطة لمساحة الورقة الإشهارية هي  $2\pi \times 5 \times 20 = 200\pi \text{ cm}^2$  بينما

قيمتها المقربة هي  $628\text{cm}^2$ .

سعة كل علبة هي  $\pi \times 5^2 \times 20 = 1570\text{cm}^3$  أي  $1,571$ .

.  $40 \times 100 \times 50 = 50 \times 10 \times 5 = 50$  و منه أبعاد الصندوق هي  $50 \times 2 = 100$

## تصحيح الموضوع الثالث

### الجزء الأول (12 نقطة)

#### حل التمرين الأول

$$A = 6\sqrt{5} \quad \text{و منه } A = \sqrt{4 \times 3} \times \sqrt{3 \times 5} = 2(\sqrt{3})^2 \sqrt{5}$$

$$B = 2\sqrt{5} \quad \text{و منه } B = 2\sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{16 \times 5} + 2\sqrt{25 \times 5} = 4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$$

$$\frac{A}{B} \text{ عدد طبيعي.} \quad \text{إذن } \frac{A}{B} = 3 \quad \text{و منه } \frac{A}{B} = \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

#### حل التمرين الثاني

$$E = (4x^2 + 20x + 25) - (x^2 - 4x + 4)$$

$$E = 4x^2 + 20x + 25 - x^2 + 4x - 4$$

$$E = 3x^2 + 24x + 21$$

$$E = [(2x + 5) - (x - 2)][(2x + 5) + (x - 2)]$$

$$E = (2x + 5 - x + 2)(2x + 5 + x - 2)$$

$$E = (x + 7)(3x + 3)$$

$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = -7 \quad \text{أي} \quad 3x + 3 = 0 \quad \text{يعني} \quad (x + 7)(3x + 3) = 0$$

للمعادلة حلان هما  $-7$  و  $-1$ .

#### حل التمرين الثالث

نعلم أن قيس زاوية مستقيمة هو  $180^\circ$  و منه قيس الزاوية الموافقة لصنف النصف الداخليين هو  $180 - 120 = 60^\circ$  أي  $36^\circ$ .

باستعمال العلاقة التالية: التكرار هو  $\frac{\alpha^\circ \times 630}{180^\circ}$  تحصل على مختلف التكرارات

خارجى	نصف داخلى	داخلى	الفئة
$120^\circ$	$36^\circ$	$24^\circ$	الزاوية
420	126	84	التكرار
$\frac{420}{630}$	$\frac{126}{630}$	$\frac{84}{630}$	التواتر

#### حل التمرين الرابع

بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلث  $CDG$  يكون لدينا:

( $DG = 2IJ$ ) و ( $DG \parallel AF$ ) و بما أن ( $DG \parallel IJ$ ) فإن ( $AF = 2IJ$ ) و ... ( $AF \parallel IJ$ )

لدينا من جهة ثانية المثلثان  $ADI$  و  $FGJ$  متقاربان و منه ... ( $AI = FJ$ ) من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي  $AIJF$  شبه منحرف متساوي الساقين.

الرباعي  $AIJF$  هو مقطع المكعب  $ABCDEFGH$  بالمستوي  $(AFI)$ .

لدينا  $IJ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  و  $AF = 3\sqrt{2} \text{ cm}$  و منه  $AF^2 = AB^2 + BF^2 = 18$  و بالتالي

لدينا كذلك  $AI^2 = AD^2 + DI^2 = \frac{45}{4}$  و  $AI = FJ = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$

لدينا  $AF + IJ + 2 \times AI = 13,06 \text{ cm}$  و منه  $AF + IJ + 2 \times AI = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{5}$

إذن محيط الرباعي  $AIJF$  هو  $13,06 \text{ cm}$ .

