https://prof27math.weebly.com/

معارف

I - المؤشرات الإحصائية : التكرار - التواتر

1.أ) التكرار

تعريف نسمي تكرار قيمة ميزة إحصائية، عدد المرات التي تظهر فيه هذه القيمة في السلسلة الإحصائية.

مثال في سلسلة العلامات التالية :

1 ; 1 ; 3 ; 2 ; 4 ; 1 ; 2 ; 5 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 1 ; 5 ; 5 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3.

- تكرار القيمة 3 هو 5.
- تكرار القيمة 4 هو 2.

ملاحظة التكرار الكلي لسلسلة إحصائية هو مجموع تكرارات قيم هذه السلسلة (أي هو عدد قيم السلسلة).
في السلسلة السابقة التكرار الكلي هو 20.

1.ب) التواتر

تعريف نسمي تواتر قيمة ميزة إحصائية، حاصل قسمة تكرار هذه القيمة على التكرار الكلي للسلسلة الإحصائية.

مثال في السلسلة السابقة، تواتر القيمة 3 هو $\frac{5}{20}$ أي $\frac{1}{4}$ و تواتر القيمة 4 هو $\frac{2}{20}$ أي $\frac{1}{10}$.

ملاحظات
- تواتر قيمة هو دائما عدد محصور بين 0 و 1.
- يمكن التعبير عن تواتر قيم سلسلة إحصائية على شكل نسب مئوية.
- مجموع تواترات قيم سلسلة إحصائية يساوي 1.

هذا المجموع يساوي 100% إذا كانت التواترات معبر عنها بنسب مئوية.

مثال جدول تكرارات و تواترات قيم السلسلة العلامات السابقة يكون كالآتي :

القيم	1	2	3	4	5	المجموع
التكرارات	5	5	5	2	3	20
التواترات	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	1
التواترات (%)	25%	25%	25%	10%	15%	100%

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

2. أ) التكرار المجمع

قيم السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

تعريف: التكرار المجمع الصاعد لقيمة هو مجموع تكرار هذه القيمة و تكرارات القيم الأصغر منها.

تعريف: التكرار المجمع النازل لقيمة هو مجموع تكرار هذه القيمة و تكرارات القيم الأكبر منها.

ملاحظة: نعرف بنفس الكيفية التكرار المجمع الصاعد و التكرار المجمع النازل لفئة.

أمثلة:
- في المثال السابق التكرار المجمع الصاعد للقيمة 3 هو 15. (هو مجموع تكرارات القيم 1 ، 2، 3).
- التكرار المجمع الصاعد للقيمة 4 هو 17. (هو مجموع تكرارات القيم 1، 2، 3، 4).
- التكرار المجمع النازل للقيمة 4 هو 5. (هو مجموع تكراري القيمتين 5 و 4).
- التكرار المجمع النازل للقيمة 3 هو 10. (هو مجموع تكرارات القيم 5، 4، 3).

2. ب) التواتر المجمع

قيم السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

تعريف: التواتر المجمع الصاعد لقيمة هو مجموع تواتر هذه القيمة و تواترات القيم الأصغر منها.

تعريف: التواتر المجمع النازل لقيمة هو مجموع تواتر هذه القيمة و تواترات القيم الأكبر منها.

ملاحظة: نعرف بنفس الكيفية التواتر المجمع الصاعد لفئة و التواتر المجمع النازل لفئة.

أمثلة: من جدول تواترات القيم المنجز سابقا، ينتج جدول التواترات المجمعة الصاعدة و النازلة التالي :

القيم	1	2	3	4	5	المجموع
التواترات	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	1
التواترات المجمعة الصاعدة	$\frac{5}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{20}{20}$	
التواترات المجمعة النازلة	$\frac{20}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$	

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

2 - مؤشرات الموقع : الوسط - الوسيط

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية $x_1, x_2, \ldots, x_N$ حيث N هو التكرار الكلي للسلسلة.

2 . أ) الوسط

تعريف

وسط السلسلة الإحصائية الذي نرمز إليه بالرمز $\bar{x}$ ، هو حاصل قسمة مجموع قيم السلسلة الإحصائية على التكرار الكلي للسلسلة $\left(\text{أي : } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}\right)$.

ملاحظات

1 . إذا كانت قيم السلسلة $x_1, x_2, \ldots, x_i$ مرفقة بتكرارات $n_1, n_2, \ldots, n_i$ على الترتيب فإن $\bar{x}$ ، وسط السلسلة يحسب كالآتي : $\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 \ldots + n_i \times x_i}{n_1 + n_2 \ldots + n_i}$

حيث المجموع $n_1 + n_2 \ldots + n_i$ هو التكرار الكلي للسلسلة الإحصائية.

