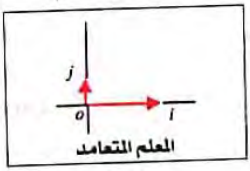
الدَّرسُ الـ 11

المَعَالِمُ

1 - أنواع المعالم

هناك ثلاثة أنواع من المعالم المعلم المتعامد و المتجانس ، المعلم المتعامد ، المعلم الكيفي .

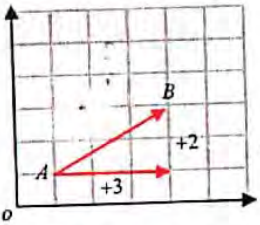
المعلم المتعامد و المتجانس



المعلم المتعامد

المعلم الكيفي

2 - إحداثيات شعاع



2 - 1 قراءة إحداثيات شعاع بيانيا

الشعاع $\vec{AB}$ الممثل في الشكل المقابل علم بثنائية من الأعداد المحصل عليها بالكيفية التالية

نستعمل إزاحتين متتاليتين انطلاقا من مبدئه A إلى نهايته B

الإزاحة الأولى تكون بالتوازي مع محور الفواصل بثلاث وحدات في الإتجاه الموجب و الإزاحة الثانية تكون بالتوازي مع محور التراتيب بوحدتين في الإتجاه الموجب .

نقول أن 3 هي الفاصلة و 2 هي الترتيب للشعاع $\vec{AB}$

إحداثيات الشعاع $\vec{AB}$ هي $(3,2)$

ملاحظة

إذا كانت الإزاحة من اليمين نحو اليسار تكون الفاصلة الأولى سالبة
وإذا كانت الإزاحة الثانية من الأعلى إلى الأسفل تكون الترتيبة سالبة .

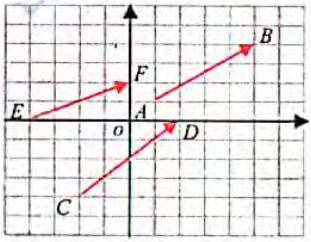
belhocine : https://prof27math.weebly.com/

2-2 تساوي شعاعين

- إذا كان شعاعان متساويين فإن لهما نفس الإحداثيات في نفس المعلم .
- إذا كان لشعاعين نفس الإحداثيات في نفس المعلم فإنهما متساويان

فإذا كان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$

فإن $\vec{u}=\vec{v}$ معناه $x=x'$ و $y=y'$

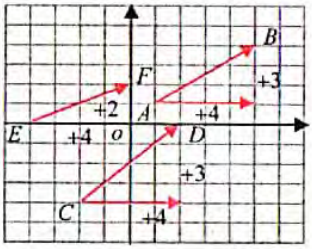


مثال

$\vec{AB}$ ، $\vec{CD}$ شعاعان ممثلان في الشكل المجاور

- هل $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ متساويان .
- هل $\vec{CD}$ و $\vec{EF}$ متساويان .

الحل



- إحداثيتا الشعاع $\vec{AB}$ هما $(4,3)$
و إحداثيتا الشعاع $\vec{CD}$ هما $(4,3)$
إذن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ متساويان .
- إحداثيتا الشعاع $\vec{EF}$ هما $(4,2)$
إذن الشعاعان $\vec{CD}$ و $\vec{EF}$ غير متساويين

2-3 حساب إحداثيات شعاع

خاصية

في معلم (O,I,J) تعتبر النقط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ إحداثيات الشعاع $\vec{AB}$ هما (x_B-x_A,y_B-y_A) و نكتب

$\vec{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ او $\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

ملاحظة

إذا كانت النقطة A منطبقة على O فإن إحداثيتا الشعاع $\vec{OB}$ هي إحداثيتا النقطة B

مثال

A و B نقطتان من المستوي إحداثيتهما في المعلم (O,I,J) هما على التوالي $(2,3)$ ، $(-5,7)$

عين إحداثيتي الشعاع $\vec{AB}$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

الحل

لدينا $x_B - x_A = -5 - 2 = -7$

$y_B - y_A = 7 - 3 = 4$

إذن إحداثيتا الشعاع $\vec{AB}$ هما $(-7,4)$ و نكتب $\vec{AB}(-7,4)$

2-4 تمثيل شعاع بمعرفة إحداثياته

$\vec{u}(x,y)$ شعاع معطى .

