https://prof27math.weebly.com/

3 حساب الحرفي- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

أتذكر الأهم:

8. المتطابقات الشهيرة

تعريف: من اجل كل عددين a و b تسمى المساويات الآتية متطابقات شهيرة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

أمثلة: $(x+\sqrt{2})^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ ، $(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$ ،

$$x^2 - 5 = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$

9. النشر و التحليل

*تحليل عبارة جبرية يعني كتابتها على شكل جداء و يتم ذلك إما باستعمال العامل المشترك أو باستعمال المتطابقات الشهيرة.

*نشر و تبسيط عبارة جبرية يعني إجراء مختلف العمليات قصد تبسيطها و كتابتها على شكل خطي.

مثال: * نشر وتبسيط العبارة $(x+2)^2 - 3(x-1)$ يعطي: $x^2 + x + 7$

* تحليل العبارة $(x+2)^2 + (x+2)(x-1)$ يعطي: $(x+2)(2x+1)$

10. معادلة جداء (معدوم)

تعريف: تسمى كل معادلة من الشكل: $(ax+b)(cx+d) = 0$ حيث: a، b، c و d أعداد حقيقية معلومة مع $a \neq 0$ و $b \neq 0$ معادلة جداء(معدوم) و يؤول حلها إلى حل المعادلتين: $ax + b = 0$ و $cx + d = 0$.

لدينا: $(ax+b)(cx+d) = 0$ يعني $ax + b = 0$ أو $cx + d = 0$.

مثال: نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية: $(x+1)(2x-3) = 0$.

$(x+1)(2x-3) = 0$ يعني أن: $x + 1 = 0$ أو $2x - 3 = 0$ أي: $x = -1$ أو $x = \frac{3}{2}$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

و هكذا فإن للمعادلة: $(x+1)(2x-3)=0$ حلان هما: -1 و $\frac{3}{2}$.

تمارين ومسائل

أتدرب:

التمرين1: نعتبر العبارة الجبرية: $A=(3x-5)^2-(2x-1)(3x-5)$.

1. انشر و بسط العبارة A.
2. حلل العبارة A.
3. احسب قيمة A من اجل $x=\frac{5}{3}$ ثم من اجل $x=\sqrt{3}$.

التمرين2: نعتبر العبارة الجبرية: $E=(2x+3)^2-3(2x+3)$.

1. انشر و بسط العبارة E.
2. حلل العبارة E ثم احسب قيمة E من اجل $x=-2$ ثم من اجل $x=0$.
3. حل المعادلة: $E=0$.

التمرين3: نعتبر العبارة الجبرية: $F=(x-4)(2x+1)-(x^2-16)$.

1. انشر، بسط ثم رتب العبارة F.
2. حلل العبارة F بعد ملاحظة وجود متطابقة شهيرة.
3. اختر العبارة التي تراها مناسبة لحل المعادلتين: $F=0$ و $F=12$.

التمرين4: نعتبر العبارة الجبرية: $G=(x^2-9)-2(x-3)$.

1. انشر، بسط ثم رتب العبارة G.
2. حلل العبارة G.
3. اختر العبارة التي تراها مناسبة لحساب قيمة G من اجل $x=-1$ ثم من أجل $x=0$

حل المعادلة: $(x-3)(x+1)=0$.

التمرين5: عمر أحمد حاليا هو 11 سنة بينما عمر فؤاد هو 26 سنة.
بعد كم سنة يصبح عمر فؤاد ضعف عمر أحمد ؟

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

أنمي كفاءاتي:

المسألة1:

1. حلل العبارات الجبرية التالية:

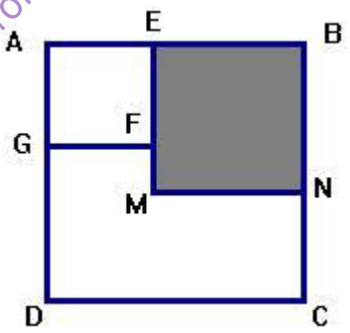
$I=(x+7)^2-36$ ،

$J=4x^2+8x+4$

و $K=(x+13)(x+1)-4(x+1)^2$.

2. في الشكل المقابل $AEFG$ مربع حيث: $AE=x+1$ ،

$EBNM$ مربع طول ضلعه 6 و $DG=6$.