#### الجزء الثاني: مسألة (8 نقاط)

\* المبلغ المحدد للحصول على 10 مجلات بالنسبة ل الخيار 1:  $30 \times 10 = 300DA$

\* المبلغ المحدد للحصول على 10 مجلات بالنسبة ل الخيار 2:  $20 \times 10 + 300 = 500DA$

\* المبلغ المحدد للحصول على 50 مجلة بالنسبة ل الخيار 1:  $30 \times 50 = 1500DA$

\* المبلغ المحدد للحصول على 50 مجلة بالنسبة ل الخيار 2:  $20 \times 50 + 300 = 1300DA$

$$y_2 = 20x + 300, \quad y_1 = 30x$$

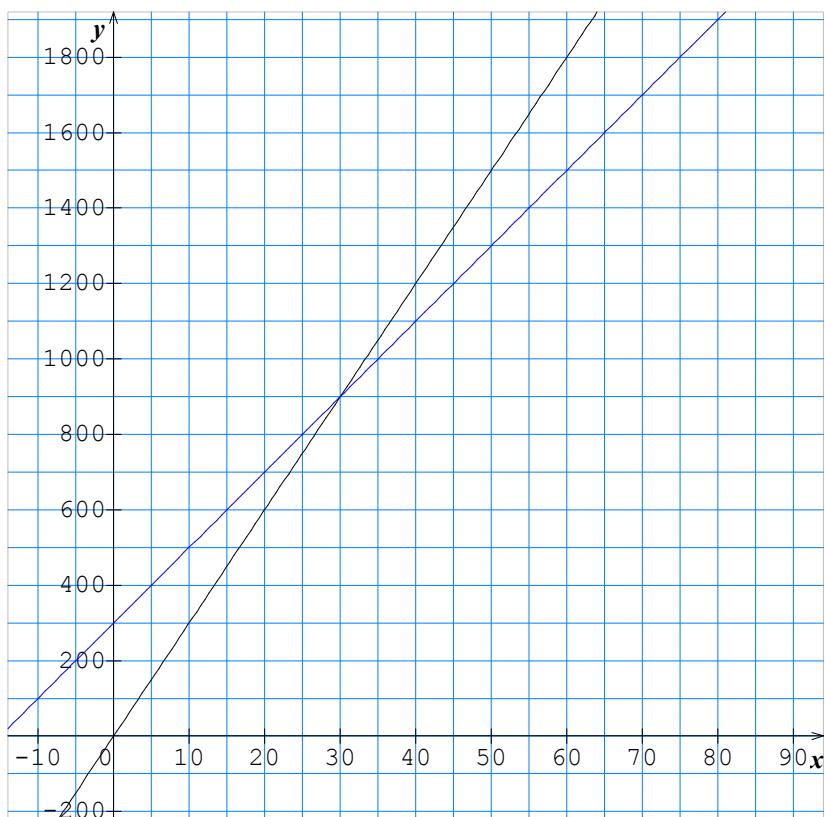
أنظر الرسم المرفق.

أحسن الخيارين في حالة شراء 25 مجلة هو الخيار الأول.

المبلغ المسدد في حالة شراء 60 هو  $1800DA$  بالنسبة لخيار الأول و هو  $1500DA$  بالنسبة لخيار الثاني.

عدد المجلات المتحصل عليها بتسديد  $1200DA$  هو 40 بالنسبة لخيار الأول و هو 45 بالنسبة لخيار الثاني.

- حالة شراء أقل من 30 مجلة أما في حالة شراء أكثر من 30 مجلة فيكون الخيار الثاني الأفضل.



## تصحيح الموضوع الرابع

### الجزء الأول ( 12 نقطة )

#### حل التمرين الأول

$$147 = 84 \times 1 + 63$$

لدينا باستعمال خوارزمية إقليدس

$$63 = 21 \times 3 + 0$$

و منه  $\text{PGCD}(147; 84) = 21$

\* إذا رزمنا بـ  $n$  إلى أكبر عدد ممكن من التلاميذ المستفيدين فإن العدد  $n$  هو القاسم المشترك الكبير للعديين 147 و 84 . و منه  $n = 21$ .