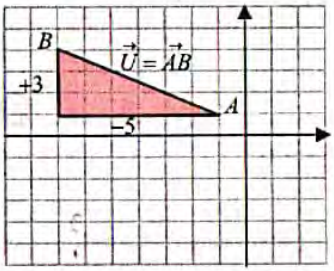
لتمثيل الشعاع $\vec{u}$ نتبع الطريقة التالية

نختار نقطة كيفية A و نستعمل إزاحتين متتاليتين نتحصل بهما على النقطة B عندئذ $\vec{u} = \vec{AB}$

- الإزاحة الأولى بموازاة محور الفواصل في الإتجاه الموجب إذا كان $x \rangle 0$ و في الإتجاه السالب إذا كان $x \langle 0$
- الإزاحة الثانية بموازاة محور التراتيب في الإتجاه الأعلى إذا كان $y \rangle 0$ و في الإتجاه الأسفل إذا كان $y \langle 0$

مثال

في معلم متعامد و متجانس أنشئ ممثلا للشعاع $\vec{u}$ الذي إحداثياته $(-5,3)$



الحل

نختار نقطة كيفية A

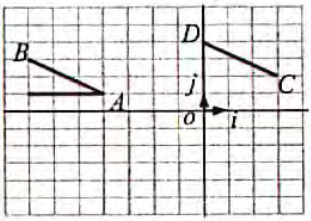
- الإزاحة الأولى من النقطة A بموازاة محور الفواصل من اليمين إلى اليسار بخمس وحدات
- الإزاحة الثانية من الأسفل إلى الأعلى بأربع وحدات

تمرين تدريبي .

A,B,C,D أربع نقط في المعلم المجاور

1) اقرأ إحداثيات النقط A,B,C,D

2) برهن أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .



الحل

1) $A(-4,1)$ ، $B(-7,3)$ ، $C(3,2)$ ، $D(0,4)$

2) لإثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

هناك طريقتان

- الطريقة الأولى و هي التحقق من صحة المساواة $\vec{AB} = \vec{CD}$ أما الطريقة الثانية فهي التحقق من أن المنتصف I للقطعة $[AD]$ و المنتصف J للقطعة $[BC]$ منطبقان .

- الطريقة الأولى

- إحداثيتا الشعاع $\vec{AB}$ هما $3-1=2$ و $-7-(-4)=-3$

إذن إحداثيتا $\vec{AB}$ هما $(-3,2)$

- إحداثيتا الشعاع $\vec{CD}$ هما $4-2=25$ و $0-3=-3$

إذن إحداثيتا الشعاع هما $(-3,2)$.

$\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ لهما نفس الإحداثيات و بالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

- الطريقة الثانية

I منتصف القطعة $[AD]$ $\quad x_I = -\frac{40}{2} = -2$

$I(-2,2,5)$ إذن $y_I = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

J منتصف القطعة $[BC]$

$x_J = \frac{7+3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ و $y_J = \frac{2+3}{2} = 2,5$

إذن $J(-2\ ,\ 2,5)$

I منطبقة على J و بالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

❸ - حساب إحداثيتي منتصف قطعة

A و B نقطتان من مستقيم مزود بمعلم بحيث $A(x_A\ ,\ y_A)$ و $B(x_B\ ,\ y_B)$

إحداثيتا النقطة M منتصف القطعة $[AB]$ هما

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{و} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

تمرين تدريبي ●

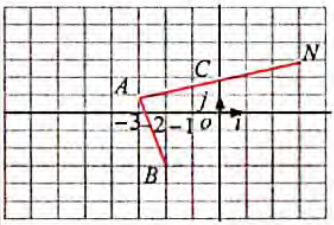
في معلم متعامد و متجانس (O,I,J) نعتبر النقط $A(-3,1)$ و $B(-2,-3)$ و $C(0,2)$

M منتصف القطعة $[AB]$

و N نظيرة A بالنسبة إلى C

1) احسب إحداثيتي النقطة M

2) احسب إحداثيتي النقطة N



belhocine : https://prof27math.weebly.com/

الحل

1) نرمز بـ (x_M , y_M) الى إحداثيتي النقطة M

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+2}{2} = \frac{-5}{2}$ ، $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$ إذن $M\left(\frac{-5}{2} , -1\right)$

2) بما ان N نظيرة A بالنسبة إلى C فإن $\vec{AC} = \vec{CN}$

اي $O - (-3) = x_N - O$ و $2 - 1 = y_N - 2$

و منه نستنتج أن $x_N = 3$ و $y_N = 3$ إذن $N(3,3)$

4 - حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد و متجانس

في معلم متعامد و متجانس إذا كانت $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ فإن طول القطعة المستقيمة $[AB]$ هو AB حيث $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

مثال

$A(2,3)$ $B(5,-1)$ نقطتان من المستوى المزود بمعلم متعامد و متجانس

لدينا $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{32 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

