2 الحســـاب عــلــى الجــذور

أتذكر الأهم:

5. الجذر التربيعي لعدد موجب

تعريف: الجذر التربيعي للعدد الموجب a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a و نرمز له بالرمز $\sqrt{a}$. لدينا: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

مثال: $\sqrt{2}$ هو الجذر التربيعي للعدد 2. لدينا: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

6. المعادلة من الشكل $x^2 = a$

- إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل حلولا .
- إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة $x^2 = 0$ تقبل حلا وحيدا و هو 0.
- إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلين و هما $-\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}$.

مثال: للمعادلة $x^2 = 3$ حلان هما $-\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$.

7. خواص

الخاصية1: إذا كان a و b عددين موجبين فإن: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

الخاصية2: إذا كان a و b عددين موجبين حيث $b \neq 0$ فإن: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

الخاصية3: إذا كان a عددا موجبا فإن: $\sqrt{a^2} = a$.

الخاصية4: إذا كان a و b عددين موجبين فإن: $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$.

أمثلة: $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ ، $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{14}{7}} = \sqrt{2}$ ، $\sqrt{36} = 6$ ، $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

ملاحظة: إذا كان a و b عددين موجبين غير معدومين حيث $a < b$ فإن:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{و} \quad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

مثال: لدينا من جهة $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ و لدينا من جهة ثانية $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

و بالتالي: $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

لدينا من جهة $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ و لدينا من جهة ثانية $\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$

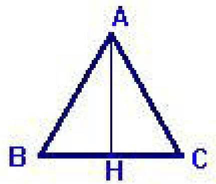
و بالتالي: $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100}-\sqrt{36}$

تمارين ومسائل

أتدرب:

التمرين1: علما أن مساحة قاعة مربعة الشكل هي $18,49\,m^2$ عين بالمتر طول ضلعها.

التمرين2:



ABC مثلث متقايس الأضلاع و لتكن النقطة H منتصف القطعة $[BC]$.

1. أحسب الطول AH إذا علمت أن $BC=7cm$.
2. أحسب الطول AH إذا علمت أن $BC=acm$.

التمرين3: نعتبر العددين A و B بحيث:

$A=\sqrt{25}+\sqrt{20}+\sqrt{80}$ و $B=\left(\sqrt{5}+2\right)^2-\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$.

1. أكتب العددين A و B على الشكل $a+b\sqrt{5}$ حيث a و b عددان طبيعيان.
2. عين القيمة المدورة إلى 10^{-2} للعدد A.
3. أحسب قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد B.

أنمي كفاءاتي:

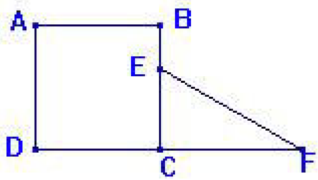
المسألة1: نهدف إلى إثبات أن العدد $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا. إذا كان $\sqrt{2}$ عددا ناطقا فإنه يكتب على شكل كسر غير قابل للاختزال $\frac{p}{q}$ حيث p و q عددان طبيعيان غير معدومين.

1. تحقق أن $p^2=2q^2$ ثم استنتج أن p^2 عدد زوجي.
2. بين انه إذا كان p زوجيا يكون p^2 زوجيا و إذا كان p فرديا يكون p^2 فرديا ثم استنتج أن العدد p زوجي.
3. بوضع $p=2p'$ و بإتباع نفس منهجية السؤال السابق أثبت أن العدد q زوجي.

4. اشرح لماذا أجوبة السؤالين 2 و 3 مناقضة للمعطيات ثم استنتج أن $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا.

المسألة2:

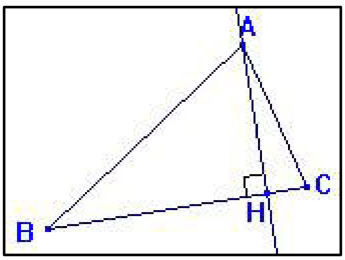
$ABCD$ مربع طول ضلعه $x\,cm$. ECF مثلث قائم في النقطة C. النقطة E نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ و $FC = 4cm$.



1. عبر عن A مساحة $ABCD$ بواسطة x ثم أحسب A من اجل $x = 2+\sqrt{2}$.
2. * نفرض $x \geq 1$ و $BE = 0,5cm$.
   احسب A' مساحة المثلث ECF بواسطة x.
   * نضع $S = A + A'$. أحسب S بواسطة x ثم تحقق أن: $S = x^2 + 2x - 1$.
   * أحسب S من أجل $x = 2+\sqrt{2}$. تعطى النتيجة على الشكل $a + b\sqrt{2}$.

المسألة3:

ABC مثلث و H المسقط العمودي لِـ A على (BC)
حيث: $BH = 9\sqrt{3}$، $HC = 5\sqrt{3}$ و $AH = 12\sqrt{3}$.



1. بين أن: $AB = 15\sqrt{3}$ و أن: $AC = 13\sqrt{3}$.
2. أحسب P محيط المثلث ABC.
3. أحسب S مساحة المثلث ABC.
4. هل المثلث ABC قائم في النقطة A؟ علل.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين1

إذا رمزنا إلى طول ضلع القاعة بالرمز x يكون لدينا: $x^2 = 18,49$ لأن مساحة المربع هي x^2. للمعادلة $x^2 = 18,49$ حلان هما $-4,3$ و $4,3$. و علما أن الأطوال أعداد موجبة
فإن $x = 4,3$. و هكذا طول ضلع القاعة المربعة الشكل هو $4,3m$.

