# مجلة المفيد فى الرياضيات

للأستاذ بلجودي حمـــــــو

بكالوريا 2022 شعب علمية

## 1. النهايات و السلوك التقاربى

## ☜ تتضمن ما يلي :

- سلسلة -1- ملخص درس و تمرين لكل عنصر .
- سلسلة -2- تمارين .
- واجب النهايات .
- تمارين محلولة في نهايات دالة كثيرحدود .
- تمارين محلولة في نهايات دالة ناطقة .
- تمارين محلولة في النهايات بوسيط .
- تمارين محلولة في ازالة حالات عدم التعيين .
  - ☜ المرافق
  - ☜ التحليل
  - ☜ العدد المشتق
  - ☜ الاختزال
  - ☜ تبديل المتغير
- تمرين محلول في السلوك التقاربي( المستقيم المقارب المائل ).

## النهايـــــــــات و السلوك التقاربي -1- بكالوريا 2022

### ❖ بعض نهايات الدوال المرجعية:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ | $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ |

### ❖العمليات على النهايات: حالات التعيين و عدم التعيين :

$l$ عدد حقيقي ، $(l+)$عدد حقيقي موجب تماما و $(l-)$عدد حقيقي سالب تماما:

| حالات التعييـــن | | | | حالات عدم التعيين |
|---|---|---|---|---|
| $(l+)\times+\infty=+\infty$ | $(l+)\times-\infty=-\infty$ | $(l-)\times+\infty=-\infty$ | $(l-)\times-\infty=+\infty$ | $\frac{0}{0}$ |
| $(+\infty)\times+\infty=+$ | $(-\infty)\times+\infty=-\infty$ | $(+\infty)\times-\infty=-\infty$ | $(-\infty)\times-\infty=+\infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ |
| $l+\infty=+\infty$ | $l-\infty=-\infty$ | $+\infty+\infty=+\infty$ | $-\infty-\infty=-\infty$ | $+\infty-\infty$ |
| $\frac{l}{\infty}=0$ | $\frac{l}{0}=\infty$ | $\frac{l}{l-}=+\infty$ , $\frac{l}{l+}=-\infty$ | $\frac{+\infty}{l-}=-\infty$ , $\frac{+\infty}{l+}=+\infty$ | $0\times\infty$ |

### ❖حساب نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود نحسب نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

**تمرين-1- :** احسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)=2x^3-2x^2+x+5$ •1 | $f(x)=x^3+2x^2+x+5$ •2 | $f(x)=-x^3-4x+2$ •3 |

### ❖نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و عند $-\infty$: و عند عدد حقيقي $a$ :

⇦لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

⇦لحساب نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي $a$ نعوض قيمة $a$ مباشرة في عبارة الدالة .

**تمرين-2- :** احسب النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف في كل حالة من الحالات التالية :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{2x^2+2x-1}{x-1}$ , $\Re-\{1\}$ •1 | $f(x)=\frac{x+1}{1-x}$ ; $\Re-\{1\}$ •2 | $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-2)^2}$ , $\Re-\{2\}$ •3 | $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$ , $\Re-\{-1;1\}$ •4 |

### ❖حساب نهاية دالة مركبة:

$a$ ، $b$ و $c$ تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ . $u$ ، $v$ و $f$ دوال حيث $f=v\circ u$ لحساب نهاية $f$ عند $a$

$\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ ⇐ $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ ⇐ نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ ⇐

**تمرين-3- :** احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\sqrt{\frac{3x+1}{x-1}}$ • 1 | $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+2}$ • 2 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x+3}{x-1}\right)$ • 3 |

### ❖حساب النهايات بالمقارنة :

⇐ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=l$ و كان $v(x)\le f(x)\le u(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ .

**تمرين-4- :**

$f$ دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\frac{\cos(x)}{x}$

1-برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ : $\frac{-1}{x}\le f(x)\le\frac{1}{x}$ ثم استنتج نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

## ❖ طـــــرق إزالة حالة عدم التعيين : احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

| ⇦ بالاختزال: | ⇦باستعمال التحليل: | ⇦باستعمال المرافق: | ⇦ العدد المشتق: |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2+2x}$ • 1 | $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2-\sqrt{x}$ • 1 | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ • 1 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$ • 1 |
| $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ • 2 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-2x$ • 2 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ • 2 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ • 4 |
| $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ • 3 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}$ • 3 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}$ • 3 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ • 2 |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+\sqrt{x}}{x^2+2x-3}$ • 4 | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-2}$ • 4 | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ • 3 |

# المستقيمات المقاربة :

### ⇦المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل ( الأفقي):

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=a$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=a$ فإن منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=a$ .

