الهندسة في الفضاء

1- الكرة والجلة

إضغط هنا

2-المقاطع المستوية

إضغط هنا

3- التكبير والتصغير

إضغط هنا

4- تمارين

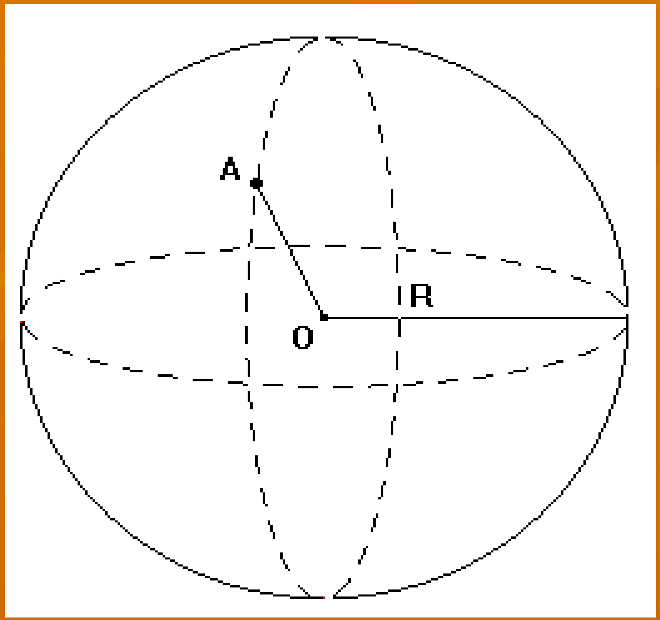
إضغط هنا

ا- الكرة والجلة :

تعريف

1-الكرة : ذات المركز O ونصف القطر R هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $OM = R$

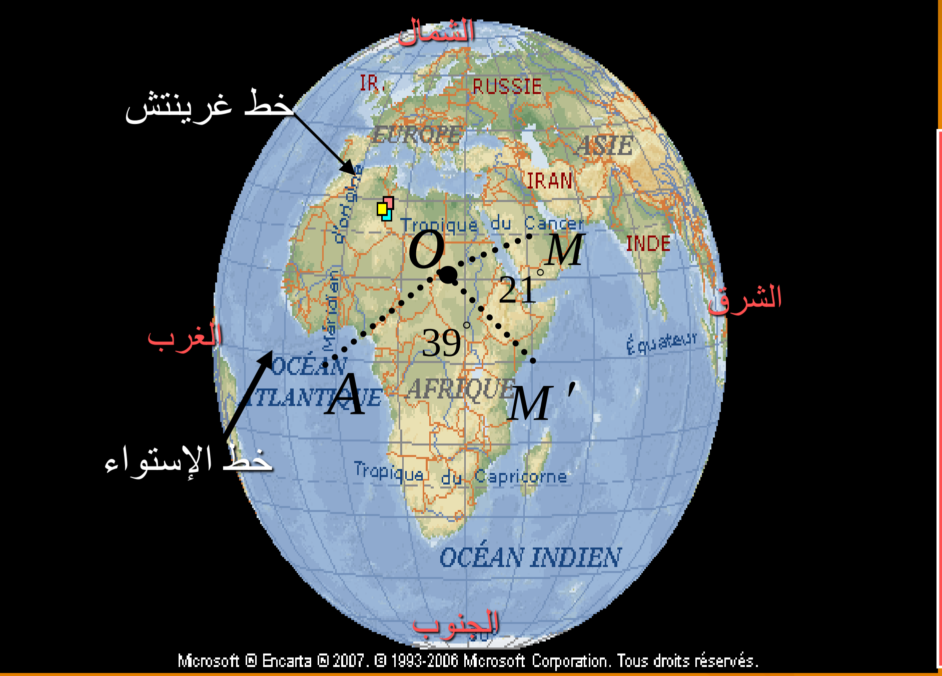
2-الجلة : ذات المركز O ونصف القطر R هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $OM \le R$



الشكل المقابل يمثل كرة ،وجلة في نفس الوقت حيث : أن الكرة هي نقاط السطح والجلة هي نقاط السطح و داخل الكرة .

A نقطة من الكرة إذن : $OA = R$

2-الإحداثيات الجغرافية :



الأرض عبارة عن كرة نصف قطرها $6400km$

- خط الإستواء هو دائرة كبرى محتواة في المستوي ، المعامد لمحور دوران الكرة الأرضية.

-خطوط الطول هي أنصاف دوائر كبرى تمر بالقطبين ،الشمالي و الجنوبي .

لتحديد المكان M على الكرة الأرضية ، نحدد قيس الزاوية $A\hat{O}M'$ بالدرجات حيث M' تمثل نقطة تقاطع خط الطول المار بالنقطة M وخط الإستواء متبوع بشرق أو غرب حسب موقع النقطة M' .

ونحدد قيس الزاوية $M'\hat{O}M$ بالدرجات متبوعة بشمال أو جنوب خط الإستواء حسب موقع النقطة M بالنسبة لهذا الخط .

مثلاً : موقع مكة المكرمة $M'\hat{O}M = 21^{\circ}$ شمالا و $A\hat{O}M' = 39^{\circ}$ شرقا .

النقطة M هو موقع مكة المكرمة .

3-1-مساحة الكرة

مساحة كرة نصف قطرها R تعطى بالعلاقة : $S = 4\pi R^2$

تطبيق : أحسب مساحة كرة نصف قطرها $7cm$.

الحل : حساب مساحة كرة نصف قطرها $7cm$

$$S = 4\pi R^2$$
$$= 4\pi \times 7^2$$

ومنه : $S = 196\pi cm^2$

3-2-حجم الجلة

حجم جلة نصف قطرها R يعطى بالعلاقة : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

اضغط هنا

تطبيق : أحسب حجم جلة نصف قطرها $7cm$.

