مجلة المفيد في الرياضيات

لتلاميذ بكالوريا 2025 شعب علمية

الدوال العددية

- ملخص الدرس
- تمارين محلولة
- تمارين مقترحة

للأستاذ بلجودي حمو

النهايـــــــــــات

بعض نهايات الدوال المرجعية:

• $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ • $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ • $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ • $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ • $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ • $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ • $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}=0$ • $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}=+\infty$ • $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x}=-\infty$

❖ نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود نحسب نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

❖ نهاية دالة ناطقة :

✓ **نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و عند $-\infty$:**

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$. نحصل بعد الاختزال على ثلاث حالات حسب درجة البسط و المقام:

✓ **نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي a:**

لحساب نهاية ذالة ناطقة عند عدد حقيقي نعوض a مباشرة في عبارة الدالة .

❖ المستقيمات المقاربة :

✓ **المستقيم المقارب الأفقي:**

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=a$ أو $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=a$ فإن منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=a$.

✓ **المستقيم المقارب العمودي:**

إذا كانت $\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ فإن منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=a$.

✓ **المستقيم المقارب المائل:**

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ $\left(\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0\right)$ فإن منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=ax+b$ بجوار $(-\infty)$ $+\infty$.

✓ **دراسة الوضع النسبي لـــ (C_f) منحنى الدالة f بالنسبة الى المستقيم المقارب المائل (Δ)**

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة : $[f(x)-(ax+b)]$

• إذا كان $[f(x)-(ax+b)]\prec 0$ فان (C_f) تحت (Δ).

• إذا كان $[f(x)-(ax+b)]\succ 0$ فان (C_f) فوق (Δ).

• إذا كان $[f(x)-(ax+b)]=0$ فان (C_f) يقطع (Δ).

✓ **المنحنيان المتقاربان:**

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ $\left(\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0\right)$ فإن منحنى الدالة f و منحنى الدالة g متقاربان بجوار $(-\infty)$ $+\infty$.

✓ **دراسة الوضع النسبي لــمنحنيان**

لدراسة الوضع النسبي لــلمنحنيان (C_f) و (C_g) الممثلان للدالتين f و g ندرس إشارة: $[f(x)-g(x)]$

• إذا كان $[f(x)-g(x)]\prec 0$ يكون (C_f) تحت (C_g).

• إذا كان $[f(x)-g(x)]\succ 0$ يكون (C_f) فوق (C_g).

• إذا كان $[f(x)-g(x)]=0$ يكون (C_f) يقطع (C_g).

❖ نهاية دالة مركبة

a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا كانت $\lim_{x\to a} u(x)=b$ و إذا كانت $\lim_{x\to b} v(x)=c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x)=c$

❖ النهايات بالمقارنة

✓ إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} u(x)=l$ و $\lim_{x\to+\infty} v(x)=l$ و كان $v(x)\le f(x)\le u(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$.

الإستمراريـــــــــــــــــــــــة

❖ الاستمرارية:

✓ الاستمرارية عند عدد :

f دالة مجموعة تعريفها D و a عدد حقيقي غير معزول من D. الدالة f مستمرة عند a معناه : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$

✓ الاستمرارية على مجال :

• f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.

• هندسيا :تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم .

مبرهنة القيم المتوسطـــة

❖ مبرهنة القيم المتوسطة

❖ طـــــــــــــرق:

1• لإثبات وجود حلول المعادلة $f(x) = k$ على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

✓ نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.

✓ نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

2• لإثبات وجود حلول المعادلة $f(x) = 0$ على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

✓ نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.

✓ نتحقق من أن $f(a) \times f(b) \prec 0$.

3• لإثبات أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

✓ نتحقق أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$.

✓ نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

4• لإثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

✓ نتحقق أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$.

✓ نتحقق من أن $f(a) \times f(b) \prec 0$.

الإشتقاقيـــــــــــــة

العدد المشتق- الدالة المشتقة

f دالة معرفة على مجال I من R . a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

مماس منحنى دالة

معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

مشتقات دوال مألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	R
x	1	R
x^n ($n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$)	nx^{n-1}	R
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	R
$\sin x$	$\cos x$	R

المشتقات والعمليات على الدوال

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من R و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

طريقة:

لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a ندرس نهاية النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى 0.

- إذا كانت منتهية (و لتكن l) فإن f قابلة للاشتقاق عند a و المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا معامل توجيهه l .

-إذا كانت غير منتهية فإن f قابلة للاشتقاق عند a و المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.

دراســـــــة الـــــــــدوال

4

طــــــــرق:

❖ دراسة تغيرات دالة :

لدراسة تغيرات الدالة f نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نحسب نهايات الدالة عند الاطراف المفتوحة لمجالات تعريفها .
- ✓ نحسب f' الدالة المشتقة للدالة f ثم ندرس اشارة $f'(x)$ و نستنتج اتجاه تغير الدالة f .
- ✓ نشكل جدول تغيرات الدالة f .

❖ معادلة المماس:

✓ **كتابة معادلة المماس عند نقطة فاصلتها معطاة و لتكن x_0**

نقوم بحساب $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ثم نطبق الدستور التالي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

✓ **كتابة معادلة المماس معامل توجيهه معطى و ليكن a**

نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$. ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند x_0 كما في الطريقة الأولى .

✓ **كتابة معادلة مماس أفقي .**

نبحث x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = 0$. ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند x_0 كما في الطريقة الأولى .

✓ **كتابة معادلة المماس الموازي لمستقيم (△) الذي معادلته y=ax+b**

نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$. ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند x_0 كما في الطريقة الأولى .

✓ **كتابة معادلة المماس العمودي على المستقيم (△) الذي معادلته y=ax+b**

نبحث عن x_0 بحل المعادلة $a \times f'(x_0) = -1$. ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند x_0 كما في الطريقة الأولى .

❖ شفعية دالة:

✓ **تبيين أن الدالة f زوجية :**

نبين انه من اجل x كل من D_f ، $(-x) \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$.

✓ **تبيين أن الدالة f فردية :**

نبين انه من اجل x كل من D_f ، $(-x) \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$.

❖ مركز التناظر

لتبيين أن النقطة $W(a;b)$ هي مركز تناظر لمنحني الدالة f :

نبين انه من اجل x كل من D_f ، $(2a - x) \in D_f$ و $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

❖ محور التناظر

لتبيين أن النقطة المستقيم ذو المعادلة $x = a$ هو محور تناظر لمنحني الدالة f :

نبين انه من اجل كل x من D_f , $(2a - x) \in D_f$ و $f(2a - x) = f(x)$.