\* لدينا  $7 = 21 \div 147$  و  $4 = 21 \div 84$  و وبالتالي يستفيد كل تلميذ من 7 كراسيس و 4 أقلام.

#### حل التمرين الثاني

$$E = (9x^2 - 12x + 4) + (3x^2 + 3x - 2x - 2)$$

$$E = 9x^2 - 12x + 4 + 3x^2 + 3x - 2x - 2$$

$$E = 12x^2 - 11x + 2$$

$$E = (3x - 2)(3x - 2 + x + 1)$$

$$E = (3x - 2)(4x - 1)$$

يعني  $E = 0$  أي  $3x - 2 = 0$  أو  $4x - 1 = 0$  وبالتالي

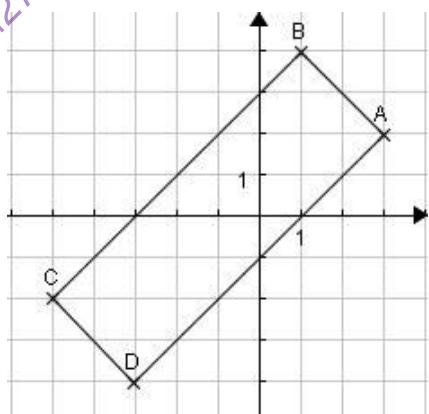
فإن حلول هذه المعادلة هما  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{2}{3}$ .

#### حل التمرين الثالث

$$OB = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{و منه } OB = OA \times \tan 30^\circ = \frac{OB}{OA}$$

و وبالتالي فإن  $OB = 4cm$  .  
المستقيمان  $(BC)$  و  $(AD)$  متقطعان في  $O$ . النقط  $D$  ،  $O$  و  $A$  في استقامية

و بنفس ترتيب النقط  $C$ ،  $O$  و  $B$  كما أن  $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$  أي  $\frac{OB}{OC} = 2$  و منه حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$  متوازيان.



#### حل التمرين الرابع

أنظر الشكل المقابل.

$$\text{لدينا } AC = 4\sqrt{5}, AB = 2\sqrt{2}$$

$$\text{و } BC = 6\sqrt{2}$$

$$\text{لدينا } AC^2 = 80 \text{ و } AB^2 + BC^2 = 80$$

و منه  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ . نستنتج أن المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $B$ .

$$\text{لدينا } \overline{BC}(-6; -6) \text{ و } \overline{AD} = \overline{BC}$$

$$\text{لدينا } \overline{BC}(-6; -6) \text{ و } \overline{AD} = \overline{BC}$$

إذا فرضنا  $D(x; y)$  يكون لدينا:

$$. D(-3; -4) \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x - 3 = -6 \\ y - 2 = -6 \end{cases} \quad \text{و منه}$$

الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع و بما أن إحدى زواياه قائمة فهو إذن مستطيل.

#### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

##### حل الفرع الأول:

مساحة قطعة أحمد هي  $1600 m^2$  و بما أن القطعة مربعة

الشكل فإن  $AB = \sqrt{1600} m$  و هكذا نجد  $. AB = 40 m$

مساحة قطعة بومدين هي  $\frac{DE \times DC}{2} = \frac{50 \times 40}{2} = 1000 m^2$  و وبالتالي فإن ثمن

قطعة بومدين هو  $1000 \times 250 = 250000 DA$ .