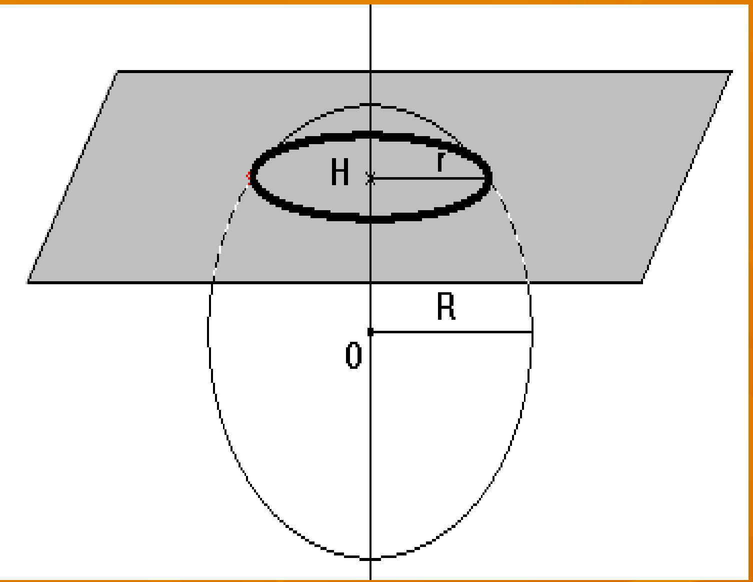
الحل : حساب حجم الجلة التي نصف قطرها $7cm$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 7^3$$

ومنه : $V = \frac{1372}{3}\pi cm^3$

المقاطع المستوية

1- مقطع كرة بمستو :



المقطع المستوي لكرة ذات المركز O ونصف القطر R بمستو ،هو الدائرة التي مركزها H حيث أن H نقطة تقاطع المستوي و المستقيم العمودي عليه المار بالمركز O ونصف قطرها r حيث

$$r = \sqrt{R^2 - OH^2}$$

مثال :

المقطع المستوي الناتج من تقاطع مستو (P) و كرة مركزها O نصف قطر $R = 5cm$ في النقطة H حيث: $OH = 3cm$ هو الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها r

حيث

$$r = \sqrt{R^2 - OH^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16}$$

أي :

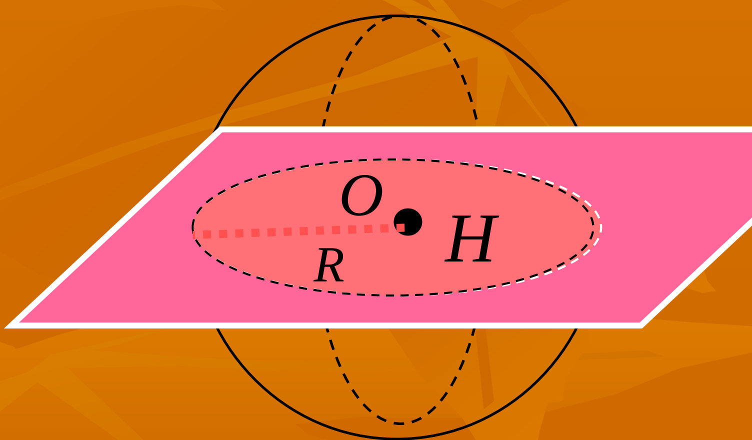
$$\boxed{r = 4cm}$$

ملاحظة :

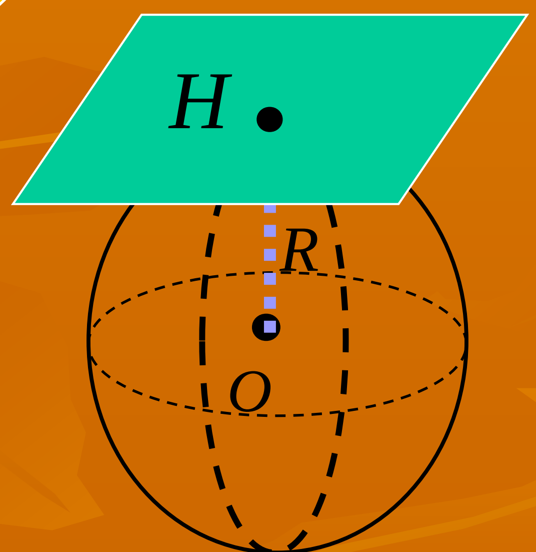
1- إذا كان مقطع المستوي مار بمركز الكرة فإن : النقطتين H و O متطابقتين والمقطع هو دائرة كبرى مركزها O ونصف قطرها R .

2- إذا كان $OH = R$ فالمستوي (P) يقطع الكرة إلا في النقطة H في هذه الحالة نسمي H نقطة التماس بين الكرة والمستوي .

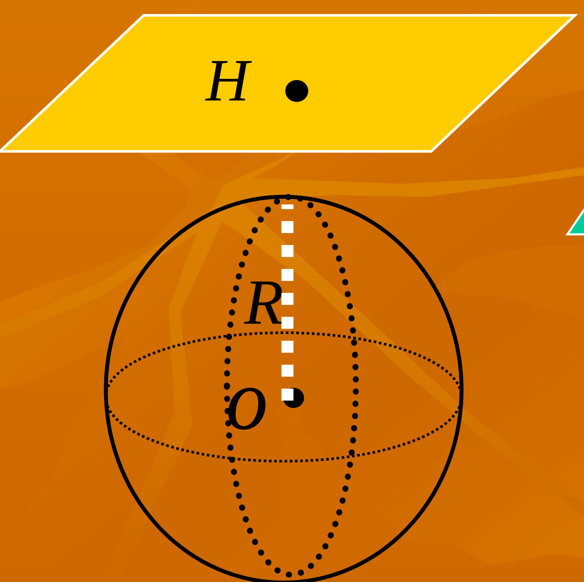
3- إذا كان $OH > R$ في هذه الحالة ، المستوي (P) لا يقطع الكرة .