❖ نقاط التقاطع مع المحورين

✓ **مع حامل محور الفواصل(xx')**

لتعيين نقاط تقاطع (C_f) منحنى الدالة f مع حامل محور الفواصل (xx') نقوم بحل المعادلة $f(x) = 0$. و تكون حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل $(x'x)$ و التي تراتيبها معدومة .

✓ **مع حامل محور التراتيب (yy')**

f دالة معرفة على مجال يحوي القيمة 0 .

لتعيين نقطة تقاطع (C_f) منحنى الدالة f مع حامل محور التراتيب (yy') نقوم بحساب $f(0)$

تمارين محلولة

التمرين -1-

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x مجموعة تعريفها D_f.

- احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجال التعريف في كل حالة من الحالات التالية :

$1\bullet\ f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}$	$D_f=R-\{2\}$

$2\bullet\ f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$	$D_f=R-\{-1\}$
$3\bullet\ f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-1}$	$D_f=R-\{-1;1\}$
$4\bullet\ f(x)=\dfrac{2-x}{(x-1)^2}$	$D_f=R-\{;1\}$
$5\bullet\ f(x)=\lvert x\rvert+\dfrac{2}{x-1}$	$D_f=R-\{1\}$

التمرين -2-

x متغير حقيقي .احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

$1\bullet\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\sqrt{x}+5\right)$	$2\bullet\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}+2\right)$
$3\bullet\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}+2\right)$	$4\bullet\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)$
$5\bullet\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)$	$6\bullet\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)$
$7\bullet\lim\limits_{\substack{x\to9\\>}}\left(\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-3}\right)$	$8\bullet\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-3}\right)$

التمرين -3-

f هي الدالة المعرفة على $\Re$ بـ : $f(x)=x^3+x^2+4x+1$

1. ادرس نهايات الدالة f .
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f .
3. بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\Re$.
4. تحقق أن $-\frac{1}{2}\prec\alpha\prec0$.

التمرين -4-

أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية f و k عند 1 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة المحصل عليها:

$f(x)=\left(x^2-2x+3\right)^2$ ، $k(x)=2x\lvert x-1\rvert$

التمرين -5-

نعتبر الدالة f المعرفة على $D_f=\Re-\{-1;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في م متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها و استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أكتب معادلة (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
4. بين أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x)=x+3+\dfrac{x}{x^2-1}$
5. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
6. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).
7. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها α و β و γ حيث : $-2.6\prec\alpha\prec-2.5$ و $-1.4\prec\beta\prec-1.3$ و $0.9\prec\gamma\prec0.8$.
8. بين أن النقطة $\Omega(0;3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f).
9. أرسم المستقيمات المقاربة و المماس المنحني (C_f).

التمرين -6-

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x)=x^3+3x+4$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.
2. أدرس اتجاه تغير g و شكل جدول تغيراتها .
3. احسب $g(-1)$ ثم استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على $\Re$.

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـالعبارة $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. بين أنه من اجل كل x من $\Re$ ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. عين معادلة لِـ (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
5. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له .
6. ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ(T).
7. هل توجد مماسات موازية للمستقيم (Δ)؟
8. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.2\prec\alpha\prec1.3$
9. ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f) .

التمرين -7-

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re-\{2\}$ بـ $f(x)=|x-1|+\dfrac{2}{x-2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.
2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات التعريف .
3. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
4. اكتب معادلتي (T) و (T') نصفي المماسين للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
5. ادرس تغيرات الدالة f.
6. بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
7. بين أن المستقيم (D') ذو المعادلة $y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
8. ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة لكل من (D) و (D').
9. ارسم (T) و (T') و (D) و (D') و المنحني (C_f).

التمرين -8-

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}-2$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. ادرس تغيرات الدالة f.
3. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]$ ، ماذا تستنتج ؟
4. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_f).
5. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.7\prec\alpha\prec2.8$ ، استنتج الحل الآخر β .
فسر النتيجتين هندسيا .
6. ارسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).
7. نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ $g(x)=\left|\sqrt{x^2-2x+2}-2\right|$, (C_g) تمثيلها البياني
   - ارسم (C_g) اعتمادا على (C_f)
8. نعتبر الدالة h المعرفة على $\Re$ بـ $h(x)=\sqrt{x^2-2|x|+2}-2$, (C_h) تمثيلها البياني.
   - بين أن الدالة h زوجية .
   - ارسم (C_h) اعتمادا على (C_f)

التمرين -9-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x)=x^3-3x-3$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في R ؛ حلا وحيدا α . تحقق من أن: $2.1\prec\alpha\prec2.2$.

4. استنتج إشارة $g(x)$ على R .
5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

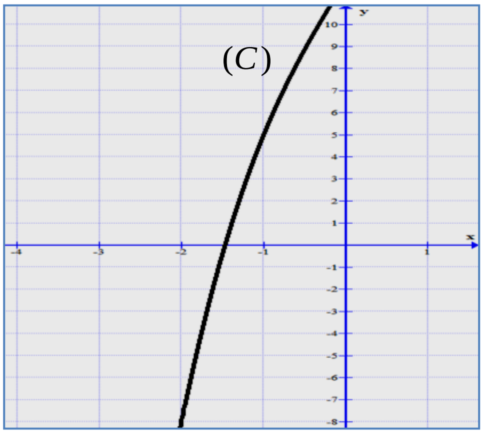
1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .
2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{-1;1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. عين ؛ دون حساب ؛ $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$. فسر النتيجة بيانيا .
5. بين أن: $f(\alpha)=3\alpha$.استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
6. أ-بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=2x$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

7. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-1.2\prec\beta\prec-1.1$.فير النتيجة هندسيا.
8. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .
9. نعتبر الدالة h المعرفة على $R-\{-1;1\}$ بـــ $h(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. - استنتج كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f).
10. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة الآتية حيث x هو المجهول : $f(x)=|m|$

التمرين -10-

الجزء الأول :



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على R كما يلي:

$g(x)=x^3+6x+12$.