##### حل الفرع الثاني:

$$A_{CDM} = \frac{40 \times x}{2} = 20x \quad (1)$$

$$G_{CME} = 1000 + 20x \quad F_{ABCM} = 1600 - 20x \quad (2)$$

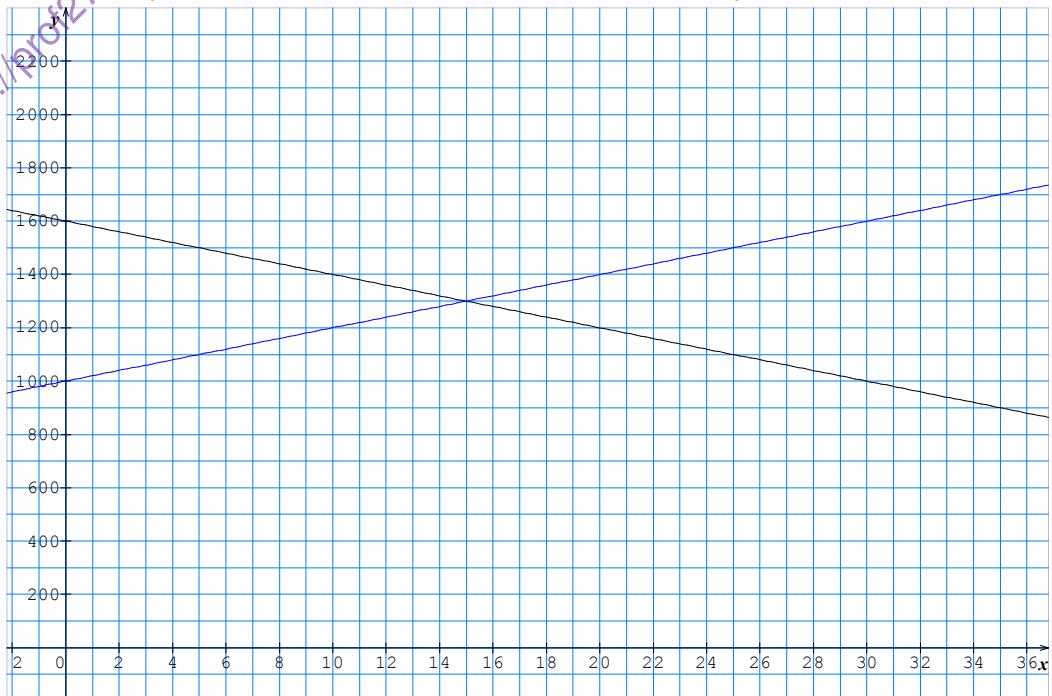
$$40x = 600 \quad \text{أي} \quad 1600 - 20x = 1000 + 20x \quad F_{ABCM} = G_{CME}$$

و وبالتالي  $x = 15$ .

أنظر الرسم المرفق.

قيمة  $x$  في السؤال 1- ج هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين لـ  $F_{ABCM}$  و  $G_{CME}$ .

\* منتصف القطعة  $[DA]$  يعني أن  $x = 20$  و منه فمساحة أحمد هي  $1200m^2$   
 بينما مساحة بومدين هي  $1400m^2$ .  
 $G_{CME} = 1100m^2$  \* تكون  $F_{ABCM} = 1500$



## تصحيح الموضوع الخامس

لجزء الأول (12 نقطة)  
 حل التمارين الأول:

يمكنا مثلا استعمال طريقة الجمع. بضرب لحل الجملة

$$\begin{cases} 2x + 5y = 185 & (1) \\ 3x + 4y = 155 & (2) \end{cases}$$

طRFي (1) في 3 و ضرب طRFي (2) في (-2) نجد:

$$\begin{cases} 6x + 15y = 555 & (1') \\ -6x - 8y = -310 & (2') \end{cases}$$

من (1')+(2') ينتج  $7y = 245$  و منه  $y = 35$ . بالتعويض مثلا في المعادلة (1) نحصل على  $2x + 5 \times 35 = 185$  و منه  $2x = 10$  أي  $x = 5$ . للجملة حل وحيد هو الثانية  $(x; y) = (2; 35)$

إذا رمنا إلى ثمن القلم الواحد بـ  $x$  و إلى ثمن الكراس الواحد بالرمز  $y$   $DA = 2x + 5y = 185$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 185 \\ 3x + 4y = 155 \end{array} \right. \text{ و حسب السؤال الأول فإن } x = 5 \text{ و } y = 35$$

و هكذا فإن ثمن القلم هو  $5DA$  و ثمن الكراس  $.35DA$ .

