المفيد في الرياضيات

الأعداد المركبـــــــة

ملخص و 18 تمرين محلول .

BAC 2023

وفق منهاج التربية

لطلبة بكالوريا شعب علمية

الأستاذ

بلجـــودي حمو

دعواتكم للأستاذ أحمد جواليل رحمه الله و لكل موتانا بالرحمة .

المفيد في الرياضيات

الأستاذ: حمو بلـجودي

الأعداد المركبـــــة

نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $\boxed{z = x + yi}$ حيث x و y عددان حقيقيان و $\boxed{i^2 = -1}$.

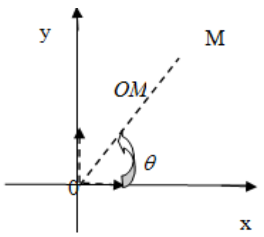
- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ : C . • الكتابة $z = x + yi$ تسمى الشكل الجبري لــ z .
- x هو الجزء الحقيقي لـ z و رمزه $\mathrm{Re}(z)$. • y هو الجزء التخيلي لـ z ورمزه $\mathrm{Im}(z)$.
- إذا كان $y = 0$ نقول أن z حقيقي. • إذا كان $x = 0$ نقول أن z تخيلي صرف.

❖ تساوي عددين مركبين و انعدام عدد مركب :

- z و z' عددان مركبان حيث $z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$: • $z = z'$ معناه $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ • $z = 0$ معناه $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

❖ التمثيل الهندسي لعدد مركب:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{OI};\vec{OJ}\right)$. نرفق النقطة $M(x;y)$ إلى كل عدد مركب $z = x + yi$



- M هي صورة العدد المركب z
- الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب
- z هي لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.

❖ مجموع وجداء عددين مركبين:

z عدد مركب حيث $z = x + yi$ حيث x و y عددان حقيقيان ، z عدد مركب حيث $z' = x' + y'i$ حيث x و y عددان حقيقيان: $\boxed{z + z' = (x + x') + (y + y')i}$ و $\boxed{z \times z' = xx' - yy' + (y + y')i}$

❖ مرافق عدد مركب:

z عدد مركب حيث $z = x + yi$ حيث x و y عددان حقيقيان العدد المركب $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z حيث $\boxed{\bar{z} = x - yi}$.

- إذا كان z حقيقي فإن $z = \bar{z}$ • إذا كان z تخيلي صرف فإن $\bar{z} = -z$.
- النقطتين M و M' صورتي z و $\bar{z}$ على الترتيب متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

خواص و عمليات: z عدد مركب و $\bar{z}$ مرافقه ، z' عدد مركب و مرافقه $\bar{z'}$.

$\bar{\bar{z}} = z$	$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$	$z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)$	$z\bar{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, $z' \neq 0$	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ $n \in N^*$,

لاحقة نقطة ،لاحقة شعاع:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{OI};\vec{OJ}\right)$. A و B و G نقطتين من المستوي.

- Z_A هي لاحقة النقطة A و Z_B هي لاحقة النقطة B .
- $Z_B - Z_A$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

طويلة عدد مركب:

z عدد مركب حيث $z = x + yi$ حيث x و y عددان حقيقيان.

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

- في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{OI};\vec{OJ}\right)$. $\boxed{|z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM}$ حيث M هي صورة z.

خـــــــواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

$\lvert\overline{z}\rvert=\lvert z\rvert$	$\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$	$\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$
$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$, $z'\neq 0$	$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$	$\lvert z+z'\rvert\neq\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$

A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB=\lvert z_B-z_A\rvert$.

عمدة عدد مركب غير معدوم:

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{OI};\vec{OJ}\right)$ لتكن M صورة العدد المركب الغير معدوم z.

نسمي عمدة العدد المركب z كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{OI};\vec{OM}\right)$. و نرمز له بـــ $\arg(z)$.

أي $\boxed{\arg(z)=\left(\vec{OI};\vec{OM}\right)+2k\pi}$ حيث $(k\in z)$.

خـــــواص : z و z' عددان مركبان غير معدومان ، n عدد طبيعي غير معدوم :

$\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')$	$\arg(z)^n=n\arg(z)$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$

الشكل المثلثي و الأسي لعدد مركب غير معدوم:

z عدد مركب غير معدوم .حيث : $\lvert z\rvert=r$ و $\arg(z)=\theta$

- الشكل المثلثي لِـ z يكتب على الشكل $\boxed{z=r[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]}$.
- الشكل الأسي لِـ z يكتب على الشكل $\boxed{z=re^{i\theta}}$.

ملاحظة: إذا كان $z=x+iy$ ، $\cos\theta=\frac{x}{r}$ و $\sin\theta=\frac{y}{r}$.

دستور موافر:

z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا $\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}}$

المعادلات من الدرجة الثانية:

لتكن المعادلة (E) ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$.........(E) حيث a,b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$. لحل المعادلة (E) نقوم بحساب المميز Δ : $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$.

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$	عدد حلول المعادلة (E)	حلول المعادلة (E)
إذا كان $\Delta\succ 0$	تقبل حلين حقيقيين	$\boxed{z'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ و $\boxed{z''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.
إذا كان $\Delta=0$	تقبل حلا وحيدا حقيقيا	$\boxed{z=\frac{-b}{2a}}$
إذا كان $\Delta\prec 0$	تقبل حلين مركبين مترافقين	: $\boxed{z'=\frac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}}$ و $\boxed{z''=\frac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}}$.

التفسيرات الهندسية في الأعداد المركبة :

في كل مما يأتي :المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{OI};\vec{OJ}\right)$. A، B، C و D نقط لواحقها على الترتيب z_A ، z_B، z_C و z_D:

لاحقة شعاع	• $Z_B - Z_A$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$
طويلة شعاع	• $\left\|Z_B - Z_A\right\| = AB$
لاحقة مرجح جملة :	Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ هي $\boxed{Z_G = \dfrac{\alpha Z_A + \beta Z_B}{\alpha+\beta}}$. حيث $\alpha + b \neq 0$
الارتبـــــاط الخطــــي و استقاميةالنقط :	• إذا كان $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ عددا حقيقيا غير معدوم فإن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطين خطيا . و النقط A ، B و C على استقامة واحدة .
تداور النقط:	• إذا كان $\left\|z_A - z_D\right\| = \left\|z_B - z_D\right\| = \left\|z_C - z_D\right\| = r$ فإن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها r .
التعامـــــــد:	• يكون الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ تخيليا صرفا.
لاحقة منتصف قطعـــة:	النقطة H منتصف القطعة $[AB]$: $\boxed{Z_H = \dfrac{z_A + z_B}{2}}$

طبيعة مثلث:

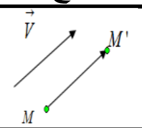
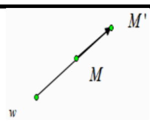
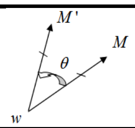
المثلث ABC	الشروط
قائم في A .	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = ai$:حيث $a \in \Re^* - \{-1;1\}$
قائم في A و متساوي الساقين	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ أو $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$
متساوي الساقين	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = a + bi$:حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $\left\|a+bi\right\| = 1$ وعمدة $a+bi$ تختلف عن $\pm\dfrac{\pi}{3}$
متقايس الأضلاع .	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = a + bi$:حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $\left\|a+bi\right\| = 1$ وعمدة $a+bi$ تساوي $\pm\dfrac{\pi}{3}$

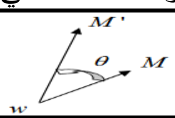
طبيعة رباعي:

الرباعي $ABCD$	الشروط
متوازي أضلاع	$z_B - z_A = z_C - z_D$
مستطيل	$z_B - z_A = z_C - z_D$ و $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = ai$ حيث $a \in \Re^* - \{-1;1\}$
مربع	$z_B - z_A = z_C - z_D$ و $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ أو $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$
معين	$z_B - z_A = z_C - z_D$ و $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $\left\|a+bi\right\| = 1$.

التحويلات النقطية في الأعداد المركبة

في كل مما يأتي :المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. A ، B ، C و D نقط لواحقها على الترتيب z_A, z_B, z_C, z_D. F التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$.