- بقراءة بيانية حدد إشارة $g(-2)$ و $g(-1)$.
- برر وجود عدد حقيقي α من المجال $]-2;-1[$ يحقق أن المعادلة $g(\alpha)=0$.
- تحقق حسابيا أن $\alpha\in]-1.48;-1.47[$.
- استنتج إشارة $g(x)$ على R .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها .
2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ يكون : $f(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$.
3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. أ-بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=x+1$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5. بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـــ (Δ) . (لا يطلب تعيين معادلتيهما)
6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $1.3\prec\beta\prec1.4$.فسر النتيجة هندسيا.
7. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)=-1.2$)

التمرين -11-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. أدرس تغيرات الدالة g . و شكل جدول تغيراتها .
3. بين أن احسب $g(2)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ و إشارة $g(-x)$ على R .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .
2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{1\}$ ؛ يكون : $f'(x) = \dfrac{2g(-x)}{(x+1)^3}$.
3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. بين أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{1\}$ ؛ يكون : $f(x) = 2x + 2 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
5. أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = 2x + 2$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

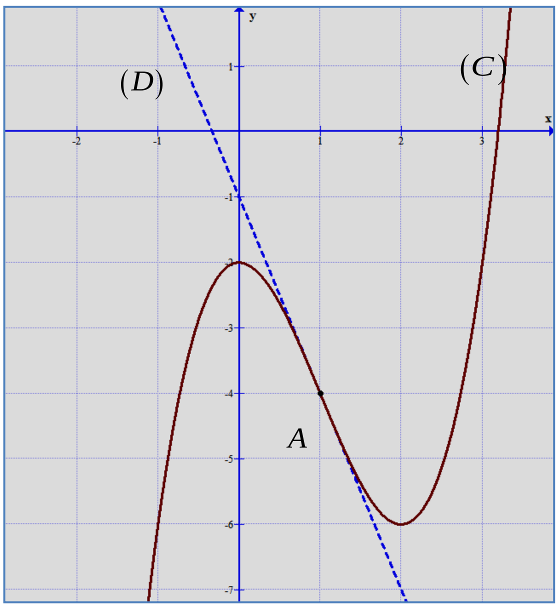
   ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).
6. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.3 \prec \alpha \prec -0.2$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
7. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .
8. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$

التمرين -12-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

(C) هو التمثيل البياني للدالة g في معلم . و (D) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1;-4)$ ، (انظر الشكل)



1. بقراءة بيانية :

   أ. شكل جدول تغيرات g .

   ب.عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$ و $g''(1)$.

   ج. اكتب معادلة لــ (D) .

   د . حل المتراجحة الآتية $g'(x) \prec 0$.
2. باستعمال (C) ، بين أن $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = -2$.
3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 .
4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.
5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .

2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$. ثم استنتج اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها .

3. احسب $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل م م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

4. بين أن $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5. بين أن: (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلته.

6. احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x)=m$ و المعادلة $f(x)=x+m$.

8. h الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$

⇦ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة)

9. u الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $u(x)=|f(x)|$ ، (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u.

⇦ أنشئ (C_u) انطلاقا من (C_f)

10. v الدالة المعرفة على المجال $R-\{-1;1\}$ كما يلي: $v(x)=f(|x|)$ (C_v) هو التمثيل البياني للدالة v.

⇦ بين أن v زوجية ثم أنشئ (C_v) انطلاقا من (C_f)

11. k الدالة المعرفة على المجال $R-\{2\}$ كما يلي: $k(x)=f(x-1)+2$ (C_k) هو التمثيل البياني للدالة k.

⇦ اشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f).

حلـــــــــــول التماريــــــــــــن

حل التمرين -1-

$\bullet 1$ $\boxed{f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-2}}$ $D_f=R-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty.$$

$\boxed{f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \bullet 2}$ $D_f = R - \{-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2. \quad \bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

$$\bullet \lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-5}{0^-} = +\infty. \quad \bullet \lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$\boxed{f(x) = \frac{2x-3}{x^2-1} \bullet 3}$ $D_f = R - \{-1;1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{-5}{0^+} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

$\boxed{f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2} \bullet 4}$ $D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$D_f = R - \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ $\boxed{f(x) = |x| + \frac{2}{x-1} \bullet 5}$

أولا نكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

$$f(x) = |x| + \frac{2}{x-1} = \begin{cases} -x + \frac{2}{x-1}, x \in]-\infty;0] \\ x + \frac{2}{x-1}, x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x + \frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x \to -\infty} x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \left(x + \frac{2}{x-1}\right) = \left(1 + \frac{2}{0^-}\right) = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \left(x + \frac{2}{x-1}\right) = \left(1 + \frac{2}{0+}\right) = +\infty$$

حل التمرين -2-

$\lim_{x\to+\infty}(x^2+\sqrt{x}+5)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$ •1 $\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}+2\right)=\frac{1}{0^+}+2=+\infty$ •2 $\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\sqrt{x}+2}_{+\infty}\right)=+\infty$ •3

•4 $\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x+1}}_{+\infty}-\underbrace{\sqrt{x-2}}_{-\infty}\right)$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ (نزيلها باستعمال المرافق).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-(x-2)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=0$$

•5 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)=+\infty$

•6 $\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+2x+2}}_{+\infty}\underbrace{-2x}_{-\infty}\right)$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ (نزيلها باستعمال المرافق)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-2\right)=\lim_{x\to-\infty}x(-1)=-\infty.$$

•7 $\lim_{\substack{x\to 9\\ >}}\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}-3}\right)=\frac{4}{0^+}=+\infty$

•8 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}-3}\right)$ ح.ع.ت من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ و نزيلها باستخراج $\sqrt{x}$ كعامل مشترك ثم الاختزال .

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(1-\frac{3}{\sqrt{x}})}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x}-\overset{0}{\frac{5}{\sqrt{x}}})}{(1-\underset{0}{\frac{3}{\sqrt{x}}})}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right)=+\infty$$

حل التمرين -3-

1.دراسة نهايات الدالة f عند$+\infty$ و عند$-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+x^2+4x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+x^2+4x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

2. دراسة تغيرات الدالة f:

$f'(x)=3x^2+2x+4$, المعادلة $f'(x)=0$ لا تقبل حلول و إشارة $f'(x)$ موجبة تماما.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\Re$.

3. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على R:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $\Re$

و لدينا $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\end{cases}$ و $0\in\left]-\infty;+\infty\right[$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على $\Re$

4. التحقق أن$\frac{-1}{2}<\alpha<0$:

لدينا $f(-\frac{1}{2})=-0.875\prec 0$ و $f(0)=1\succ 0$ اذن $-\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 0$.

حل التمرين -4-

$$f(x)=\left(x^2-2x+3\right)^2$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\left[(1+h)^2-2(1+h)+3\right]^2-4}{h}=\frac{h^2\left(h^2+4\right)}{h}$$ ومنه

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}h\left(h^2+4\right)=0$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1)=0$.

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 و هو موازي لمحور الفواصل.

$k(x)=2x|x-1|$

من أجل $h>0$ ، $\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}=\dfrac{2(h+1)|h|}{h}=2(h+1)$

و من أجل $h<0$ ، $\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}=\dfrac{2(h+1)|h|}{h}=-2(h+1)$

نلاحظ أن هذه النسبة تقبل نهاية من اليمين عند0 مساوية لـ2 و نهاية من اليسار عند0 مساوية لـ -2.