**حل التمرين الثاني:**

$$E = (25x^2 - 20x + 4) - (4x^2 + 20x + 25)$$

$$E = 21x^2 - 40x - 21$$

$$E = [(5x - 2) - (2x + 5)][(5x - 2) + (2x + 5)]$$

$$E = (5x - 2 - 2x - 5)(5x - 2 + 2x + 5)$$

$$E = (3x - 7)(7x + 3)$$

$$(3x - 7)(7x + 3) = 0 \text{ يعني } 3x - 7 = 0 \text{ أو } 7x + 3 = 0 \text{ وهذا يعني}$$

$$x = \frac{7}{3} \text{ أو } x = -\frac{3}{7}. \text{ إذن للمعادلة حلان هما } \frac{7}{3} \text{ و } -\frac{3}{7}.$$

**حل التمرين الثالث:**

$$AC = 4,8 \text{ cm} \quad AC = AB \tan 50^\circ = \frac{AC}{AB} \text{ و منه } \tan 50^\circ = \frac{AC}{AB} \text{ . نجد هكذا}$$

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم  $ABC$  هي منتصف وتره و وبالتالي فالنقطة  $O$  هي منتصف القطعة المستقيمة  $[BC]$ .

بما أن قيس الزاوية  $\angle ABC$  هو  $50^\circ$  و علما أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  فإن قيس الزاوية  $\angle ACB$  هو  $40^\circ$ . في الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  الزاوية المحيطية  $\angle AOB$  هي زاوية المركزية تحصران نفس القوس و وبالتالي فإن  $\angle AOB = 2 \times \angle ACB$  نستنتج هكذا أن قيس الزاوية  $\angle AOB$  هو  $80^\circ$ .

**حل التمرين الرابع :**

$$\angle ASH = 33,7^\circ \quad \tan \angle ASH = 0,66 \quad \tan \angle ASH = \frac{AH}{SH} \text{ و منه } \tan 33,7^\circ = \frac{AH}{SH}$$

$$SA = \sqrt{208} \text{ cm} \quad SA^2 = SH^2 + AH^2 = 208$$

نذكر أن حجم مخروط دوراني هو  $\frac{1}{3}\pi R^2 h$  حيث  $h$  الارتفاع و  $R$  نصف قطر القاعدة.

$$V \square 804 \text{ cm}^3 . \quad \text{نجد } V = \frac{1}{3} \pi \times A H^2 \times SH$$

$$. k = \frac{2}{3} \text{ و منه } k = \frac{SH}{h'} \quad \text{لدينا}$$

$$. V' \square 238 \text{ cm}^3 . \quad \text{نجد } V' = \left( \frac{2}{3} \right)^3 \times V$$

**الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)**

القسم الأول:

$x$	0	2	8	15
$y$	400	500	800	1150

$$y = 50x + 400$$

أنظر الرسم المرفق.

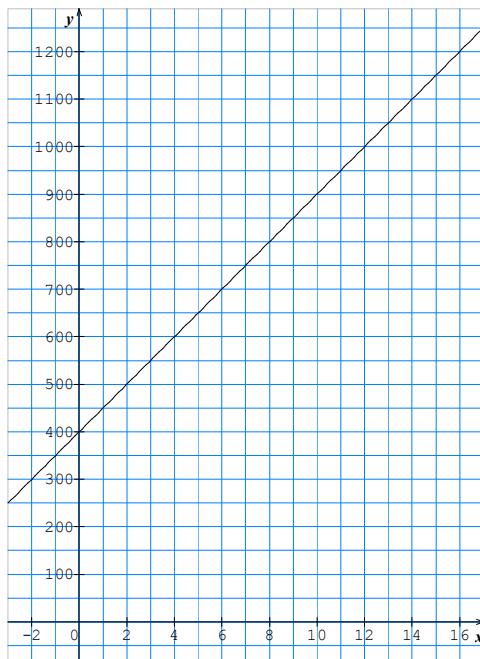
من خلال قراءة بيانية فعدد المحافظ التي يجب إنجازها حتى تكون أجرته