إذن $AB = 5$ (AB يساوي 5 وحدات)

- إذا كان $OI = OJ = 1\,cm$ فإن $AB = 5\,cm$
- إذا كان $OI = 0J = 2\,cm$ فإن $AB = 5 \times 2 = 10\,cm$

و بصفة عامة إذا كان $OI = OJ = a\,cm$ فإن $AB = 5a\,cm$

ملاحظة

إذا كان المعلم (O,I,J) غير متعامد و متجانس فإننا لا نستطيع حساب المسافة بين نقطتين

تمرين تدريبي

في معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط $A(3,1)$ ، $B(6,-1)$ ، $C(7,7)$ $D(0,4)$

1) احسب القيمة المضبوطة للطول AC

2) برهن أن المثلث ABC قائم في A

الحل

1) $Ac = \sqrt{(7-3)^2 + (7-1)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{4}\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

إذن $AC = 2\sqrt{13}$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

2) لإثبات ان المثلث ABC قائم في A نحسب AB^2 ، AC^2 ، BC^2 ثم نطبق النظرية العكسية لفيثاغورث

$$AB=\sqrt{(6-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

$$BC=\sqrt{(7-6)^2+(7+1)^2}=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$$

إذن $AC^2=52$ و $AB^2=13$ و $BC^2=65$ و $AC^2+AB^2=BC^2$

و حسب النظرية العكسية لفيثاغورث فإن المثلث ABC قائم في A

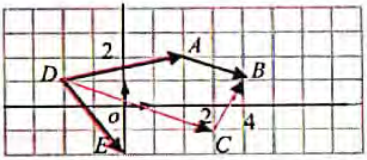
belhocine : https://prof27math.weebly.com/

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1

في المعلم المجاور اقرأ إحداثيات الأشعة
$\vec{DA}$ ، $\vec{DE}$ ، $\vec{CD}$ ، $\vec{BC}$ ، $\vec{AB}$

الحل

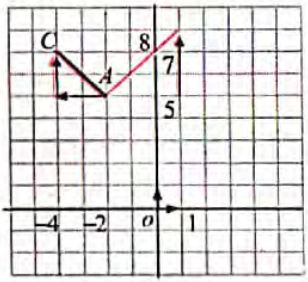


إحداثيتا $\vec{AB}$ هما $(2,-1)$
إحداثيتا الشعاع $\vec{BC}$ هما $(-1,-2)$
إحداثيتا الشعاع $\vec{CD}$ هما $(-5,1)$
إحداثيتا الشعاع $\vec{DE}$ هما $(2,-3)$
إحداثيتا الشعاع $\vec{DA}$ هما $(-4,1)$

تطبيق 2

1) في المعلم علم النقط $A(-2,5)$
2) علم النقطتين B و C بحيث
-إحداثيتا الشعاع $\vec{AB}$ هما $(3,3)$
-إحداثيتا الشعاع $\vec{AC}$ هما $(-2,+2)$

الحل



1) تعليم النقطة B بحيث $\vec{AB}(3,4)$
2) للوصول إلى النقطة B نستعمل إزاحتين متتاليتين الأولى توازي محور الفواصل و في الإتجاه اليمين بـ 3 وحدات و الثانية توازي محور التراتيب و نحو الأعلى بـ 3 وحدات .
- للوصول إلى النقطة C نستعمل إزاحتين الأولى توازي محور الفواصل و نحو اليسار بوحدتين و الثانية توازي محور التراتيب و نحو الأسفل بوحدتين

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

تطبيق 3

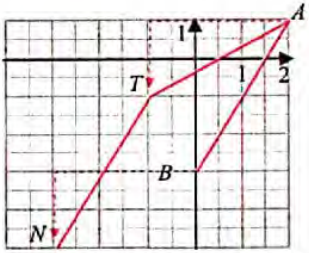
1) علم في معلم النقطتين $A(2,1)$ و $B(-3,0)$

2) إحداثيتا الشعاع $\vec{u}$ هما $(-3,-2)$

علم ثم اقرأ إحداثيتي النقطة T بحيث $\vec{AT}=\vec{u}$

و النقطة N بحيث $\vec{BN}=\vec{u}$ ماذا يمكن القول عن الرباعي $ATNB$

الحل



لتعليم النقطة T بحيث $\vec{AT}=\vec{u}$ انطلاقا من A نستعمل إزاحتين متتاليتين الأولى توازي محور الفواصل و في الإتجاه السالب بـ 3 وحدات و الثانية توازي محور التراتيب و نحو الأسفل بوحدتين فنحصل على النقطة T