نقول أن k تقبل الاشتقاق عند1 من اليمين و من اليسار و أن عددها المشتق من اليمين عند1 هو2 و عددها المشتق من اليسار عند1 هو -2 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1

المنحني (C_k) يقبل عند النقطة $A(1;0)$ نصفي مماسين معاملا توجيههما 2 و -2 .

حل التمرين -5-

1.حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty.$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=+\infty\end{cases}$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ م.م عمودي لـ(C_f).

ولدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=+\infty\end{cases}$ إذن المستقيم ذو المعادلة$x=1$ م.م عمودي لـ(C_f).

2. دراسة اتجاه تغير f و تشكيل جدول تغيراتها:

من أجل كل x من D_f لدينا ، $f'(x)=\dfrac{(3x^2+6x)(x^2-1)-2x(x^3+3x^2-3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

إشارة $f'(x)$ من x^2-3 ، المعادلة$x^2-3=0$ تقبل حلين هما $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ و عليه إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	‖	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-\sqrt{3}]$ و $[\sqrt{3};+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالات $]1;\sqrt{3}]$ و $[-\sqrt{3};-1[$ و $]-1;1[$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0.4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5.6	↗ $+\infty$

3.كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ لدينا $f(0)=3$ و $f'(0)=0$ و بالتالي معادلة للمماس (T) هي : $y=3$.

4. تبيين أنه من أجل كل x من Df، $f(x)=x+3+\dfrac{x}{x^2-1}$:

من أجل كل x من D_f ، $x+3+\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{(x+3)(x^2-1)+x}{x^2-1}=\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=f(x)$

5.تبيين أن (Δ) ذو المعادلة y=x+3 مستقيم مقارب مائل:

$$\lim_{|x|\to\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to\infty}\left[x+3+\frac{x}{x^2-1}-(x+3)\right]=\lim_{|x|\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

6. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\frac{x}{x^2-1}$ ، نلخص إشارة $f(x)-y$ و الوضع النسبي في الجدول أدناه:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	-			0			+
x^2-1	+	0		-		0	+
$f(x)-y$	-	‖	+	0	-	‖	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)

7. تبيين أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها : $-2.6\prec\alpha\prec-2.5$ و $-1.4\prec\beta\prec-1.3$ و $0.8\prec\gamma\prec0.9$:

من جدول تغيرات الدالة f لدينا :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]$ و من ثم على المجال $[-2.6;-2.5]$:

و لدينا : $f(-2.6)=-0.05\prec0$ و $f(-2.6)=0.02\succ0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-2.6;-2.5[$ حلا وحيدا α .

- f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[-\sqrt{3};-1\right[$ و من ثم على المجال $[-1.4;-1.3]$:

و لدينا : $f(-1.4)=0.14\succ0$ و $f(-1.3)=-0.18\prec0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1.4;-1.3[$ حلا وحيدا β .

- f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;1[$ و من ثم على المجال $[0.8;0.9]$:

و لدينا : $f(0.8)=1.57\succ0$ و $f(0.9)=-0.83\prec0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0.8;0.9[$ حلا وحيدا β .

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها α و β و γ حيث :

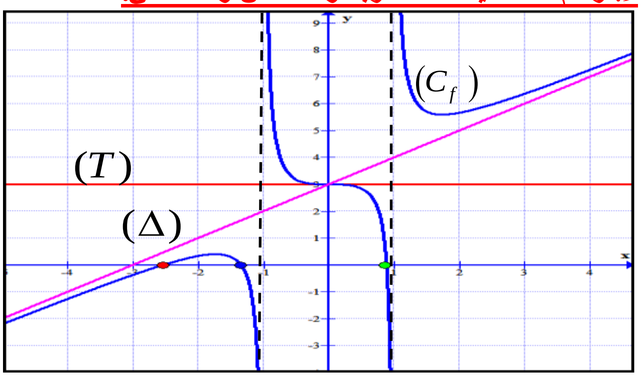
$-2.6\prec\alpha\prec-2.5$ و $-1.4\prec\beta\prec-1.3$ و $0.8\prec\gamma\prec0.9$.

8. تبيين أن النقطة $\Omega(0;3)$ مركز تناظر للمنحنى :

من أجل $x\in\Re-\{-1;1\}$ ، $(-x)\in\Re-\{-1;1\}$ و منه $(-x)\in D_f$ و:

$f(-x)+f(x)=-x+3+\frac{-x}{x^2-1}+x+3+\frac{x}{x^2-1}=6=2(3)$. إذن النقطة $\Omega(0;3)$ هي مركز تناظر لــ (C_f) .

9. رسم المستقيمات المقاربة و المماس و المنحنى.



حل التمرين -6-

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـِ $g(x)=x^3+3x+4$.

1. حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+3x+4=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+3x+4=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

3. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$، $g'(x)=3x^2+3$. $g'(x)\succ0$ إذن متزايدة تماما على $\Re$.

4. حساب g(-1) و استنتاج إشارة g(x) :

$g(-1)=0$. g متزايدة تماما على $\Re$ وتنعدم من اجل $x=-1$ إذن إشارتها كالتالي :

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$g(x)$	- 0 +

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$

1. حساب النهايات:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

2. تبيين أنه من اجل كل x من R ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ **:**

من اجل كل x من $\Re$ ، $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^4+3x^2-2x^4+4x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x(x^3+3x+4)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط. نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	|	+	
x		-	|	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-1;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{3}{2}$	↘	-2	↗	$+\infty$

4. تعيين معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$. لدينا $f(0)=-2$ و $f'(0)=0$ و بالتالي معادلة للمماس (T) هي : $y=-2$.

5. حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$:

- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-2}{x^2+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2-x^3-x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-2-x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$
- $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3-2}{x^2+1}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2-x^3-x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-2-x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x}=0$

الاستنتاج:

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لــ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

6. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$f(x)-x=\dfrac{-2-x}{x^2+1}$ ، إشارة $[f(x)-x]$ من إشارة البسط . نلخص إشارة $[f(x)-x]$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-2;-2)$	(C_f) تحت (Δ)

7. هل توجد مماسات موازية للمستقيم (Δ) ؟:

معامل توجيه المستقيم (Δ) هو 1 . المعادلة $f'(x)=1$ تكافئ $\dfrac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2}=1$ ومنه $x^4+3x^2+4x=(x^2+1)^2$

ومنه $x^2+2=0$. المعادلة لا تقبل حلول إذن لا توجد مماسات موازية لــ(Δ) .