* عبر بواسطة x عن S مساحة الجزء غير المظلل في الشكل.

* من أجل أي قيمة لـِ x تكون المساحة S مساوية أربع مرات مساحة المربع $AEFG$؟

المسألة2:

1. أنشر ثم بسط العبارة: $P=(x+12)(x+2)$.

2. حلل العبارة: $Q=(x+7)^2-25$.

3. x عدد موجب. ABC مثلث قائم في النقطة A بحيث: $AB=5$ و $BC=x+7$.

أثبت أن: $AC^2=x^2+14x+24$.

4. عين قيمة العدد x التي يكون من أجلها: $AC^2=15(x+2)$.

المسألة3:

1. تحقق أن المثلث، الذي أطواله الأعداد الطبيعية المتتابعة 3، 4 و 5 ،مثلث قائم.

2. نريد معرفة ما إذا كانت توجد مثلثات أخرى أطوالها أعداد طبيعية متتابعة.

نفرض وجود مثلث يحقق ذلك و نرمز إلى طول أكبر ضلعي الزاوية القائمة بالرمز x.

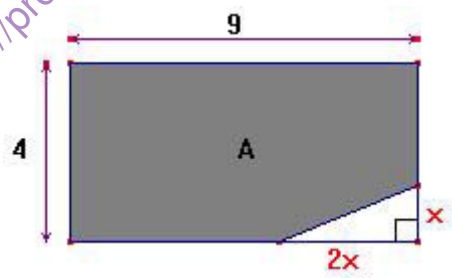
* عبر بواسطة x عن طولي كل من أصغر ضلعي الزاوية القائمة و الوتر.

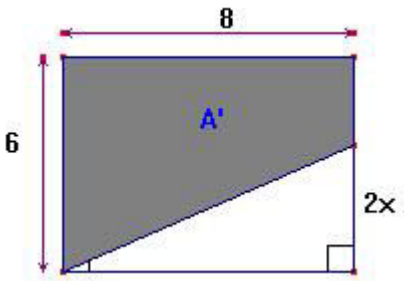
* عين قيمة x. ماذا تستنتج ؟

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

المسألة4:





1. عبر عن المساحة المظللة A بواسطة x. حلل العبارة المحصل عليها.
2. عبر عن المساحة المظللة A' بواسطة x. حلل العبارة المحصل عليها.
3. عين قيم x التي تكون من أجلها المساحتان A و A' متساويتين.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين1

1. $A=(9x^2-30x+25)-(6x^2-10x-3x+5)$

$A=9x^2-30x+25-6x^2+10x+3x-5$

$A=3x^2-17x+20$

2. $A=(3x-5)[(3x-5)-(2x-1)]$

$A=(3x-5)(3x-5-2x+1)$

$A=(3x-5)(x-4)$

3. * من اجل $x=\frac{5}{3}$ لدينا: $A=\left(3\times\frac{5}{3}-5\right)\left(\frac{5}{3}-4\right)$ و منه: $A=0$.

* من اجل $x=\sqrt{3}$ لدينا: $A=3\left(\sqrt{3}\right)^2-17\sqrt{3}+20$ و منه: $A=29-17\sqrt{3}$.

حل التمرين2

1. $(2x+3)^2-3(2x+3)=4x^2+12x+9-6x-9=4x^2+6x$

وهكذا نجد أن: $E=4x^2+6x$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

2. في هذه الحالة يمكن تحليل العبارة E باستعمال عامل مشترك.
لدينا: $E = 4x^2 + 6x = 2x(2x+3)$ و إذا استعملنا العبارة الأولى يكون لدينا:

$$E = (2x+3)^2 - 3(2x+3) = (2x+3)(2x+3-3) = (2x+3)2x .$$

و هكذا نجد أن: $E = 2x(2x+3)$

من أجل $x = -2$ لدينا: $E = 2(-2)\left[2(-2)+3\right] = 4$ أما من أجل $x = 0$ فإن: $E = 0$.

$E = 0$ يعني $2x(2x+3) = 0$ أي: $2x = 0$ أو $2x+3 = 0$ و هذا يعني أن:

$x = 0$ أو $x = -\frac{3}{2}$. حلا المعادلة $E = 0$ هما إذن: 0 و $-\frac{3}{2}$.

