أهم فقرات الدرس

مبرهنة طاليس

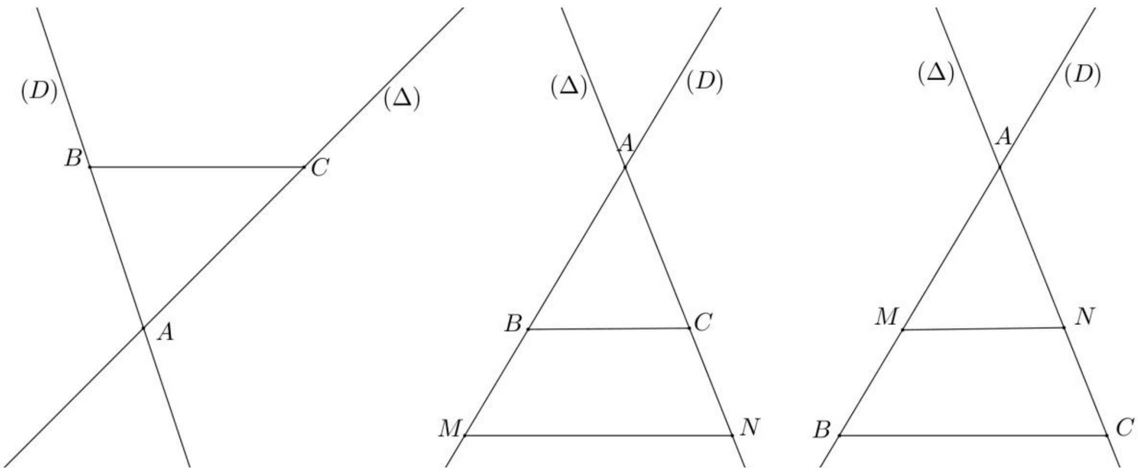
I_ الخـاصية المباشرة :

1) – مثال :

(D) و (Δ) مستقيمان متقاطعان في نقطة A .

M و B نقطتان من (D) تختلفان عن A و N و C نقطتان من (Δ) تختلفان عن A بحيث : $(BC) // (MN)$.

الحالة الأولى الحالة الثانية الحالة الثالثة



سيكون لدينا في جميع الحالات : $\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$.

2) – خاصية طاليس المباشرة :

(D) و (Δ) مستقيمان متقاطعان في نقطة A .

B و E نقطتان من (D) تختلفان عن A .

C و F نقطتان من (Δ) تختلفان عن A .

إذا كان المستقيم (BC) يوازي المستقيم (EF) فإن :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$$

3) – تطبيق على المثلث :

ABC مثلث .

و $\left.\begin{array}{l} E \in (AB) \\ E \in (AC) \end{array}\right\}$

إذا كان المستقيم (BC) يوازي المستقيم (EF) فإن :

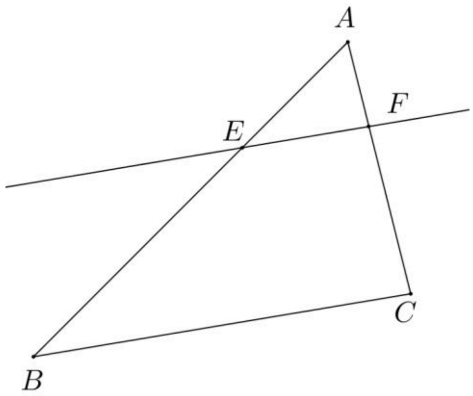
$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$$

*/ مثـال :

ABC مثلث بحيث : $AB = 6\text{ cm}$ و $AC = 4\text{ cm}$ و $BC = 5\text{ cm}$.

لتكن E نقطة من $[AB]$ بحيث : $AE = 2\text{ cm}$. الموازي للمستقيم (BC) و المار من E يقطع $[AC]$ في F . لنحسب : AF ثم EF .

1) – الشكـل :



2) – أ) -- لنحسب AF .

نعتبر المثلث ABC .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} E \in (AB) \\ F \in (AC) \end{array}\right\}$ و بما أن : $(EF) // (BC)$ فإن حسب تطبيق خاصية طاليس المباشرة على المثلث :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

ومنه فإن : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

أي : $\frac{AF}{4} = \frac{2}{6}$ يعني أن : $AF = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

إذن : $\boxed{AF = \frac{4}{3}\text{ cm}}$.

ب) -- حساب EF :

نعلم مما سبق أن : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

و منه فإن : $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

أي : $\frac{2}{6} = \frac{EF}{5}$ يعني أن : $EF = \frac{2 \times 5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

إذن : $\boxed{EF = \frac{5}{3} \text{cm}}$.

II_ الخاصية العكسية :

1) – خاصية طاليس العكسية :

(D) و (Δ) مستقيمان متقاطعان في نقطة A .

B و E نقطتان من (D) تختلفان عن A .

C و F نقطتان من (Δ) تختلفان عن A .

إذا كانت النقط A و E و B ثم النقط A و F و C لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$

فإن : المستقيم (BC) يوازي المستقيم (EF)

3) – تطبيق على المثلث :

ABC مثلث .