8. تبيين أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:

لا توجد حلول للمعادلة $f(x)=0$ في المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-1;0]$.

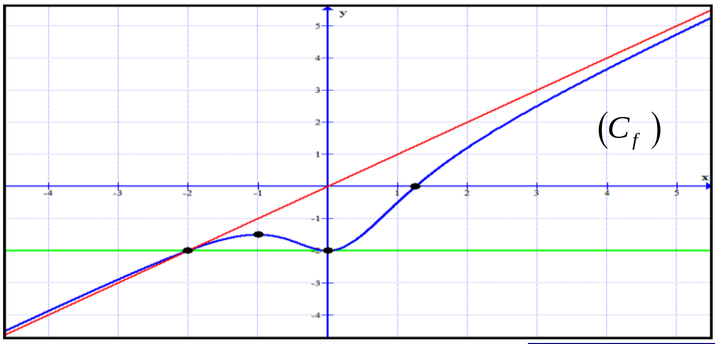
f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و من ثم على $[1.2;1.3]$ و لدينا $f(1.2)\times f(1.3)\prec 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1.2;1.3[$ حلا وحيدا α .

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.2\prec\alpha\prec1.3$.

9. رسم المستقيم (Δ) و المنحنى (Cf) :

(Δ)



حل التمرين -7-

1. كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x)=|x-1|+\frac{2}{x-2}=\begin{cases} g(x)=-x+1+\dfrac{2}{x-2}; x\in]-\infty;1] \\ k(x)=x-1+\dfrac{2}{x-2}; x\in[1;2[\cup]2;+\infty[\end{cases}$$

2. حساب النهايات عند أطراف مجالات التعريف :

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+1+\frac{2}{x-2}\right]=+\infty \quad \bullet \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{2}{x-2}\right]=+\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to2\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\<}} k(x)=\lim_{\substack{x\to2\\<}}\left[x-1+\frac{2}{x-2}\right]=\lim_{\substack{x\to2\\<}}\left[1+\frac{2}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to2\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\>}} k(x)=\lim_{\substack{x\to2\\>}}\left[x-1+\frac{2}{x-2}\right]=\lim_{\substack{x\to2\\>}}\left[1+\frac{2}{0^+}\right]=+\infty$$

- المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=2$.

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 و تفسير النتيجة هندسيا :

$$\bullet \lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h+1)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h-1+1+\dfrac{2}{h+1-2}+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h+\dfrac{2}{h-1}+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h^2+h+2+2h-2}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{-h^2+3h}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{-h-3}{(h-1)}=-3$$

نستنتج أن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار و عددها المشتق من اليسار هو $g'(1)=-3$.

$$\bullet \lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k(h+1)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-1+1+\dfrac{2}{h+1-2}+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+\dfrac{2}{h-1}+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2-h+2+2h-2}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{-h^2+h}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{-h+1}{h-1}=-1$$

- نستنتج أن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق من اليمين هو $k'(1)=-1$.

لكن العدد المشتق من اليمين و اليسار غير متساويان أي : $g'(1)\neq k'(1)$ ، إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

التفسير الهندسي للنتائج :

منحنى الدالة f يقبل نصفي مماسين عند النقطة معاملا توجيههما 3- و 1- .

4. كتابة معادلتي نصفي المماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

معادلة المماس (T): $y=g'(1)(x-1)+g(1)=-3(x-1)-2=-3x+1$

معادلة المماس (T'): $y=k'(1)(x-1)+k(1)=-1(x-1)-2=-x-1$

5. دراسة تغيرات الدالة f:

لما $x\in]-\infty;1]$: $f(x)=g(x)=-x+1+\dfrac{2}{x-2}$

من أجل كل x من $]-\infty;1]$: $f'(x)=g'(x)=-1-\dfrac{2}{(x-2)^2}\prec0$.الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1]$.

لما $x\in[1;2[\cup]2;+\infty[$: $f(x)=k(x)=x-1+\dfrac{2}{x-2}$

من أجل كل x من $[1;2[\cup]2;+\infty[$: $f'(x)=k'(x)=1-\dfrac{2}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$.

من أجل كل x من $[1;2[\cup]2;+\infty[$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط .

$x^2-4x+2=0$ ، $\Delta=8$ المعادلة $x^2-4x+2=0$ تقبل حلين هما $x=2-\sqrt{2}$ و $x=2+\sqrt{2}$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ كالتالي :

x	1		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	0	+	

إذن f متناقصة تماما على $[1;2[$ و $]2;2+\sqrt{2}]$ و f متزايدة تماما على $[2+\sqrt{2};+\infty[$.

6.تبيين أن المستقيم (D) ذو المعادلة y =x-1 مستقيم مقارب مائل لـ(Cf) بجوار $+\infty$:

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[k(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x-2}\right]=0$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

7.تبيين أن المستقيم (D’) ذو المعادلة y =-x+1 مستقيم مقارب مائل لـ(Cf) بجوار $-\infty$:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)-(-x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2}{x-2}\right]=0$

و منه المستقيم (D') ذو المعادلة $y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

9. دراسة الوضع النسبي لـ(Cf) بالنسبة لكل من(D)

ندرس إشارة $[f(x)-(x-1)]$ أي إشارة $\dfrac{2}{x-2}$ على المجال $[1;2[\cup]2;+\infty[$ ، نلخص إشارة و الوضع النسبي في الجدول التالي:

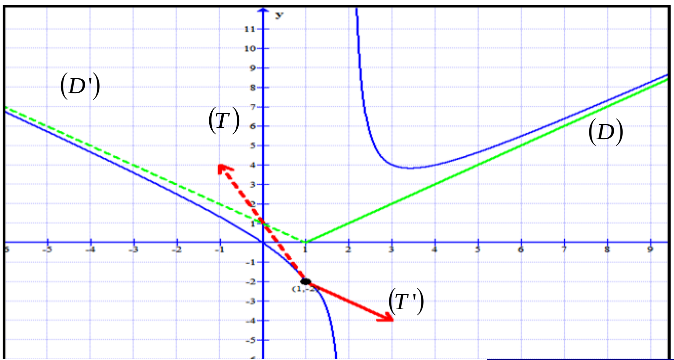
x	1		2		$+\infty$
$[f(x)-(x-1)]$		-	‖	+	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (D)	‖	(C_f) فوق (D)	

دراسة الوضع النسبي لـ (Cf) بالنسبة لكل من(D’) :

ندرس إشارة $[f(x)-(-x+1)]$ أي إشارة $\dfrac{2}{x-2}$ على المجال $]-\infty;1]$. من اجل x كل من $]-\infty;1]$ ، $\dfrac{2}{x-2}\prec 0$. إذن من اجل x كل من $]-\infty;1]$ ، (C_f) تحت (D') .