1200 DA هو 16 محفظة.

القسم الثاني

عدد المحافظ المنجزة في هذا الأسبوع هو  $\frac{16 \times 75}{100} = 12$

أجرته في هذا الأسبوع هي  $12 \times 50 + 400 = 1000 DA$



# امتحان شهادة التعليم المتوسط

المدة: ساعتان

دورة جوان 2007

**الجزء الأول: ( 12 نقطة )**  
**التمرين الأول: ( 03 نقط )**

ليكن العددان:  $B = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \times \frac{2}{3}$  و  $A = \sqrt{98} + 3\sqrt{32} - \sqrt{128}$

أكتب  $A$  على الشكل  $a\sqrt{2}$  حيث  $a$  عدد طبيعي.

بسط العدد  $B$  ثم بين أن:  $\frac{A^2}{33} - 3B = \frac{1}{3}$

**التمرين الثاني: ( 03 نقط )**

لتكن العبارة الجبرية  $E$  حيث:

$$E = 10^2 - (x - 2)^2 - (x + 8)$$

أنشر ثم بسط  $E$ .

حل العبارة  $(x - 2)^2 - 10^2$ ، ثم استنتج تحليل العبارة  $E$ .

$$\text{حل المعادلة: } (11-x)(8+x) = 0$$

**التمرين الثالث: ( 02.5 نقط )**

$$\begin{cases} 4x + 5y = 105 \\ 6x + 4y = 112 \end{cases} \quad \text{حل الجملة:}$$

اشترى رضوان من مكتبة أربعة كراسيس و خمسة أقلام بمبلغ 105 DA  
و اشتريت مريم ثلاثة كراسيس و قلمين بمبلغ 56 DA  
أوجد ثمن الكراس الواحد و ثمن القلم الواحد.

**التمرين الرابع: ( 03.5 نقط )**

أرسم المثلث  $ABC$  القائم في  $A$  حيث:  $AB = 4,5cm$  و  $BC = 7,5cm$  أحسب  $AC$ .

لتكن النقطة  $E$  من  $[AB]$  حيث  $AB = 3AE$  و  $D$  نقطة من  $[AC]$  حيث

$$DC = \frac{2}{3}AC \quad \text{. عين على الشكل النقطتين } E \text{ ، } D \text{ .}$$

بين أن  $(BC) \parallel (DE)$  ثم أحسب  $.DE$

## الجزء الثاني: مسألة ( 08 نقط )

تقترب شركة سيارات الأجرة التسعيرتين التاليتين:

السعيرة الأولى:  $15DA$  للكيلومتر الواحد لغير المنخرطين.

السعيرة الثانية:  $12DA$  للكيلومتر الواحد مع مشاركة شهرية قدرها  $900DA$ .

انقل الجدول على ورقة الإجابة ثم أكمله:

المسافة $(Km)$	60		
السعيرة الأولى $(DA)$			5100
السعيرة الثانية $(DA)$		3060	

ليكن  $x$  عدد الكيلومترات للمسافة المقطوعة.

$y_1$  هو المبلغ حسب السعيرة الأولى.

$y_2$  هو المبلغ حسب السعيرة الثانية.

عبر عن  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .

حل المتراجحة  $15x > 12x + 900$

في المستوى المنسوب إلى معلم متعمد و متجانس  $(O; \bar{i}, \bar{j})$ .

ا- مثل بيانيا الدالتين ،  $g$  حيث:  $(x) = 15x$  و  $(x) = 12x + 900$

( $1cm$  على محور الفاصل يمثل  $50Km$  ،  $1cm$  على محور التراتيب يمثل  $500DA$ )

ب- استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل سعيرة مع الشرح.

