1 قواسم عدد طبيعي- القاسم المشترك الأكبر- الكسور غير القابلة للاختزال

أتذكر الأهم:

1. قاسم عدد طبيعي

تعريف: a، b عددان طبيعيان حيث: $b \neq 0$.
(b قاسم لِـ a) معناه (يوجد عدد طبيعي k حيث: $a = k \times b$)
نقول أيضا أن a يقبل القسمة على b أو أن b يقسم a أو أن a مضاعف لِـ b.

مثال: العدد 3 يقسم العدد 81 لأن $81 = 27 \times 3$
ملاحظة: العدد 1 يقسم كل الأعداد الطبيعية.

2. خواص قاسم عدد طبيعي

a، b عددان طبيعيان حيث: $a > b$ و n عدد طبيعي غير معدوم.
الخاصية1: إذا قسم n كلا من a و b فإنه يقسم كلا من $(a+b)$ و $(a-b)$.
الخاصية2: إذا قسم n كلا من a و b فإنه يقسم باقي القسمة الإقليدية لِـ a على b.

3. القاسم المشترك الأكبر

تعريف: نسمي القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين أكبر قواسمهما المشتركة.

مثال: القواسم المشتركة للعددين 12 و 30 هي: 1، 2، 3 و 6 ومنه: $PGCD(30;12) = 6$.

خاصية: مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

4. الكسور غير القابلة للاختزال

تعريف1: (a و b أوليان فيما بينهما) معناه ($PGCD(a;b) = 1$).

تعريف2: (الكسر $(b \neq 0)$ $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال) معناه (a و b أوليان فيما بينهما).

مثال: العددان 25 و 26 أوليان فيما بينهما ومنه الكسر $\frac{25}{26}$ غير قابل للاختزال.

أتدرب:

التمرين1:

1- حدد المساواة التي تعبر عن القسمة الإقليدية للعدد 1512 على 21 .

2- أكتب $\frac{720}{1512}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين2:

نعتبر العددين الطبيعيين 63 و 105.

1. عين قائمة قواسم كل من هذين العددين.
2. ما هو القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين؟ هل هما أوليان فيما بينهما؟ برر.
3. اجعل الكسر $\frac{63}{105}$ غير قابل للاختزال.

التمرين3:

نعتبر العددين 286 و 130.

1- باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD\,(286;130)$.

2- ليكن الكسر $A = \frac{286}{130}$. أكتب A على شكل كسر غير قابل للاختزال.

أنمي كفاءاتي:

المسألة1:

يعرض بائع زهور للبيع 75 زهرة نرجس و 90 زهرة أقحوان.

1. باستعمال كل الزهور، هل يمكنه تشكيل 5 باقات متماثلة؟ 6 باقات؟
2. ما هو أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور؟ ما هو عدد زهور النرجس و زهور الأقحوان في كل باقة؟

المسألة2:

نعتبر العددين 3073 و 1317.

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317.
2. يشارك تلاميذ في مسابقة في الرياضيات حسب الفرق. يوجد 3073 تلميذة و 1317 تلميذ. يجب تكوين فرق متماثلة (لها نفس عدد التلاميذ و نفس التوزيع بين البنات و الأولاد) بتعيين كل مشارك في فريق من الفرق.

أ) ما هو أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها؟

ب) عين في هذه الحالة تشكيلة كل فريق.(عدد البنات و عدد الأولاد) .

المسألة3:

نعتبر العددين 540 و 300 .

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300 .
2. نريد أن نفرش قاعة مستطيلة الشكل طولها $5,40m$ و عرضها $3m$ بزرابي مربعة الشكل و كلها متماثلة.
   - ما هو طول كل زربية حتى يكون عدد الزرابي المستعملة أصغر ما يمكن؟
   - عين حينئذ عدد الزرابي المستعملة.

المسألة4:

يملك أحد هواة الطوابع البريدية 1631 طابعا جزائريا و 932 طابعا أجنبيا. يريد بيع كل طوابعه على شكل مجموعات متماثلة(لها نفس عدد الطوابع و نفس التوزيع بين الطوابع الجزائرية و الأجنبية).

1. عين أكبر عدد من المجموعات التي يمكن تشكيلها.
2. عين حينئذ عدد الطوابع الجزائرية و عدد الطوابع الأجنبية في كل مجموعة.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين1

1. $1512 = 21\times 72 + 0$. حاصل القسمة هو 72 بينما الباقي 0 .
2. لدينا: $1512 = 21\times 72$ و $720 = 10\times 72$ و بالتالي:

$\frac{10}{21} = \frac{10\times 72}{21\times 72} = \frac{720}{1512}$. الكسر $\frac{10}{21}$ غير قابل للاختزال.

حل التمرين2

1. قواسم العدد 63 هي: 1، 3، 7، 9، 21، 63 .
   قواسم العدد 105 هي: 1، 3، 5، 7، 15، 21، 35، 105.
2. نلاحظ من القائمتين أن قواسمهما المشتركة هي: 1، 3، 7، 21

و بالتالي فإن:

$PGCD(105;63) = 21$. و بما أن $PGCD(105;63) \neq 1$ فإن العددين 105 و 63 ليسا أوليين فيما بينهما.

3. لدينا: $105 = 21\times 5$ و $63 = 21\times 3$ و منه: $\frac{3}{5} = \frac{21\times 3}{21\times 5} = \frac{63}{105}$.

الكسر $\frac{3}{5}$ غير قابل للاختزال.