9. رسم المستقيمات و المماسات و المنحنى: $f(0)=0$

(C_f)



حل التمرين -8-

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}-2$

1. حساب نهايات الدالة :

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-2x+2}-2\right]=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-2x+2}-2\right]=+\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة f :

من اجل كل x من $\Re$ ، $f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(x-1)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

إذن f متناقصة تماما على $]-\infty;1]$ و متزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

3.حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]$ و الاستنتاج :

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-2-(-x-1)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-(1-x)\right)$ ... ح.ع.ت (نستعمل المرافق)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+2}-(1-x)\right)\times\left(\sqrt{x^2-2x+2}+(1-x)\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}+(1-x)\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+2-1-x^2+2x}{\left[\sqrt{x^2-2x+2}+(1-x)\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left[\sqrt{x^2-2x+2}+(1-x)\right]}=0$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-2-(x-3)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\right)$ .... ح.ع.ت (نستعمل المرافق)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\right)\times\left(\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{\left[\sqrt{x^2-2x+2}+(x+1)\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left[\sqrt{x^2-2x+2}+(1-x)\right]}=0$$

إذن المستقيم (D') ذو المعادلة $y=x-3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

4. تبيين أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى :

من اجل $x\in\Re$ ، $(2-x)\in\Re$ و: $f(2-x)=\sqrt{(2-x)^2-2(2-x)+2}-2=\sqrt{4+x^2-4x-4+2x+2}-2=\sqrt{x^2-2x+2}-2=f(x)$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_f).

5. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α:

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و من ثم على $[2.7;2.8]$ و لدينا $f(2.7)\times f(2.8)\prec 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]2.7;2.8[$ حلا وحيدا α.

استنتاج الحل الآخر :

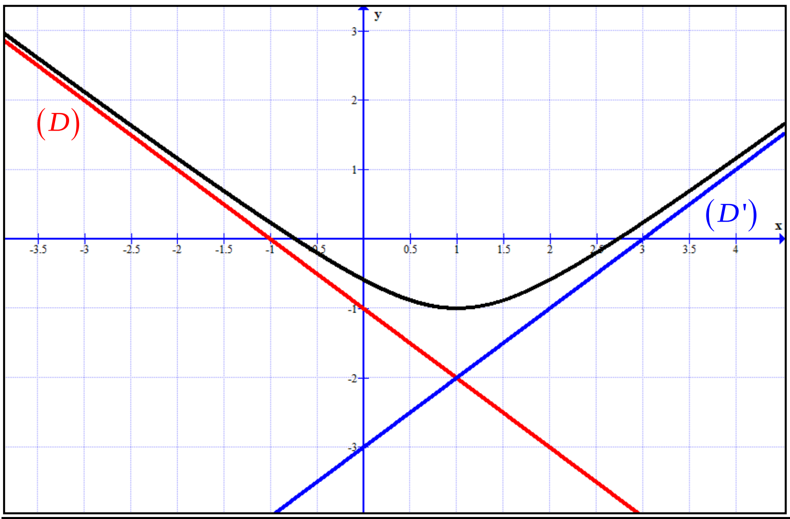
$f(2-x)=0$ معناه $2-x=\alpha$ و منه $x=2-\alpha$. (لأن $f(2-x)=f(x)$).

الحل الآخر للمعادلة $f(x)=0$ هو β حيث $\beta=2-\alpha$ و لدينا $2.7\prec\alpha\prec2.8$ و منه $-0.8\prec2-\alpha\prec-0.7$ أي $-0.8\prec\beta\prec-0.7$.

تفسير النتيجتين هندسيا :

α و β هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

6. رسم المستقيمات المقاربة و المنحنى: $f(0)=\sqrt{2}-2$



7.رسم (Cg) اعتمادا على (Cf):

يكون (C_g)منطبقا على (C_f) في المجالات التي يكون فيه(C_f) فوق محور الفواصل اي في المجالين $]-\infty;\beta]$ و $[\alpha;+\infty[$

يكون (C_g) مناظر لــ(C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه(C_f) تحت محور الفواصل أي في المجال$[\alpha;\beta]$.

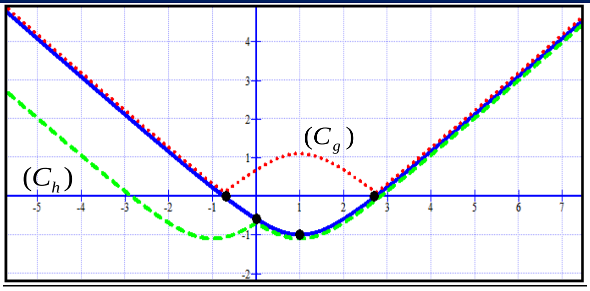
8. نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـِ $h(x)=\sqrt{x^2-2|x|+2}-2$

- **تبيين ان الدالة h زوجية :**

من اجل $x\in\Re$ ، $(-x)\in\Re$ و: $h(-x)=\sqrt{(-x)^2-2|-x|+2}-2=\sqrt{x^2-2|x|+2}-2=h(x)$. إذن الدالة h زوجية .

- **رسم (Ch) اعتمادا على (Cf) :**

يكون (C_h)منطبقا على (C_f) في المجال $[0;+\infty[$ ،و بما أن الدالة زوجية يكون الجزء من $]-\infty;0]$ مناظر للجزء الأول بالنسبة إلى محور التراتيب .



حل التمرين -9-

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـِ $g(x)=x^3-3x-3$.

1.حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x-3=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x-3=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$ ، $g'(x)=3x^2-3$.

المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلين هما $x=1$ و $x=-1$. و إشارة $g'(x)$ كما هو موضح في الجدول ادناه :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$. و متناقصة تماما على $[-1;1]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

3.بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في R حلا وحيدا :

لا توجد حلول للمعادلة $g(x)=0$ في المجال $]-\infty;1]$.

f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و لدينا $g(1)=-5$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ نلاحظ أن $0\in[-5;+\infty[$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\Re$ حلا وحيدا α .

التحقق من أن : $2.1\prec\alpha\prec2.2$:

$g(2.1)=-0.039$ و $g(2.2)=1.048$ و منه $g(2.1)\times g(2.2)\prec0$ إذن $2.1\prec\alpha\prec2.2$.

4. استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

5.تبيين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=6x$

f'' تنعدم عند 0 مغيرة إشارتها أي $f''(x)>0$ من أجل $x\succ0$ و $f''(x)<0$ من أجل $x\prec1$ و $f(1)=-3$. إذن $A(0;-3)$ هي نقطة انعطاف للمنحني(C).