عندئذ تكون إحداثيتا النقطة T هما $(-1,-1)$

بنفس الكيفية نعلم النقطة N فنقرأ إحداثيتي N $(-3,-5)$

تطبيق 4

في معلم نعتبر النقط $A(6,4)$ ، $B(3,-3)$ ، $C(-5,-2)$ ، $D(-2,5)$

1) احسب إحداثيات الأشعة $\vec{AB},\vec{AC},\vec{CB},\vec{DA}$

2) ماذا يمكن القول عن الرباعي $BCAD$ ؟

الحل

1) تعيين إحداثيتي $\vec{AB}$

$x_B-x_A=3-6=-3$

$y_B-y_A=-3-4=-7$

إذن $\vec{AB}(-3,-7)$

تعيين إحداثيتي $\vec{AC}$

$x_C-x_A=-5-6=-11$

$y_C-y_A=-2-4=-6$

إذن $\vec{AC}(-11,-6)$

تعيين إحداثيتي $\vec{CB}$

$x_B-x_C=3+5=8$

$y_B-y_C=3+2=-1$

إذن $\vec{CB}(8,-1)$

2) نلاحظ من الحسابات السابقة ان $\vec{DA}=\vec{CB}$ اي $\vec{BC}=\vec{AD}$

و عليه الرباعي $ACDA$ متوازي الأضلاع

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

تطبيق 5

في معلم نعتبر النقط $A(2,3)$ ، $B(-3,5)$ $C(2,1)$

1) أحسب إحداثيتي الشعاع $\vec{AB}$

2) أ) D نقطة من المستوي و بحيث $ABCD$ متوازي الأضلاع نرمز بـ (x,y) اشرح لماذا $-5=x-2$ و $2=y=A$

ب) استنتج إحداثيتي النقطة D

الحل

1) إحداثيات الشعاع $\vec{AB}$

$x_B-x_A=-3-2=-5$

$y_B-y_A=-5-3=2$

إذن إحداثيتا الشعاع $\vec{AB}$ هما $(-5,2)$

2) أ) بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن $\vec{AB}=\vec{DC}$

إحداثيتا $\vec{AB}$ هما $(-5,2)$ و إحداثيتا الشعاع $\vec{DC}$ هما $(2-x,1-y)$

و بما أن $\vec{AB}$ و $\vec{DC}$ متساويان فإنه ينتج لدينا

$2-x=-5$ و $1-y=2$

ب) تعيين إحداثيتي D

لتعيين إحداثيتي D نحل المعادلتين $2-x=-5$ و $1-y=2$

$2-x=-5$ و منه $x=2+5=7$

$1-y=2$ و منه $y=1-2=-1$

إذن إحداثيتا القطة D هما $(-5,2)$

تطبيق 6

في معلم نعتبر النقطتين $A(3,-3)$ و $B(-22,15)$ و الشعاع $\vec{U}(2,-5.5)$

1) أحسب إحداثيتي النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$

2) ما هي إحداثيتا النقطة F التي صورتها B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ ؟

الحل

1) لتكن (x_E,y_E) إحداثيتي النقطة E

بما أن E هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ فإن $\vec{AE}=\vec{U}$

إحداثيتا الشعاع $\vec{AE}$ هي (x_E-3,y_E+3)

و بما أن $\vec{AE}$ و $\vec{U}$ متساويان فإنه ينتج لدينا

$\begin{cases}x_E-3=2\\y_E+3=-5.5\end{cases}$ و بعد حل هاتين المعادلتين نجد

$x_E=5$ و $y_E=-8.5$ إذن إحداثيتا E هما $(5,-8.5)$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

2) لتكن (x_F , y_F) إحداثيتي النقطة F

بما أن صورة النقطة F بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ هي B فإن $\vec{FB} = \vec{U}$

إحداثيتا الشعاع $\vec{FB}$ هي $(-22 - x_F , 15 - y_F)$

و بما أن $\vec{FB}$ و $\vec{U}$ متساويان فإنه ينتج لدينا

$-22 - x_F = 2$ و $15 - y_F = -5.5$ و منه نجد $x_F = -24$ و $y_F = 20.5$

إذن إحداثيتا النقطة F هما $(-24 , 20.5)$

تطبيق 7

في معلم نعتبر النقط $A(2,8)$ و $B(-3,3)$ ، $C(3,-1)$ و $D(8,4)$

1) أحسب إحداثيتي منتصف القطعة $[AC]$

2) أحسب إحداثيتي منتصف القطعة $[BD]$

3) استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

الحل

1) نسمي (x_I , y_I) I منتصف القطعة $[AC]$

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+(-1)}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

