القسمة الإقليدية

إذا كان a و b عددين طبيعيين غير معدومين بحيث $a \geqslant b$ **فإنه** يوجد عددان طبيعيان q و r بحيث $\boxed{a = bq + r}$ مع $0 \leqslant r < b$.
هذه المساواة تعبر عن **القسمة الإقليدية** للعدد a على العدد b حيث b هو القاسم، q حاصل القسمة و r هو الباقي.

8 7 6	6 7
− 6 7	1 3
2 0 6	
− 2 0 1	
5	

$876 = 67 \times 13 + 5$

القواسم و المضاعفات

إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b معدوما أي إذا وُجد عدد طبيعي q بحيث $a = b \times q$ **فإن** :
(a **مضاعف لِـ** b) و (b **قاسم لِـ** a).

$\boxed{156 = 12 \times 13}$ {
156 مضاعف لِـ 12 & 12 قاسم لِـ 156
156 مضاعف لِـ 13 & 13 قاسم لِـ 156

القاسم المشترك الأكبر (pgcd)

العدد 1 قاسم مشترك لكل عددين طبيعيين (غير معدومين).
نسمي **القاسم المشترك الأكبر** لعددين غير معدومين أكبر قاسم مشترك لهذين العددين و الذي نرمز إليه بالرمز $\text{pgcd}(a;b)$.

العددان الأوليان فيما بينهما

نقول عن عددين أنهما **أوليان فيما بينهما** إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1.
الكسر **غير القابل للاختزال** هو الكسر الذي بسطه و مقامه أوليان فيما بينهما.
لكتابة كسر في الشكل غير القابل للاختزال، نقسم بسطه و مقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

خوارزمية عمليات الطرح المتتالية	خوارزمية إقليدس (القسمات المتتالية)
$1752 - 1241 = 511$ $1241 - 511 = 730$ $730 - 511 = 219$ $511 - 219 = 292$ $292 - 219 = 73$ $219 - 73 = 146$ $146 - 73 = \boxed{73}$ $73 - 73 = 0$ آخر فرقٍ غير معدوم هو 73 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(1752;1241) = 73}$.	$1752 = 1241 \times 1 + 511$ $1241 = 511 \times 2 + 219$ $511 = 219 \times 2 + \boxed{73}$ $219 = 73 \times 3 + 0$ آخر باقٍ غير معدوم هو 73 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(1752;1241) = 73}$.

العددان 1752 و 1241 **ليسا** أوليين فيما بينهما لأن $\text{pgcd}(1752;1241) \neq 1$.

كتابة الكسر $\frac{1241}{1752}$ على الشكل غير القابل للاختزال :

$$\frac{1241}{1752} = \frac{1241 \div \mathbf{73}}{1752 \div \mathbf{73}} = \frac{17}{24}$$

القسمة الإقليدية

إذا كان a و b عددين طبيعيين غير معدومين بحيث $a \geqslant b$ **فإنه** يوجد عددان طبيعيان q و r بحيث $\boxed{a = bq + r}$ مع $0 \leqslant r < b$.
هذه المساواة تعبر عن **القسمة الإقليدية** للعدد a على العدد b حيث b هو القاسم، q حاصل القسمة و r هو الباقي.

8 7 6	6 7
− 6 7	1 3
2 0 6	
− 2 0 1	
5	

$876 = 67 \times 13 + 5$

القواسم و المضاعفات

إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b معدوما أي إذا وُجد عدد طبيعي q بحيث $a = b \times q$ **فإن** :
(a **مضاعف لِـ** b) و (b **قاسم لِـ** a).

$\boxed{156 = 12 \times 13}$ {
156 مضاعف لِـ 12 & 12 قاسم لِـ 156
156 مضاعف لِـ 13 & 13 قاسم لِـ 156

القاسم المشترك الأكبر (pgcd)

العدد 1 قاسم مشترك لكل عددين طبيعيين (غير معدومين).
نسمي **القاسم المشترك الأكبر** لعددين غير معدومين أكبر قاسم مشترك لهذين العددين و الذي نرمز إليه بالرمز $\text{pgcd}(a;b)$.