و $\left.\begin{array}{l} E \in (AB) \\ E \in (AC) \end{array}\right\}$

إذا كانت النقط A و E و B ثم النقط A و F و C لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$

فإن : المستقيم (BC) يوازي المستقيم (EF)

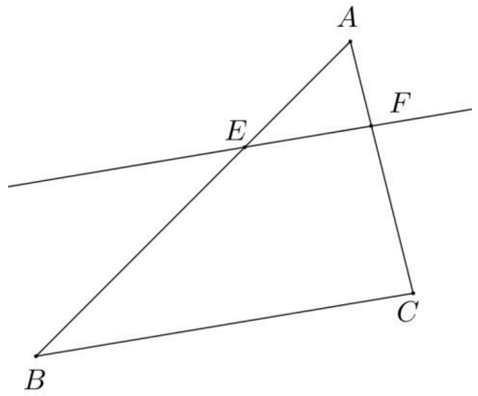
*/ مثال :

ABC مثلث بحيث : $AB = 8\text{ cm}$ و $AC = 6\text{ cm}$.

لتكن E نقطة من $[AB]$ بحيث : $AE = 4\text{ cm}$ و F نقطة من $[AC]$ بحيث : $AF = 3\text{ cm}$.

لنثبت أن : $(EF) // (BC)$.

1) – الشكل



2) – لنثبت أن : $(EF) \,//\, (BC)$.

*/ لنبين أن : $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$.

لدينا : $\frac{AE}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ و لدينا : $\frac{AF}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

و منه فإن : $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$

نعتبر المثلث ABC.

لدينا : و $\left.\begin{matrix} E \in (AB) \\ F \in (AC) \end{matrix}\right\}$

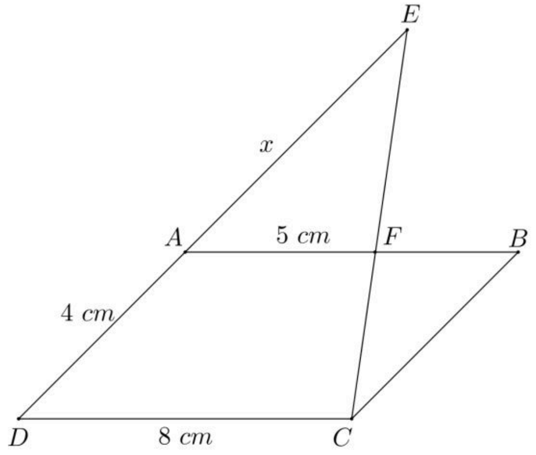
و بما أن النقط A و E و B ثم النقط A و F و C لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$

فإن حسب تطبيق خاصية طاليس العكسية على المثلث : $(EF) \,//\, (BC)$.

تمارين تطبيقية

❀ تمرين ①:

نعتبر الشكل الآتي بحيث : $ABCD$ متوازي أضلاع و $EA = x$ و $AD = 4\,cm$ و $AF = 5\,cm$ و $DC = 8\,cm$.



1)– قارن النسبتين : $\dfrac{EA}{ED}$ و $\dfrac{AF}{DC}$.

2)– إستنتج حساب : x .

*/ الحل :

1)– لنقارن النسبتين $\dfrac{EA}{ED}$ و $\dfrac{AF}{DC}$.

*/ لنبين أن : $(DC) \parallel (AF)$.

لدينا : $ABCD$ متوازي الأضلاع.

إذن : $(DC) \parallel (AB)$ ، و بما أن : $F \in (AB)$ فإن : $(DC) \parallel (AF)$.

نعتبر المثلث EDC .

لدينا : $\left.\begin{matrix} A \in (ED) \\ F \in (EC) \end{matrix}\right\}$ و و بما أن : $(DC) \parallel (AF)$ فإن حسب تطبيق خاصية طاليس المباشرة على المثلث :

$$\frac{EA}{ED} = \frac{EF}{EC} = \frac{AF}{DC} .$$

و منه فإن : $\dfrac{EA}{ED} = \dfrac{AF}{DC}$.

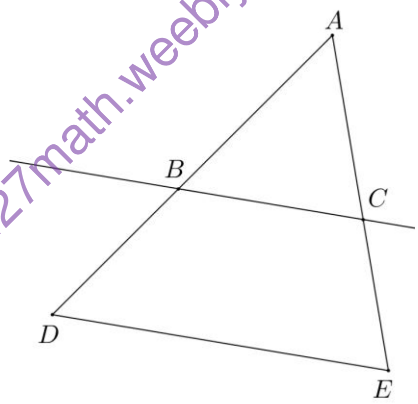
2)– لنستنتج حساب x .

نعلم أن : $\dfrac{EA}{ED} = \dfrac{AF}{DC}$ أي $\dfrac{5}{8} = \dfrac{x}{x+4}$ يعني أن : $5(x+4) = 8x$.

