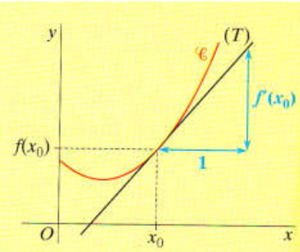
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبة

مجلة المفيد فى الرياضيات

للأستاذ بلجودي حمـــــــــــو

بكالوريا 2022 شعب علمية



$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

الاشتقاقية

☜ تتضمن ما يلي :

- ❖ملخص الدرس .
- ❖ سلسلــة تمارين .
- ❖ واجـــــب.
- ❖ حل بعض الأسئلة من السلسلة .

الاشتقاقية — بكالوريا 2022

⇦العدد المشتق:

f دالة معرفة على مجال I من $\Re$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.إذا كانت $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=A$ حيث A عدد حقيقي فإن الدالة f تقبل الاشتقاق عند a . يسمى A العدد المشتق للدالة f عند a ونرمز له بـ $f'(a)$.

⇦الدالة المشتقة:

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I وتسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

⇦ التفسير الهندسي (مماس منحنى دالة): $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

❖المشتقاقية و العمليات:

مجالات قابلية الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$\Re$	0	الثابت الحقيقي a
$\Re$	1	x
$\Re$	a	ax
$\Re$	nx^{n-1}	x^n ($n\in N$ و $n\geq 2$)
$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$
$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\Re$	$\cos x$	$\sin x$
$\Re$	$-\sin x$	$\cos x$

من اجل كل x من I ،	$f'(x)$	$f(x)$
$u\succ 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u(x)}$
	$n\times u'\times u^{n-1}$	$n\in N,$ و $n\geq 2$ $(u(x))^n$
$u\neq 0$	$-\dfrac{n\times u'}{u^{n+1}}$	$n\in N,$ و $n\geq 2$ $\dfrac{1}{(u(x))^n}$
	$u'\times\cos(u)$	$\sin(u(x))$
	$-u'\times\sin(u)$	$\cos(u(x))$

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\Re$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\dfrac{u}{v},(v\neq 0)$
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'\times v+v'\times u$	$\dfrac{u'\times v-v'\times u}{v^2},v\neq 0$

❖طـــــــــــرق:

لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a نحسب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}$ أو $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$

إذا كان	فإن
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=l$ (l عدد حقيقي)	f تقبل الاشتقاق عند a و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا معامل توجيهه l .
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=+\infty$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=-\infty$	f لا تقبل الاشتقاق عند a و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l'$ و كان $l\neq l'$	الدالة f تقبل الاشتقاق عند a من اليمين و من اليسار و لكنها غير قابلة للاشتقاق عند a و المنحنى الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a نصفي مماسين معاملا توجيههما l و l' .

⇦لإيجاد $f'(a)$ معامل توجيه المماس عند a بيانيا نختار نقطتين من هذا المماس و لتكن مثلا A و B حيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فيكون :

$$f'(a)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

☜ إذا كان المماس عند a أفقيا فان $f'(a)=0$.

تمارين

التمرين -1-

في كل حالة من الحالات التالية, أدرس قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة على المجموعة D عند a مفسرا النتيجة بيانيا:

$D=R,\quad f(x)=2\sin(x)$	$D=R,\ f(x)=x^2+x+1$	$D=[3;+\infty[,\ f(x)=\sqrt{x-3}$	$D=R-\{1\},\ f(x)=\lvert x-2\rvert+\dfrac{2}{x-1}$
$a=0$	$a=2$	$a=4 \qquad a=3$	$a=2$

التمرين -2-

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

أ ـ تحقق أنّه من أجل كل h غير معدوم يكون : $\dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

ب ـ استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 مبيّنا $f'(1)$.

التمرين -3-

f الدالة المعرفة على $[-2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}$.

⇦أحسب $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0}\dfrac{f(-2+h)}{h}$. ، هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين -2 ؟ ، فسر هندسيا إجابتك .

التمرين -4-

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بِـ : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$.

⇦ بيّن أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 .

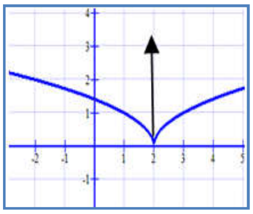
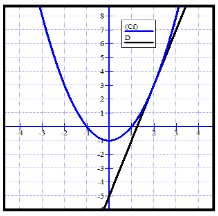
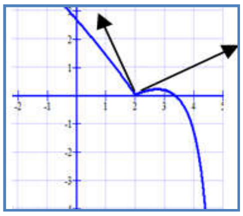
استنتج أن الدالة f مستمرة عند 1.