العددان الأوليان فيما بينهما

نقول عن عددين أنهما **أوليان فيما بينهما** إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1.
الكسر **غير القابل للاختزال** هو الكسر الذي بسطه و مقامه أوليان فيما بينهما.
لكتابة كسر في الشكل غير القابل للاختزال، نقسم بسطه و مقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

خوارزمية عمليات الطرح المتتالية	خوارزمية إقليدس (القسمات المتتالية)
$1752 - 1241 = 511$ $1241 - 511 = 730$ $730 - 511 = 219$ $511 - 219 = 292$ $292 - 219 = 73$ $219 - 73 = 146$ $146 - 73 = \boxed{73}$ $73 - 73 = 0$ آخر فرقٍ غير معدوم هو 73 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(1752;1241) = 73}$.	$1752 = 1241 \times 1 + 511$ $1241 = 511 \times 2 + 219$ $511 = 219 \times 2 + \boxed{73}$ $219 = 73 \times 3 + 0$ آخر باقٍ غير معدوم هو 73 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(1752;1241) = 73}$.

العددان 1752 و 1241 **ليسا** أوليين فيما بينهما لأن $\text{pgcd}(1752;1241) \neq 1$.

كتابة الكسر $\frac{1241}{1752}$ على الشكل غير القابل للاختزال :

$$\frac{1241}{1752} = \frac{1241 \div \mathbf{73}}{1752 \div \mathbf{73}} = \frac{17}{24}$$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

مسألة (8 صفحة 20)

نريد غرس أشجار على محيط حديقة مثلثة الشكل على أن توجد شجرة في كل ركن من أركان الحديقة، و أن تكون المسافة التي تفصل الأشجار المتجاورة متساوية (و عددا طبيعيا).

(1) ما هي أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين (أو ما هو أقل عدد ممكن من الأشجار) إذا علمت أن الأبعاد الثلاثة للحديقة هي 42m ، 70m و 98m ؟

(2) ما هو عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول هذه الحديقة ؟

(1) نسمي d المسافة (بالمتر) التي تفصل بين شجرتين متجاورتين.

حسب المعطيات، d عدد طبيعي.

حتى نغرس أقل عدد ممكن من الأشجار يجب أن تكون المسافة d أكبر ما يمكن.

و بما أنه توجد شجرة في كل ركن فإن العدد d يقسم أبعاد الحديقة أي أن d قاسم مشترك للأعداد 42 70 98.

و بما أننا نبحث عن أكبر مسافة ممكنة فإن : $d = \text{pgcd}(42;70;98)$.

- نبحث أولا عن $pgcd(42;70)$:

$70 = 42 \times 1 + 28$

$42 = 28 \times 1 + \boxed{14}$

$28 = 14 \times 2 + 0$

آخر باقٍ غير معدوم هو 14 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(42;70) = 14}$.

- لدينا : $\text{pgcd}(42;70;98) = \text{pgcd}(\mathbf{14};98)$.

$98 = 14 \times 7 + 0$

هذا يعني أن 14 قاسم للعدد 98 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(14;98) = 14}$.

لدينا إذاً : $\text{pgcd}(42;70;98) = \text{pgcd}(14;98) = \mathbf{14}$.

الجواب : المسافة التي تفصل بين شجرتين متتاليتين هي **14m**.

(2) بما أن :

$98 = 14 \times \mathbf{7}$

$70 = 14 \times \mathbf{5}$

$42 = 14 \times \mathbf{3}$

فإن عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول هذه الحديقة هو 15 شجرة.

$\mathbf{7} + \mathbf{5} + \mathbf{3} = 15$

(1) هل العددان 192 و 236 أوليان فيما بينهما ؟ علل.

(2) x و y عددان طبيعيان بحيث $236x = 192y$.

اكتب الكسر $\frac{x}{y}$ في الشكل غير القابل للاختزال.

