https://prof27math.weebly.com/

معارف

I - مفهوم الشعاع

• الإنسحاب و الشعاع

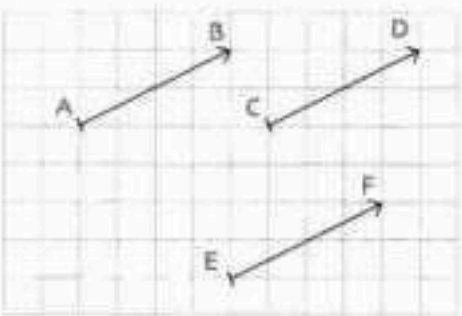
• A و B نقطتان متمايزتان. النقطتان A و B تعينان المستقيم (AB) و تعينان أيضا اتجاهين عليه، متعاكسين (من A نحو B و من B نحو A) و تحديد الطول AB.

نقول عن كل مستقيم يوازي (AB) إنه من نفس منحى المستقيم (AB).

الانسحاب الذي يحول A إلى B معرف بمنحى (هو منحى (AB)) و اتجاه (هو الاتجاه من A إلى B) و مسافة (هو طول القطعة [AB]).

نقول إن الانسحاب الذي يحول A إلى B معرف بالشعاع $\overrightarrow{AB}$.

مثال



• الانسحاب الذي يحول A إلى B يحول C إلى D و E إلى F.

• للمستقيمات (AB)، (CD) و (EF) نفس المنحى.

• الاتجاه من C نحو D و من E نحو F هو الاتجاه من A نحو B.

• AB = CD = EF

كل من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{EF}$ تعرف نفس الانسحاب.

نتيجة

الشعاع $\overrightarrow{AB}$ المرفق بانسحاب معرف بـ :

• منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$: هو منحى المستقيم (AB).

• اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AB}$: من A نحو B (A هي مبدأ الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و B هي نهايته).

• طول الشعاع $\overrightarrow{AB}$: هو الطول AB.

I - الشعاعان المتساويان

• الشعاعان المتساويان و الإنسحاب

تعريف

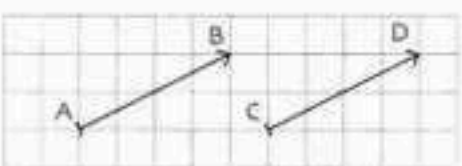
A، B، C، D أربع نقط. نقول إن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان إذا كانت D هي صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$. نكتب $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

ينتج أن لشعاعين متساويين

• نفس المنحى.

• نفس الاتجاه.

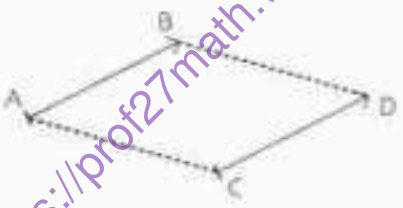
• نفس الطول.



belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

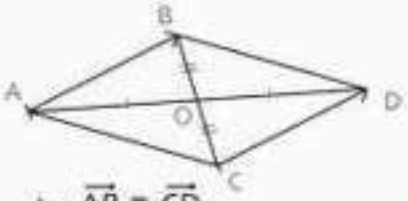
• الشعاعان المتساويان و متوازي الأضلاع



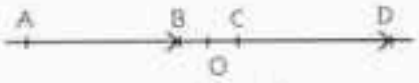
خاصية A، B، C، D أربع نقط.
• إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإن ABDC متوازي أضلاع.
• إذا كان ABDC متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

ملاحظة إذا كانت النقط A، B، C، D على استقامة واحدة و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
فنقول أيضا إن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع.

نظرية $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني
للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني
للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف.

• الشعاعان المتساويان و منتصف قطعة

خاصية A، B، I ثلاث نقط.
• إذا كان I منتصف [AB] فإن $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
• إذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن I منتصف [AB].

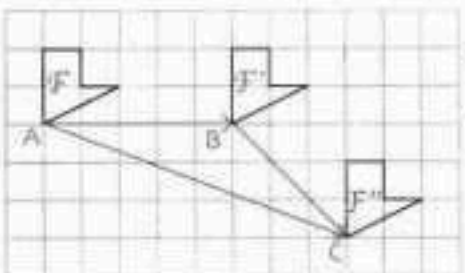
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ يعني أن I هو منتصف [AB]،

3 - مركب انسحابين - مجموع شعاعين

أ. مركب انسحابين

$\mathcal{F}$، $\mathcal{F}'$، $\mathcal{F}''$ ثلاثة أشكال.