الحالة 1

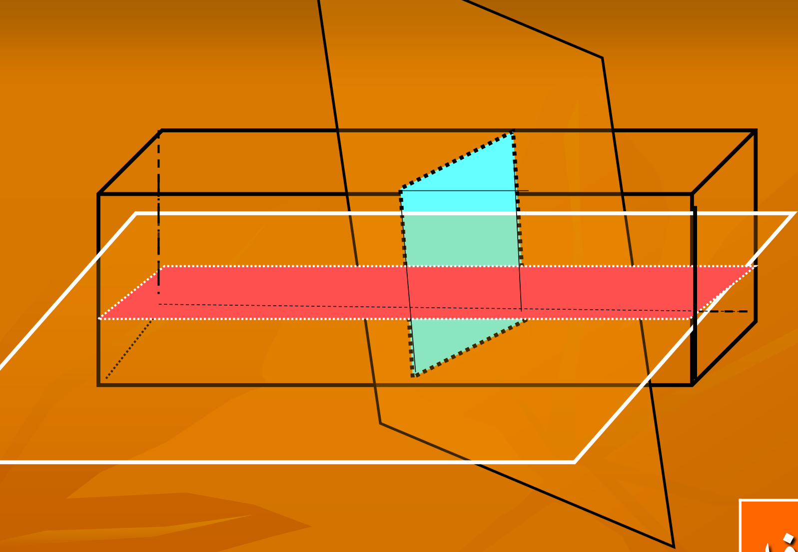


الحالة 2



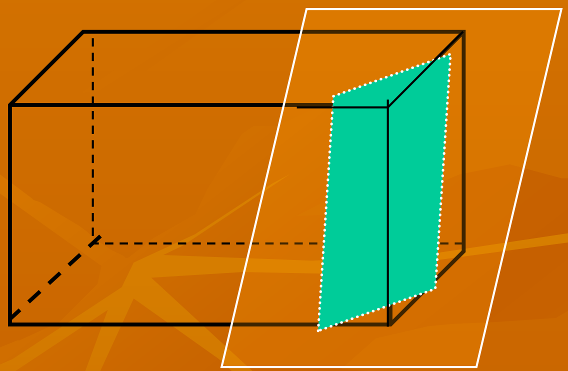
الحالة 3

2- مقطع متوازي المستطيلات بمستو :

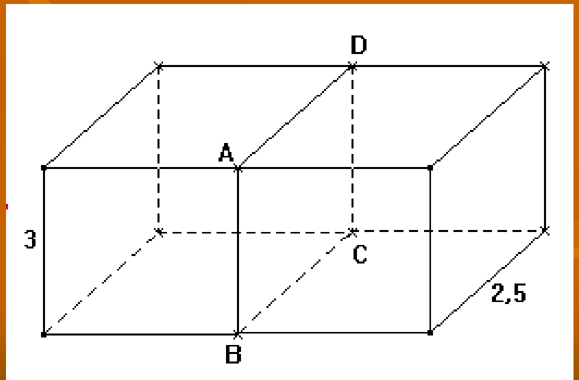


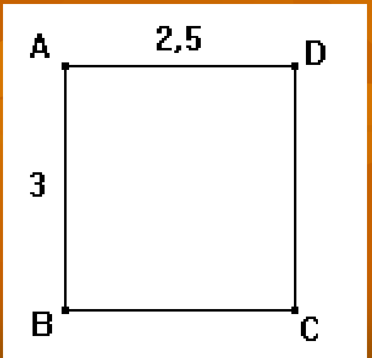
مقطع متوازي المستطيلات بمستو يوازي أحد أوجهه هو مستطيل له نفس بعدي الوجه الموازي له .

مقطع متوازي المستطيلات بمستو يوازي أحد أحرفه هو مستطيل طوله أو عرضه يساوي طول ذلك الحرف .

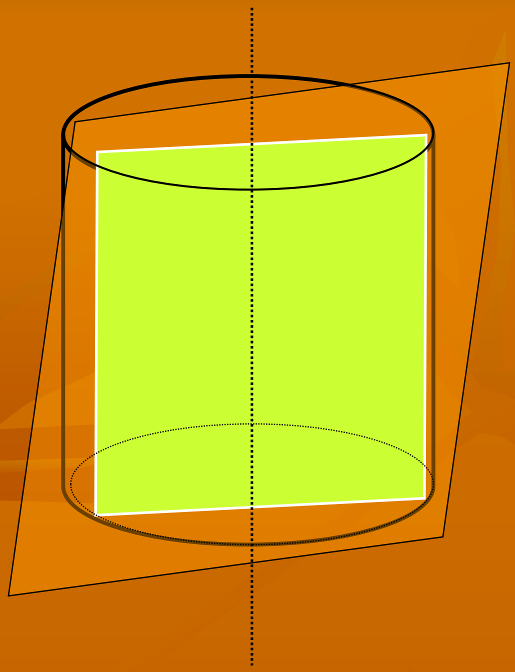


مثال :

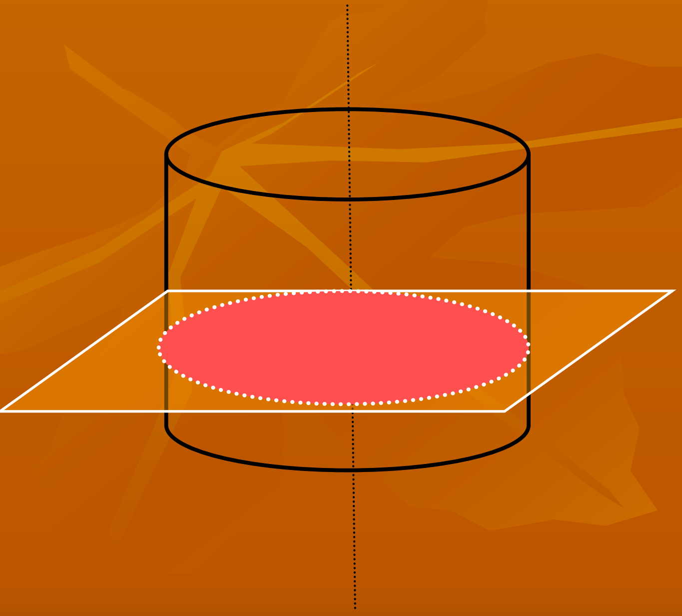




3- مقطع إسطوانة دوران بمستو :