### تمرين -1-:

$f$ الدالة المعرفة على المجموعة $R$ بـ $f(x)=\dfrac{4x^2-3}{2x^2+1}$ و $(C_f)$ تمثيل بيانها في المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

⇦ احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم فسر كل نتيجة هندسيا .

### ⇦المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (العمودي):

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ فإن منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=a$ .

### تمرين -2-:

$f$ الدالة المعرفة على المجموعة $D=\Re-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-1}$ و $(C_f)$ تمثيل بيانها .

⇦ احسب نهاية الدالة $f$ عند الأطراف المفتوحة لـ $D$ ( لا تحسب عند $+\infty$ و $-\infty$ ) ثم فسر كل نتيجة هندسيا .

### ⇦المستقيم المقارب المائل:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0\right)$ فإن منحنى دالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ ( $-\infty$ ) .

### ❖دراسة الوضع النسبي لـمنحنى الدالة بالنسبة لمستقيم المقارب المائل:

لدراسة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته من الشكل $y=ax+b$ ندرس إشارة : $[f(x)-(ax+b)]$ ، إذا كان :

| | | |
|---|---|---|
| $[f(x)-y]\prec 0$ فان $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ . | $[f(x)-y]\succ 0$ فان $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ . | $[f(x)-y]=0$ فان $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ . |

### تمرين -3-:

1 • $f$ الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=x-1+\dfrac{x}{x^2-1}$ ، $(C_f)$ تمثيل بيانها .

بين أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ ثم أدرس ا لوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(\Delta)$ .

### ❖المنحنيان المتقاربان:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ ( $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0$ ) فإن منحنى الدالة $f$ و منحنى الدالة $g$ متقاربان بجوار $+\infty$ ( $-\infty$ ) .

### تمرين -4-:

1 • $f$ الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=x^2+1+\dfrac{1}{x-1}$ ، $(C_f)$ تمثيل بيانها .

بين أن $(C_f)$ و منحني الدالة $x\mapsto x^2+1$ متقاربان بجوار $-\infty$ و $+\infty$ ثم أدرس ا لوضع النسبي لهما .

الأستاذ : بلجودي حمـــو

## النهايـــــــــات -2- بكالوريا 2022

## التمرين 1 :

| أحسب نهاية الدالة $f$ | عند |
|---|---|
| $f(x)=\lvert x^2-1\rvert$ | $-\infty$ و $+\infty$ |

| أحسب نهاية الدالة $f$ | عند |
|---|---|
| $f(x)=\lvert x-1\rvert+\dfrac{4}{x-2}$ | $-\infty$ و $+\infty$ و $2$ |

## التمرين 2 :

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $-2\le \cos x+\sin x\le 2$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x+\sin x}{x^2}$ .

**2.** $f$ دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$ : $\lvert f(x)-3\rvert\le\dfrac{1}{x^2+1}$ . ⇦عين نهاية $f$ عند $+\infty$ .

## التمرين 3 :

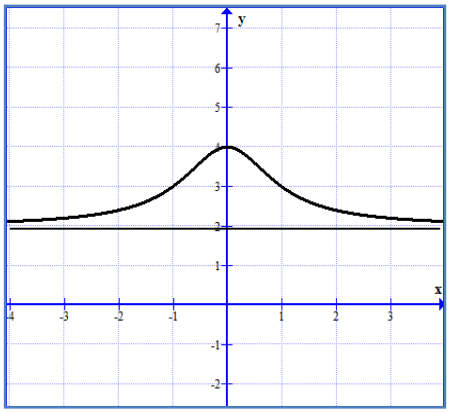
عين النهايات المطلوبة بكل الطرق الممكنة :