خاصية إذا كان $\mathcal{F}'$ صورة $\mathcal{F}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ و $\mathcal{F}''$ صورة $\mathcal{F}'$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$
فإن $\mathcal{F}''$ هو صورة $\mathcal{F}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.



الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوع بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ يعين إنسحابا هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، و يسمى مركب الانسحابين المعرفين بالشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ على الترتيب.

ب. مجموع شعاعين

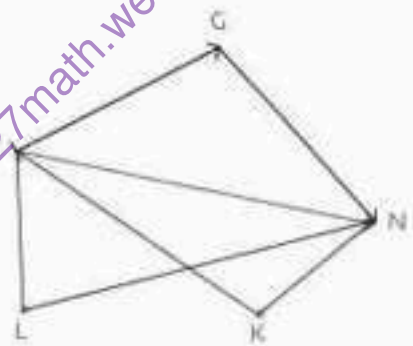
تعريف A، B، C ثلاث نقط. مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$.

نكتب $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
• نقول إن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.
• لاحظ أن نهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي مبدأ الشعاع $\overrightarrow{BC}$.
• المساواة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ تسمى علاقة شال.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

مثال



يمكن تفكيك كل شعاع $\overrightarrow{MN}$ إلى مجموع شعاعين بحيث يكون مبدأ الشعاع الثاني هو نهاية الشعاع الأول.

من أجل كل نقطة G : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN}$.

من أجل كل نقطة K : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}$

من أجل كل نقطة L : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN}$

ج. حالة خاصة : الشعاع المعدوم - الشعاعان المتعاكسان

• حسب علاقة شال نكتب $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ يحول A إلى B و الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ يحول B إلى A.

الانسحاب الذي يحول A إلى B متبوع بالانسحاب الذي يحول B إلى A هو الانسحاب الذي يحول A إلى A حيث شعاعه هو $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{AA}$. إذن النقطة A لا تحول بهذا الانسحاب المركب.

نقول إن شعاع هذا الانسحاب المركب هو الشعاع المعدوم، يرمز له بالرمز $\vec{0}$.

نكتب : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

لدينا : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ نقول أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان.

نكتب $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ و نقرأ : $\overrightarrow{AB}$ معاكس $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BA}$ معاكس $\overrightarrow{AB}$.

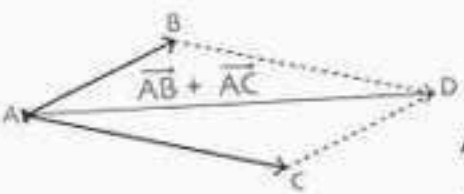
ملاحظة $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$.

د. مجموع شعاعين و قاعدة المتوازي الأضلاع

A، B، C ثلاث نقط.

خاصية إذا كانت D نقطة تحقق $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ فإن هذه النقطة هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع ABDC.

البرهان



لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

نعلم أن $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$

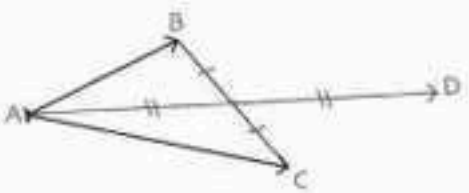
إذن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$ أي $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{CD}$

و بالتالي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ أي الرباعي ABDC متوازي الأضلاع.

ملاحظة قطرا متوازي الأضلاع متناصفان.

و بالتالي يمكن الحصول على النقطة D

برسم نظيرة A بالنسبة إلى منصف [BC].



belhocine : https://prof27math.weebly.com/

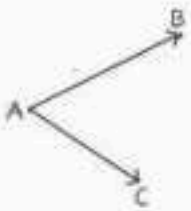
https://prof27math.weebly.com/

طرائق

1 - إنشاء ممثل لمجموع شعاعين

طريقة: لإنشاء ممثل لمجموع شعاعين، نستعمل علاقة شال أو قاعدة متوازي الأضلاع.