و منه فإن :

$$5x + 20 = 8x$$
$$5x - 8x = -20$$
$$-3x = -20$$
$$x = \frac{-20}{-3}$$

و بالتالي فإن : $\boxed{x = \dfrac{20}{3}\,cm}$.



❀ تمرين ②:

نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$AB = 14\,cm$ و $AD = 21\,cm$

$CE = 11\,cm$ و $AE = 33\,cm$ و

أثبت أن : $(DE) // (BC)$.

*/ الحل :

لنبين أن : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

لدينا : $\frac{AB}{AD} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ و $\frac{AC}{AE} = \frac{33-11}{33} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$

و منه فإن : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

نعتبر المثلث ADE.

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} B \in (AD) \\ C \in (AE) \end{array}\right\}$

و بما أن النقط A و B و D ثم النقط A و C و E لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

فإن حسب تطبيق خاصية طاليس العكسية على المثلث : $(DE) // (BC)$.

❀ تمرين ③:

نعتبر جانبه بحيث : $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$.

$AE = 2\,cm$ و $AD = 3\,cm$ و $DC = 6\,cm$.

1) – أ) -- أحسب : AB.

ب) -- حدد قيمة النسبة : $\frac{EB}{EC}$.

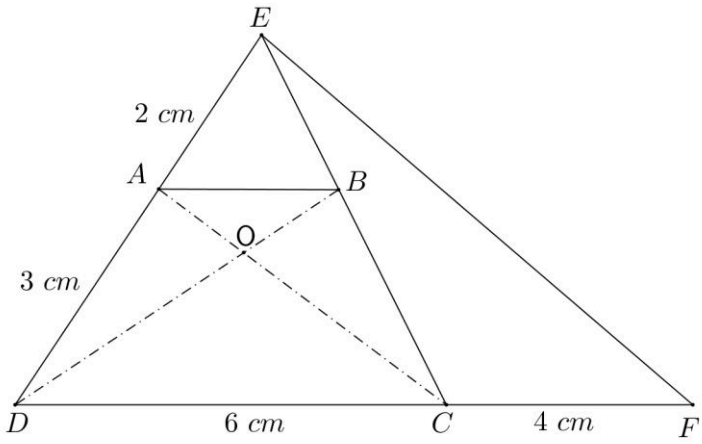
2) – أ) -- قارن النسبتين : $\frac{OA}{OC}$ و $\frac{OB}{OD}$.

ب) -- بين أن : $OA \times DC = OC \times AB$.

3) – F نقطة من (DC) بحيث :

$C \in [DF]$ و $CF = 4\,cm$ ، (أنظر الشكل).

أثبت أن : $(EF) // (AC)$.



*/ الحـل :

1) – أ) -- لنحسب AB :

*/ لنبين أن : $(AB) // (CD)$.

نعلم أن $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$.

إذن : $(AB) // (CD)$.

نعتبر المثلث EDC.

لدينا : $\left.\begin{array}{l} A \in (ED) \\ B \in (EC) \end{array}\right\}$ و

و بما أن : $(AB) // (CD)$ فإن حسب تطبيق خاصية طاليس المباشرة على المثلث :

$$\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC}$$

و منه فإن : $\frac{EA}{ED} = \frac{AB}{DC}$ أي : $\frac{2}{5} = \frac{AB}{6}$ يعني أن : $AB = \frac{2 \times 6}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$

إذن : $\boxed{AB = 2,4\,\text{cm}}$

ب) -- لنحدد قيمة النسبة $\frac{EB}{EC}$:

نعلم أن : $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC}$ ، و بما أن : $\frac{EA}{ED} = \frac{2}{5}$ فإن : $\frac{EB}{EC} = \frac{2}{5}$.

2) – أ) -- لنقارن النسبتين $\frac{OA}{OC}$ و $\frac{OB}{OD}$:

نعتبر المثلث ODC.

لدينا : $\left.\begin{array}{l} A \in (OC) \\ B \in (OD) \end{array}\right\}$ و

و بما أن : $(AB) // (CD)$ فإن حسب تطبيق خاصية طاليس المباشرة على المثلث :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC}$$

و منه فإن : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$.

ب) -- لنستنتج أن : $OA \times DC = OC \times AB$.

نعلم أن : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC}$

و منه فإن : $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC}$ يعني أن : $OA \times DC = OC \times AB$.

3) – لنثبت أن : $(AC) // (EF)$.

*/ لنقارن النسبتين : $\frac{DA}{DE}$ و $\frac{DC}{DF}$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}\frac{DA}{DE}=\frac{3}{5}\\ \frac{DC}{DF}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\end{array}\right\}$ و إذن : $\frac{DA}{DE}=\frac{DC}{DF}$.

نعتبر المثلث DEF .

لدينا : $\left.\begin{array}{l}A\in(DE)\\ C\in(DF)\end{array}\right\}$ و

و بما أن النقط D و A و E ثم النقط D و C و F لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{DA}{DE}=\frac{DC}{DF}$

فإن حسب تطبيق خاصية طاليس العكسية على المثلث : $(EF)\,//\,(AC)$.