التمرين -5-

في كل حالة (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f :

⇦ هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 .

⇦ عين العدد المشتق في حالة وجوده.

التمرين -6-

عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية على D :

$D=\Re,\quad f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-3x^2+2 \bullet 1$	$D=\Re,\ f(x)=(x^2+2x-1)(x-2)\bullet 2$	$D=]1;+\infty[,\ f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}\bullet 3$
$D=]1;+\infty[,\ f(x)=2x-1+\dfrac{x}{x-1}\bullet 4$	$D=\Re,\ f(x)=(x^2-2x-3)^3\bullet 5$	$D=\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[,\ f(x)=\sqrt{3x-5}\bullet 6$
$D=]-\infty;1[,\ f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^3}\bullet 7$	$D=\Re,\ f(x)=\sin(x^2+5)\bullet 8$	$D=]0;+\infty[,\ f(x)=(2x-3)\sqrt{x}\bullet 9$
$D=]0;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\bullet 10$	$D=\Re-\{-1\},\quad f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}\bullet 11$	$D=\Re,\quad f(x)=x+\cos x$

⇦ أدرس اتجاه تغير f في الحالات 1 ، 3 ، 5 ، 6 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 .

التمرين -7-

f الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\Re$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد م (O,I,J).

المنحنى (C_f) يشمل النقطة $A(0;-1)$، يقبل في النقطة $B(1;-3)$ مماسا أفقيا .

نفرض أن f معرفة على $\Re$ بـ $f(x)=ax^3+bx+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية .

⇦ احسب الدالة المشتقة للدالة f بدلالة a و b .

بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a=1$ ، $b=-3$ ، $c=-1$

التمرين -8-

1. أكتب معادلة للمماس Δ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$f(x)=(1+x)^3$	$f(x)=\sqrt{1+x}$	$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$	$\mathrm{f(x)}=\sin x$

2. برّر التقريب التآلفي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية : $(1+x)^3 \approx 1+3x$ ، $\sqrt{1+x} \approx 1+\dfrac{x}{2}$ ، $\dfrac{1}{1+x} \approx 1-x$ ، $\sin x \approx x$.

3. أعط تقريبا تآلفيا لعبارة $f\ (a+h)$ من أجل $|h|$ قريب من 0 ؛ $f\ (x)=3x^2-5x+1$ و $a=2$

التمرين -9-

f الدالة المعرفة على $\Re$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2+2$.

⇦ بين أن منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

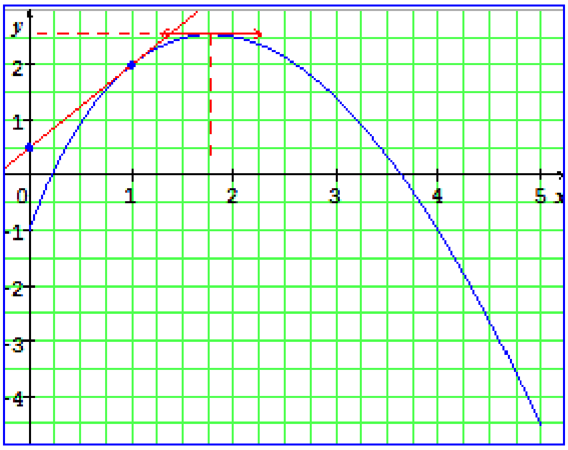
⇦ بيّن أن منحنى الدالة f يقبل مماسا معامل توجيهه -3 . ⇦ ما عدد المماسات الأفقية التي يقبلها منحنى الدالة f .

التمرين -10-

f الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$ 1. عين مشتقة الدالة f على $]0;+\infty[$.

2. استنتج الدوال المشتقة لكل من الدوال h,g و k حيث : $g(x)=f(x^2)$ ، $h(x)=f(\sqrt{x})$.

التمرين -11-



الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;5]$

المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحنى عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\dfrac{16}{9}$. بقراءة بيانية عين $f\ (1)$ و $f\ '(1)$.