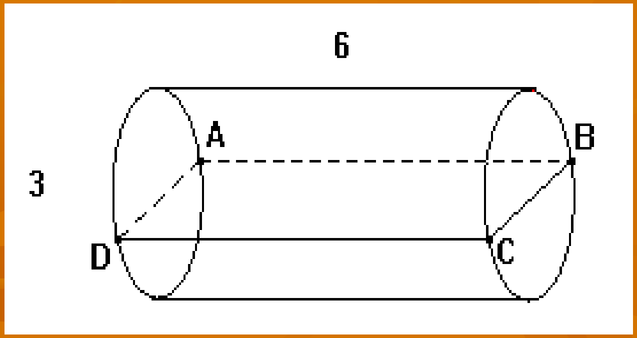


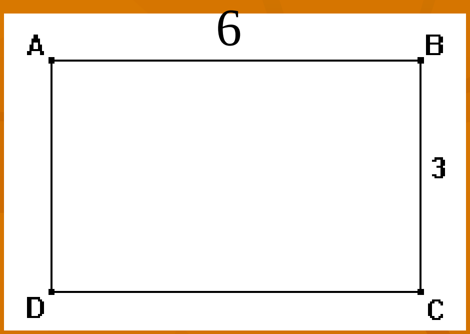
مقطع إسطوانة بمستو مواز لمحورها هو مستطيل طوله أو عرضه يساوي ارتفاع الأسطوانة .

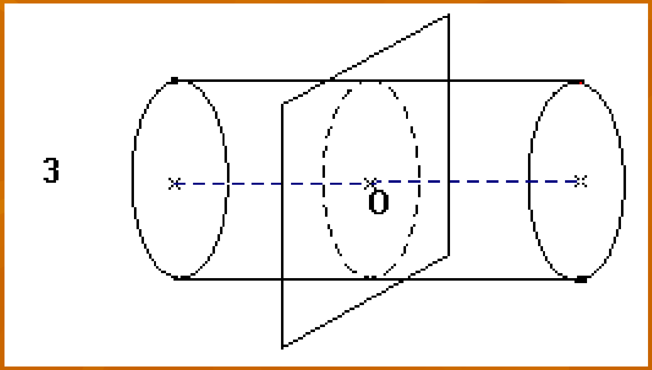


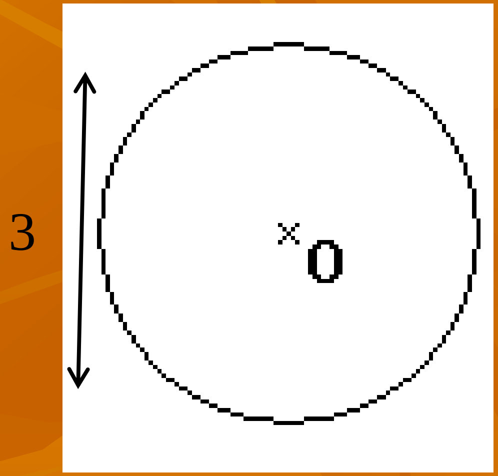
مقطع إسطوانة بمستو مواز لقاعدتها هو قرص قابل للتطابق مع قاعدتها .

مثال :

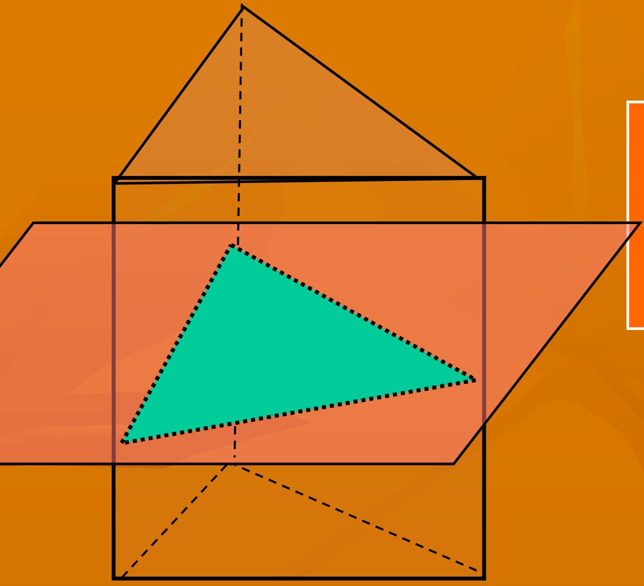






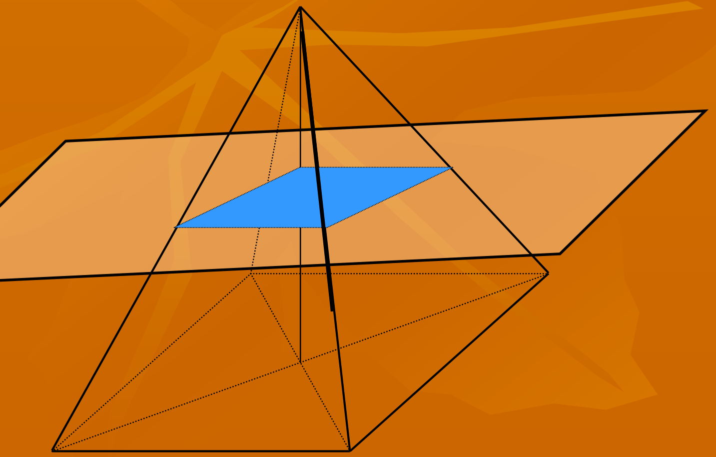


4- مقطع موشور قائم بمستو :



المقطع المستوي ، الموازي لقاعدة موشور قائم هو سطح له نفس طبيعة القاعدة و نفس بعديها .

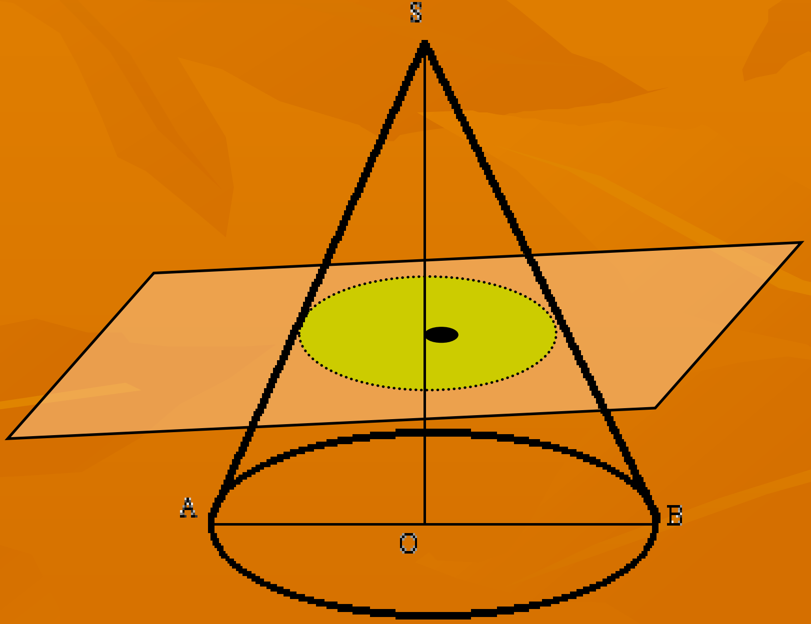
5- مقطع هرم بمستو :



مقطع هرم بمستو مواز لقاعدته هو سطح له نفس طبيعة القاعدة بأبعاد مصغرة .