تمرين A، B، C، D أربع نقط. أنشئ النقطة K بحيث $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



حل 1 لدينا : $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

بوضع $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FK}$

(نهاية الشعاع $\overrightarrow{DF}$ هي مبدأ الشعاع $\overrightarrow{FK}$)

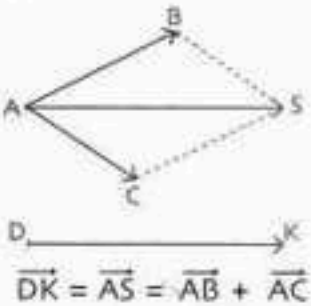
ينتج أن $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

إذن الشعاع $\overrightarrow{DK}$ هو ممثل للشعاع $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

و الذي مبدأه D و نهايته K.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FK}$



$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

حل 2 حسب قاعدة متوازي الأضلاع

لدينا : $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

ABSC متوازي أضلاع إذن $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

لإنشاء النقطة K، يكفي إنشاء الشعاع $\overrightarrow{DK}$

حيث $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{DK}$.

2 - إستعمال تساوي شعاعين لإنجاز برهان

طريقة: يمكن إستعمال تساوي شعاعين في برهان بربط تساوي شعاعين بمتوازي الأضلاع.

تمرين 1 ABCD متوازي أضلاع و $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BE}$. برهن أن الرباعي ADFE متوازي أضلاع.

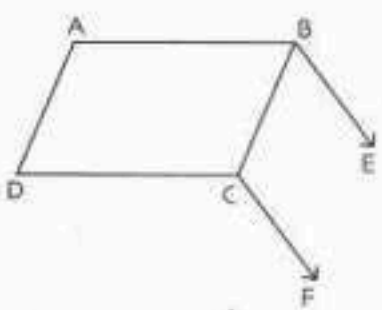
حل للبرهان أن ADFE متوازي أضلاع يكفي البرهان أن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$.

لدينا : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ لأن ABCD متوازي أضلاع.

و لدينا: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ إذن BEFC متوازي أضلاع. و بالتالي $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$

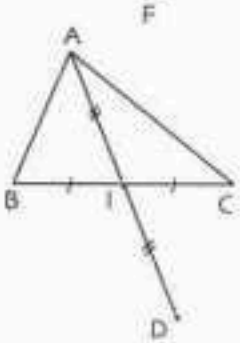
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ إذن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$

و بالتالي ADFE متوازي أضلاع.



تمرين 2 ABC مثلث، I منتصف [BC]، D نقطة بحيث $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$.

برهن أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



حل $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ يعني I منتصف [AD].

I منتصف [BC] و I منتصف [AD].(القطران متناصفان)

إذن الرباعي ACDB متوازي أضلاع.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

تمارين محلولة

تمرين 1 ABC مثلث. الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ يحول C إلى M. الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BM}$ يحول A إلى P. الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ يحول C إلى K.

1 • ارسم الشكل مبرزا كل مراحل الإنشاء.

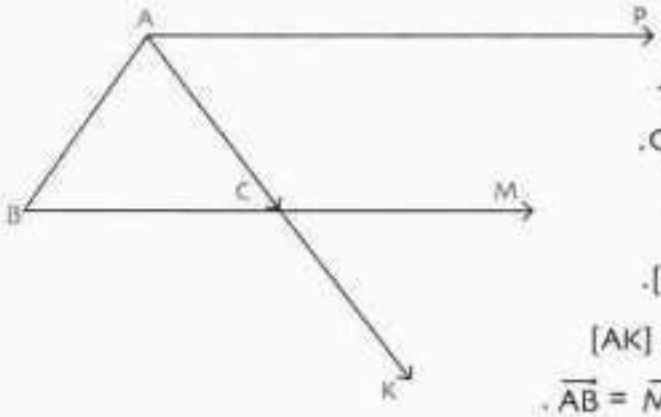
2 • برهن أن النقط P، M، K على استقامة واحدة.

حل

1 • M هي صورة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$. إذن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM}$ أي M نظيرة B بالنسبة إلى C.

P هي صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BM}$. إذن $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AP}$

و بالتالي BMPA متوازي أضلاع.



K هي صورة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CK}$ أي K نظيرة A بالنسبة إلى C.