حل التمرين2

المثلث AHC قائم في النقطة H. لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:
$AC^2 = AH^2 + HC^2$ و منه: $AH^2 = AC^2 - HC^2$

بما أن H منتصف $[BC]$ فإن: $HC = \frac{BC}{2}$ و بالتالي: $HC^2 = \frac{BC^2}{4}$

و علما أن: $AC = BC$ فإن: $AH^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{2^2}$ أي: $AH^2 = \frac{3BC^2}{2^2}$

1. لدينا: $AH^2 = \frac{3\times 7^2}{2^2}$ و منه: $AH = \sqrt{\frac{3\times 7^2}{2^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

2. لدينا: $AH^2 = \frac{3\times a^2}{2^2}$ و منه: $AH = \sqrt{\frac{3\times a^2}{2^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

حل التمرين 3

.1

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$$
$$A = 5 + \sqrt{4\times 5} + \sqrt{16\times 5}$$
$$A = 5 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$
$$A = 5 + 6\sqrt{5}$$

و

$$B = \left(\sqrt{5}+2\right)^2 - \left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$$
$$B = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\times\sqrt{5}\times 2 + 2^2 - \left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1\right)$$
$$B = 5 + 4\sqrt{5} + 4 - 5 + 1$$
$$B = 5 + 4\sqrt{5}$$

2.باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: $A = 18,41640...$.
إذن $18,42$ هي القيمة المدورة إلى 10^{-2} للعدد A لأن $6 \geq 5$.

3.باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: $B = 13,94427...$.
إذن $13,94$ قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد B.

حل المسألة 1

1.بوضع: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ يكون لدينا: $\frac{p^2}{q^2} = 2$ و منه: $p^2 = 2q^2$. بما أن p^2 يكتب على الشكل: $2k$ فإن p^2 عدد زوجي.

2. ٭نفرض أن p زوجي و منه: $p = 2k$ حيث k عدد طبيعي و بالتالي: $p^2 = 4k^2$
و هكذا $p^2 = 2\left(2k^2\right) = 2k'$ مع $k' = 2k^2$. إذن: p^2 عدد زوجي.

* نفرض أن p فرديا و منه: $p=2k+1$ حيث k عدد طبيعي

و بالتالي: $p^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

و هكذا $p^2=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$ مع $k'=2k^2+2k$. إذن: p^2 عدد فردي.

و منه لو كان p عددا فرديا لكان p^2 عددا فرديا و بما أن p^2 زوجي فإن p زوجي.

3. بما أن p زوجي نضع $p=2p'$ و منه: $p^2=4p'^2$ و بعد التعويض في العلاقة: $p^2=2q^2$ نتحصل على $4p'^2=2q^2$ و نجد هكذا: $q^2=2p'^2$.

و باستعمال نتائج السؤال الثاني نستنتج أن العدد q زوجي لأنه في نفس وضعية p.

4. استنتجنا في السؤالين 2 و 3 أن العددين p و q زوجيان و بالتالي فإن العدد 2 قاسم مشترك لهما و هذا يعني أن الكسر $\frac{p}{q}$ غير قابل للاختزال و هذا مناقض للفرضية " $\frac{p}{q}$ كسر غير قابل للاختزال " إذن $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا.

حل المسألة2

1. $A=x^2$. **من أجل** $x=2+\sqrt{2}$ لدينا: $A=(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}$.

2. $A'=\dfrac{CF\times CE}{2}=\dfrac{4\times(x-0,5)}{2}=2(x-0,5)$ * . **و بالتالي:** $A'=2x-1$.

* **لدينا:** $S=x^2+(2x-1)$ و منه: $S=x^2+2x-1$.

* $S=(2+\sqrt{2})^2+2(2+\sqrt{2})-1=4+4\sqrt{2}+2+4+2\sqrt{2}-1$

و منه: $S=9+6\sqrt{2}$.

حل المسألة3

1. * بما أن المثلث ABH قائم في النقطة H يكون لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس: $AB^2=BH^2+AH^2$ أي:

$$AB^2=(9\sqrt{3})^2+(12\sqrt{3})^2=9^2\times3+12^2\times3$$

و منه: $AB^2=225\times3=15^2\times3$ و بالتالي: $AB=\sqrt{15^2\times3}$ أي: $AB=15\sqrt{3}$.

* بما أن المثلث ACH قائم في النقطة H يكون لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:

$AC^2=HC^2+AH^2$ أي: $AC^2=(5\sqrt{3})^2+(12\sqrt{3})^2=5^2\times3+12^2\times3$

و منه: $AC^2=169\times3=13^2\times3$ و بالتالي: $AC=\sqrt{13^2\times3}$ أي: $AC=13\sqrt{3}$.

2. لدينا: $BC=BH+HC$ و بالتالي: $BC=9\sqrt{3}+12\sqrt{3}=21\sqrt{3}$.

نعلم أن: $P=AB+BC+CA$ و منه: $P=15\sqrt{3}+21\sqrt{3}+13\sqrt{3}$.

و هكذا نجد أن: $P = 49\sqrt{3}$

3. مساحة المثلث ABC هي: $S = \dfrac{BC \times AH}{2}$. و بالتالي:

$S = \dfrac{21\sqrt{3} \times 12\sqrt{3}}{2} = 21 \times 6 \times \left(\sqrt{3}\right)^2$ و هكذا نجد أن: $S = 378$.

4. لدينا من جهة: $BC^2 = \left(21\sqrt{3}\right)^2 = 1323$ و لدينا من جهة ثانية:

$$AB^2 + AC^2 = 15^2 \times 3 + 13^2 \times 3 = 1182$$

نلاحظ أن: $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ و بالتالي فالمثلث ABC ليس قائما في النقطة A.

نصيحة

أحسن استغلال وقتك
واجعل وقتا للجد و الاجتهاد
ووقتا للعب و المرح.