6- مقطع مخروط دوراني بمستو :

مقطع مخروط دوراني بمستو مواز لقاعدته هو قرص مصغر لقاعدته .



اضغط هنا

3- التكبير والتصغير

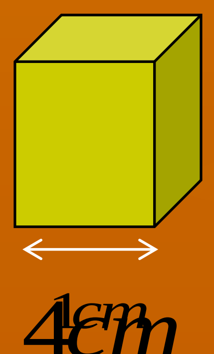
لتكبير مجسم يكفي ضرب أبعاده في عدد k حيث : $k > 1$

و لتصغير مجسم ، يكفي ضرب أبعاده في عدد k حيث : $0 < k < 1$

مثال: لتكبير المكعب الذي طول حرفه $1cm$ بـ 4 مرات نضرب أ حرفه في 4 .

أي : $k = 4$

وتصغير المكعب الذي طول حرفه $4cm$ بـمرتين هو ضرب أ حرفه في $\frac{1}{2}$ أي : $k = \frac{1}{2}$

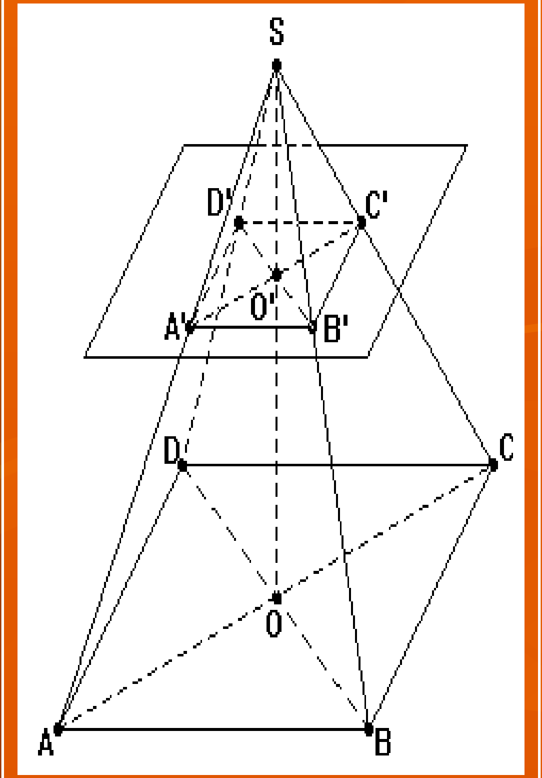


خواص

- التكبير والتصغير لايغيران طبيعة المجسمات .
- التكبير والتصغير لايغيران أقياس الزوايا .
- يسمى العدد k سلم التكبير، إذا كان $k > 1$
وسلم التصغير ، إذا كان $0 < k < 1$
- إذا كبرنا أوصغرنا مجسماً بالسلم k ،فإن :
- أبعاده تضرب في العدد k .
- مساحته تضرب في العدد k^2 .
- حجمه يضرب في العدد k^3 .

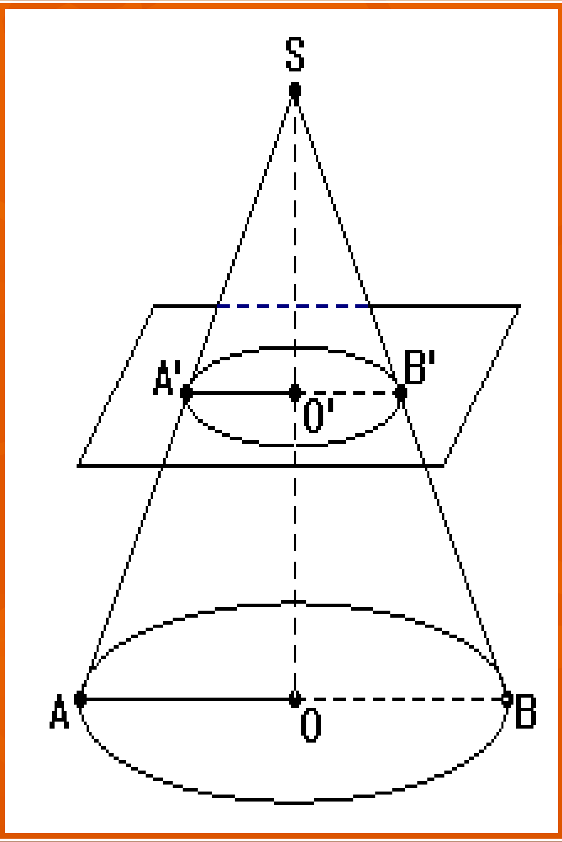
مثال

عند قطع هرم (أو مخروط دوراني) بمستو مواز لقاعدته نتحصل على :
هرم (أو مخروط دوراني) ، أبعاده متناسبة مع أبعاد الهرم (أو المخروط الدوراني) الأكبر ، ومعامل تناسبيته k معامل التصغير.