	الانسحاب T	التحاكي h	الدوران R
العبارة المركبة	$z'=az+b$	$z'=az+b$	$z'=az+b$
الصيغة المبسطة		$z'-z_w=k(z-z_w)$	$z'-z_w=a(z-z_w)$
التعرف على طبيعة F	$a=1$	$a\in\Re^*-\{1\}$	$a\in C-\Re$ و $\|a\|=1$
العناصر المميزة	شعاعه $\vec{V}$ صورة b.	•مركزه w ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ •نسبته $k=a$.	•مركزه w ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ •زاويته $\theta=\arg(a)$
خواص	•يحافظ على المسافات ،الاستقامية، التوازي و المرجح.	•له نقطة صامدة وحيدة هي w •يحافظ على الاستقامية،التوازي والمرجح.	•له نقطة صامدة وحيدة هي w اذا كان $\theta\neq 0$ •يحافظ على المسافات، الاستقامية ،التوازي و المرجح.
هندسيا			

	التشابه المباشر S
العبارة المركبة	$z'=az+b$
الصيغة المبسطة	$z'-z_w=a(z-z_w)$
التعرف على طبيعة F	$a\in C-\Re$ و $\|a\|\neq 1$
العناصر المميزة	•مركزه w ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ •نسبته $\|a\|$. •زاويته $\arg(a)$
خواص	•يحافظ على الاستقامية،التوازي والمرجح. •يحول المسافات بضربها في النسبة و المساحات في مربع النسبة.
هندسيا	

نتائـــــــج:

- إذا وجد انسحاب شعاعه $\vec{AB}$ و يحول C إلى D فإن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع .
- إذا وجد تحاكي مركزه A و يحول B إلى C فإن النقط B,A و C على استقامة واحدة.
- إذا وجد دوران مركزه A و يحول B إلى C فإن المثلث ABC :
  - متساوي الساقين إذا كانت زاوية الدوران تختلف عن $\pm\frac{\pi}{2}$.
  - قائم في A و متساوي الساقين إذا كانت زاوية الدوران تساوي $\pm\frac{\pi}{2}$.
- إذا وجد تشابه مباشر مركزه A و زاويته $\pm\frac{\pi}{2}$ و يحول B إلى C فإن المثلث ABC قائم في A .
- صورة دائرة (C) مركزها Ω ونصف قطرها r بالدوران R هي دائرة (C') مركزها Ω' ونصف قطرها r . حيث Ω' هي صورة Ω بالدوران R .
- صورة دائرة (C) مركزها Ω ونصف قطرها r بالتشابه المباشر S هي دائرة (C') مركزها Ω' ونصف قطرها $k\times r$. حيث Ω' هي صورة Ω بالتشابه المباشر S و k هي نسبة التشابه المباشر S
- تركيب تحاكي نسبته k بدوران أو انسحاب (أو العكس) هو تشابه مباشر نسبته $|k|$.
- تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبتهجداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين.

❖ **طــــــــــــرق:**

$\boxed{\bullet 1}$ لكتابة العبارة المركبة لتحويل نقطي نقوم بحساب a و b باستعمال المعطيات ثم تعويضهما في العبارة التالية : $z'=az+b$ أو استعمال الصيغة البسطة المذكورة في الجدول السابق .

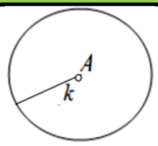
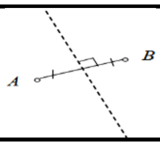
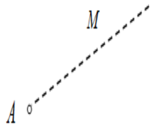
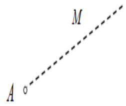
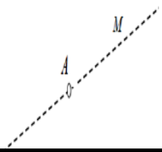
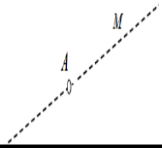
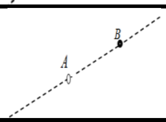
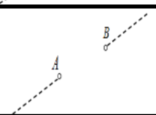
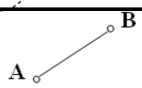
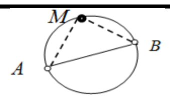
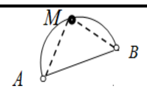
$\boxed{\bullet 2}$ لإيجاد طبيعة تحويل نقطي عبارته المركبة معطاة، نستخرج a من العبارة و نتعرف على طبيعة التحويل من خلاله .

$\boxed{\bullet 3}$ لإيجاد طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه A و يحول B إلى C نقوم بحساب a كالتالي: $a=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم نتعرف على طبيعة التحويل من خلاله .

$\boxed{\bullet 4}$ لإيجاد طبيعة التحويل النقطي الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D نقوم بحساب a كالتالي: $a=\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}$ ثم نتعرف على طبيعة التحويل من خلاله .

مجموعة النقط في الاعداد المركبة

في كل مما يأتي :المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. A ، B نقط لواحقها على الترتيب z_A ، z_B

الشكل	مجموعة النقط M	الإنشاء
$k \succ 0,\ \lvert z-z_A\rvert = k$ $z-z_A=ke^{i\theta}$ ، حيث θ متغير على $\Re$ و k ثابت حقيقي موجب	دائرة مركزها A و نصف قطرها k	
$\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$	محور القطعة $[AB]$	
$\arg(z-z_A)=\theta+2k\pi$	نصف مستقيم مبدؤه A باستثناء A حيث $\left(\vec{u};\vec{AM}\right)=\theta+2k\pi$	
$z-z_A=ke^{i\theta}$ ، حيث k متغير على $\Re_+^*$ و θ ثابت.	نصف مستقيم مبدؤه A باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{u};\vec{AM}\right)=\theta+2k\pi$.	
$\arg(z-z_A)=\theta+k\pi$	المستقيم الذي يشمل A باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{u};\vec{AM}\right)=\theta+2k\pi$.	
$z-z_A=ke^{i\theta}$ ، حيث k متغير على $\Re^*$ و θ ثابت.	المستقيم الذي يشمل A باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{u};\vec{AM}\right)=\theta+2k\pi$.	
$\arg\dfrac{z-z_B}{z-z_A}=k\pi$	المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B	
$\arg\dfrac{z-z_B}{z-z_A}=2k\pi$	المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$	
$\arg\dfrac{z-z_B}{z-z_A}=\pi+2k\pi$	القطعة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B	
$\arg\dfrac{z-z_B}{z-z_A}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B	
$\arg\dfrac{z-z_B}{z-z_A}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B	

تماريـــــــــــن محلولـــــــــــة

التمرين -1-

اكتب على الشكل الجبري الاعداد المركبة التالية:

$Z_1=(2+3i)+5(3-4i)$	$Z_2=2(2+i)(3-4i)$	$Z_3=(2+3i)^2-(3-4i)$
$Z_4=\dfrac{3-i}{3-2i}-\dfrac{2-i}{1-i}$	$Z_5=\dfrac{\sqrt{2}-i}{1-i}$	$Z_6=\dfrac{\sqrt{3}+2i\sqrt{2}}{i}$

التمرين -2-

1. عين مرافق الأعداد المركبة التالية:

• $Z_1=2-i$	• $Z_2=\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)i$	• $Z_3=3$	• $Z_4=-2i$

2. ليكن العددين المركبين التاليين: $Z_A=2+i$ ، $Z_B=1-i$

• أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

• $2\overline{Z_A}-3\overline{Z_B}$	• $\overline{iZ_A-Z_B}-\overline{Z_A}$	• $\overline{(1-i)(Z_A+3i)}-\overline{\overline{Z_B}}-\overline{\overline{Z_A}Z_B}$

التمرين -3-

عين الطويلة لكل من الأعداد المركبة التالية:

$Z_1=2+i$	$Z_2=1-i\sqrt{3}$	$Z_3=2$	$Z_4=i\sqrt{2}$
$Z_1\times Z_2$	$\dfrac{Z_1}{Z_2}$	${Z_2}^3$	$\dfrac{Z_3}{Z_2}\times {Z_4}^3$

التمرين -4-

عين عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية:

$Z_1=1+i$	$Z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$	$Z_3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$Z_4=-2-2i$
$Z_5=2i$	$Z_6=Z_1\times Z_2$	$Z_7=\dfrac{Z_5}{Z_2}$	$Z_8={Z_6}^3$

التمرين -5-

1. اكتب على الشكل المثلثي ثم الأسي الأعداد المركبة التالية:

$Z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$Z_2=-\sqrt{3}i$	$Z_3={Z_1}^3$

2. اكتب على الشكل الجبري :

• $Z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$	• $Z_2=4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$	• $Z_3=3\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$
• $Z_4=8\left(\cos\dfrac{-\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\pi}{3}\right)$	• $Z_5=2e^{i\frac{\pi}{4}}$	• $Z_6=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

التمرين -6-

حل في C المعادلا ت ثم اكتب الحلول على الشكل الجبري:

(1) • $(2+i)z=7-i$	(2) • $\dfrac{2}{3z-i}=3+2i$	(4) • $\dfrac{z+2i}{\overline{z}-i}=i$
(5) • $z^2-2z-3=0$	(3) • $(2-i)\overline{z}=3-i$	(6) • $z^2-2z+1=0$
(7) • $z^2-(1+\sqrt{3})z+\sqrt{3}=0$	(8) • $z^2-2z\cos\alpha+1=0$, $\alpha\in]0;\pi[$	

التمرين -7-

$p(z)$ كثير حدود في مجموعة الأعداد المركبة حيث: $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

1. احسب $p(-1)$.