# تصحيح امتحان شهادة التعليم المتوسط جوان 2007

**الجزء الأول: (12 نقطة)**

**التمرين الأول: (03 نقط)**

$$\text{ليكن العددان: } B = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad A = \sqrt{98} + 3\sqrt{32} - \sqrt{128}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{49 \times 2} + 3\sqrt{16 \times 2} - \sqrt{64 \times 2} \\ &= 7\sqrt{2} + 3 \times 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= (7+12-8)\sqrt{2} \\ &= 11\sqrt{2} \end{aligned}$$

و وبالتالي

$$B = \frac{3}{2} + \frac{10}{12} = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} + \frac{5}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{A^2}{33} - 3B = \frac{(11\sqrt{2})^2}{33} - 3 \times \frac{7}{3} = \frac{11 \times 11 \times 2}{33} - \frac{21}{3} = \frac{11 \times 2}{3} - \frac{21}{3} = \frac{22}{3} - \frac{21}{3} \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{A^2}{33} - 3B = \frac{1}{3} \quad \text{و منه}$$

**التمرين الثاني: (03 نقط)**

لتكن العبارة الجبرية  $E$  حيث:

$$E = 100 - (x-2)^2 - (x+8) = 100 - x^2 + 4x - 4 - x - 8$$

$$E = -x^2 + 3x + 88 \quad \text{و منه}$$

لدينا:

$$10^2 - (x-2)^2 = [10 - (x-2)][10 + (x-2)] = (10-x+2)(10+x-2)$$

$$10^2 - (x-2)^2 = (12-x)(8+x) \quad \text{و منه}$$

$$E = (12-x)(8+x) - (x+8) = (8+x)(12-x-1) \quad \text{لدينا:}$$

و منه  $E = (8+x)(11-x)$   
 $8+x = 0$  أو  $11-x = 0$  يعني  $(11-x)(8+x) = 0$   
 $x = -8$  أو  $x = 11$  أي  
 للمعادلة حلان هما: 11 و -8.

### التمرين الثالث: (02.5 نقط)

نلاحظ أنه بالإمكان تبسيط المعادلة الثانية من الجملة للحصول على الجملة

$$\begin{cases} 4x + 5y = 105 & (1) \\ 3x + 2y = 56 & (2) \end{cases}$$

حل هذه الجملة يمكن استعمال طريقة الحل بالجمع أو طريقة الحل بالتعويض.

#### طريقة الحل بالجمع:

نضرب المعادلة (1) في (-2) و نضرب المعادلة (2) في 5 لنحصل هكذا على

الجملة:  $\begin{cases} -8x - 10y = -210 & (1') \\ 15x + 10y = 280 & (2') \end{cases}$  وبجمع المعادلتين (1') و (2') طرف لطرف نحصل

على المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية:  $7x = 70$  أي  $x = 10$ .

بتعويض  $x = 10$  في إحدى معادلتي الجملة، مثلاً في (1)، نحصل على المعادلة ذات المجهول  $y$  التالية:  $40 + 5y = 105$  أي  $5y = 65$  و منه  $y = 13$ .  
 إذن للجملة حلٌّ وحيد هو  $(10; 13)$ .

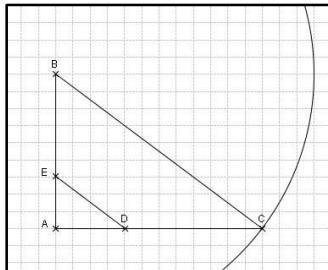
ملاحظة: بالطبع نحصل على نفس الحل بإتباع طريقة الحل بالتعويض.

لرمز  $\Rightarrow$  (DA)  $x$  إلى ثمن الكراس الواحد و  $\Rightarrow$  (DA)  $y$  إلى ثمن القلم الواحد

لدينا إذن:  $\begin{cases} 4x + 5y = 105 \\ 3x + 2y = 56 \end{cases}$

و بالتالي حسب السؤال الأول لدينا:  $x = 10$  و  $y = 13$ .

إذن ثمن الكراس الواحد هو  $10DA$  و ثمن القلم الواحد هو  $13DA$ .



### التمرين الرابع: (03.5 نقط)

أنظر الشكل المقابل

حساب  $: AC$

لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  ومنه  $AC^2 = BC^2 - AB^2$  إذن  $AC^2 = 36$  أي  $AC = 6$ .  
أنظر الشكل أعلاه.