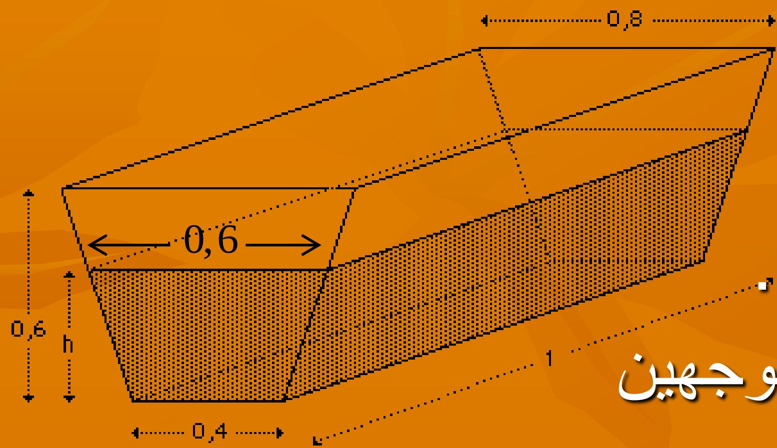
$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$$

اضغط هنا



تمارين

التمرين 1 :



(وحدة الطول m)

الشكل المقابل يمثل حوض سكب

فيه الماء الى مستوى معين كما هو موضح .

1- مستوى الماء يشكل مقطع لمستو مواز لوجهين

جانبيين للموشور القائم (الحوض) .

أ- ماهو الشكل الهندسي للمقطع ؟

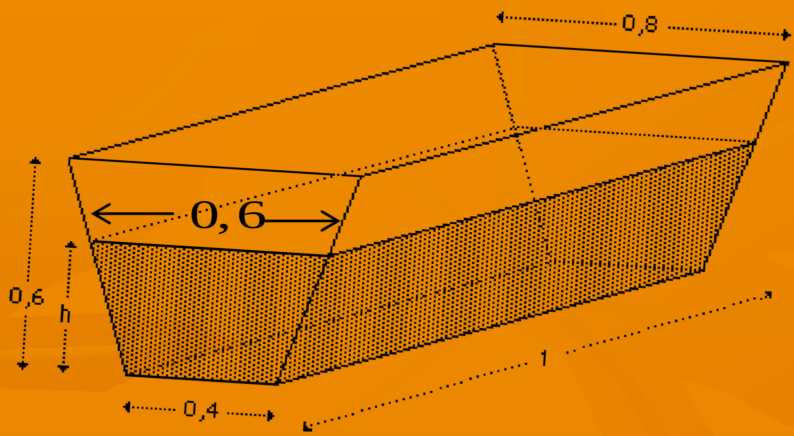
ب ـ أحسب مساحته.

جـ ـ أحسب حجم الحوض .

2- الماء داخل الحوض يشكل موشور قائم مصغر .

إذا كان معامل التصغير $k = 0,7$ أحسب حجم الماء داخل الحوض بالتدوير الى $\frac{1}{10^2}$.

حل التمرين1 : 1-أ- الشكل الهندسي الناتج عن تقاطع المستوي والموشور القائم هو : مستطيل طوله $1m$ وعرضه $0,4m$.



ب ـ حساب مساحته :

$S = L \times l$ أي: $S = 1 \times 0.4$

ومنه: $S = 0,4m^2$

جـ-حساب حجم الحوض .

$V = B \times H$ فيكون : $V = \left[\frac{1}{2}(0,4+0,8)\times 0,6\right]\times 1$ ومنه: $V = 0,36m^3$

2- مقياس التصغير $k = 0,7$ حساب حجم الماء داخل الحوض .

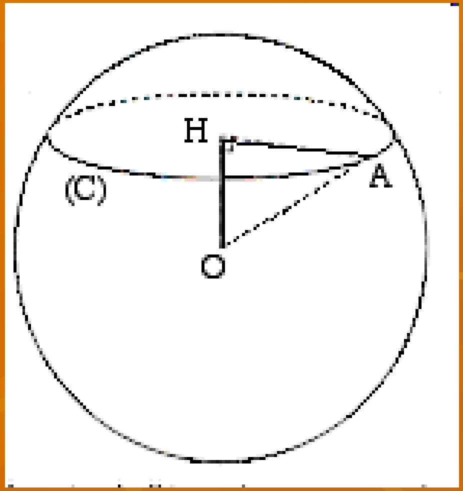
لدينا: $V' = k^3 \times V$ ومنه: $V' = (0,7)^3 \times 0,36$ نجد: $V' = 0,343 \times 0,36$

أي: $V' = 0,12348$ وبالتدوير الى $\frac{1}{10^2}$ يكون : $V' = 0,12cm^3$

التمرين 2: مستو يقطع كرة مركزها O ونصف قطرها $10cm$ فينتج عن تقاطعهما دائرة مركزها H .

المسا فة $OH = 6cm$ بعد مركز الكرة O عن المستوي القاطع .

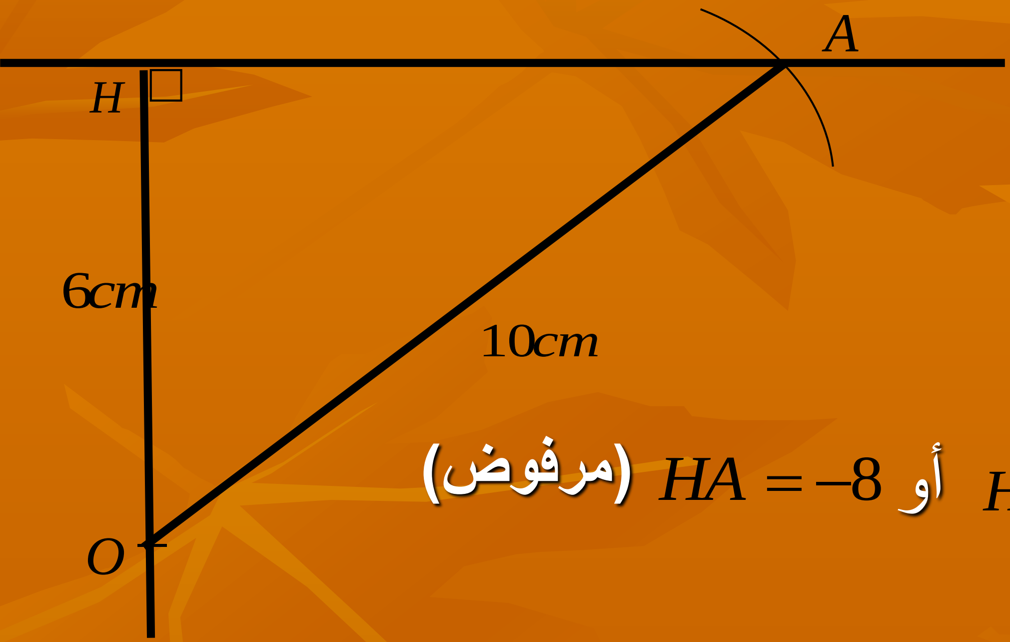
1- إعتماداً على المعطيات والشكل ، أرسم بأطول حقيقية المثلث OHA القائم في H .