2) نسمي (x_J , y_J) J منتصف القطعة $[BD]$

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{(-3)+(8)}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

3) بما أن الضلعين $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف فإن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

تطبيق 8

في معلم نعطي النقط $A(5,-1)$ و $B(3,2)$ ، $C(2,-6)$

M نظيرة A بالنسبة إلى B و N نظيرة A بالنسبة إلى C

1) أحسب إحداثيتي النقطة M و N

2) ماذا يمكن القول عن المستقيمين (CB) و (MN) ؟

الحل

1) M نظيرة A بالنسبة إلى B يعني أن $\vec{AB} = \vec{BM}$

إحداثيتا الشعاع $\vec{AB}$ هما $(x_B - x_A , y_B - y_A)$

و بالتعويض نجد $\vec{AB}(-2,3)$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

نرمز بـ (x_M , y_M) إلى إحداثيتي النقطة M فيكون إحداثيتا الشعاع $\vec{AB}$ هما $(x_M - 3 , y_M - 2)$

بما أن $\vec{AB}$ و $\vec{BM}$ متساويان فإنه نستنتج

$x_M - 3 = -2$ و $y_M - 2 = 3$ و منه نستنتج

$x_M = 1$ و $y_M = 5$

إذن إحداثيتا النقطة M هما $(1 , 5)$

- N نظيرة A بالنسبة إلى C يعني أن $\vec{AC} = \vec{CN}$

أي $\vec{AC} = (-3 , -5)$

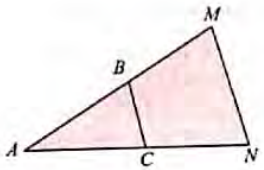
نرمز بـ (x_N , y_N) إلى إحداثيتي النقطة N فتكون إحداثيتا الشعاع $\vec{AC}$ هي $(x_N - 2 , y_N + 6)$

بما أن $\vec{AC}$ و $\vec{CN}$ متساويان فإنه نستنتج

$x_N - 2 = -3$ و $y_M + 6 = -5$ و منه نستنتج

$x_N = -1$ و $y_N = -11$

إذن إحداثيتا النقطة N هما $(-1 , -11)$



2) بما أن M نظيرة A بالنسبة إلى B فإن B منتصف $[AM]$

بما أن N نظيرة A بالنسبة إلى C فإن C منتصف $[AN]$

و بما أن (AM) و (AN) متقاطعان فإن حسب نظرية طاليس (CB) يوازي (MN)

تطبيق 9

في معلم متعامد و متجانس، نعتبر النقط $A(-5 , -3)$ ، $B(-4 , 4)$ ، $C(4 , 6)$ ، $H(-1 , +1)$

1) أ) علم النقط بحيث $1\,cm$ هي وحدة الرسم

ب) برهن أن المثلثين AHB و BHC قائمان في H . ثم استنتج أن النقط A و H و C على استقامة واحدة.

2) أحسب مساحة المثلث ABC

الحل

1) ب) إثبات أن المثلث AHB قائم في H

من أجل ذلك نحسب الأطوال AH^2 ، BH^2 ، AB^2 و بتطبيق النظرية العكسية لفيثاغورث

$$AH^2 = (x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 = (-1+5)^2 + (1+3)^2 = 16+16 = 32$$

$$BH^2 = (x_H - x_B)^2 + (y_H - y_B)^2 = (-1+4)^2 + (1-3)^2 = 9+9 = 18$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-4+5)^2 + (4+3)^2 = 1+49 = 50$$

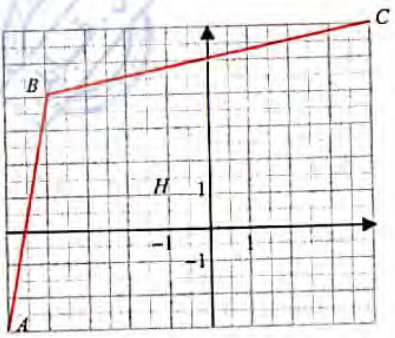
لاحظ أن

$AB^2 = 50$ و $AH^2 + BH^2 = 32+18 = 50$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

إذن $AH^2+BH^2=AB^2$

و حسب النظرية العكسية لفيثاغورث فإن المثلث AHB قائم في H



- إثبات أن المثلث BHC قائم في H

نحسب الأطوال BC^2 ، HC^2 ، BH^2

$BH^2=(x_H-x_B)^2+(y_H-y_B)^2$

$=(-1+4)^2+(1-3)^2=3^2+(-3)^2=18$

$HC^2=(x_C-x_H)^2+(y_C-y_H)^2$

$=(4+1)^2+(6-1)^2=5^2+5^2=50$

$BC^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2$

$=(4+1)^2+(6-1)^2=(-8)^2+(-2)^2=68$

لاحظ أن

$HC^2+BH^2=50+18=68$ و $BC^2=68$

إذن $HC^2+BH^2=BC^2$

وحسب النظرية العكسية لفيثاغورث فإن المثلث BHC قائم في H

-استنتاج أن النقط A و H و C على استقامة واحدة.