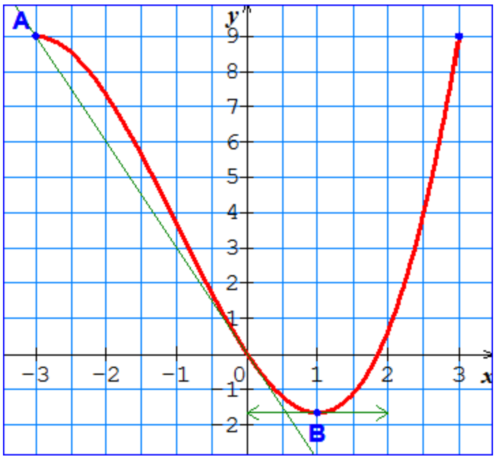
3. نقبل أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;5]$: $f\ (x)=a+bx\left(2-\sqrt{x}\right)$

a و b عددان حقيقيان نريد حسابهما.

أ– بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;5]$ ، $f\ '(x)=b\left(2-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

ب– باستعمال قيم $f\ (1)$ و $f\ '(1)$ المحصل عليها في السؤال1 عيّن a و b .

التمرين -12-



الشكل الموالي هوالتمثيل البياني $\mathscr{C}$ لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$

المنحنى $\mathscr{C}$ يحقق الشروط التالية :

يمر بمبدأ المعلم O ، و يشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا و يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O .

1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA)؟

2. نفرض أن f معرفة على $[-3;3]$ بـ: $f\ (x)=ax^3+bx^2+cx+d$

حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية .

أ– بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a=\dfrac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$

التمرين -13-

x	-2		-1		0		1		2		3
$u'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$u(x)$	2	↗	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2

جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على $D_u=[-2;3]$ عيّن إشارة $u\ (x)$.

2) نعتبر الدوال f ، g ، h و k المعرفة بـ : $f\ =u^2$ ؛ $g\ =u^3$ ؛ $h=\dfrac{1}{u}$ ؛ $k\ =\sqrt{u}$

أ. عيّن مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال f ، g ، h و k .

ب. عبّر عن كل من $f\ '(x)$ ، $g'(x)$ ، $h'(x)$ و $k'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u\ (x)$.

ج. استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال f ، g ، h و k .

الأستاذ : بلجودي حمـــــو

واجب

التمرين -1-

f الدالة المعرفة على المجموعة $\Re-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$. (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم .

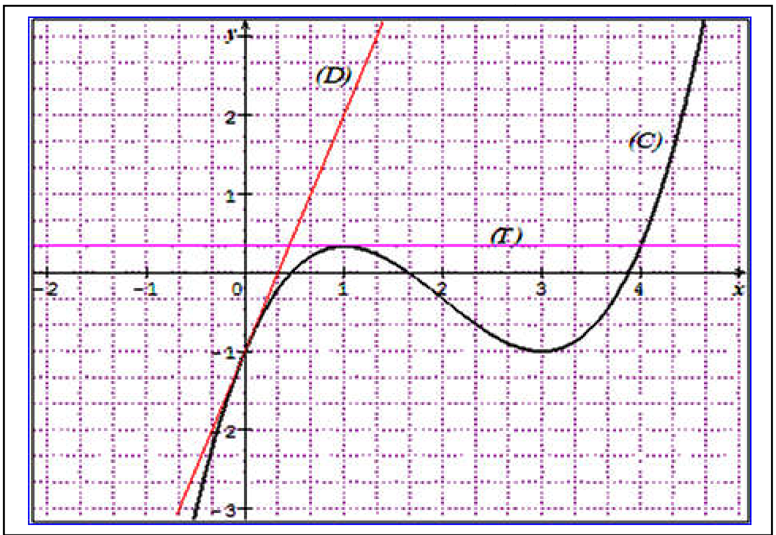
1. عين الثوابت الحقيقية a ، b ، c و d بحيث يكون ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $\Re-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$.

2. استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

3. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)

4. احسب الدالة المشتقة للدالة f على $\Re-\{-1\}$.

بين أن العادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا في المجال $]-1;0]$.



التمرين -2-

f دالة معرفة بتمثيلها البياني (C) كما هو موضح :

المستقيمان (D) ، (T) هما ؛ على الترتيب ؛ المماسان للمنحنى (C) عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 ، 1.

1. حدد القيم التالية: $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$.

2.اكتب معادلة لكل من المماسين (D) ، (T) .