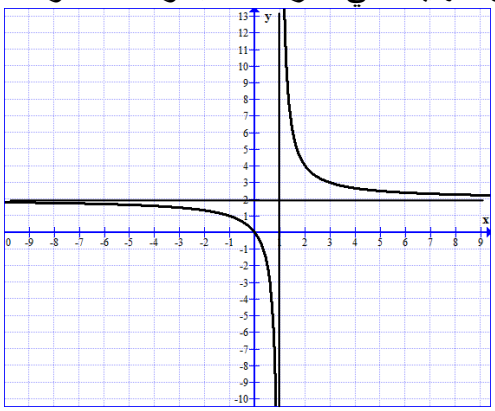
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1-\sqrt{x}}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{x^2+1-\sqrt{x}}}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{x}{x^2+1}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ |
| $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$ | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}$ | $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ | $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1}$ |
| $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{bx}$ | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{4x}$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-3x+1$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+x$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+3x$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x+1$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\sqrt{x}-1}-\sqrt{3\sqrt{x}+2}$ |

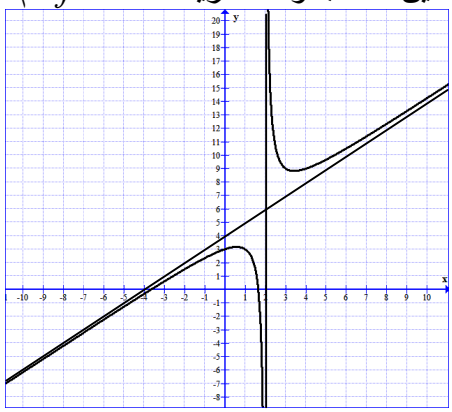
## التمرين 4 :

المنحنى $C_f$ هو التمثيل البياني الممثل لدالة $f$

عين $D$ مجموعة تعريف الدالة $f$ ثم خمّن النهايات في أطراف المجموعة $D$ واستنتج معادلات كل المستقيمات المقاربة .







## التمرين 5 :

1. لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\Re$ بـــ: $f(x)=a+\dfrac{2x^2-2}{3x^2+1}$ حيث $a$ عدد حقيقي. ⇦ أوجد قمة $a$ علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ .

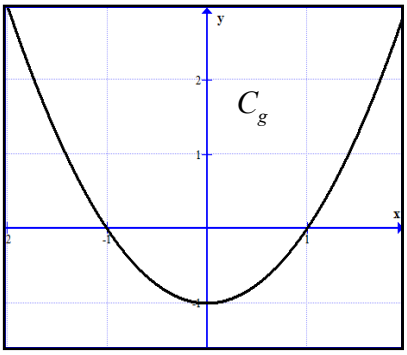
2. لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\Re$ بـــ: $f(x)=\dfrac{(a^2+1)x^2-2}{ax^2+1}$ حيث $a$ عدد حقيقي غير معدوم . ⇦ أوجد قمة $a$ علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ .

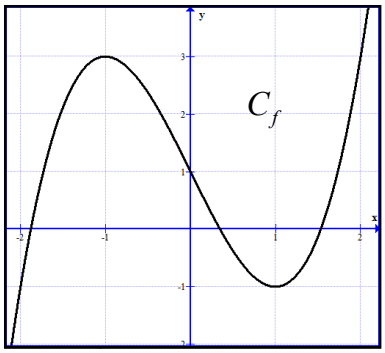
3. لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\Re-\{3\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{ax-2}{2x-b}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان. ⇦ أوجد قمة كل من $a$ و $b$ علما أن منحني الدالة يقبل مستقيما مقاربا افقيا معادلته $y=1$ .

**الأستاذ : بلجودي حمـــو**

## التمرين 6:

المنحني $C_f$ هو التمثيل البياني الممثل لدالة $f$ و المنحني $C_g$ هو التمثيل البياني الممثل لدالة $g$




⇦ عين بيانيا $f(1)$ و $f(-1)$ .

⇦ عين بيانيا إشارة $g(x)$ .

2. لتكن الدالة $h$ المعرفة على $D$ بـــ : $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ .

⇦عين $D$ مجموعة تعريف الدالة $h$ .

⇦عين النهايات عند الأطراف المفتوحة لـــ $D$ . ( لا يطلب حسابها عند $+\infty$ و $-\infty$ )

## التمرين 7 :

$f$ الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{3\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$ $(C_f)$ تمثيل بيانها .