لدينا:  $AB = 3AE$  و منه  $AB = 4,5\text{cm}$  فإن  $AE = \frac{1}{3}AB$

.  $DC = 4\text{cm}$   $AC = 6\text{cm}$  و بما أن  $DC = \frac{2}{3}AC$  فإن  $AE = 1,5\text{cm}$   
علمًا أن  $AD = AC - DC$  فإن  $AD = 2\text{cm}$

لدينا من جهة  $\frac{AB}{AE} = \frac{4,5}{1,5} = \frac{45}{15} = 3$  و لدينا من جهة ثانية  $\frac{AC}{AD} = \frac{6}{2} = 3$

أي أن  $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$  و منه حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة فيتاغورس لدينا:

$$(BC) \parallel (DE)$$

حساب  $. DE$

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس يكون لدينا:  $\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{DE}$  و منه  $3$

.  $DE = 2,5\text{cm}$  إذن  $DE = \frac{BC}{3} = \frac{7,5}{3} = 2,5$  أي

ملاحظة: كان بالإمكان تطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث  $ADE$  القائم في النقطة  $A$ .

## الجزء الثاني: مسألة (08 نقط)

المسافة $(Km)$	60	180	340
التسعيرة الأولى $(DA)$	900	2700	5100
التسعيرة الثانية $(DA)$	1620	3060	4980

لدينا  $y_2 = 12x + 900$  و  $y_1 = 15x$

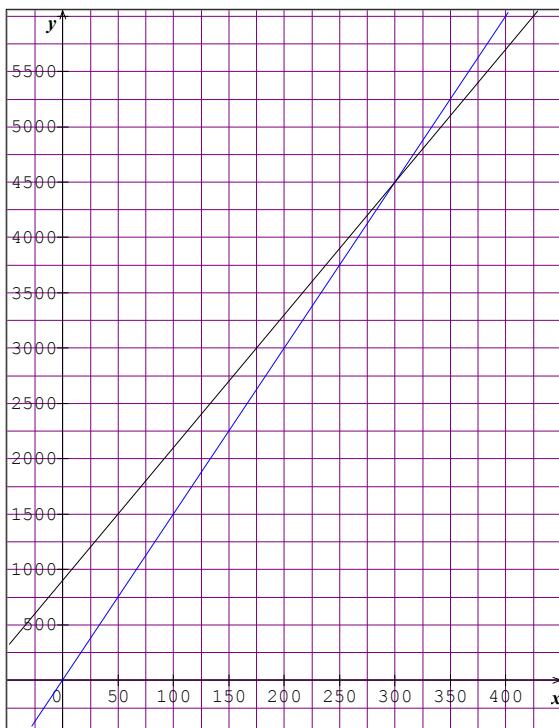
$3x > 900$  يعني  $15x - 12x > 900$  أي  $15x > 12x + 900$

و منه  $x > 300$ .

إذن كل قيم  $x$  الأكبر من  $300$  هي حلول المتراجحة

المستوي المنسوب إلى معلم متعمد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- ا- التمثيل البياني للدالتين ،  $g(x) = 12x + 900$  و  $h(x) = 15x$  حيث:  
يكتفى تحديد نقطتين من كل مستقيم لرسمه.



ب- نلاحظ أنه كلما كان عدد الكيلومترات أصغر من 300 يكون تمثيل البياني للدالة (الملون بالأزرق) أسفل تمثيل البياني للدالة  $h$  و بالتالي فإن أفضل تسعيرة في هذه الحالة هي التسعيرة الأولى بينما كلما كان عدد الكيلومترات أكبر من 300 يكون تمثيل البياني للدالة  $h$  (الملون بالأسود) أسفل تمثيل البياني للدالة  $g$  و بالتالي فإن أفضل تسعيرة في هذه الحالة هي التسعيرة الثانية.  
أما في حالة 300 Km فتكون التسعيرتان متساويتين.