2. عين الأعداد الحقيقية b, a و c حيث $P(z)=(z+1)(az^2+bz+c)$

3. حل في C المعادلة: $P(z)=0$.

التمرين -8-

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B و M التي لواحقها على الترتيب: $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1. عين عمدة لكل من $Z_A{}^n$ و $Z_B{}^n$

عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: • $Z_A{}^n$ حقيقيا ، • $Z_B{}^n$ تخيليا صرفا .

التمرين -9-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B ، C و I التي لواحقها على الترتيب : $Z_A=1+2i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=Z_B-4$ ، $Z_I=-1$

1. اكتب الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2. بين أن النقاط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها I يطلب تحديد نصف قطرها.

3. عين Z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $BADC$ متوازي أضلاع .

4. استنتج بدقة طبيعة الرباعي $BADC$.

عين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-1);(C;2)\}$.

التمرين -10-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B ، C ذات اللواحق $Z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $Z_B=2-i$ ، $Z_C=1-i\sqrt{3}$

1. اوجد العبارة المركبة للانسحاب t الذي شعاعه $\vec{v}$ ذو اللاحقة Z_A .

2. اوجد العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$، ثم عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R . • استنتج طبيعة المثلث BAD

3. اوجد العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2- ثم عين Z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة C بالتحاكي h. •

ماذا تستنتج بالنسبةللشعاعين $\vec{AC}$ و $\vec{AE}$ و النقط A, C, E .

التمرين -11-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقطتين A ، B ، ذات اللاحقتين $Z_A=1+i$ ، $Z_B=3i$ على الترتيب .

ليكن F التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z'=2iZ+6+3i$.

1. ما هي طبيعة التحويل F ، حدد عناصره المميزة .

2. عين Z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل F .

استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين -12-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقطتين A ، B ، C و D ذات اللواحق $Z_A=1$ ، $Z_B=2i$ ، $Z_C=-1-i$ ، $Z_D=-3-3i$ على الترتيب .

1. ما هي طبيعة التحويل الذي مركزه A و يحول B إلى C .

2. ما هي طبيعة التحويل الذي يحول A الى B و يحول B الى D ، ثم جد عبارته المركبة.

التمرين -13-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقطتين A ، B ، C و D ذات اللواحق $z_A=1+i$ ، $Z_B=-\sqrt{2}-2i$ ، $Z_C=2i$ ، $Z_D=2$ على الترتيب .

عين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق:

$\lvert z-1-i\rvert=3$ •1	$\lvert iz-1+i\rvert=5$ •2	$\lvert z+\sqrt{2}+i\rvert=\lvert z-1-i\rvert$ •3
$\left\lvert\dfrac{z+\sqrt{2}+i}{z-1-i}\right\rvert=1$ •4	$\arg(z-2i)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ •6	$\arg(z-2i)=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ •5
$z=1+i+ke^{i\frac{\pi}{4}}$ •7 ، حيث k متغير على $\Re^*$.	$z=1+i+3e^{i\theta}$ •8 ،حيث θ متغير على $\Re$	$\arg\left(\dfrac{z-2}{z+3+i}\right)=k\pi$ •9
$\arg\left(\dfrac{z-2}{z+3+i}\right)=2k\pi$ •10	$\arg\left(\dfrac{z-2}{z+3+i}\right)=\pi+2k\pi$ •11	$\arg\left(\dfrac{z-2i}{z+\sqrt{2}+2i}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ •12

التمرين -14-

I) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة (I) المعرفة كما يلي : $(z-2i)(Z^2-6Z+13)=0........(I)$

• حل في C المعادلة (I).

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن C,B,A نقط لواحقها على الترتيب:

$Z_A=3-2i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=-2e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

1. اكتب Z_C على الشكل الأسي ثم على الشكل الجبري .
2. عين Z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع . ثم عين طبيعته بدقة .
3. ا- عين Z_W لاحقة النقطة W مركز الرباعي $ABCD$. و Z_E لاحقة النقطة E منتصف القطعة $[AB]$

ب.أحسب $\dfrac{Z_W-Z_E}{Z_B-Z_E}$ ثم استنتج طبيعة المثلث EBW .

4. أكتب العدد المركب $\dfrac{Z_E}{Z_E-Z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه E و يحول B الى O يطلب تعيين عناصره المميزة .
5. عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=16$ •

التمرين -15-

I) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة (I) المعرفة كما يلي : $Z^3-3\sqrt{3}Z^2+7Z-2\sqrt{3}=0........(I)$

• تحقق ان $Z_0=2\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I) ثم حل في C المعادلة (I).

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن C,B,A نقط لواحقها على الترتيب:

$Z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ ، $Z_B=4Z_A+2i$ ، $z_C=\overline{z_A}$

1. اكتب كل من Z_A و Z_C على الشكل الآسي .
2. أثبت أن Z_C^{2019} تخيلي صرف و أن $\left(\dfrac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019}$ حقيقي
3. أكتب العدد المركب $\dfrac{Z_C}{Z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث AOC .
4. عين قيم العدد الطبيعي n **بحيث يكون** $\left(\dfrac{Z_C}{Z_A}\right)^n$ **حقيقي.**
5. عين طبيعة التحويل الذي **مركزه** B **و يحول** A إلى C . (لا يطلب تعيين عناصره المميزة) .

6) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\dfrac{Z-Z_A}{Z}$ **تخيليا صرفا** ($Z\neq 0$) .

التمرين -16-

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، لتكن C, B, A و w نقط لواحقها

$Z_A = i$ ، $Z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $Z_C = -1 + i\sqrt{3}$ ، $Z_D = \overline{Z_C}$ ، $Z_w = 2+2i$ على الترتيب .

1. عين Z_I لاحقة النقطة I منتصف $[CD]$.
2. أكتب العدد $\dfrac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABI .
3. أوجد العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه I و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.
4. ماهي طبيعة التحويل F الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D محددا نسبته .
5. ما هي طبيعة التحويل FoR محددا نسبته و زاويته .
6. ليكن F التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :

$Z' = \dfrac{1}{2}iZ + 3 + i$.

- ما هي طبيعة التحويل S ، حدد عناصره المميزة .
- عين $Z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالتحويل S.

7. عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $z = -i + 2e^{i\theta}$ حيث حيث، θ متغير على $\Re$.

- عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

أنشئ (Γ) و (Γ') .

التمرين -17-

I) حل في C المعادلة ذات المجهول Z التالية : $(z-i)(Z^2 - 4Z + 5) = 0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:

$Z_A = i$ ، $Z_B = 2 - i$ $Z_C = 2 + i$

1. اكتب $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
2. من اجل كل عدد مركب Z يختلف عن 2+i : $f(z) = \dfrac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$

أ-عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق $|f(z)| = \dfrac{1}{2}$

ب- بين أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

3. نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

ا-عين z_D لاحقة D صورة A بالدوران r بين أن النقط D, A, C على استقامة واحدة.

ب-استنتج أن D صورة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة.

التمرين -18-

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:

$Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ $Z_C = -2Z_A$

1-ا-اكتب Z_A على الشكل الاسي .

ب-احسب العدد $\left(\dfrac{Z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\dfrac{Z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2- T الانسحاب الذي يحول A الى C

ا-عين Z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T.

3-اكتب $Z_C - Z_A$ على الشكل الاسي .

4-جد قيم العدد الطبيعي التي من اجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{Z_C - Z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5-لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها Z حيث M تختلف عن A و C .