⇦ عين الثوابت الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $R-\{3\}$ فإن : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$ .

⇦ استنتج أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(D)$ يطلب تعيين معادلة له ، ثم ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(D)$

## التمرين 8 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ ، $C_f$ تمثيلها البياني .

⇦عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$

⇦ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $C_f$ و المستقيم $(d)$ الذي معادلته $y=x-2$ ؟ برر . حدّد وضعية $C_f$ بالنسبة لـ $(d)$.

## التمرين 9:

4 • $f$ الدالة المعرفة على المجموعة $R$ كما يلي : $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$ $(C_f)$ تمثيل بيانها .

⇦ احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ . ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_f)$ ؟

⇦احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$ . ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_f)$ ؟

## التمرين 10 :

$f$ الدالة المعرفة على المجموعة $R$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+3}{x^2+1}$ ، $(C_f)$ تمثيل بيانها .

⇦ بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$ . استنتج أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(D)$ يطلب تعيين معادلة له .

## التمرين 11:

$f$ و $g$ الدالتين المعرفتين على المجموعة $\Re$ كما يلي: $f(x)=x^2-3x-1+\dfrac{x}{x^2+1}$ و $g(x)=x^2-3x-1$ .

$(C_f)$ و $(C_g)$ تمثيل بيانهما في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ ثم فسر النتيجتين هندسيا ، حدد الوضعية النسبية للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ .

## التمرين 12 :

اليك جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | + | | 0 | − |
| $f(x)$ | $1$ ↗ | $2$ | ↘ $-\infty$ | $-\infty$ ↗ | | $3$ | ↘ $-\infty$ |

⇦ حدد المستقيمات المقاربة الافقية و العمودية لمنحني الدالة $f$ .

**الأستاذ : بلجودي حمـــو**

# واجـــــــــــب فى النهايات

## التمرين الأول :

$f$ دالة عددية للمتغير الحقيقي $x$ مجموعة تعريفها $D_f$.

⇦احسب نهايات الدالة $f$ عند الأطراف المفتوحة لمجال التعريف في كل حالة من الحالات التالية :

| | |
|---|---|
| $f(x)=x^3+2x^2+x+5$ | $D_f=R$ |
| $f(x)=-2x^3+2x^2+x+5$ | $D_f=R$ |
| $f(x)=-x^2+x+5$ | $D_f=R$ |
| $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$ | $D_f=R-\{2\}$ |
| $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ | $D_f=R-\{-1\}$ |

| | |
|---|---|
| $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-1}$ | $D_f=R-\{-1;1\}$ |
| $f(x)=\dfrac{2-x}{(x-1)^2}$ | $D_f=R-\{;1\}$ |
| $f(x)=x+\dfrac{2}{x-1}$ | $D_f=R-\{1\}$ |
| $f(x)=\lvert x\rvert+\dfrac{2}{x-1}$ | $D_f=R-\{1\}$ |

## التمرين الثاني :

1. عين النهايات المطلوبة بكل الطرق الممكنة :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x-\sqrt{x}}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+\sqrt{x}}{x^2-2x}$ | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-2x+1}$ | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-4x+3}$ |
| $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2}+x$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}2\sqrt{x^2-x+1}+x$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+2}$ |

## التمرين الثالث :

2 • $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=\lvert x+1\rvert+\dfrac{x}{x^2-1}$ و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

⇦ اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة ثم ادرس نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف.

⇦ بين أن المستقيمين $\Delta: y=x+1$ و $\Delta': y=-x-1$ مقاربين للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

⇦ ادرس وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $\Delta$ على المجال $]1;+\infty[$ و ادرس وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $\Delta'$ على المجال $]-\infty;-1[$.