حل التمرين3

1.

$$F = (x-4)(2x+1) - (x^2-16) = 2x^2 + x - 8x - 4 - x^2 + 16$$

و هكذا نجد أن: $F = x^2 - 7x + 12$.

2. $F = (x-4)(2x+1) - (x^2-16) = (x-4)(2x+1) - (x-4)(x+4)$

ومنه: $F = (x-4)\left[(2x+1) - (x+4)\right] = (x-4)(2x+1-x-4)$

و هكذا نجد أن: $F = (x-4)(x-3)$.

3. * لحل المعادلة $F = 0$ نختار العبارة: $F = (x-4)(x-3)$

و هكذا فإن $F = 0$ يعني $(x-4)(x-3) = 0$ أي: $x-4 = 0$ أو $x-3 = 0$

و هذا يعني أن: $x = 4$ أو $x = 3$.

إذن للمعادلة $F = 0$ حلان هما 3 و 4.

* لحل المعادلة $F = 12$ نختار العبارة: $F = x^2 - 7x + 12$.

و هكذا فإن $F = 12$ يعني $x^2 - 7x + 12 = 12$ أي: $x^2 - 7x = 0$

نلاحظ أن: $x^2 - 7x = x(x-7)$ و بالتالي فإن: $F = 12$ يعني $x(x-7) = 0$

أي: $x = 0$ أو $x = 7$.

إذن للمعادلة $F = 12$ حلان هما : 0 و 7.

حل التمرين4

1.

$$G = (x^2-9) - 2(x-3) = x^2 - 9 - 2x + 6 = x^2 - 2x - 3$$

و هكذا نجد أن: $G = x^2 - 2x - 3$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

2. $G=(x^2-9)-2(x-3)=(x-3)(x+3)-2(x-3)=(x-3)(x+3-2)$ وهكذا نجد أن: $G=(x-3)(x+1)$.

3. *لحساب قيمة G من اجل $x=-1$ العبارة الأنسب هي: $G=(x-3)(x+1)$ فبتعويض x في العبارة بالعدد -1 نتحصل بشكل مباشر على: $G=0$.

*لحساب قيمة G من اجل $x=0$ العبارة الأنسب هي: $G=x^2-2x-3$ فبتعويض x في العبارة بالعدد 0 نتحصل بشكل مباشر على: $G=-3$.

4. $(x-3)(x+1)=0$ يعني: $x-3=0$ أو $x+1=0$ أي: $x=3$ أو $x=-1$ للمعادلة $(x-3)(x+1)=0$ حلان هما: -1 و 3.

حل التمرين5

إذا رمزنا بالرمز x إلى عدد السنوات التي يصبح بعدها عمر فؤاد ضعف عمر احمد يكون حينئذ عمر فؤاد هو $26+x$ و يكون عمر أحمد هو $11+x$.

لدينا إذن: $26+x=2(11+x)$ و هذا يعني أن: $26+x=22+2x$

أي: $2x-x=26-22$. نجد هكذا: $x=4$. و بالتالي يصبح عمر فؤاد ضعف عمر أحمد بعد 4 سنوات. يكون عمر أحمد 15 سنة و يكون عمر فؤاد 30 سنة.

حل المسألة1

1. $I=(x+7)^2-36=(x+7-6)(x+7+6)=(x+1)(x+13)$

$J=4x^2+8x+4=4(x^2+2x+1)=4(x+1)^2$

$K=(x+13)(x+1)-4(x+1)^2=(x+1)[(x+13)-4(x+1)]$

$K=(x+1)(x+13-4x-4)=(x+1)(9-3x)$

2. * من الواضح أن $ABCD$ مربع طول ضلعه $(x+1)+6$ أي: $x+7$ و بالتالي فمساحته هي: $(x+7)^2$. من جهة ثانية مساحة المربع المظلل هي: 36 و بالتالي يكون لدينا: $S=(x+7)^2-36$.

3 * مساحة المربع $AEFG$ هي: $S'=(x+1)^2$. لنعين x بحيث يكون: $S=4S'$ يعني $(x+7)^2-36=4(x+1)^2$ أي و بعد ملاحظة أن $S=I$:

$(x+1)(x+13)-4(x+1)^2=0$ أي: $K=0$ و هذا يعني أن:

$(x+1)(9-3x)=0$ أي: $x+1=0$ أو $9-3x=0$. نجد هكذا: $x=-1$ أو $x=3$

و بما أن x عدد موجب نأخذ هكذا $x=3$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

حل المسألة2

1. $P=(x+12)(x+2)=x^2+2x+12x+24=x^2+14x+24$.
2. $Q=(x+7)^2-25=(x+7-5)(x+7+5)=(x+2)(x+12)$.