-عين (E) مجموعة النقط M التي من اجلها $\frac{Z_A - Z}{Z_C - Z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

حلـــــــــــول التماريـــــــــــــن

حل التمرين -1-

$\bullet\ Z_1=(2+3i)+5(3-4i)=2+3i+15-20i=17-17i$

$\bullet\ Z_2=2(2+i)(3-4i)=(4+2i)(3-4i)$
$=12-16i+6i-8i^2=12-16i+6i+8=20-10i$

$\bullet\ Z_3=(2+3i)^2-(3-4i)=4-9+12i-3+4i=-8+16i$

$Z_4=\dfrac{3-i}{3-2i}-\dfrac{2-i}{1-i}$ نقوم أولا بتوحيد المقامات :

$$\bullet\ Z_4=\frac{3-i}{3-2i}-\frac{2-i}{1-i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(3-2i)(1-i)}-\frac{(2-i)(3-2i)}{(1-i)(3-2i)}$$
$$=\frac{3-3i-i-1-6+4i+3i+2}{3-3i-2i-2}=\frac{-2+3i}{1-5i}$$

نقوم بضرب البسط و المقام في مرافق المقام أي في $1+5i$ نجد :

$$\bullet\ Z_4=\frac{-2+3i}{1-5i}=\frac{(-2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}=\frac{-2-10i+3i-15}{1+25}$$
$$=\frac{-17-7i}{26}=-\frac{17}{26}-\frac{7}{26}i$$

$\bullet\ Z_5=\dfrac{\sqrt{2}-i}{1-i}$ نقوم بضرب البسط و المقام في مرافق المقام أي في $1+i$ نجد :

$$\bullet\ Z_5=\frac{(\sqrt{2}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i+1}{1+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}i$$

$\bullet\ Z_6=\dfrac{\sqrt{3}+2i\sqrt{2}}{i}$ نقوم بضرب البسط و المقام في مرافق المقام أي في i نجد :

حل التمرين -2-

تعيين مرافق الأعداد المركبة:

$\bullet\ \overline{Z_3}=3$, $\bullet\ \overline{Z_2}=\overline{\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)i}=\sqrt{2}-(\sqrt{3}+1)i$, $\bullet\ \overline{Z_1}=\overline{2-i}=2+i$, $\overline{Z_4}=2i$

2 كتابة الأعداد المركبة على الشكل الجبري:

$\bullet\ 2\overline{Z_A}-3\overline{Z_B}=2\overline{(2+i)}-3\overline{(1-i)}=2(2-i)-3(1+i)=4-2i-3-3i=1-5i$

$\bullet\ \overline{iZ_A-Z_B}-\overline{Z_A}=\overline{i(2+i)-(1-i)}-\overline{(2-i)}=\overline{(2i-1-1+i)}-(2+i)$
$=\overline{(-2+3i)}-2-i=-2-3i-2-i=-4-5i$

$\bullet\ \overline{i(Z_A+3i)-\overline{Z}_B}-\overline{\overline{Z}_A Z_B}=\overline{i(2+i+3i)-(1+i)}-\overline{(2-i)(1-i)}$
$=\overline{-5+i}-\overline{1-3i}=-5-i-(1+3i)=-6-4i$

حل التمرين -3-

تعيين طويلة الأعداد المركبة:

$\bullet\ |Z_3|=2$ $\bullet\ |Z_1|=|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\bullet\ |Z_4|=|i\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ $\bullet\ |Z_2|=|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$,

$\bullet\ |Z_1\times Z_2|=|Z_1|\times|Z_2|=2\sqrt{5}$, $\bullet\ \left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|=\dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\bullet\ |Z_2{}^3|=|Z_2|^3=2^3=8$,

$$\bullet\ \left|\frac{Z_3}{Z_2}\times Z_4{}^3\right|=\left|\frac{Z_3}{Z_2}\right|\times|Z_4{}^3|=\frac{|Z_3|}{|Z_2|}\times|Z_4|^3=\frac{2}{2}\times\sqrt{2}^3=2\sqrt{2}$$

حل التمرين -4-

تعيين عمدة للأعداد المركبة:

$\bullet\ Z_1=1+i$ لتكن θ_1 عمدة لــ Z_1 . نقوم بحساب طويلة Z_1 : $r=|Z_1|=|1+i|=\sqrt{2}$

لدينا $\cos\theta_1=\dfrac{x}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta_1=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\boxed{\theta_1=\dfrac{\pi}{4}}$.

$\bullet\ Z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ لتكن θ_2 عمدة لــ Z_2 . نقوم بحساب طويلة Z_2 : $r=|Z_2|=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right|=1$

لدينا $\cos\theta_2 = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta_2 = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}$ و منه $\boxed{\theta_2 = -\frac{\pi}{6}}$.

$Z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ لتكن θ_3 عمدة لــ Z_3 . نقوم بحساب طويلة Z_3 : $r = |Z_3| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$

لدينا $\cos\theta_3 = \frac{x}{r} = \frac{\frac{-1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$ و $\sin\theta_3 = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه $\boxed{\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}}$.

• $Z_4 = -2-2i$ لتكن θ_4 عمدة لــ Z_4 . نقوم بحساب طويلة Z_4 : $r = |Z_4| = |-2-2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

لدينا $\cos\theta_4 = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta_4 = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه $\boxed{\theta_4 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}}$.

• $Z_5 = 2i$ لتكن θ_5 عمدة لــ Z_5. لدينا Z_5 تخيلي صرف و جزؤه التخيلي موجب ومنه $\boxed{\theta_5 = \frac{\pi}{2}}$

• $Z_6 = Z_1 \times Z_2$ لتكن θ_6 عمدةعمدةلــ Z_6 . $\boxed{\theta_6 = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}}$

• $Z_7 = \frac{Z_5}{Z_2}$ لتكن θ_7 عمدةعمدةلــ Z_7 . $\boxed{\theta_7 = \theta_5 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}}$

$Z_8 = Z_6^{\,3}$. لتكن θ_8 عمدةعمدةلــ Z_8 . $\boxed{\theta_8 = 3\times\theta_6 = 3\times\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}}$

حل التمرين -5-

1 الكتابة على الشكل المثلثي و الأسي :

• $Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ نعين θ و r طويلة و عمدة Z_1 على الترتيب . $r = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$

الشكل المثلثي لــ Z_1 هو $Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ • وشكله الأسي هو $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ •

• $Z_2 = -\sqrt{3}i$ نعين θ و r طويلة و عمدة Z_2 على الترتيب . $r = \sqrt{3}$ و $\theta = -\frac{\pi}{2}$

الشكل المثلثي لــ Z_1 هو $Z_1 = \sqrt{3}\left(\cos -\frac{\pi}{2} + i\sin -\frac{\pi}{2}\right)$ • وشكله الأسي هو $Z_1 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ •

• $Z_3 = Z_1^{\,3}$ نطبق دستور موافر .

الشكل المثلثي لــ Z_3 هو $8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\cos 3\times\frac{\pi}{4} + i\sin 3\times\frac{\pi}{4}\right) \times Z_3 = 2^3$ •

وشكله الأسي هو $Z_1 = 2^3 e^{i\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)} = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$ •

2 الكتابة على الشكل الجبري:

$$\bullet\ Z_1 = 2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\bullet\ Z_2 = 4\left(\cos\frac{6\pi-\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi-\pi}{6}\right) = 4\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

نعلم أن $\boxed{\cos(\pi-x)=-\cos x}$ و $\boxed{\sin(\pi-x)=\sin(x)}$ و منه :

$$\bullet Z_2=4\left(-\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{\sqrt3}{2}}+i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac12}\right)=4\left(-\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)=-2\sqrt3+2i$$

$$\bullet Z_3=3\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=3\left(\cos\frac{3\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi+\pi}{3}\right)$$

$$=3\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

نعلم أن $\boxed{\cos(\pi+x)=-\cos x}$ و $\boxed{\sin(\pi+x)=-\sin(x)}$ و منه :

$$\bullet Z_3=3\left(-\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac12}-i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt3}{2}}\right)=3\left(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)=-\frac32-\frac{3\sqrt3}{2}i$$

$$\bullet Z_4=8\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=8\left(\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)=4+4i\sqrt3$$

$$\bullet Z_5=2e^{i\frac{\pi}{4}}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)=\sqrt2+i\sqrt2$$

$$\bullet Z_5=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\right)=2i$$

حل التمرين -6-

1• المعادلة $(2+i)z=7-i$ تعني $z=\frac{7-i}{2+i}$ نضرب و نقسم على مرافق المقام لكتابة الحل على الشكل الجبري :

$z=\frac{(7-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{14-7i-2i-1}{2^2+1^2}=\frac{13}{5}-\frac{9}{5}i$ إذن : $\boxed{z=\frac{13}{5}-\frac{9}{5}i}$