## التمرين الرابع: للتعمق

1. عين النهايات المطلوبة : $m$ عدد حقيقي

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{2x^3-2x^2+3x-3}$ | $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-4x^2+4x}$ | $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{-2-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{-3-x}-1}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\cos x}{x-1}$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+(-1)^x}{x^2}$ | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin x}$ |
| $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x^2+x}$ | $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2-1}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx+\sqrt{x}+1}{x+1}$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx^3-2x^2-2)$ | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-mx$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx+\sqrt{x}+1}{x+1}$ |

2. $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-\dfrac{2}{3}x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$ ☜ احسب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$ ☜ احسب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

4. بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq1$ : $1\leq\dfrac{2x}{x+1}\leq2$ ثم استنتج النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{x}}{x+1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x}(x+1)}$

الأستاذ : بلجودي حمـــو

## نهاية دالة كثير حدود.

### تمريـــــــــــن :

| | | |
|---|---|---|
| $1\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)$ | $2\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x+2\right)$ | $3\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)$ |
| $4\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4+3x+2\right)$ | $5\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)$ | $6\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x+2\right)$ |
| $7\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)$ | $8\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4+3x+2\right)$ | |

### الحـــــــــل:

| | |
|---|---|
| $1\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$ | $2\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$ |
| $3\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4\right)=+\infty$ | $4\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4\right)=-\infty$ |
| $5\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$ | $6\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$ |
| $7\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4\right)=+\infty$ | $8\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4\right)=-\infty$ |

## نهاية دالة ناطقة :

### تمريـــــــــــن :

احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $1\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2x-1}{x^2+1}$ | $2\bullet \lim\limits_{x\to1^{>}}\frac{2x^3+2x-1}{x-1}$ | $3\bullet \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$ |

### الحـــــــــل:

$$1\bullet \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$2\bullet \lim_{x\to1^{>}}\frac{2x^3+2x-1}{x-1}=\frac{3}{0^{+}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}\bullet 3$$

حالة عدم التعيين من الشكل $0/0$ ، لإزالتها نقوم بالإختزال :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

**التمرين:**

عين تبعا لقيم العدد الحقيقي $m$ ما يلي :

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)$ • 1 | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}$ • 2 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}$ • 3 |

**الحـــــــل :**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)$ • 1

❖ إذا كان $m=0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2\right)=-\infty$

❖ إذا كان $m\neq0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3\right)$ و نميز حالتين حسب اشارة $m$ :

⇦ إذا كان $m\succ0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3\right)=+\infty$

⇦ إذا كان $m\prec0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}$ • 2

❖ إذا كان $m=2$ : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ هي حالة عدم التعيين ، ونزيلها بالاختزال :

$$\lim_{x\to1}\frac{mx-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

❖ إذا كان $m\neq2$ : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0}$ و نميز حالتين :

⇦ إذا كان $m\succ2$ فإن $m-2\succ0$ و منه :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{\prec}{\to}1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{\succ}{\to}1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

⇦ إذا كان $m\prec2$ فإن $m-2\prec0$ و منه :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{\prec}{\to}1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\overset{\succ}{\to}1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

**3 • $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}$**

❖ إذا كان $m=0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ .

❖ إذا كان $m\prec 0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=+\infty+\infty=+\infty$ .

❖ إذا كان $m=1$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=+\infty-\infty$ هي ح.ع.ت ، ونزيلها بالمرافق :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}=0$$

❖ إذا كان $m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ ، ونزيلها بالتحليل :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-mx\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-m\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=+\infty\times(1-m)$$

نميز حالتين :

⇦ إذا كان $m\in]0;1[$ فإن $1-m\succ 0$ و منه :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=+\infty$$ .

⇦ إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإن $1-m\prec 0$ و منه:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=-\infty$$ .

**الأستاذ : بلجودي حمـــو**

## 1. حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3}-2x$ :

هي حالة عدم التعيين من الشكل $\boxed{+\infty-\infty}$ نستعمل المرافق .

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3}^2-(2x)^2}{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}=0$$

## 2. حساب $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ :

حالة عدم التعيين من الشكل $\boxed{\frac{0}{0}}$ نستعمل المرافق .

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

ملاحظة : يمكن استعمال تعريف المشتق للدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ .

## 3. حساب $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$ : حالة عدم التعيين من الشكل $\boxed{\frac{0}{0}}$ نستعمل المرافق .