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث القائم ABC يكون لدينا:
$BC^2=AB^2+AC^2$ أي: $AC^2=BC^2-AB^2$ و منه: $AC^2=(x+7)^2-25$.
نلاحظ أن: $Q=AC^2$ و أن: $Q=P$ و بالتالي: $AC^2=x^2+14x+24$.

5. بما أن: $AC^2=(x+12)(x+2)$ فإن: $AC^2=15(x+2)$ يعني أن:
$(x+12)(x+2)=15(x+2)$ أي: $(x+12)(x+2)-15(x+2)=0$
و منه: $(x+2)(x-3)=0$ أي: $x=-2$ أو $x=3$ و بما أن $x\geq 0$ فإن: $x=3$.

حل المسألة3

1. لدينا: $3^2+4^2=9+16=25$ و لدينا: $5^2=25$ و منه: $3^2+4^2=5^2$
و هكذا حسب عكس مبرهنة فيتاغورس فإن المثلث قائم.

2. * بما أن أطوال هذا المثلث هي أعداد طبيعية متتابعة و علما أن طول أكبر ضلعي الزاوية القائمة هو x فإن طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو $(x-1)$ بينما طول الوتر هو $(x+1)$.

* بما أن المثلث قائم يكون لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:
$(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$ أي: $x^2-2x+1+x^2=x^2+2x+1$ و بالتالي:
$x^2-4x=0$ أي: $x^2-2x+1+x^2-x^2-2x-1=0$ و هذا يعني أن:
$x(x-4)=0$ أي: $x=0$ أو $x=4$.
القيمة $x=0$ غير مناسبة لأن في هذه الحالة يكون طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو $0-1=-1$ و نعلم أن الأطوال أعداد موجبة دائما. الحل الوحيد هو إذن: $x=4$ و في هذه الحالة فإن طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو $4-1=3$ بينما طول الوتر هو $4+1=5$.
نستنتج أن المثلث الوحيد الذي يجيب على السؤال هو المثلث المعرف في السؤال الأول.

حل المسألة4

1. مساحة المستطيل في الشكل الثاني هي: $9\times 4=36$ و مساحة المثلث غير المظلل هي: $\frac{(2x)x}{2}=x^2$ و بالتالي فمساحة الشكل المظلل هي: $A=36-x^2$

لدينا: $A=(6-x)(6+x)$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

2. مساحة المستطيل في الشكل الأول هي: $8\times 6=48$ و مساحة المثلث غير المظلل هي: $\frac{8\times(2x)}{2}=8x$ و بالتالي فمساحة الشكل المظلل هي: $A=48-8x$

لدينا: $A'=8(6-x)$

3. $A=A'$ يعني أن:

$(6-x)(6+x)=8(6-x)$ أي $(6-x)(6+x)-8(6-x)=0$

نتحصل على: $(6-x)\left[(6+x)-8\right]=0$ أي: $(6-x)(x-2)=0$

و هذا يعني : $6-x=0$ أو $x-2=0$ أي: $x=6$ أو $x=2$.

نلاحظ من الشكل أن العدد x يجب أن يكون اصغر من 3 و إلا لكان $2x>6$

تكون المساحتان A و A' متساويتين من أجل $x=2$.

تمارين إضافية

التمرين1: نعتبر العبارة الجبرية: $E=(2x-3)^2-(2x-3)(4x-5)$.

1. انشر ثم بسط العبارة E.
2. حلل العبارة E.
3. احسب قيمة E من اجل $x=\sqrt{5}$. تعطى النتيجة على الشكل $a+b\sqrt{5}$.
4. حل المعادلة: $E=0$.

التمرين2: نعتبر العبارتين الجبريتين: $A=(2x-1)^2-(2x-1)(-x-3)$

و $B=2x^2-9x+4$

1. حلل العبارة A.
2. بين أن: $A=B$.
3. احسب قيمة A من اجل $x=\frac{2}{3}$. تعطى النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.
4. حل المعادلة: $(2x-1)(x-4)=0$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

4 المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

أتذكر الأهم:

11. المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هي متباينات تكتب بعد تحويلها على أحد الأشكال الآتية: $ax > b$ ، $ax \leq b$ ، $ax \geq b$ حيث:

a و b عددان حقيقيان و x المجهول.