2• المعادلة $\frac{2}{3z-i}=3+2i$ مع $z\neq\frac{i}{3}$ تعني $(3z-i)(3+2i)=2$ و منه $(3z)(3+2i)-i(3+2i)=2$ و منه $3z(3+2i)=3i$ و منه $z(3+2i)=i$ و منه $z=\frac{i}{3+2i}$ ،نضرب و نقسم على مرافق المقام لكتابة الحل على الشكل الجبري :

$z=\frac{i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$.إذن $\boxed{z=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i}$

3• المعادلة $(2-i)\overline{z}=3-i$ تعني $\overline{z}=\frac{3-i}{2-i}$ ،نضرب و نقسم على مرافق المقام نجد: $\overline{z}=\frac75+\frac15 i$

ومنه : $z=\overline{\overline{z}}=\overline{\frac75+\frac15 i}=\frac75-\frac15 i$ إذن : $\boxed{z=\frac75-\frac15 i}$

4• $2z+\overline{z}=1-i$.نضع $z=x+yi$ فيكون $\overline{z}=x-yi$ و بالتعويض في المعادلة نجد :

$2(x+yi)+(x-yi)=1-i$ ومنه $2x+2yi+x-yi=1-i$ ومنه $(y+1)i+3x-1=0$ هذه المعادلة تعني :

$\begin{cases}y+1=0\\3x-1=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}y=-1\\x=\frac13\end{cases}$. حل المعادلة 4 هو $\boxed{z=\frac13-i}$

5• $z^2-2z-3=0$ ، $\Delta=4+12=16\succ 0$ المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما : $\boxed{z=\frac{2-4}{2}=-1}$ و $\boxed{z'=\frac{2+4}{2}=3}$.

6• $z^2-2z+1=0$ ، $\Delta=4-4=0$ المعادلة تقبل حلا حقيقيا و حيدا هو : $\boxed{z=\frac{2}{2}=1}$

7• $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ ، $\Delta=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4=-1\prec 0$ المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $\boxed{z=\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{|-1|}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}$

و $\boxed{z'=\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{|-1|}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}$.

8• $z^2-2z\cos\alpha+1=0$ ، $\alpha\in\left]0;\pi\right[$ نقوم بحساب المميز Δ :

$\Delta=(2\cos\alpha)^2-4=4\cos^2\alpha-4=4(\cos^2\alpha-1)$ نعلم أن $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ ومنه $\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$ نجد

$\Delta=4(-\sin^2\alpha)=-4\sin^2\alpha\prec 0$

المعادلة(8) تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $\boxed{z=\frac{2\cos\alpha-i\sqrt{|-4\sin^2\alpha|}}{2}=\cos\alpha-i\sin\alpha}$ و

$\boxed{z'=\frac{2\cos\alpha+i\sqrt{|-4\sin^2\alpha|}}{2}=\cos\alpha+i\sin\alpha}$.

حل التمرين -7-

(1) حساب p(-1): $P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=-1-3-3+7=0$

(2) تعيين الأعداد الحقيقية a، b و c :

لدينا : $(z+1)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+az^2+bz+c$

$=az^3+(b+a)z^2+(c+b)z+c$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}a=1\\b+a=-3\\c=7\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=7\end{cases}$ يكون $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$

(3) حل في C المعادلة p(z)=0 :

المعادلة $P(z)=0$ تعني $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ تعني $z+1=0$ أي $\boxed{z=-1}$

أو $z^2-4z+7=0$ ، $\Delta=16-28=-12\prec 0$ المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $\boxed{z'=\frac{4-i\sqrt{12}}{2}=2-i\sqrt{3}}$ و

$\boxed{z''=\frac{4+i\sqrt{12}}{2}=2+i\sqrt{3}}$.

حل التمرين -8-

(1) تعيين عمدة لكل من $\boxed{Z_A^{\,n}}$ و $\boxed{\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n}$:

• $\arg\left(Z_A^{\,n}\right)=n\times\arg(Z_A)=n\frac{\pi}{4}$ • $\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n=n\times\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)=n\times\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)=n\times[\arg(Z_B)-\arg(Z_A)]$

$=n\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{n\pi}{12}$

(2) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $Z_A^{\,n}$ حقيقيا:

Z_A^n حقيقي معناه $\arg(Z_A^n)=k\pi$ اي $n\frac{\pi}{4}=k\pi$ و منه $n=4k$ حيث $k\in N$.

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\boxed{\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n}$ تخيليا صرفا :

• Z_B^n تخيلي صرف معناه: $\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ اي $\frac{n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و منه $n=12k+6$ حيث $k\in N$.

حل التمرين -9-

(1) الكتابة على الشكل الجبري لـــ $\boxed{\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}}$:

$$\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{Z_B-4-Z_B}{1+2i-1+2i}=\frac{-4}{4i}=\frac{-1}{i}=\frac{-1(-i)}{i(-i)}=i$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=i$ و منه: $\begin{cases}\left|\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}\right|=1\\ \arg\left(\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}\right)=\frac{\pi}{2};k\in Z\end{cases}$ و منه: $\begin{cases}BC=BA\\ \left(\vec{BA};\vec{BC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in Z\end{cases}$ و منه المثلث BCA قائم في B و متساوي الساقين .

(2) بين أن النقاط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة:

طريقة 1 :

لدينا : $|Z_A-Z_I|=|Z_A-Z_I|=|Z_A-Z_I|=2\sqrt{2}$ و منه $IA=IB=IC=2\sqrt{2}$.

و منه فإن النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $r=2\sqrt{2}$.

طريقة 2 :

بما أن المثلث BCA قائم فإن النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها منتصف الوتر و نصف قطرها r نصف طول الوتر .

لاحقة منتصف الوتر: $\frac{Z_A+Z_C}{2}=\frac{1+2i-3-2i}{2}=-1=Z_I$ إذن مركز الدائرة هو النقطة I.

نصف قطر الدائرة: $r=IA=|Z_A-Z_I|=|1+2i+1|=2\sqrt{2}$.

(3) تعيين Z_D حتى يكون الرباعي BADC متوازي أضلاع :

$BADC$ متوازي أضلاع معناه: $Z_B-Z_C=Z_A-Z_D$ ومنه $Z_D=Z_A-Z_B+Z_C=1+2i-1+2i-3-2i$ و منه

$$\boxed{Z_D=-3+2i}$$

(4) استنتج بدقة طبيعة الرباعي $BADC$.

بما أن الرباعي $BADC$ متوازي أضلاع و لدينا مما سبق: $BC=BA$ و $\left(\vec{BA};\vec{BC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

(أي لدينا متوازي أضلاع و فيه ضلعان متعاقبان متقايسان و حاملاهما متعامدان)

إذن الرباعي $BADC$ مربع .

تعيين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة:

لدينا $2-1+2+3\neq 0$ ومنه G موجود و وحيد .

$$Z_G=\frac{2Z_A-Z_B+2Z_C}{3}=Z_G=\frac{2(1+2i)-(1-2i)+2(-3-2i)}{3}=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i$$

حل التمرين -10-

(1) العبارة المركبة للانسحاب t:

العبارة المركبة للانسحاب t من الشكل : $Z'=Z+b$ حيث b هو لاحقة شعاع الانسحاب $\vec{v}$ أي $b=Z_A$ و منه العبارة المركبة لـــ t : $\boxed{Z'=Z+2i}$.

(2) العبارة المركبة للدوران R:

العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $Z'=aZ+b$ حيث a هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له ، و منه $\boxed{a=i}$.

النقطة B هيمركز R : $Z_B=\frac{b}{1-a}$ و منه $b=Z_B(1-a)=(2-i)(1-i)=1-3i$.

إذن العبارة المركبة لـــ R : $\boxed{Z'=iZ+1-3i}$.

- بعد إيجاد a يمكن استعمال الصيغة المختصرة مباشرة و إيجاد العبارة المركبة دون حساب b:

$Z'-Z_B=i(Z-Z_B)$ و منه $Z'=i(Z-Z_B)+Z_B=i(Z-2+i)+2-i=iZ-2i-1+2-i$ و منه $\boxed{Z'=iZ+1-3i}$.

