يجد أغلب التلاميذ مشكلة في اختيار طريقة ازالة حالة عدم التعيين ، سأحاول في هذا الملف تفصيل هذا على شكل مجموعات و هذا حسب حالة عدم التعيين المتحصل عليها و شكل عبارة الدالة .
في الأخير أنصح بالمجموعة الأولى ، أما البقية حاول التمرن من أجل تحسين مستواك و رفع مستوى ذكائك .

الأستاذ بلجودي حمو

المجموعة الأولى :

نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود نحسب نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

أمثلــة :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^3=-\infty$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^4=-\infty$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^4=-\infty$

نهاية دالة ناطقة :

نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

أمثلــة :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$
2. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-2x^2+5x-1}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^2}=\dfrac{-2}{3}$

نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي a:

أمثلــة :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{-2x-1}{1-x}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{2x^3+2x-1}{x-1}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

الأستاذ بلجودي حمو

المجموعة الثانية :

حساب النهاية عند عدد و الحصول على ح.ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$: و هنا نختار الطريقة حسب شكل العبارة :

1-دالة ناطقة : نستعمل الاختزال :

مثلا : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ و لإزالتها :

- نقوم بتحليل كل من x^2-1 و x^2+2x-3 اما بالقسمة الاقليدية أو المتطابقات الشهيرة ثم نقوم **بالاختزال**.

$$g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}$$

2-دالة بجذر نستعمل المرافق :

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)$ ح.ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$ و نزيلها باستعمال **المرافق**.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{1}{4}$$

3-دالة جيبية : نستعمل النهايات الشهيرة .

$\bullet 1$ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}}$ حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ و نستعمل النهايات الشهيرة و هذا مرورا ببعض العلاقات المثلثية أو تبديل المتغير للحصول على شكل نهاية شهيرة .

نعلم أن: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ نهاية شهيرة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}3\times\frac{\sin(3x)}{3x}=\lim_{y\to 0}3\times\frac{\sin(y)}{y}=3\times 1=3$$

في هذه المجموعة هناك طريقة مشتركة بين كل الأشكال و هي طريقة العدد المشتق ، مثلا :

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$ ح.ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$ نزيلها باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto \cos x$

نضع $g(x)=\cos(x)$ و منه : $g'(x)=-\sin(x)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=-\sin(0)=0$$

الأستاذ بلجودي حمو

المجموعة الثالثة :

هي الأشكال التالية : $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} a\sqrt{bx^n+....}\pm a'\sqrt{b'x^n}+......}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} a\sqrt{bx^n+....}\pm a'x^{n/2}+....}$ مع ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$:

و هنا نختار اما التحليل أو المرافق حسب المعاملات :

الشكل-1 : $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} a\sqrt{bx^n+....}\pm a'\sqrt{b'x^n}+......}$ نميز حالتين :

❖ اذا كان $\boxed{|a|\sqrt{|b|}=|a'|\sqrt{|b'|}}$ نستعمل المرافق :

مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x+1}}_{+\infty}-\underbrace{\sqrt{x-2}}_{-\infty}\right)$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ (نزيلها باستعمال المرافق).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-(x-2)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=0$$

❖ اذا كان $\boxed{|a|\sqrt{|b|}\neq|a'|\sqrt{|b'|}}$ نستعمل التحليل :

مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{2x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{2x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x\sqrt{\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{x}}}_{1-\sqrt{2}}\right)=-\infty$$

الشكل-2 $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} a\sqrt{bx^n+....}\pm a'x^{n/2}+....}$ نميز حالتين :

❖ اذا كان $|a|\sqrt{|b|}=|a'|$ نستعمل المرافق :

مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{+\infty}\underbrace{-x}_{-\infty}\right)$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ (نزيلها باستعمال المرافق)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}=0$$

❖ اذا كان $\boxed{|a|\sqrt{|b|}\neq|a'|}$ نستعمل التحليل :

مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+2x+2}}_{+\infty}\underbrace{-2x}_{-\infty}\right)$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ (نزيلها باستعمال التحليل)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-2\right)=\lim_{x\to-\infty}x(-1)=-\infty.$$

❖ **هناك بعض الأمثلة التي يستعمل فيها المرافق لكن تبقى حالة عدم تعيين أخرى و هنا نكمل بالمرافق :**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$ ح.ع.ت من الشكل $\infty-\infty+$ و نزيلها باستعمال المرافق.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2-1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

هي ح.ع.ت أخرى من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ و نزيلها باستعمال التحليل :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

المجموعة الرابعة :

هي الأشكال التالية : $\boxed{\lim_{x\to\infty} ax^n \pm bx^m \pm .... \pm c\sqrt{x}+d}$ و $\lim_{x\to\infty}\dfrac{ax^n+bx^m+....+c\sqrt{x}+d}{\lim_{x\to\infty} a'x^{n'}+b'x^{m'}+....+c'\sqrt{x}+d}$ مع ح.ع.ت من الشكل

$+\infty-\infty$: و هنا نستعمل التحليل: (هي شبيهة بكثير الحدود و الناطقة لكنها تحتوي على $\sqrt{x}$)

مثال 1 : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x+2-\sqrt{x}}$. حالة عدم التعين من الشكل : $+\infty-\infty$ و لإزالتها نقوم بالتحليل :

$$\lim_{x\to+\infty} x+2-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} x(1+\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}) = \lim_{x\to+\infty} x(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$$

مثال 2 : $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+\sqrt{x}-3}\right)$ ح.ع.ت من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$ و نزيلها بالتحليل باستخراج x كعامل مشترك ثم الاختزال .

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-5}{x+\sqrt{x}-3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}})}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}})}\right) = 1$$

المجموعة الخامسة :

هي نهاية دالة مركبة و يمكن التعرف عليها من خلال أمثلة : $\sqrt{ax^n+bx^m+...}$; $\sqrt{\dfrac{....}{....}}$; $\cos\left(\dfrac{...}{...}\right)$

مثال 1 : 1• $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$ نهاية دالة مركبة.

لدينا: $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

إذن: $$\lim_{x\overset{>}{\to}1}\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}=+\infty$$

مثال 2 : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+3}$ نهاية دالة مركبة.

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x+3)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ إذن: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+3}=+\infty$

مثال 3 : $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2x+3}{x^2-1}\right)$ نهاية دالة مركبة.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$ و $\lim_{x\to0}\cos(x)=1$ اذن $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2x+3}{x^2-1}\right)=1$

الأستاذ بلجودي حمو

المجموعة السادسة :

النهاية بالحصر و يوجه التلميذ اليها غالبا ، ترد غالبا في البكالوريا لحساب نهاية متتالية :

مثال :

f دالة عددية معرفة على $]2;+\infty[$ بــ : $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x-2}$

1-برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]2;+\infty[$: $\dfrac{-1}{x-2}\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x-2}$

الحل

من اجل كل عدد حقيقي x من $]2;+\infty[$: $-1\leq \cos(x)\leq 1$

نضرب كل الأطراف في $\dfrac{1}{x-2}$ (من اجل كل عدد حقيقي x من $]2;+\infty[$: $\dfrac{1}{x-2}\succ 0$)

نجد: $\dfrac{1}{x-2}\leq \dfrac{\cos(x)}{x-2}\leq \dfrac{-1}{x-2}$ أي: $\dfrac{1}{x-2}\leq f(x)\leq \dfrac{-1}{x-2}$

لدينا مما سبق : $\dfrac{-1}{x-2}\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x-2}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0$

حسب مبرهنة الحصر نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

الأستاذ بلجودي حمـــــــو

- وفق الله كل التلاميذ و الأساتذة -