بما أن $(BH)\perp(AH)$ و $(BH)\perp(CH)$ فإن المستقيمين (AH) و (CH) متوازيان.

و بما أن (AH) و (CH) يشملان نفس النقطة H فإن (AH) منطبق على (CH)

إذن النقط A و H و C على استقامة واحدة.

2) حساب مساحة المثلث ABC

بما أن $[BH]$ هو العمود المتعلق بالضلع $[CA]$ فإن $[BH]$ هو ارتفاع في المثلث ABC

إذن مساحة المثلث ABC هي $\frac{AC.BH}{2}$

لدينا $BH^2=18$ و منه $BH=\sqrt{18}$

$AC=\sqrt{(4+5)^2+(6+3)^2}=\sqrt{9^2+9^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

$\frac{AC.BH}{2}=\frac{9\sqrt{2}.\sqrt{18}}{2}=\frac{9\sqrt{36}}{2}=\frac{9.6}{2}=27cm^2$ إذن مساحة المثلث ABC هي $27cm^2$

تطبيق 10

في معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط $A(3,-2)$ ، $B(-8,-4)$ $C(-7,3)$

1) ما هي طبيعة المثلث ABC ؟ برر اجابتك

2) I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

برهن أن المستقيمين (BC) و (AI) متعامدان

3) أحسب قيس الزاوية $B\hat{A}C$ مدورة إلى الدرجة

4) أحسب مساحة المثلث ABC

الحل

1) لتعيين طبيعة المثلث ABC نحسب الأطوال AB ، AC و BC

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-8-3)^2+(-4+2)^2}$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

$= \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = \sqrt{5^2.5} = 5\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-7-3)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 5^2} = \sqrt{125}$

$= \sqrt{5^2.5} = 5\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-7+8)^2 + (3+4)^2}$

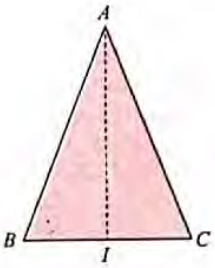
$= \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

بما أن $AC = AB$ فإن المثلث ABC متقايس الساقين راسه الأساسي A

2) بما أن I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ فإن (AI) هو المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$

و بما أن ABC متقايس الساقين في A فإن المتوسط (AI) هو العمود المتعلق بالضلع $[BC]$

و عليه $(AI) \perp (BC)$



3) حساب قيس الزاوية $B\hat{A}C$

لدينا $B\hat{A}C = 2B\hat{A}I$

$\sin B\hat{A}I = \frac{BI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}BC}{AB}$

$= \frac{\frac{1}{2}.5\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

و منه $B\hat{A}I \approx 18{,}43°$ و القيمة المدورة إلى الدرجة لهذه الزاوية هي $18°$

4) مساحة المثلث ABC هي $\frac{BC.AI}{2}$

في المثلث ABI القائم في I لدينا

$AI^2 = AB^2 - BI^2$ و $AB^2 = AI^2 + BI^2$

$AI^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$

$AI^2 = AB^2 - \frac{1}{4}BC^2 = 125 - \frac{5^2}{4} = \frac{450}{4}$ إذن $AI = \frac{15}{\sqrt{2}}$

إذن مساحة المثلث ABC هي $\frac{BC.AI}{2} = \frac{5\sqrt{2}.\frac{15}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{75}{2} = 37.5\,cm^2$ $37.5\,cm^2$

تطبيق 11

في معلم متعامد و متجانس علم النقط $A(5,3)$ ، $B(7,-2)$ و $E(2,-4)$

1) ما هو التخمين الذي يمكن وضعه حول طبيعة المثلث ABE ؟ برهن على هذا التخمين

2) (δ) الدائرة المحيطة بالمثلث ABE و D النقطة المتقابلة قطريا مع B على الدائرة (δ) علم النقطة D ثم احسب إحداثيتا D

3) ماهي طبيعة الرباعي $ABED$ ؟ برر إجابتك

4) احسب القيمة المضبوطة لمساحة القرص المحاط بـ (δ)

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

الحل

1) التخمين الذي يمكن وضعه حول طبيعة المثلث ABE قائم في B و متساوي الساقين .