تعيين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالدوران R :

$Z_D=iZ_A+1-3i=i\times 2i+1-3i=-1-3i$ إذن $\boxed{Z_D=-1-3i}$

استنتاج طبيعة المثلث BAD :

بما أن الدوران R مركزه B و يحول A إلى D فإن $Z_D-Z_B=i(Z_A-Z_B)$ ومنه $\frac{Z_D-Z_B}{Z_A-Z_B}=i$ و منه:

و منه: $\begin{cases}\left|\frac{Z_D-Z_B}{Z_A-Z_B}\right|=1\\ \arg\left(\frac{Z_D-Z_B}{Z_A-Z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in Z\end{cases}$ إذن $\begin{cases}BD=BA\\ \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in Z\end{cases}$ المثلث BAD قائم في B و متساوي الساقين .

3) العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2- :

الصيغة المختصرة للتحاكي هي الذي مركزه A هي : $Z'-Z_A=k(Z-Z_A)$ حيث : $k=-2$ و منه

$Z'-Z_A=-2(Z-Z_A)$ و منه $Z'=-2(Z-Z_A)+Z_A$ و منه $Z'=-2Z+3Z_A$

إذن العبارة المركبة للتحاكي h هي : $\boxed{Z'=-2Z+6i}$.

تعيين Z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة C بالدوران h :

$Z_E=-2Z_C+6i=-2(1-i\sqrt{3})+6i=-2+(6+i\sqrt{3})$ ، $\boxed{Z_E=-2+(6+\sqrt{3})i}$

الاستنتاج :

بما أن الدوران h مركزه A و يحول C إلى E فإن $Z_E-Z_A=-2(Z_C-Z_A)$ ومنه $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AC}$ إذن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ مرتبطين خطيا و النقط A, C, E على استقامة واحدة .

حل التمرين -11-

1) طبيعة التحويل F :

التحويل F من الشكل : $Z'=aZ+b$.حيث $a=2i\in C-\Re$ و $|a|=2\neq 1$.

إذن التحويل النقطي F هو تشابه مباشر .

1) العناصر المميزة للتحويل F :

- نسبة التشابه المباشر هي $|a|=2$. • زاويته $\arg(a)=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$

لاحقة المركز هي $Z_B=3i=\frac{15i}{5}=\frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{6+3i}{1-2i}=\frac{b}{1-a}$ إذن مركز التشابه هو النقطة B .

تعيين Z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل F :

$Z_C=2iZ_A+6+3i=2i(1+i)+6+3i$ و منه $\boxed{Z_C=4+5i}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

بما أن التشابه المباشر F مركزه B و يحول A إلى C فإن $Z_C-Z_B=2i(Z_A-Z_B)$ ومنه $\frac{Z_D-Z_B}{Z_A-Z_B}=i$ و منه

و منه: $\begin{cases}\left|\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}\right|=2\neq 1\\ \arg\left(\frac{Z_D-Z_B}{Z_A-Z_B}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ إذن $\begin{cases}BC\neq BA\\ \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in Z\end{cases}$ المثلث ABC قائم في B .

حل التمرين -12-

1) طبيعة التحويل الذي مركزه A و يحول B إلى C :

التحويل الذي مركزه A و يحول B إلى C معناه : $Z_C-Z_A=a(Z_B-Z_A)$ و منه $a=\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ و منه $a=\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ و منه

$a=\frac{-1-i-1}{2i-1}=\frac{-2-i}{-1+2i}=\frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=i$.

$a=i\in C-\Re$ و $|a|=|i|=1$. إذن التحويل دوران .

2) طبيعة التحويل الذي يحول A إلى B و يحول B إلى D:

التحويل الذي يحول A إلى B و يحول B إلى D معناه : $\begin{cases}Z_B=aZ_A+b....(1)\\ Z_D=aZ_B+b....(2)\end{cases}$ بضرب المعادلة (2) في 1- ثم الجمع

نجد $Z_B-Z_D=a(Z_A-Z_B)$ و منه $a=\frac{Z_B-Z_D}{Z_A-Z_B}=\frac{2i+3-3i}{1-2i}=\frac{3-i}{1-2i}=\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=1+i$

$a=1+i\in C-\Re$ و $|a|=\sqrt{2}\neq 1$. إذن التحويل تشابه مباشر .

إيجاد عبارته المركبة:

العبارة المركبة للتشابه المباشر من الشكل: $Z'=aZ+b$. حيث $a=1+i$.

نعوض قيمة a في إحدى المعادلتين لإيجاد b:

لدينا $Z_B=aZ_A+b....(1)$ ومنه $b=Z_B-aZ_A=2i-(1+i)\times 1=-1+i$

و منه العبارة المركبة للتشابه المباشر هي: $\boxed{Z'=(1+i)Z-1+i}$.

حل التمرين -13-

1• $|z-1-i|=3$ و منه $|z-(1+i)|=3$ و منه $|z-z_A|=3$ معناه $OA=3$. مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A و نصف قطرها $r=3$.

2• $|iz+1-i|=5$ و منه $|iz-(-1+i)|=5$ و منه $\left|i\left(z-(\frac{-1+i}{i})\right)\right|=5$ و منه $\underbrace{|i|}_{1}|(z-(1+i)|=5$ و منه $|z-z_A|=5$ معناه $OA=5$. مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A و نصف قطرها $r=5$.

3• $|z+\sqrt{2}+i|=|z-1-i|$ و منه $\left|z-\left(-\sqrt{2}-i\right)\right|=|z-(1+i)|$ و منه $|z-z_B|=|z-z_A|$ معناه $OB=OA$. مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$.

4• $\left|\frac{z+\sqrt{2}+i}{z-1-i}\right|=1$ و منه $|z+\sqrt{2}+i|=|z-1-i|$ و منه $\left|z-\left(-\sqrt{2}-i\right)\right|=|z-(1+i)|$ و منه $|z-z_B|=|z-z_A|$ معناه $OB=OA$. مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$.

5• $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ و منه $\arg(z-z_C)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ معناه $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{MC}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

نصف المستقيم الذي يشمل C باستثناء النقطة C حيث $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{MC}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

6• $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}+k\pi$ و منه $\arg(z-z_C)=\frac{\pi}{3}+k\pi$ معناه $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{MC}\right)=\frac{\pi}{3}+k\pi$

المستقيم الذي يشمل C باستثناء النقطة C حيث $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{MC}\right)=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

7• $z=1+i+ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z-(1+i)=ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{4}}$ معناه $\left(\vec{u};\vec{OA}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل A باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{u};\vec{MA}\right)=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

8• $z=1+i+3e^{i\theta}$ و منه $z-(1+i)=3e^{i\theta}$ و منه $z-z_A=3e^{i\theta}$ و منه $|z-z_A|=3$ معناه $OA=3$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A و نصف قطرها $r=3$.

9• $\arg\left(\frac{z-2}{z-1-i}\right)=k\pi$ و منه $\arg\left(\frac{z-2}{z-(1+i)}\right)=k\pi$ و منه $\arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_A}\right)=k\pi$ معناه $\left(\vec{OA};\vec{OD}\right)=k\pi$

مجموعة النقط M هي المستقيم (AD) باستثناء A و D .

10• $\arg\left(\frac{z-2}{z+3+i}\right)=2k\pi$ و منه $\arg\left(\frac{z-2}{z-(1+i)}\right)=2k\pi$ و منه $\arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_A}\right)=2k\pi$ معناه $\left(\vec{OA};\vec{OD}\right)=2k\pi$. مجموعة النقط M هي المستقيم (AD) باستثناء القطعة $[AD]$.

11• $\arg\left(\frac{z-2}{z+3+i}\right)=\pi+2k\pi$ و منه $\arg\left(\frac{z-2}{z-(1+i)}\right)=\pi+2k\pi$ و منه $\arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_A}\right)=\pi+2k\pi$ معناه $\left(\vec{OA};\vec{OD}\right)=\pi+2k\pi$.

مجموعة النقط M هي القطعة $[AD]$ باستثناء A و D.