حل التمرين 3

.1

	2		← الحاصل
286	130	26	← القاسم و المقسوم
	26	0	← الباقي

$$286 = 130 \times 2 + 26$$

$$130 = 26 \times 5 + 0$$

آخر باق غير معدوم للقسمات الإقليدية المتتابعة هو 26

و بالتالي: $PGCD\,(286;130) = 26$

2. حسب نتيجة السؤال الأول لدينا: $286 = 26 \times 11$ و $130 = 26 \times 5$ و منه:

$$A = \frac{286}{130} = \frac{26 \times 11}{26 \times 5} = \frac{11}{5}$$

الكسر $\frac{11}{5}$ غير قابل للاختزال.

حل المسألة 1

1. عدد الزهور المعروضة للبيع هو: $165 = 90 + 75$. لدينا: $165 : 5 = 33$
و بالتالي يمكن البائع تشكيل 5 باقات متماثلة بحيث تشمل كل باقة 15 زهرة نرجس و 18 زهرة أقحوان لأن: $75 : 5 = 15$ و $90 : 5 = 18$.

في حين: $165 : 6 = 27.5$
و بالتالي لا يمكن للبائع تشكيل 6 باقات متماثلة(العدد 27.5 ليس عددا طبيعيا).

2. إذا رمزنا إلى أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور بالرمز n فيجب أن يقسم n كلا من العددين 75 و 90 و بالتالي فإن n قاسم مشترك للعددين 75 و 90 و بالإضافة إلى ذلك فإن n هو أكبر هذه القواسم.
إذن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 75 و 90. لنحسب باستعمال مثلا خوارزمية إقليدس $PGCD\,(90,75)$.

$$90 = 75 \times 1 + 15$$

$$75 = 15 \times 5 + 0$$

آخر باق غير معدوم هو 15 و منه: $PGCD\,(90,75) = 15$.

إذن أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور هو: 15.
لدينا: $75 : 15 = 5$ و $90 : 15 = 6$ و بالتالي فعدد زهور النرجس في كل باقة هو: 5 بينما عدد زهور الأقحوان في كل باقة هو: 6.
نجد في كل باقة 11 زهرة.

حل المسألة2

1. لنحسب باستعمال مثلا خوارزمية إقليدس $PGCD\left(3073,1317\right)$.

لدينا: $3073 = 1317\times 2 + 439$
$1317 = 439\times 3 + 0$
آخر باق غير معدوم هو 439 ومنه:

$$PGCD\left(3073,1317\right) = 439$$

2. ا) بما أن كل الفرق متماثلة و أن كل تلميذ سواء كان بنتا أو ولدا ينتمي إلى إحدى الفرق فإن عدد الفرق يقسم كلا من عدد الأولاد و عدد البنات أي يقسم 3073 و 1317.
و بما أننا نبحث عن أكبر عدد من الفرق فإن هذا العدد هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317 أي 439. و بالتالي فإن أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها هو 439.

ب) عدد البنات في كل فريق هو: $3073\div 439 = 7$.
عدد الأولاد في كل فريق هو: $1317\div 439 = 3$.
يتشكل كل فريق من 10 تلاميذ من بينهم 7 بنات و 3 أولاد.

حل المسألة3

1. لتعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300 نستعمل مثلا تقنية عمليات الطرح المتتابعة و التي ترتكز على القاعدة التالية:

$PGCD\left(a;b\right) = PGCD\left(b;a-b\right)$ علما أن: $a > b$

$540 - 300 = 240$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(300;240\right)$

$300 - 240 = 60$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(240;60\right)$

$240 - 60 = 180$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(180;60\right)$

$180 - 60 = 120$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(120;60\right)$

$120 - 60 = 60$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(60;60\right)$

و هكذا نجد أن: $PGCD\left(540;300\right) = 60$

2. • طول القاعة هو $540cm$ و عرضها $300cm$. لتفريش القاعة و بدون استعمال أجزاء من زرابي يجب أن يكون ضلع الزربية قاسما لكل من العددين 540 و 300 و ليكون عدد الزرابي المستعملة أصغر ما يمكن يجب أن تكون الزرابي أكبر ما يمكن و بالتالي يجب أن يكون ضلع الزربية القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300. و هكذا فإن طول ضلع كل زربية هو: $60cm$.
• عدد الزرابي على طول القاعة هو: $540\div 60 = 9$ بينما عددها على عرض القاعة هو: $300\div 60 = 5$. و بالتالي فعدد الزرابي المطلوب هو: $9\times 5 = 45$.

حل المسألة4

1. إذا رمزنا إلى أكبر عدد ممكن من المجموعات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الطوابع بالرمز n فيجب أن يقسم n كل 1631 و 932 و بالتالي فإن n قاسم مشترك للعددين 1631 و 932
و بالإضافة إلى ذلك فإن n هو أكبر هذه القواسم. إذن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 1631 و 932. باستعمال خوارزمية إقليدس يكون:

لدينا: $1631 = 932 \times 1 + 699$

$962 = 699 \times 1 = 233$

$699 = 233 \times 3 + 0$

و منه: $PGCD\,(1631;932) = 233$

و بالتالي فإن أكبر عدد للمجموعات التي يمكن للهاوي تشكيلها هو: 233 .

2. لدينا: $1631 \div 233 = 7$ و $932 \div 233 = 4$
في كل مجموعة يوجد إذن 7 طوابع جزائرية و 4 طوابع أجنبية.

نصيحة

نظم جدولا للمذاكرة