إثبات أن المثلث ABE قائم في B

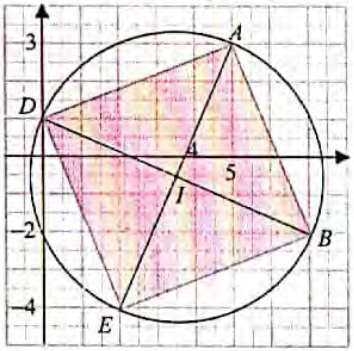
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(7-5)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$$

$$BE=\sqrt{(x_E-x_B)^2+(y_E-y_B)^2}=\sqrt{(2-7)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$$

$$AE=\sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2}=\sqrt{(2-5)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

لاحظ أن $AB=BE$ و $AB^2+BE^2=AE^2$

إذن المثلث ABE متقايس الساقين في B و قائم في B



2) تعيين إحداثيتا النقطة D

بما أن (δ) محيطة بالمثلث ABE فإن $[AE]$ قطر لها و عليه مركزها I هو منتصف القطعة $[AE]$

$$x_I=\frac{x_A+x_E}{2}=\frac{5+2}{2}=\frac{7}{2}$$

$$y_I=\frac{y_A+y_E}{2}=\frac{3+(-4)}{2}=\frac{-1}{2}$$

إذن $x_I=\frac{x_B+x_D}{2}$ و $y_I=\frac{y_B+y_D}{2}$ ومنه نستنتج

$x_D=2x_I-x_B$ و $y_D=2y_I-y_B$

بالتعويض نجد $x_D=2\times\frac{7}{2}+7=7-7=0$

إذن $y_D=2\left(-\frac{1}{2}\right)+2=-1+2=1$ $D(0,1)$

3) تعيين طبيعة الرباعي $ABED$

في الرباعي $ABED$ القطران (AE) و $[DB]$ متقايسان و منتصفان ومتعامدان .

إذن الشكل $ABED$ مربع

4) مساحة القرص المحاط بالدائرة (δ) هي πR^2 حيث R طول نصف القطر .

$R=\frac{AE}{2}=\frac{\sqrt{58}}{2}$ إذن المساحة هي $\pi R^2=\pi\times\left(\frac{\sqrt{58}}{2}\right)^2 cm^2=\pi\times\frac{58}{4}cm^2$

تطبيق 12

في المستوى المزود بالمعلم (A,I,J) بحيث $OA=OJ=1cm$

1) علم النقطتين $M(-2,-4)$ و $N(2,-2)$ ثم بين ان المثلث OMN متقايس الساقين في M

2) أنشئ النقطة P صورة النقطة N بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{MO}$

3) ما هي طبيعة الرباعي $OMNP$ ؟ برر اجابتك

4) احسب احداثيات النقطة K نقطة تقاطع $[ON]$ و $[MP]$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

الحل

1) $OM=\sqrt{x_M{}^2+y_M{}^2}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$MN=\sqrt{(x_N-x_M)2+(y_N-y_M)^2}=\sqrt{(2+2)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

إذن $OM=MN$ و عليه فإن المثلث OMN متقايس الساقين في M

2) P صورة N بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{MO}$

يعني $\vec{NP}=\vec{MO}$

إحداثيتا $\vec{MO}$ هي $(2,4)$

3) تعيين طبيعة الرباعي $OMNP$

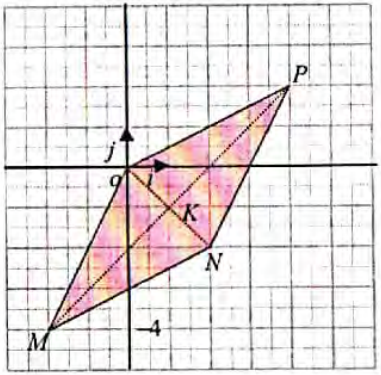
بما أن $\vec{MO}=\vec{NP}$

فإن الرباعي $OMNP$ متوازي الأضلاع

4) النقطة K هي منتصف $[ON]$ و بالتالي

$x_K=\frac{x_N}{2}=\frac{2}{2}=1$

$y_K=\frac{y_N}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ إذن $K(1,-1)$



تطبيق 13

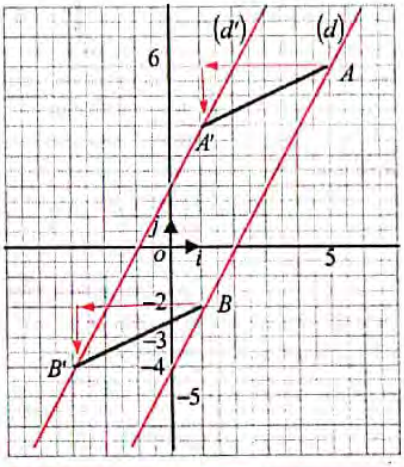
f الدالة التآلفية التي ترفق بكل x العدد $2x-4$

d التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس وحدة الرسم $1cm$

M و N نقطتان إحداثياتهما $(6,3)$ و $(2,1)$ على الترتيب.