12• $\arg\left(\frac{z-2i}{z+\sqrt{2}+2i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و منه $\arg\left(\frac{z-2i}{z-\left(-\sqrt{2}-2i\right)}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و منه $\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

معناه $\left(\vec{OB};\vec{OC}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$. مجموعة النقط M هي دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء B و C

حل التمرين -14-

I) حل في C المعادلة (I) :

المعادلة (I) تعني $(z-2i)=0$ و منه $z=2i$ أو $Z^2-6Z+13=0...(*)$ ، $\Delta=36-4\times 13=-16=(4i)^2$ للمعادلة $(*)$

حلان هما : $z_1=\frac{6-4i}{2}=3-2i$ و $z_2=\frac{6+4i}{2}=3+2i$ إذن $S=\{2i;3-2i;3+2i\}$

1) كتابة Z_C على الشكل الأسي ثم على الشكل الجبري:

$$Z_C=-2e^{i(-\frac{\pi}{2})}=i^2\times 2e^{i(-\frac{\pi}{2})}=e^{i\pi}\times 2e^{i(-\frac{\pi}{2})}=2e^{i(\pi-\frac{\pi}{2})}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

الشكل الجبري :

$$z_c=2e^{i\frac{\pi}{2}}+2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2(0+i)=2i$$

2) عين Z_D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :

$ABCD$ متوازي أضلاع معناه : $\vec{AB}=\vec{DC}$ أي $Z_B-Z_A=Z_C-Z_D$ و منه

$Z_D=Z_A-Z_B+Z_C=3-2i-3-2i+2i=-2i$ و منه $\boxed{Z_D=-2i}$.

تعيين طبيعته بدقة :

$\frac{Z_B-Z_A}{Z_D-Z_A}=\frac{3+2i-3+2i}{-2i-3+2i}=-\frac{4}{3}i$ و منه $k\in z$ $\begin{cases}AB\neq AD\\(\vec{AD};\vec{AB})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ و منه $ABCD$ مستطيل.

3) أ- عين Z_W لاحقة النقطة W مركز الرباعي $ABCD$:

$$Z_W=\frac{Z_A+Z_C}{2}=\frac{3-2i+2i}{2}=\frac{3}{2}$$

Z_E لاحقة النقطة E منتصف القطعة $[AB]$:

$$Z_E=\frac{Z_A+Z_B}{2_A}=\frac{3-2i+3+2i}{2}=3$$

ب- حساب $\boxed{\dfrac{Z_W - Z_E}{Z_B - Z_E}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث WEB:

$$\frac{Z_W - Z_E}{Z_B - Z_E} = \frac{\frac{3}{2} - 3}{3 + 2i - 3} = \frac{3}{4}i$$ المثلث WEB قائم في E.

$$\leftarrow k \in z \quad \begin{cases} EB \neq EW \\ (\overrightarrow{EB}; \overrightarrow{EW}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

4) كتابة العدد $\boxed{\dfrac{Z_E}{Z_E - Z_B}}$ المركب على الشكل الأسي:

$$\frac{Z_E}{Z_E - Z_B} = \frac{3}{3 - 3 - 2i} = \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه E و يحول B الى O:

لدينا : $\frac{Z_E}{Z_E - Z_B} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي $Z_O - Z_E = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_E)$.

$\frac{Z_E}{Z_E - Z_B} \in C - R$ و $\left|\frac{Z_E}{Z_E - Z_B}\right| \neq 1$ إذن يوجد تشابه مباشر مركزه E و يحول B إلى O زاويته $\frac{\pi}{2}$ و نسبته $\frac{3}{2}$.

5) تعيين مجموعة النقط M بحيث: $\boxed{\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 16}$:

W مركز الرباعي ABCD اذن W مرجح النقط بمعاملات متساوية . و عليه :

$\left\|4\overrightarrow{MW}\right\| = 10$ و منه $\left\|4\overrightarrow{MW}\right\| = 16$ و منه $MW = 4$

المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها W و نصف قطرها r=4 .

حل التمرين -15-

التحقق أن $Z_0 = 2\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I) :

$$(2\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}(2\sqrt{3})^2 + 7 \times 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 36\sqrt{3} + 14\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

إذن $Z_0 = 2\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I).

حل في C المعادلة (I):

بما أن $Z_0 = 2\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I). فإن المعادلة (I) تكتب من الشكل $(Z - 2\sqrt{3})(aZ^2 + bZ + c) = 0$

حيث $c;b;a$ أعداد حقيقية . بعد النشر و المطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}$ و تكون المعادلة (I) كالتالي

$(Z - 2\sqrt{3})(Z^2 - \sqrt{3}Z + 1) = 0$ و هذه المعادلة تعني اما $Z - 2\sqrt{3} = 0$ و منه $Z_0 = 2\sqrt{3}$ أو $Z^2 - \sqrt{3}Z + 1 = 0$

مميزها $\Delta = -1$ و تقبل حلين مركبين مترافقين هما $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ و $Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. إذن

$$S = \left\{2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$$

1) كتابة كل من Z_A و Z_C على الشكل الآسي :

$|Z_A| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1$ ، و عمدة لـــ Z_A : $\boxed{Z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

Z_C هو مرافق Z_A و بالتالي : $\boxed{Z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}}$

2) إثبات أن Z_C^{2019} تخيلي صرف و أن $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019}$ حقيقي:

لدينا : $\arg(Z_C)=\frac{\pi}{6}$ ومنه $\arg\left(Z_C^{2019}\right)=2020\times\arg(Z_C)=2019\times\frac{\pi}{6}=673\frac{\pi}{2}=672\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+336\pi$

و منه $\arg\left(Z_C^{2019}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ إذن Z_C^{2019} عدد تخيلي صرف .

لدينا : $\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)=\arg(Z_C)-\arg(Z_A)=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$ ومنه $\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019}=2019\times\frac{\pi}{3}=673\pi$

و منه $\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019}=\pi+2k\pi$ إذن $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019}$ عدد حقيقي .

3) كتابة العدد المركب $\frac{Z_C}{Z_A}$ على الشكل الأسي و استنتج طبيعة المثلث AOC:

لدينا $\frac{Z_C}{Z_A}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

و منه : $\begin{cases}\left|\frac{Z_C-Z_O}{Z_A-Z_O}\right|=1\\ \arg\frac{Z_C-Z_O}{Z_A-Z_O}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases},k\in Z$ أي : $\begin{cases}AO=CO\\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases},k\in z$ إذن المثلث AOC متقايس الأضلاع .

4) تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^n$ حقيقي :

لدينا : $\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)=\frac{\pi}{3}$ ومنه $\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^n=n\frac{\pi}{3}$

و منه n حقيقي معناه $n\frac{\pi}{3}=k\pi$ و منه $\boxed{n=3k}$ حيث $k\in N$.

5) تعيين طبيعة التحويل الذي مركزه B و يحول A الى C :

لدينا $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-2\sqrt{3}}=\frac{\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{-3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{-3\sqrt{3}+i}{-3\sqrt{3}-i}=\frac{13}{14}-\frac{3\sqrt{3}}{14}i$

$\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}\in C-\Re$ و $\left|\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}\right|=\left|\frac{13}{14}-\frac{3\sqrt{3}}{14}i\right|=1$ إذن التحويل دوران

6) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون $\boxed{\frac{Z-Z_A}{Z}}$ تخيليا صرفا :

$\frac{Z-Z_A}{Z}$ تخيلي صرف معناه $\arg\left(\frac{Z-Z_A}{Z-Z_O}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in z$ معناه $\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

مجموعة النقط M هي دائرة قطرها $[OA]$ باستثناء المبدأ.

حل التمرين -16-

1) تعيين Z_I لاحقة النقطة I منتصف [CD]:

$Z_I=\frac{Z_C+Z_D}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}=-1$ ، $\boxed{Z_I=-1}$

② كتابة العدد $\frac{Z_A-Z_I}{Z_B-Z_I}$ على الشكل الأسي و طبيعة المثلث ABI :

$\frac{Z_A-Z_I}{Z_B-Z_I}=\frac{i+1}{-i+1}=i$ ، $\left|\frac{Z_A-Z_I}{Z_B-Z_I}\right|=|i|=1$ و $\arg\left(\frac{Z_A-Z_I}{Z_B-Z_I}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي $IB=IA$ و

$\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و منه المثلث ABI قائم في I و متساوي الساقين .

③ إيجاد العبارة المركبة للدوران R :

العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $Z'=aZ+b$ حيث a هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له ، و منه

$\boxed{a=i}$.

النقطة I هي مركز R: $Z_I=\frac{b}{1-a}$ و منه $b=Z_I(1-a)=-1\times(1-i)=-1+i$.

إذن العبارة المركبة لـــ R : $\boxed{Z'=iZ-1+i}$.

④ طبيعة التحويل F:

التحويل الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D معناه : $\begin{cases}Z_C=aZ_A+b....(1)\\Z_D=aZ_B+b....(2)\end{cases}$ بضرب المعادلة (2) في 1- ثم الجمع

نجد $Z_C-Z_D=a(Z_A-Z_B)$ و منه $a=\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_B}=\frac{-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}}{i+i}=\frac{2i\sqrt{3}}{2i}=\sqrt{3}$

$a=\sqrt{3}\in\Re^*-\{1\}$. إذن التحويل F تحاكي نسبته $\sqrt{3}$.