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}^2-1^2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(2x-1-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(2x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{1}+1\right)}{\left(\sqrt{2(1)-1}+1\right)}=\frac{4}{2}=2$$

**حساب .** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-2x+2$ **:**

**حالة عدم التعيين** من الشكل $\boxed{\infty-\infty}$ لإزالتها نستعمل **التحليل**

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-2x+2=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2x+2=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2x+2$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2x+2=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2+\frac{2}{x}\right)=+\infty(1-2)=-\infty$$

**حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x-\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+2}}}{\sqrt{4x-1}}$ **:**

هي **حالة عدم التعيين** من الشكل $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x-\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+2}}}{\sqrt{4x-1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\sqrt{3+\frac{2}{x}}}}{\sqrt{4x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x-\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{3+\frac{2}{x}}}}}{\sqrt{4x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{16-\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{3+\frac{2}{x}}}}}{\sqrt{x}\sqrt{4-\frac{1}{x}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16-\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{3+\frac{2}{x}}}}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}=\sqrt{4}=2$$

## تمارين محلولة ـ المستقيم المقارب المائل. بكالوريا 2022

1 لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ تمثيلها البياني $C_f$ .

⇦عين نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف.

⇦ عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يكون من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$

⇦ بين أن $C_f$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(d)$ معادلته $y=x-2$ . ⇦ حدّد وضعية $C_f$ بالنسبة لـ $(d)$.

**حـــل التمرين:**

### ⇦ نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=+\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

### ⇦ عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ :

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ :

$$ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+d}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+cx+d}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+cx+d}{(x-1)^2}=\frac{ax^3+(-2a+b)x^2+(a-2b+c)x+b+d}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}a=1\\ -2a+b=-4\\ a-2b+c=8\\ b+d=-4\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=3\\ d=-2\end{cases}$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f(x)=x-2+\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ .

### ⇦ بين أن $C_f$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(d)$ معادلته $y=x-2$ :

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-(x-2)\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$

إذن $C_f$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(d)$ معادلته $y=x-2$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ .

### ⇦ حدّد وضعية $C_f$ بالنسبة لـ $(d)$ :

ندرس إشارة $\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ و إشارته من إشارة $3x-2$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(f(x)-(x-2))$ | | - | 0 | + | | + | |
| الوضع النسبي | $C_f$ تحت $(d)$ | | $C_f$ يقطع $(d)$ في $\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$ | | $C_f$ فوق $(d)$ | | $C_f$ فوق $(d)$ |

## تمريـــــــــن :

أحسب : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}$

## الحـــــــل :

هي حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

### 1. إزالة حالة عدم التعيين بالاختزال :

#### ☜التحليل بالمتطابقات الشهيرة :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{1011}\right)^2-1}{x^{1011}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{1011}-1\right)\left(x^{1011}+1\right)}{x^{1011}-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(x^{1011}+1\right)=1+1=2$$

#### ☜التحليل بالقسمة الإقليدية :

| $x^{2022}-1$ | $x^{1011}-1$ |
|---|---|
| $-x^{2022}+x^{1011}$ | $x^{1011}+1$ |
| $x^{1011}-1$ | |
| $-x^{1011}+1$ | |
| $0$ | |

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1010}-1}=$$
$$\lim_{x\to 1}\left(x^{1011}+1\right)=2$$

### 2. إزالة حالة عدم التعيين بتبديل المتغير:

نضع $X=x^{1011}$ و منه $x^{2022}=X^2$ و عندما $x\to 1$ فإن $X\to 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{X^2-1}{X-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(X-1)(X+1)}{X-1}=\lim_{x\to 1}(X+1)=1+1=2$$

### 3. إزالة حالة عدم التعيين بالعدد المشتق :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x^{2022}-1}{x-1}}{\dfrac{x^{1011}-1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}$$

مع $f(x)=x^{2022}$ و منه $f'(x)=2022\,x^{2021}$ و منه $f'(1)=2022$

و $g(x)=x^{1011}$ و منه $g'(x)=1011\,x^{1010}$ و منه $g'(1)=1011$

إذن : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2020}-1}{x^{1010}-1}=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=\dfrac{2020}{1010}=2$

## حساب : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{0}{0}$ هي حالة عدم التعيين .

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}\right)+\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

**أولا :** $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$

**ثانيا :** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\times\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)\times\sqrt{x-1}}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}=0$

**نستنتج أن :** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}\right)+\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)=\sqrt{2}+0=\sqrt{2}$

## حساب : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\right)^2\times\frac{1}{(\underbrace{1+\cos x}_{2})}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1\times\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$$

**أتمنى لكم التوفيق و النجاح في بكالوريا 2022**

**دعواتكـــــــــــــــم**