أمثلة:

* المتراجحة $2x < -1$ هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
* المتراجحة $-3x - 2 \geq 0$ هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد لأنه يمكن كتابتها على الشكل: $-3x \geq 2$.

12. حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

* حل متراجحة يعني إيجاد كل الأعداد x التي تحقق المتباينة.
* تسمى الأعداد التي تحقق المتباينة حلول المتراجحة.

مثال: نعتبر المعادلة: $3x - 5 \geq x + 3$

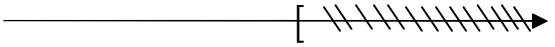
لدينا: $3x - 5 \geq x + 3$ يعني $3x - x \geq 3 + 5$ أي $2x \geq 8$ أي $x \geq \frac{8}{2}$ أي $x \geq 4$.

إذن حلول المتراجحة $3x - 5 \geq x + 3$ هي كل الأعداد الأكبر من أو تساوي 4.

13. تمثيل مجموعة حلول متراجحة على مستقيم مدرج

a و b عددان حقيقيان حيث $a > 0$.

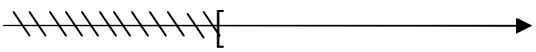
* حلول المتراجحة $ax < b$ هي الأعداد x التي تحقق $x < \frac{b}{a}$ و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



الحلول ممثلة في الجزء غير المشطب عليه

$\frac{b}{a}$

* حلول المتراجحة $ax \geq b$ هي الأعداد x التي تحقق $x \geq \frac{b}{a}$ و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



$\frac{b}{a}$

ملاحظة هامة جدا: إذا كان $a < 0$ نغير اتجاه المتباينة عند القسمة على a.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

أتدرب:

التمرين1: نعتبر المتراجحة التالية: $-5x+7>2x+21$

1. هل العدد 2 حل لهذه المتراجحة ؟
2. حل هذه المتراجحة ثم مثل حلولها على مستقيم مدرج.

التمرين2: حل المتراجحة التالية ثم مثل حلولها على مستقيم مدرج:

$\frac{2x+1}{3}-1\leq\frac{x-1}{2}$.

التمرين3:

1. حل المتراجحة $7x>8x-3$ ثم مثل مجموعة حلولها على مستقيم مدرج.
2. حل المتراجحة $-2x+1>-5x-2$ ثم مثل مجموعة حلولها على مستقيم مدرج.
3. مثل على مستقيم مدرج مجموعة حلول الجملة التالية:

$$\begin{cases}7x>8x-3\\-2x+1>-5x-2\end{cases}$$

أنمي كفاءاتي:

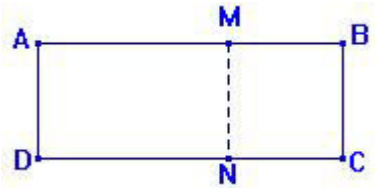
المسألة1: يقترح أحد النوادي لكراء أشرطة الفيديو على زبنائه حلين هما:

الحل الأول: يشارك الزبون بمبلغ $150\,DA$ و يدفع مبلغ $20\,DA$ عند كراء كل شريط.

الحل الثاني: لا يشارك الزبون بأي مبلغ و يدفع مبلغ $32\,DA$ عند كراء كل شريط.

انطلاقا من أي عدد للأشرطة المقتناة يكون أفضل للزبون اختيار الحل الأول.

المسألة2: يمثل المستطيل $ABCD$ قاعة يمكن تقسيمها إلى قاعتين مستطيلتين بواسطة جدار متحرك ممثل بالقطعة $[MN]$.



belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

يعطى: $AB = 30\,m$ ، $AD = 10\,m$

و $MB = x\ m$.

عين قيم x التي يكون من أجلها ربع مساحة القاعة $AMND$ أصغر من مساحة القاعة $MBCN$.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين1

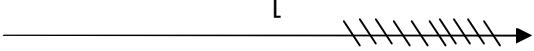
1. بتعويض العدد 2 في المتراجحة يكون لدينا: $-5\times 2+7 > 2\times 2+21$

أي: $-3 > 25$ و بما أن هذه المتباينة خاطئة فإن 2 ليس حلا للمتراجحة.