المستقيم d' صورة المستقيم d بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{MN}$

(d') هو التمثيل البياني لدالة تآلفية g



1) أ- ماهي صورة العدد 5 بالدالة f ؟

ب- ما هو العدد الذي صورته -2 بالدالة f ؟

ج) A نقطة من d فاصلتها 5 و B نقطة من d ترتيبها -2

ما هي إحداثيتا A و B ؟

د) ارسم (d)

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

2) أ- أنشئ النقطتين A' و B' صورة A و B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{MN}$ على الترتيب .

ب- أنشئ المستقيم (d')

3) أ- احسب إحداثيات A' و B'

ب- عين الدالة g

الحل

1) أ) لدينا $f(x)=2x-4$

2) صورة العدد 5 بالدالة f هي $f(5)$ حيث $f(5)=2\times5-4=10-4=6$

ب) ليكن x العدد الذي صورته -2 بالدالة f إذن $f(x)=-2$

$f(x)=-2$ تعني $2x-4=-2$ و منه نجد $2x=2$ أي $x=1$

إذن العدد الذي صورته -2 بالدالة f هو 1

جـ) $A(5,y_A)$ ، $B(x_B,-2)$

- A تنتمي إلى d يعني $f(x_B)=-2$

و من السؤال نستنتج أن $x_B=1$ إذن $B(1,-2)$

3) رسم (d)

المستقيم d هو المستقيم (AB)

4) أ) إحداثيتا $\vec{MN}$ هما

$x_N-x_M=2-6=-4$

$y_N-y_M=1-3=-2$ إذن إحداثيتا $\vec{MN}$ هما $(-4,-2)$

A' صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{MN}$ يعني $\vec{AA'}=\vec{MN}$

للوصول إلى النقطة A' نستعمل إزاحتين متتاليتين انطلاقا من النقطة A

الأولى توازي محور الفواصل و باتجاه اليسار بـ 4 وحدات ، و الثانية توازي محور التراتيب وباتجاه الأعلى بوحدتين

B' صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{MN}$ يعني $\vec{BB'}=\vec{MN}$

للوصول إلى النقطة B' نستعمل إزاحتين متتاليتين إنطلاقا من النقطة B

الأولى توازي محور الفواصل و في الإتجاه السالب بـ 4 وحدات و الثانية توازي محور التراتيب وفي الإتجاه السالب بوحدتين .

ب) رسم المستقيم (d')

بما أن A و B نقطتان من d و (d') صورة (d) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{MN}$

فإن A' و B' تنتميان إلى (d')

و بالتالي (d') هو $(A'B')$

5) أ- تعيين إحداثيتي A' و B'

من الرسم نجد $A'(1,4)$ و $B'(-3,-4)$

هناك طريقة ثانية لتعيين إحداثيتي A' و B'

- $\vec{AA'}=\vec{MN}$ ، نرمز بـ (x,y) إلى إحداثيتي A'

إحداثيتا $\vec{AA'}$ هما $(x-5,g-6)$ و $MN(\vec{-4},-2)$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

بما ان $\vec{AA'} = \vec{MN}$ فان $x-5=-4$ و $y-6=-2$

و منه نجد $x=1$ و $y=4$ إذن $A'(1,4)$

بنفس الكيفية نجد إحداثيتي النقطة $B(-3,-4)$

ب) تعيين عبارة الدالة g

(d') التمثيل البياني للدالة g و A' ، B' نقطتان من (d')

إذن $g(1)=4$ و $g(-3)=-4$

بما ان الدالة g تآلفية فإن عبارتها هي $g(x)=ax+b$

$g(1)=4$ تعني $a+b=4$.....1

$g(-3)=-4$ تعني $-3a+b=-4$.....2

من 1 نجد $a=4-b$.....3 نعوض عبارة a في 2 نجد $-3(4-b)+b=-4$

اي $4b=8$ و منه $b=2$

نعوض قيمة b في 3 نجد

$a=4-2=2$

إذن $g(x)=2x+2$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/