و بهذه الكيفية نتحصل على الشكل التالي :

2 • لدينا $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM}$ إذن C منتصف [BM].

و لدينا $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CK}$ و بالتالي C منتصف [AK]

إذن [AK] و [BM] متناصفان و بالتالي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MK}$.

بما أن $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AP}$ فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PM}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MK}$

إذن $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MK}$ و بالتالي M منتصف [PK].

بما أن M منتصف [PK] فإن النقط P، M، K على استقامة واحدة.

تمرين 2 A، B، C، D و E خمس نقط بحيث : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$.

1 • انجز شكلا.

2 • ما نوع الرباعي ABCD ؟ علل إجابتك.

3 • عيّن النقطة F بحيث $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ و النقطة K بحيث $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}$.

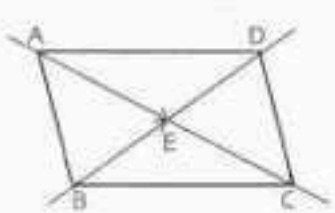
حل

1 • $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$ يعني E منتصف [BD] أي D نظيرة B بالنسبة إلى E.

و كذا $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ يعني C نظيرة A بالنسبة إلى E.

إذن يكفي اختيار A ، B ، E ثم انشاء C و D بحيث

تكون D نظيرة B بالنسبة إلى E و C نظيرة A بالنسبة إلى E.



belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

2 . القطعتان [AC] و [BD] لهما نفس المنتصف، إذن ABCD متوازي الأضلاع، قطراه هما [AC] و [BD].

3 . لدينا $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

حسب قاعدة متوازي الأضلاع ينتج أن الرباعي ABFD متوازي الأضلاع.

لدينا أيضا $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ إذن $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}$. ينتج أن F منطبقة على C.

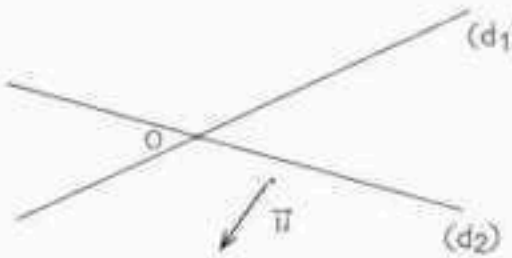
بنفس الطريقة نبرهن أن النقطة K التي تحقق $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}$ هي D.

لدينا $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}$ إذن $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BD}$ و بالتالي K تنطبق على D .

تمرين 3 إليك الشكل حيث (d_1) و (d_2) مستقيمان متقاطعان في النقطة O و $\vec{u}$ شعاع.

انشئ نقطة A من (d_1) و نقطة B من (d_2) بحيث $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

حل



مبدأ الشعاع $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ هو النقطة O

و حسب قاعدة متوازي الأضلاع فإن نهايته هي النقطة C

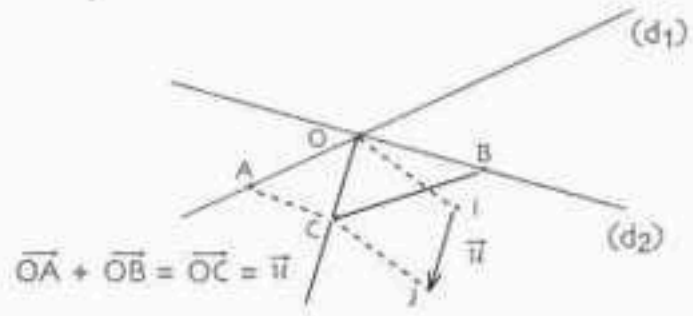
بحيث الرباعي OACB متوازي الأضلاع.

أي C هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع.

عُلمت ثلاثة من رأوسه. يكفي إذن رسم الشعاع $\overrightarrow{OC}$

بحيث $\overrightarrow{OC} = \vec{u}$ ثم إتمام رسم متوازي الأضلاع للحصول على النقطتين A و B

بحيث حاملا [OA] و [OB] هما (d_1) و (d_2) على الترتيب.



للحصول على النقطة C نعيّن مبدأ $\vec{u}$ و نهايته بالحرفين I و J و نكمل رسم المتوازي الأضلاع OIJC.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/