2. $-5x+7 > 2x+21$ يعني $-5x-2x > 21-7$ أي $-7x > 14$

بقسمة طرفي المتباينة على العدد (-7) و علما أن $-7 < 0$ نتحصل بعد تغيير اتجاهها على $x < -2$.

حلول المعادلة هي إذن كل الأعداد الأصغر تماما من العدد (-2) وتمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



حل التمرين2

$\frac{x-1}{2} - 1 \le \frac{2x+1}{3}$ يعني $\frac{x-1}{2} \le \frac{2x+1-3}{3}$ أي $\frac{x-1}{2} \le \frac{2x-2}{3}$

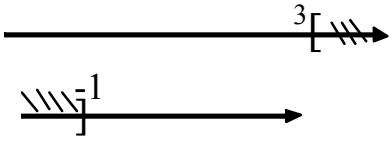
و هذا يعني $3(x-1) \le 2(2x-2)$ أي $3x-3 \le 4x-4$

أي $-3+4 \le 4x-3x$

و هذا يعني $x \le 1$. إذن حلول المعادلة هي إذن كل الأعداد الأصغر من أو تساوي العدد1 و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:

حل التمرين3

1. $7x > 8x-3$ يعني $x < 3$ و لدينا



belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

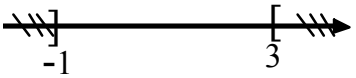
حل المسألة1

2. $-2x+1>-5x-2$ يعني $x>-1$ و لدينا

3. حلول الجملة $\begin{cases}7x>8x-3\\-2x+1>-5x-2\end{cases}$ هي الحلول المشتركة بين

المتراجحتين $7x>8x-3$ و $-2x+1>-5x-2$ و بالتالي

فحلولها هي الأعداد المحصورة بين العددين -1 و 3 و لدينا:



ليكن x عدد الأشرطة المقتناة.

الحل الأول: المبلغ المدفوع عند كراء x شريط فيديو هو: $150+20x$

الحل الثاني: المبلغ المدفوع عند كراء x شريط فيديو هو: $32x$

يكون الحل الأول أفضل من الحل الثاني إذا كان المبلغ المدفوع في الحل الأول أقل منه في الحل الثاني و يؤول ذلك إلى حل المتراجحة: $32x>150+20x$

$32x>150+20x$ يعني $32x-20x>150$ أي $x>\frac{150}{12}$ أي $x>12,5$.

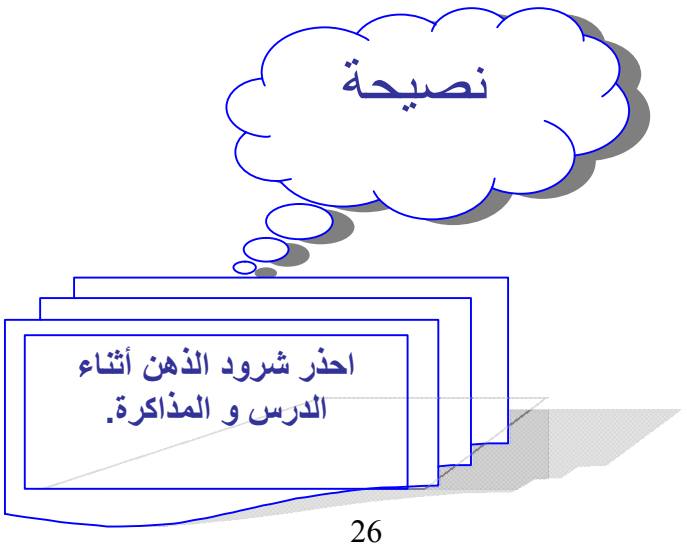
و هكذا يكون أفضل للزبون اختيار الحل الأول انطلاقا من كراء 13 شريط فيديو.

حل المسألة2

مساحة $AMND$ هي $10(30-x)\,m^2$ بينما مساحة $MBCN$ هي $10x\ m^2$.

يكون ربع مساحة $AMND$ أصغر من مساحة $MBCN$ يعني $\frac{10(30-x)}{4}<10x$

و هذا يعني $300-10x<40x$ أي $300<50x$ و بالتالي $x>6$.



belhocine : https://prof27math.weebly.com/