التمرين -3-

f الدالة العددية المعرفة علـى $\Re-\{1\}$ بـ : $f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$. (C) هو تمثيلها البياني في م م م إلى م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2.احسب نهاية الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجوعة التعريف.

3. ادرس استمرارية الدالة f عند العدد 2 .

4. احسب كلا من : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\<}}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$. - ماذا تستنتج ؟ - فسر النتيجة هندسيا .

5. اكتب معادلة لكل من (Δ_1) ، (Δ_2) المماسين للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

التمرين -4-

أدرس اتجاه تغير f في الحالات التالية :

$1\bullet\ f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-3x^2+2,\quad D=\Re$	$2\bullet\ D=\Re, f(x)=(x^2+2x-1)(2x-2)$	$3\bullet\ D=]1;+\infty[, f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$
$4\bullet\ D=]3;+\infty[, f(x)=\sqrt{3x-9}$	$5\bullet\ D=\Re, f(x)=(x^2-4)^3$	$6\bullet\ D=\Re-\{1\}, f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$

الأستاذ : بلجودي حمـــو

حل بعض الأسئلة من تمارين السلسلة :

التمرين -1-

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة على المجموعة $D = R^*$ عند 1 مفسرا النتيجة بيانيا: $D = R^*, f(x) = |1-x| + \frac{2}{x}$

$$f(x) = |1-x| + \frac{1}{x} = \begin{cases} 1 - x + \frac{1}{x} ; x \in]-\infty;0[\cup]0;1] \\ x - 1 + \frac{1}{x} ; x \in [1;+\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{1-(1+h)+\frac{1}{1+h}-1}{h} = \lim_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{-1-h+\frac{1}{1+h}}{h} = \lim_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{-h^2-2h-1+1}{h(h+1)} = \lim_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{-h-2}{h+1} = -2$$

$$\lim_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{h+1-1+\frac{1}{1+h}-1}{h} = \lim_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{h-1+\frac{1}{1+h}}{h} = \lim_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{h^2-1+1}{h(h+1)} = \lim_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{h}{h+1} = 0$$

الدالة f تقبل الاشتقاق عند1 من اليمين و من اليسار و عددها المشتق عند 1 من اليمين هو 2- و عددها المشتق عند 1 من اليسار هو 0
و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1.
هندسيا : المنحني الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 نصفي مماسين معاملا توجيهيهما 2- و 0 .

التمرين -6-

عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية على D :

$D =]1;+\infty[, f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-1} \bullet 3$	$D = \Re, f(x) = (x^2+2x-1)(x-2) \bullet 2$	$D = \Re, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2 \bullet 1$

الحل

.1 f قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا $f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 2x^2 - 6x$

$D = \Re, f(x) = (x^2+2x-1)(x-2) \bullet 2$ f قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا

$$f'(x) = (x^2+2x-1)'(x-2) + (x-2)'(x^2+2x-1) = (2x+2)(x-2) + 1(x^2+2x-1)$$
$$= 2x^2 - 4x + 2x - 4 + x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 5$$

$D =]1;+\infty[, f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-1} \bullet 3$ f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا:

$$f'(x) = \frac{(x^2-x+2)' \times (x-1) - (x-1)' \times (x^2-x+2)}{(x-1)^2} = \frac{(2x-1) \times (x-1) - 1 \times (x^2-x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

حل التمرين -7-

.1 حساب الدالة المشتقة للدالة f بدلالة a و b :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا : $f'(x) = 3ax^2 + b$

.2 تبيين أن: a=1 ، b=-3 ، c=-1 :

المنحني (C_f) يشمل النقطة $A(0;-1)$ معناه $f(0) = -1$

و يقبل في النقطة $B(1;-3)$ مماسا أفقيا معناه $f(1) = -3$ و $f'(1) = 0$

و منه : $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = -3 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = -3 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} c = -1 \\ a+b+c = -1 \\ 3a+b = 0 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} c = -1 \\ a+b = -2 .....(2) \\ 3a+b = 0 ...(3) \end{cases}$ نضرب طرفي المعادلة (1) في 1- ثم

نجمع (1) و (2) ينتج : $2a = 2$ و منه $a = 1$. نعوض قيمة a في المعادلة (1) نجد $b = -3$ ،إذن: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$

الأستاذ : بلجودي حمـــــو

وفقكم الله في بكالوريا 2022