2- أحسب نصف قطر المقطع (C) .

حل التمرين 2:

1- رسم بأطوال حقيقية المثلث OHA



2- حساب الطول HA نصف قطر المقطع :

بما أن المثلث OHA قائم في H فبتطبيق نظرية فيثاغورث نجد :

$$OA^2 = OH^2 + HA^2$$

أي :

$$10^2 = 6^2 + HA^2$$

ومنه :

$$HA^2 = 10^2 - 6^2$$

أي : $HA^2 = 64$ ومنه : $HA = 8$ أو $HA = -8$ (مرفوض)

إذن: $\boxed{HA = 8cm}$

طول نصف قطر الكرة هو $8cm$.

التمرين3:

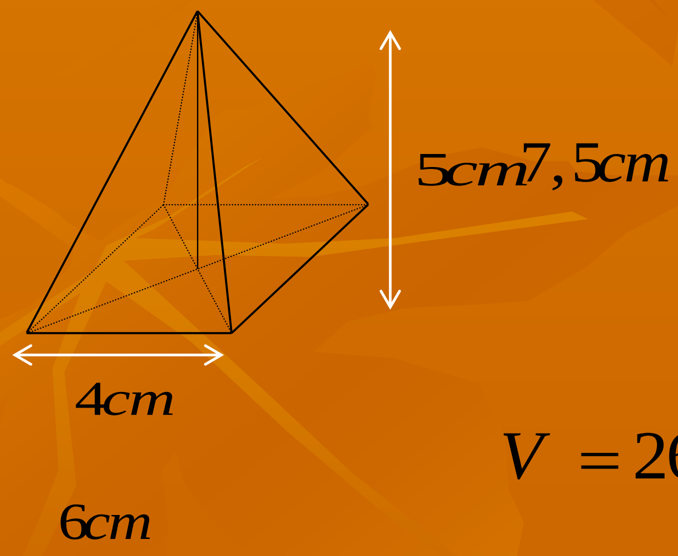
- هرم قاعدته مربع طول ضلعه $4cm$ وارتفاعه $5cm$

1-أحسب مساحة قاعدته ثم حجمه بالتدوير الى الوحدة .

2-تم تكبيره بـ $\frac{3}{2}$ ، ماهي مساحة قاعدة الهرم الجيد وحجمه ؟

الحل:

1- حساب مساحة قاعدة الهرم :



$S = C \times C$ أي : $S = 4 \times 4$

ومنه : $\boxed{S = 16cm^2}$

حساب حجم الهرم $V = \frac{1}{3} S \times h$

أي : $V = \frac{1}{3} \times 16 \times 5$ ومنه : $V = 26,7$

إذن: $\boxed{V = 27cm^3}$

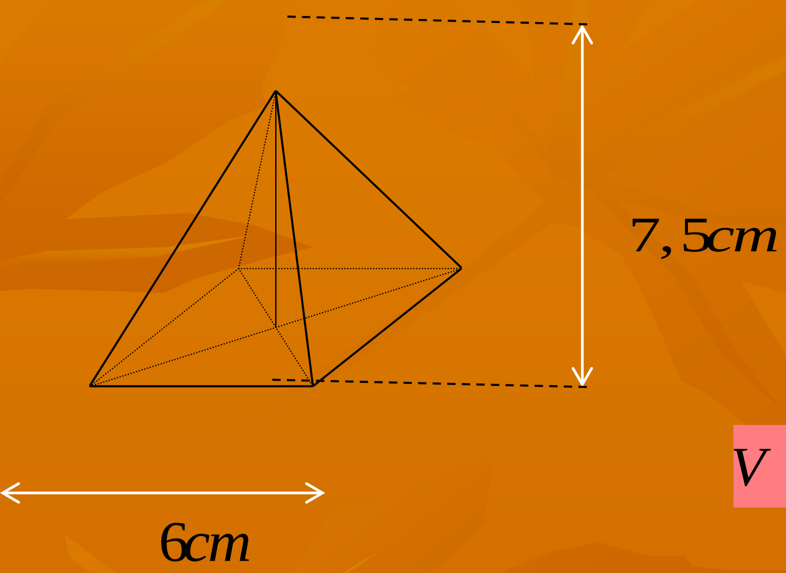
2- مساحة القاعدة بعد التكبير:

معامل التكبير $\frac{3}{2}$ يكون : $S'=\left(\frac{3}{2}\right)^2 S$

ومنه : $S'=\frac{9}{4}\times 16$ أي : $\boxed{S'=36cm^2}$

ولدينا : $V'=\left(\frac{3}{2}\right)^3\times V$

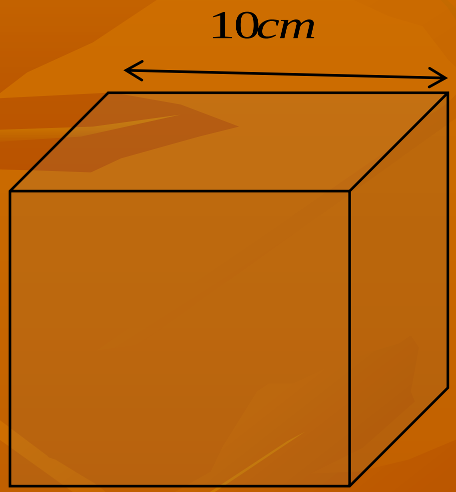
ومنه : $V'=\frac{27}{8}\times 27$ أي : $\boxed{V'=9,125cm^3}$



التمرين4 :

نجار يصنع جلات من الخشب قطر كل واحدة $10cm$ يستعمل لذلك مكعبات طول حرفها $10cm$ ، فيأخذ مكعب يقوم بنجره ليتحصل على جلة .