إيجاد عبارته المركبة:

العبارة المركبة للتشابه المباشر من الشكل: $Z'=aZ+b$. حيث $a=\sqrt{3}$.

نعوض قيمة a في إحدى المعادلتين لإيجاد b:

لدينا $Z_C=aZ_A+b....(1)$ ومنه $b=Z_C-aZ_A=-1+i\sqrt{3}-(\sqrt{3})\times i=-1$

و منه العبارة المركبة للتحاكي هي: $\boxed{Z'=\sqrt{3}Z-1}$.

⑤ طبيعة التحويل FoR:

التحويل FoR هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

⑥ طبيعة التحويل S :

التحويل S من الشكل : $Z'=aZ+b$. حيث $a=3i\in C-\Re$ و $|a|=3\neq1$.

إذن التحويل النقطي S هو تشابه مباشر .

العناصر المميزة للتحويل S :

- نسبة التشابه المباشر هي $|a|=\frac{1}{2}$. • زاويته $\arg(a)=\arg\left(\frac{1}{2}i\right)=\frac{\pi}{2}$

لاحقة المركز هي $Z_w=2+2i=\frac{3+i}{1-\frac{1}{2}i}=\frac{b}{1-a}$. إذن مركز التشابه هو النقطة w .

تعيين $Z_{B'}$ لاحقة النقطة B ' صورة النقطة B بالتحويل S :

$Z_{B'}=\frac{1}{2}iZ_B+3+i=\frac{1}{2}i(-i)+3+i$ و منه $\boxed{Z_{B'}=\frac{7}{2}+i}$

⑦ مجموعة النقط :

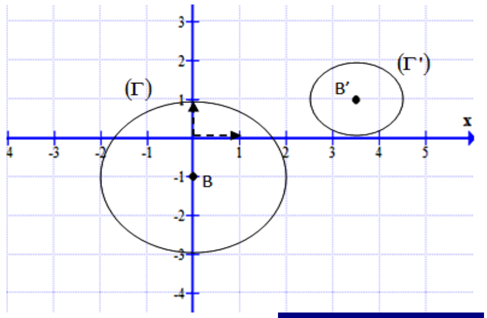
$z=-i+2e^{i\theta}$ و منه $z-(-i)=2e^{i\theta}$ و منه $z-z_B=2e^{i\theta}$ و منه $|z-z_B|=2$ معناه $OB=3$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $r=2$.

تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S :

صورة (Γ) بالتحويل S هي دائرة مركزها B' و نصف قطرها $r'=2\times\frac{1}{2}=1$.

8 الانشاء:



حل التمرين -17-

I) حل المعادلة :

المعادلة $(z-i)(Z^2-6Z+13)=0$ تعني إما $Z-i=0$ و منه $Z_0=i$ أو $Z^2-6Z+13=0$ مميزها $\Delta=-4$ و تقبل حلين مركبين مترافقين هما $z_1=\frac{4-2i}{2}=2-i$ و $z_2=2+i$. إذن $S=\{i;2-i;2+i\}$

II) ① كتابة $\boxed{\frac{Z_C-Z_A}{Z_C-Z_B}}$ على الشكل الأسي : $\frac{Z_C-Z_A}{Z_C-Z_B}=\frac{2+i-i}{2+i-2+i}=\frac{2}{2i}=-i=e^{i(\frac{-\pi}{2})}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\begin{cases}|-i|=1\\ \arg(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} \rightarrow \begin{cases}CB=CA\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in z\end{cases}$$

اذن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

② أ-مجموعة النقط التي تحقق $\boxed{|f(Z)|=\frac{1}{2}}$:

$|f(z)|=\frac{1}{2}$ ومنه $\left|\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right|=\frac{1}{2}$ ومنه $2|iz-1-2i|=|2z-2-4i|$ ومنه $2|iz-1-2i|=2|z-2-i|$ ومنه

$\left|i(z-\frac{(1+2i)}{i})\right|=|z-2-i|$ ومنه $|z-(2-i)|=|z-(2+i)|$ أي $|z-z_B|=|z-z_c|$ معناه $BM=CM$

اذن المجموعة $[E]$ هي محور القطعة $[CB]$

ب-تبيين أن العدد $\boxed{[f(i)]^{1440}}$ حقيقي موجب :

$$(f(i))^{1440}=\left(\frac{i\times i-1-2i}{2i-4-2i}\right)^{1440}=\left(\frac{-2-2i}{-4}\right)^{1440}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{1440}$$
$$=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1440}=e^{i\frac{1440\pi}{4}}=e^{i\times360\pi}=1$$

إذن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

(يمكن أن نكتفي بحساب عمدة العدد $[f(i)]^{1440}$ و إيجاد: $[f(i)]^{1440}=2k\pi$ حيث $k\in Z$)

③ أ-تعيين لاحقة D :

الصيغة المختصرة للدوران الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$. من الشكل $Z_D - Z_C = a(Z_B - Z_C)$ حيث a هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له أي $a = i$. ومنه $Z_D - Z_C = i(Z_B - Z_C)$ ومنه

$$Z_D = i(2-i-2-i)+2+i = i(-2i)+2+i = 4+i$$

تبيين أن A ، C و D على استقامية :

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{4+i-2-i}{i-2-i} = -1$$ و منه $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}) = \pi + 2k\pi$ ومنه $k \in z$

اذن النقط D, A, C على استقامة واحدة .

ب-استنتاج أن Dصورة A بتحويل نقطي بسيط:

وجدنا : $\frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_C} = -1$ و منه $(Z_D - Z_C) = -(Z_A - Z_C)$

إذن D صورة A بتحاك مركزه C و نسبته1- (تناظر مركزي).

حل التمرين -18-

$Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ $Z_C = -2Z_A$

ا-كتابة Z_A على الشكل الاسي :

$$|Z_A| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

لدينا $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\arg(Z) = \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in z$

اذن : $\boxed{|Z_A| = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$

ب-حساب العدد $\boxed{\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{Z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}}$:

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{Z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{3})}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(e^{i(-\frac{\pi}{3})}\right)^{2019} = e^{i\frac{2019\pi}{3}} + e^{i(-\frac{2019\pi}{3})}$$

$$= e^{i(673\pi)} + e^{i(-673\pi)} = e^{i(\pi)} + e^{i(-\pi)} = -1-1 = -2$$

ا-تعيين ZDلاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T:

الانسحاب T يحول A الى C معناه : $Z_A - Z_C = Z_B - Z_D$

ومنه $Z_D = Z_B - Z_A + Z_C$ $Z_D = \sqrt{2} - i\sqrt{6} - \sqrt{2} - i\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6}$ ومنه $\boxed{Z_D = -2\sqrt{2} - 4i\sqrt{6}}$

③كتابة $Z_C - Z_A$ على الشكل الاسي :

$$Z_C - Z_A = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6} - \sqrt{2} - i\sqrt{6} = -3\sqrt{2} - 3i\sqrt{6} = -3Z_A$$

$$|Z_C - Z_A| = 3|Z_A| = 6\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_C - Z_A) = \arg(Z_A) = \arg(-3) + \arg(Z_A) = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

اذن: $(Z_C - Z_A) = 6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

④ايجاد قيم n حتى يكون $\boxed{\left(\frac{-6\sqrt{2}}{Z_C - Z_A}\right)^n}$ عددا حقيقيا:

$\left(\frac{-6\sqrt{2}}{Z_C-Z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا: $n(-\frac{\pi}{3})=k\pi$

$\left(\frac{-6\sqrt{2}}{Z_C-Z_A}\right)^n=\left(\frac{-6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n=\left(-e^{i(\frac{-4\pi}{3})}\right)^n$

$=\left(e^{i(\frac{-4\pi}{3}+\pi)}\right)^n=\left(e^{i\times n(\frac{-\pi}{3})}\right)$

و منه $n=3k$ حيث $k\in N$.

تعيين (E) مجموعة النقط:

$\frac{Z_A-Z}{Z_C-Z}$ عدد حقيقي موجب تماما . معناه $\arg\left(\frac{Z_A-Z}{Z_C-Z}\right)=2k\pi$ حيث $k\in Z$.

المجموعة (E) هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$.

وفقكـــــــــــــم الله في بكالوريا 2023

دعواتكم لموتى المسلمين بالرحمة و لمرضاهم بالشفاء