2 . إذا كانت السلسلة الإحصائية مستمرة، أي معطاة على شكل فئات، فنتوخذ مراكز الفئات كقيم للسلسلة الإحصائية.

أمثلة

1 . في السلسلة الإحصائية التالية :

الرقم	1	2	3	4	5
التكرار	5	5	5	2	3

لدينا وسط هذه السلسلة هو $\bar{x}$ بحيث $\bar{x} = \frac{1\times5 + 2\times5 + 3\times5 + 4\times2 + 5\times3}{5 + 5 + 5 + 2 + 3}$

$= \frac{5 + 10 + 15 + 8 + 15}{20} = \frac{53}{20} = 2{,}65$

إذن $\bar{x} = 2{,}65$.

2 . في السلسلة التالية :

الفئات	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
مراكز الفئات	2,5	7,5	12,5	17,5
التكرارات	1	3	8	7

لدينا وسط هذه السلسلة هو $\bar{x}$ بحيث $\bar{x} = \frac{2{,}5\times1 + 7{,}5\times3 + 12{,}5\times8 + 17{,}5\times7}{19}$

$= \frac{247{,}5}{19} \approx 13{,}02$

إذن $\bar{x} \approx 13{,}02$ و هو مدور العدد $\frac{247{,}5}{19}$ إلى $\frac{1}{100}$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

2 . ب) الوسيط

السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

تعريف وسيط السلسلة الإحصائية هو قيمة الميزة الإحصائية التي تجزئ السلسلة إلى جزئين بنفس التكرار.

إذا كان التكرار الكلي للسلسلة فرديا فإن وسيط هذه السلسلة هو القيمة المركزية .
إذا كان التكرار الكلي للسلسلة زوجيا فإن وسيط هذه السلسلة هو وسط القيمتين المركزيتين.

أمثلة 1 . في السلسلة الإحصائية التالية : 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; [3] ; 3 ; 4 ; 5 ; 5

4 قيم 4 قيم

القيمة المركزية هي 3
و مرتبتها هي 1 + 4

لدينا التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 9.
1 + (2×4) = 9 إذن العدد 9 فردي .
ينتج أن وسيط هذه السلسلة هو القيمة ذات المرتبة (1 + 4) أي المرتبة 5.
إذن وسيط هذه السلسلة هو 3.

2 . في السلسلة الإحصائية التالية : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; [4] ; [4] ; 5 ; 5 ; 6

5 قيم 5 قيم

القيمتان المركزيتان هما 3 و 4
و مرتبتهما هما 5 و (1 + 5)

لدينا التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 10.
2×4 = 8 إذن العدد 8 زوجي.
إذن وسيط هذه السلسلة هو وسط القيمتين المركزيتين 3 و 4 أي $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$
و بالتالي وسيط هذه السلسلة هو 3,5.

ملاحظات 1 . وسيط سلسلة لا يتغير إذا كانت قيم هذه السلسلة مرتبة تصاعديًا أو تنازليًا.

2 . عندما نحذف أو نضيف قيمة لسلسلة إحصائية فإن وسيطها يتغيّر عموما.

3 . عندما نضيف لسلسلة إحصائية مرتبة، قيمتين، إحداهما أصغر من القيمة المركزية (أو القيمتين المركزيتين) و الأخرى أكبر من القيمة المركزية (أو القيمتين المركزيتين) فإن وسيط السلسلة المحصل عليها هو وسيط السلسلة المعطاة.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

طرائق

1 - حساب التكرار المجمع الصاعد (أو النازل) لقيمة (أو لفئة)

طريقة

لحساب التكرار المجمع الصاعد (أو النازل) لقيمة نتبع المراحل التالية :

- نرتب القيم ترتيبا تصاعديا.
- نعين القيمة المستهدفة.
- نحسب مجموع تكرار هذه القيمة و تكرارات القيم الأصغر منها (أو الأكبر منها).

إذا كانت السلسلة منظمة في فئات فنعوض القيمة بالفئة.

تمرين 1 إليك علامات 30 تلميذا من قسم السنة الرابعة متوسط، تحصلوا عليها في فرض الرياضيات.

15 ; 13 ; 7 ; 7 ; 9 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 ; 14 ; 9 ; 11 ; 10 ; 10 ; 14 ; 16 ; 11 ; 9

11 ; 11 ; 13 ; 10 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 7.

1 . احسب التكرار المجمع الصاعد لكل قيمة.

2 . احسب التكرار المجمع النازل لكل قيمة.

حل

- التكرار الكلي لهذه السلسلة الإحصائية هو 30.
- نرتب قيم هذه السلسلة ترتيبا تصاعديا و نتحصل على السلسلة التالية :

7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 13

13 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 16.