(1) العددان 236 و 192 ليسا أوليين فيما بينهما لأنهما زوجيان (يقبلان القسمة على 2).

(2) $236x = 192y$ منه $\frac{x}{y} = \frac{192}{236}$ نحسب $\text{pgcd}(192;236)$. لدينا :

$236 = 192 \times 1 + 44$

$192 = 44 \times 4 + 16$

$44 = 16 \times 2 + 12$

$16 = 12 \times 1 + \boxed{4}$

$12 = 4 \times 3 + 0$

آخر باقٍ غير معدوم هو 4 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(192;236) = 4}$.

نستنتج إذاً أن : $\frac{x}{y} = \frac{192}{236} = \frac{192\div\mathbf{4}}{236\div\mathbf{4}} = \frac{48}{59}$

مسألة (8 صفحة 20)

نريد غرس أشجار على محيط حديقة مثلثة الشكل على أن توجد شجرة في كل ركن من أركان الحديقة، و أن تكون المسافة التي تفصل الأشجار المتجاورة متساوية (و عددا طبيعيا).

(1) ما هي أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين (أو ما هو أقل عدد ممكن من الأشجار) إذا علمت أن الأبعاد الثلاثة للحديقة هي 42m ، 70m و 98m ؟

(2) ما هو عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول هذه الحديقة ؟

(1) نسمي d المسافة (بالمتر) التي تفصل بين شجرتين متجاورتين.

حسب المعطيات، d عدد طبيعي.

حتى نغرس أقل عدد ممكن من الأشجار يجب أن تكون المسافة d أكبر ما يمكن.

و بما أنه توجد شجرة في كل ركن فإن العدد d يقسم أبعاد الحديقة أي أن d قاسم مشترك للأعداد 42 70 98.

و بما أننا نبحث عن أكبر مسافة ممكنة فإن : $d = \text{pgcd}(42;70;98)$.

- نبحث أولا عن $pgcd(42;70)$:

$70 = 42 \times 1 + 28$

$42 = 28 \times 1 + \boxed{14}$

$28 = 14 \times 2 + 0$

آخر باقٍ غير معدوم هو 14 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(42;70) = 14}$.

- لدينا : $\text{pgcd}(42;70;98) = \text{pgcd}(\mathbf{14};98)$.

$98 = 14 \times 7 + 0$

هذا يعني أن 14 قاسم للعدد 98 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(14;98) = 14}$.

لدينا إذاً : $\text{pgcd}(42;70;98) = \text{pgcd}(14;98) = \mathbf{14}$.

الجواب : المسافة التي تفصل بين شجرتين متتاليتين هي **14m**.

(2) بما أن :

$98 = 14 \times \mathbf{7}$

$70 = 14 \times \mathbf{5}$

$42 = 14 \times \mathbf{3}$

فإن عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول هذه الحديقة هو 15 شجرة.

$\mathbf{7} + \mathbf{5} + \mathbf{3} = 15$

(1) هل العددان 192 و 236 أوليان فيما بينهما ؟ علل.

(2) x و y عددان طبيعيان بحيث $236x = 192y$.

اكتب الكسر $\frac{x}{y}$ في الشكل غير القابل للاختزال.

(1) العددان 236 و 192 ليسا أوليين فيما بينهما لأنهما زوجيان (يقبلان القسمة على 2).

(2) $236x = 192y$ منه $\frac{x}{y} = \frac{192}{236}$ نحسب $\text{pgcd}(192;236)$. لدينا :

$236 = 192 \times 1 + 44$

$192 = 44 \times 4 + 16$

$44 = 16 \times 2 + 12$

$16 = 12 \times 1 + \boxed{4}$

$12 = 4 \times 3 + 0$

آخر باقٍ غير معدوم هو 4 إذاً : $\boxed{\text{pgcd}(192;236) = 4}$.

نستنتج إذاً أن : $\frac{x}{y} = \frac{192}{236} = \frac{192\div\mathbf{4}}{236\div\mathbf{4}} = \frac{48}{59}$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/