1- لكل مكعب ، أوجد حجم اللوح الضائع بعد النجر بالتدوير الى cm^3 لكل جلة مصنوعة .



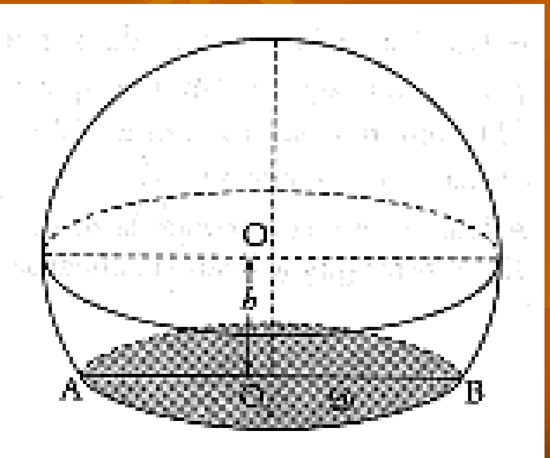
2- يقطع مرة أخرى الجلة المحصل عليها بمنشار حيث أنه يضع المنشار في وضع يعامد المستقيم المار بمركز الجلة .

فينتج عن ذلك قرص مركزه O_1 و قطره $AB = 5cm$.

كما تلاحظ في الشكل .

- أحسب على أي بعد h من مركز الجلة يمر المنشار لكي يحصل على القرص الذي مركزه O_1 .

أعطي h بالتدوير الى الميليمتر .



حل التمرين4 : 1- لكل مكعب ، إيجاد حجم اللوح الضائع بعد النجر:

- حجم المكعب :

$$C \times C \times C = 10 \times 10 \times 10$$

$$\boxed{= 1000 cm^3}$$

- حجم الجلة:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3$$

$$= \frac{4 \times 125}{3}\pi$$

$$= \frac{500}{3}\pi \quad \boxed{= 523,598}$$

- حجم اللوح الضائع:

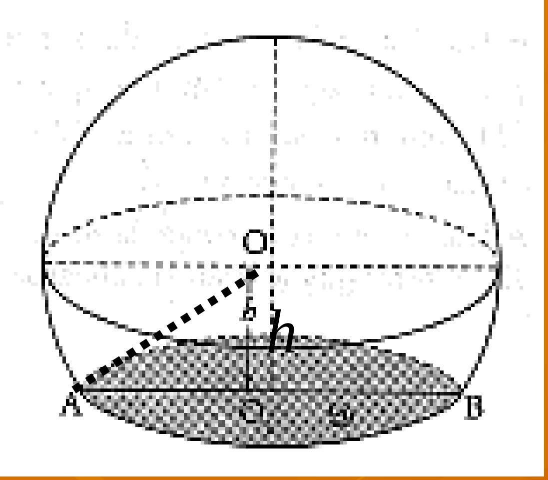
$$1000 - 523,598 = 476,402$$

حجم اللوح الضائع بعد النجر بـ cm^3 هو : $476 cm^3$

2- حساب البعد h الذي يمر منه المنشار حتى نتحصل على قرص.

البعد بين المركز O و القرص الناتج عن مرور المنشار هو : OO_1

و OO_1A مثلث قائم في O_1 .



إذن: يمكن تطبيق نظرية فيثاغورث :

$OA^2 = O_1A^2 + OO_1^2$ ومنه : $5^2 = (2,5)^2 + OO_1^2$

فيكون: $OO_1^2 = 25 - 6,25$ أي : $OO_1^2 = 18,75$

ومنه : $OO_1 = \sqrt{18,75}$ أو $OO_1 = -\sqrt{18,75}$ **(مرفوض)**

إذنبعد مركز الجلة عن القرص الناتج من مرور المنشار هو : $43mm$.

التمرين5 : في شهر رمضان المبارك ، حضرت خالتي ميمونة وجبة حساء لمائدة الإفطار في قدر قطر قاعدته $15cm$ وارتفاعه $10cm$ ، لتقديم الحساء تستعمل مغرفاً جزؤها ، الأخير نصف كرة قطرها $6cm$ مرتين لكل فرد .

1-إذا علمت أن ارتفاع الحساء $\frac{3}{5}$ من سعة القدر

وعدد الأفراد الذين تناولوا الحساء 7

فما هي كمية الحساء المستهلكة ؟

وما هي كمية الحساء المتبقية في القدر؟

خذ : $\pi \simeq 3,14$

2- أضا ف 4 أفراد مغرفاً ، مغرفاً

فما هي الكمية المتبقية بعد الإضافة ؟

حل التمرين 5 :

أولا نحسب سعة القدر :

القدر اسطوانية الشكل إذن : $V = \pi \times R^2 \times L$

ومنه : $V = \pi \times (7,5)^2 \times 10$ أي : $V = 1766,25 cm^3$

كمية الحساء في القدر : $\frac{3}{5}V$ من سعة القدر.

$$\frac{3}{5}V = \frac{3}{5} \times 1766,25$$
$$= 1059,75 cm^3$$

كمية الحساء التي يستهلكها الفرد الواحد :

المغرف المستعملة شكلها نصف كرة ومنه حجمها : $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times r^3$

فيكون: $\frac{4}{6} \times 3,14 \times (3)^3$ أي حجمها : $56,52 cm^3$

ما يستهلكه الفرد الواحد : $56,52 \times 2 = 113,04 cm^3$

ما يستهلكه الأفراد السبع : $113,04 \times 7 = 761,28 cm^3$

إذن : كمية الحساء المستهلكة هي $761,28 cm^3$

<u>كمية الحساء المتبقية في القدر</u> $1059,75 - 761,28 = 268,47$

كمية الحساء المتبقية في القدر هي : $268,47 cm^3$

<u>الكمية المتبقية بعد الإضافة :</u>

كل فرد من الأربعة يضيف مغرفاً أي : $56,52 cm^3$

ومنه : $56,52 \times 4 = 226,08 cm^3$ وهي الكمية المستهلكة من الأفراد الأربعة .

إذن الكمية المتبقية بعد الإضافة : $268,47 - 226,08 = 42,39 cm^3$

اضغط هنا