- حساب تكرار كل قيمة و التكرار المجمع الصاعد لكل قيمة :

القيم	7	8	9	10	11	13	14	15	16
التكرارات	4	2	6	3	4	2	5	3	1
التكرارات المجمعة الصاعدة	4	6	12	15	19	21	26	29	30
التكرارات المجمعة النازلة	30	26	24	18	15	11	9	4	1

تمرين 2 إليك علامات 30 تلميذا من قسم السنة الرابعة متوسط، تحصلوا عليها في فرض الرياضيات.

2 ; 6 ; 7 ; 12 ; 4 ; 3 ; 6 ; 10 ; 10 ; 9 ; 9 ; 14 ; 13 ; 5 ; 5 ; 8 ; 3 ; 14 ; 13 ; 9

9 ; 8 ; 10 ; 11 ; 7 ; 10 ; 13 ; 9 ; 12 ; 13.

1 . رتّب هذه العلامات في فئات طول كل واحدة منها 3 بحيث تكون الفئة الأولى هي [0 ; 3[.

2 . عيّن تكرار كل فئة.

3 . احسب التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات المجمعة النازلة لكل فئة.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

حل

• ترتيب العلامات ترتيبا تصاعديا :

2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 14 ; 14 .

تنظيم السلسلة الإحصائية في فئات طول كل واحدة منها 3.

الفئات	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
التكرارات	1	5	6	10	8
التكرارات المجمعة الصاعدة	1	6	12	22	30
التكرارات المجمعة النازلة	30	29	24	18	8

2 - حساب التواتر المجمع الصاعد (أو النازل) لقيمة (أو لفئة)

طريقة

لحساب التواتر المجمع الصاعد (أو النازل) لقيمة نتبع المراحل التالية :

• نرتب القيم ترتيبا تصاعديا.

• نعين القيمة المستهدفة.

• نحسب مجموع تواتر هذه القيمة و تواترات القيم الأصغر منها (أو الأكبر منها).

إذا كانت السلسلة منظمة في فئات فتكون القيم هي مراكز الفئات.

تمرين

إليك نتائج استبيان، أجري على مستوى 30 تلميذا من قسم السنة الرابعة متوسط. يتضمن هذا الإستبيان السؤال التالي : ما هو عدد الإخوة في عائلتك ؟

كانت النتائج كما يلي : 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4 ; 3 ; 1 ; 4 ; 5 ; 4 ; 4 ; 2 ; 2 ; 5 ; 3 .

• احسب التواترات المجمعة الصاعدة و التواترات المجمعة النازلة لكل قيمة من السلسلة الإحصائية.

حل

• ترتب قيم السلسلة الإحصائية ترتيبا تصاعديا و نتحصل على السلسلة التالية :

1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 .

التكرار الكلي للسلسلة هو 30.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

• حساب تكرارات القيم و تواترات القيم ثم التواترات المجمعة الصاعدة و التواترات المجمعة النازلة.

القيم	1	2	3	4	5
التكرارات	5	7	4	7	7
التواترات	$\frac{5}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{30}$
التواترات المجمعة الصاعدة	$\frac{5}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{23}{30}$	$\frac{30}{30}$
التواترات المجمعة النازلة	$\frac{30}{30}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{7}{30}$

3 - تعيين وسط سلسلة إحصائية

طريقة لتعيين وسط سلسلة إحصائية نتبع المراحل التالية :

• نرتب قيم السلسلة الإحصائية.

• نحسب التكرار الكلي و تكرار كل قيمة.

• نطبق دستور وسط سلسلة إحصائية.

إذا كانت السلسلة منظمة في فئات فتكون القيم هي مراكز الفئات.

تمرين 1 السلسلة التالية تمثل علامات تلاميذ قسم السنة الرابعة متوسط في الرياضيات تحصلوا عليها إثر إختبار الفصل الثاني.

12 ; 12 ; 11 ; 10 ; 7 ; 13 ; 10 ; 15 ; 9 ; 8 ; 8 ; 11 ; 10 ; 9 ; 6 ; 12 ; 12 ; 12 ; 10 ; 9.

• احسب وسط هذه العلامات.

حل

• ترتيب قيم السلسلة الإحصائية ترتيبا تصاعديا.

6 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 13 ; 15.

• حساب التكرارات : التكرار الكلي هو 20.

العلامات	6	7	8	9	10	11	12	13	15
التكرارات	1	1	2	3	4	2	5	1	1

• حساب وسط السلسلة.

$$\bar{x} = \frac{6\times1 + 7\times1 + 8\times2 + 9\times3 + 10\times4 + 11\times2 + 12\times5 + 13\times1 + 15\times1}{20} = \frac{53}{20} = 10,6$$

إذن $\bar{x} = 10,6$

تمرين 2 الجدول التالي يعطي توزيع تلاميذ السنة الرابعة متوسط حسب قاماتهم.

القامات (cm)	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[
التكرارات	6	4	18	7

• احسب وسط هذه السلسلة.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

حل

- الفئات مرتبة ترتيبا تصاعديا.
- التكرار الكلي هو 35.
- نعين مراكز الفئات و نتحصل على الجدول التالي :

القامات (cm)	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[
مراكز الفئات	152,5	157,5	162,5	167,5
التكرارات	6	4	18	7

- تحسب الوسط $\bar{x}$

لدينا :

$$\bar{x} = \frac{152,5\times6 + 157,5\times4 + 162,5\times18 + 167,5\times7}{35} = \frac{5642,5}{35} = 161,2$$

إذن وسط قامات التلاميذ هو 161,2 cm.

4 - تعيين وسيط سلسلة إحصائية

طريقة

لتعيين وسيط سلسلة إحصائية نتبع المراحل التالية :

- نرتب السلسلة تصاعديا أو تنازليا.
- نحسب تكرارها الكلي N.
- إذا كان N فرديا (يكتب $N = 2p + 1$) فإن وسيط السلسلة هو القيمة المركزية (وهي القيمة ذات المرتبة $p + 1$).
- إذا كان N زوجيا (يكتب $N = 2p$) فإن وسيط السلسلة هو وسط القيمتين المركزيتين (أي وسط القيمتين ذات المرتبتين p و $p + 1$).

تمرين

سجل رضا أوزان (بالكيلوغرامات) لـ 11 صديق له في القسم و تحصل على السلسلة الإحصائية التالية :

53 ; 48 ; 49 ; 50 ; 50 ; 54 ; 56 ; 60 ; 57 ; 48 ; 50.

1 . ما هو وسيط هذه السلسلة ؟

2 . ينزع القيمة 50 من السلسلة، احسب وسط السلسلة الجديدة.

حل

- ترتيب قيم السلسلة تصاعديا.

48 ; 48 ; 49 ; 50 ; 50 ; 50 ; 53 ; 54 ; 56 ; 57 ; 60.

1 . التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 11.

العدد 11 فردي أي $11 = 2\times5 + 1$

إذن وسيط هذه السلسلة هي القيمة ذات المرتبة $5 + 1$ أي 6 و هي القيمة 50.

ينتج أن وسيط السلسلة الإحصائية هو 50.

2 . السلسلة الجديدة ذات 10 قيم، وسيطها هو العدد $\frac{50 + 53}{2}$ أي 51,5.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

تمرين محلول

تمرين سجلت جمعية لمستهلكين الثمن بالدينار لنفس البضاعة في عدة نقط البيع و كانت النتائج ملخصة في الجدول التالي :

الثمن (بالدينار)	18	19	20	21	22	23	24	25
التكرارات	6	4	10	13	9	11	3	5

1 • في كم دكان يبلغ ثمن البضاعة 23 دينارا ؟

2 • أنجز جدول التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات المجمعة النازلة.

3 • احسب وسط هذه السلسلة.

4 • احسب وسيط هذه السلسلة.

5 • استنتج الثمن المتوسط لهذه البضاعة و الثمن الوسيطي لها.

حل 1 • يبلغ ثمن البضاعة 23 دينارا في 11 نقطة بيع (و هو تكرار القيمة 23).

2 • جدول التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات المجمعة النازلة.

الثمن (بالدينار)	18	19	20	21	22	23	24	25	المجموع
التكرارات	6	4	10	13	9	11	3	5	61
التكرارات المجمعة الصاعدة	6	10	20	33	42	53	56	61	
التكرارات المجمعة النازلة	61	55	51	41	28	19	8	5	

3 • حساب الوسط $\bar{x}$ للسلسلة.

لدينا $\bar{x} = \dfrac{18\times6 + 19\times4 + 20\times10 + 21\times13 + 22\times9 + 23\times11 + 24\times3 + 25\times5}{61}$

$= \dfrac{108 + 76 + 200 + 273 + 198 + 253 + 72 + 125}{61} = \dfrac{1305}{61} \approx 21{,}39$

إذن $\bar{x} \approx 21{,}39$

4 • حساب وسيط السلسلة. لدينا : عدد القيم هو 61.

$61 = 2\times30 + 1$ إذن وسيط السلسلة هو الثمن الذي مرتبته هي 31. أي وسيط السلسلة هو 21.

5 • الثمن المتوسط للسلسلة هو 21,39 دينارا.

الثمن الوسيطي هو 21 دينارا و هو وسيط سلسلة الأثمان.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/