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$

1.حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty.$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty.$

• $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty.$ • $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty.$ • $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ م.م عمودي لـ (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لـ (C_f).

2. التحقق أن $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$:

من أجل كل x من $R-\{-1;1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(6x^2)(x^2-1)-2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}=\frac{6x^4-6x^2-4x^4-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}=\frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغيرات f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$. نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		-	|	-	|	-	|	-	0	+	
x		-	|	-	0	+	|	+	|	+	
$f'(x)$		+	||	+	0	-	||	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالات $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $]1;\alpha]$ و $[0;1[$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$:

f قابلة للاشتقاق عند α ومنه $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\dfrac{2\alpha\times g(\alpha)}{(\alpha^2-1)^2}=0$

تفسير النتيجة بيانيا

منحنى الدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة α مماسا أفقيا .

5. تبيين أن $f(\alpha)=3\alpha$:

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha-3=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha=3$.

من جهة اخرى : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}$ بتعويض 3 بـــ $\alpha^3-3\alpha$ ينتج : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}=\dfrac{3\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}=\dfrac{3\alpha(\alpha^2-1)}{\alpha^2-1}=3\alpha$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا $2.1\prec\alpha\prec2.2$ ومنه $6\prec3\alpha\prec6.3$ أي $6\prec f(\alpha)\prec6.3$.

6.أ.تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{|x|\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to-\infty}\left[\frac{2x^3+3}{x^2-1}-2x\right]=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2x^3+3-2x^3+2x}{x^2-1}=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2x+3}{x^2-1}=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب.دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\dfrac{2x+3}{x^2-1}$. نلخص إشارة $f(x)-y$ و الوضع النسبي في الجدول أدناه:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x+3$		-	0	+	|	+	|	+	
x^2-1		+	|	+	0	-	0	+	
$f(x)-y$		-	**0**	+	||	-	||	+	

(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A\left(\frac{-3}{2};-3\right)$	(C_f) تحت (Δ)	الوضع النسبي

7.تبيين أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و من ثم على المجال $[-1.2;-1.1]$:

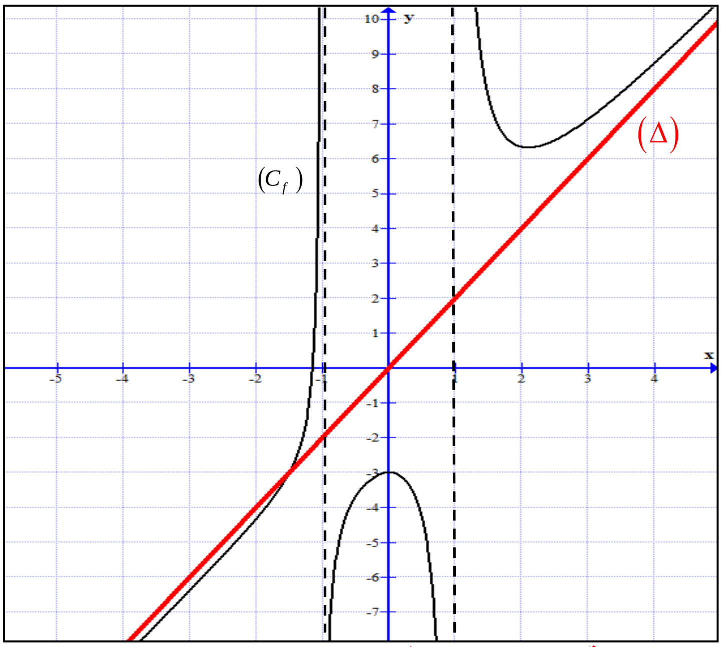
و لدينا : $f(-1.2)=-1.03 \prec 0$ و $f(-1.1)=1.609 \succ 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1.2;-1.1[$ حلا وحيدا β .

تفسير النتيجة هندسيا :

β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

8.انشاء (Δ) و المنحنى $f(0)=-3$



9.شرح كيفية رسم (Ch) انطلاقا من (Cf)

لدينا $h(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}+1=f(x)+1$. (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{j}$.

10.المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة f(x)=ImI

- إذا كان $|m|\in[0;f(\alpha)[$ أي أن $m\in[-f(\alpha);f(\alpha)]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $|m|=f(\alpha)$ أي أن $m=f(\alpha)$ أو $m=-f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا و حلا سالبا.
- إذا كان $|m|\in]f(\alpha);+\infty[$ أي أن $m=]-\infty;-f(\alpha)[\cup]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين و حلا سالبا .

حل التمرين -10-

الجزء الأول :

1.تحديد إشارة g(-1) و g(-2):

$g(-2)\prec 0$ و $g(-1)\succ 0$

2. تعليل وجود عدد حقيقي a من المجال] 1-;2-[يحقق g(a)=0:

من التمثيل البياني : g مستمرة و متزايدة تماما على $\Re$ و من ثم على $]-2;-1[$. و لدينا $g(-2)\times g(-1)\prec 0$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه يوجد عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-2;-1[$ يحقق : $g(\alpha)=0$.

3.التحقق حسابيا أن:-1.48<a<-1.47 .

$g(-1.48)=-0.12$ و $g(-1.47)=0.0035$. نلاحظ ان 0 محصور بين 0.12- و 0.0035 .

إذن : $\alpha\in]-1.48;-1.47[$.

4. استنتاج إشارة g(x):

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2+2}$.معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1.حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.

2. التحقق أن $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$:

من أجل كل x من R لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2x)(x^2+2)-2x(x^3+x^2-4)}{(x^2+2)^2}=\frac{3x^4+6x^2+2x^3+4x-2x^4-2x^3+8x}{(x^2+2)^2}=\frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2}=\frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

3.استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$. نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	|	+	
x		-	|	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	2	↗	$+\infty$

4.أ.تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2+2}-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x^2-4-x^3-x^2-2x-2}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x-6}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x}=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2+2}-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2-4-x^3-x^2-2x-2}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-6}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x}=0$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل لــ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم (Δ):

ندرس إشارة $[f(x)-x]$ أي إشارة $\dfrac{-2x-6}{x^2+2}$, إشارة $\dfrac{-2x-6}{x^2+2}$ من إشارة البسط . نلخص إشارة $[f(x)-x]$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-3;-2)$	(C_f) تحت (Δ)

5. تبيين ان المنحنى يقبل مماسان موازيين لـ (Δ) :

المعادلة $f'(x)=1$ تكافئ $\dfrac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2}=1$ ومنه $x^4+6x^2+12x=(x^2+2)^2$ ومنه $x^4+6x^2+12x=x^4+4x^2+4$ ومنه

$x^2+6x-2=0$. $\Delta=44\succ0$ ومنه فالمعادلة $f'(x)=1$ تقبل حلين متمايزين إذن يوجد مماسان موازيين لــ(Δ).

6. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا:

• f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و من ثم على المجال $[1.3;1.4]$:

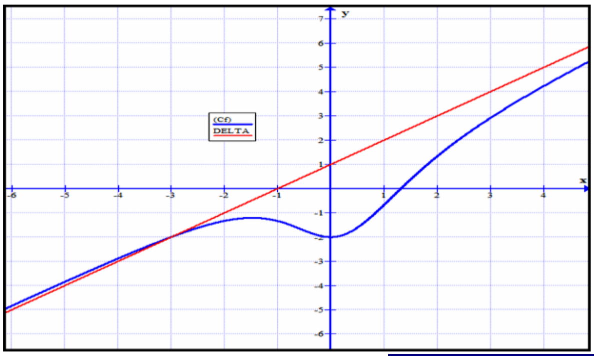
و لدينا : $f(1.3)=-.03\prec0$ و $f(1.4)=0.17\succ0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1.3;1.4[$ حلا وحيدا β .

تفسير النتيجة هندسيا :

β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

7.إنشاء (Δ) والمنحنى (Cf) $f(\alpha)=-1.2$, $f(0)=-2$



حل التمرين -11-

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـِ $g(x)=-x^3+3x^2-3x+2$.

1.حساب النهايات:

• $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^3+3x^2-3x+2\right]=\lim_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$ • $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^3+3x^2-3x+2\right]=\lim_{x\to+\infty}-x^3=+\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$، $g'(x)=-3x^2+6x-3$. $-3x^2+6x-3=0$ ، $\Delta=0$ ، $x=1$.

و منه $g'(x)\le 0$ من اجل كل x من $\Re$. الدالة g متناقصة تماما على $\Re$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3.حساب g(-2) و استنتاج إشارة g(x): $g(2)=0$

g مستمرة و متزايدة تماما على $\Re$ و تنعدم من اجل $x=2$. وعليه إشارة $g(x)$ كالتالي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

إشارة g(-x):

$g(-x)\prec 0$ اذا كان $-x\succ 2$ و منه $x\prec -2$ و $g(-x)\succ 0$ اذا كان $-x\prec 2$ و منه $x\succ -2$ و $g(-x)=0$ اذا كان $-x=2$ و منه $x=-2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3+6x^2+6x+1}{(x+1)^2}$

1.حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty.$ • $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty.$

• $\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\frac{15}{0^+}=+\infty$ • $\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=\frac{15}{0^+}=+\infty.$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ م.م عمودي لـ (C_f) .

2. التحقق أن $f'(x)=\dfrac{2g(-x)}{(x+1)^3}$:

من أجل كل x من $R-\{-1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2-2(x+1)(2x^3+7x^2+8x+2+3)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[(6x^2+14x+8)(x+1)-2(2x^3+7x^2+8x+2+3)\right]}{(x+1)(x+1)^3}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2+6x+4}{(x+1)^3}=\frac{2((-x)^3+3(-x)^2+3(-x)+2)}{(x+1)^3}=\frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$$

3. استنتاج اتجاه تغيرات f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط والمقام . نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$g(-x)$		-	0	+	|	+	
$(x+1)^3$		-	|	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	||	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ و $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-2;-1[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4.تبيين أن $f(x)=2x+2-\dfrac{1}{(x+1)^2}$:

$$2x+2-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(2x+2)(x^2+2x+1)-1}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+6x^2+6x+1}{(x+1)^2}=f(x)$$

5.أ.تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y=2x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (Cf) عند $+\infty$ و $-\infty$:-

$$\lim_{|x|\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to-\infty}\left[2x+2-\frac{1}{(x+1)^2}-(2x+2)\right]=\lim_{|x|\to-\infty}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ):

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\dfrac{-1}{(x+1)^2}$. لدينا من اجل كل x من $R-\{-1\}$

، $\dfrac{-1}{(x+1)^2}\prec 0$ إذن (C_f) تحت (Δ) في المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$.

6. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و من ثم على المجال $[-0.3;-0.2]$:

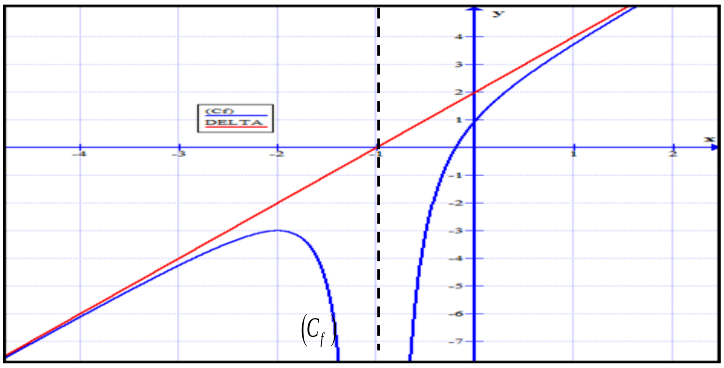
و لدينا : $f(-0.3)=-0.64\prec 0$ و $f(-0.2)=0.0375\succ 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-0.3;-0.2[$ حلا وحيدا α .

تفسير النتيجة هندسيا :

α هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

7.إنشاء (Δ) و (Cf) $f(\alpha)=0$ ، $f(0)=1$



(Δ)

8. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=2x+m$:

حلول المعادلة $f(x)=2x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=2x+m$ (مناقشة مائلة)

- إذا كان $m\in]-\infty;1[$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين .
- إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما و حلا سالبا.
- إذا كان $m\in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .
- إذا كان $m\in [2;+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

حل التمرين -12-

الجزء الأول : g **دالة معرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ **كما يلي :** $g(x)=ax^3+bx^2+c$ **حيث** a ، b ، c **أعداد حقيقية .**

1. بقراءة بيانية : أ. شكل جدول تغيرات g .

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

ب.عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$ و $g''(1)$.

$g(0)=-2$ ، $g(2)=-6$ ، $g'(0)=0$ ، $g'(2)=0$

$g'(1)$ هو معامل توجيه المماس (D) : $g'(1)=\dfrac{-1-(-4)}{0-1}=-3$

$g''(1)$: نلاحظ أن المماس (D) يخترق المماس في $A(1;-4)$ ، إذن A نقطة انعطاف و بالتالي : $g''(1)=0$

ج. اكتب معادلة لــ (D) :

معادلة (D) هي : $y=g'(1)(x-1)+g(1)$ و لدينا $g(1)=-4$ و $g'(1)=-3$

و منه $y=-3(x-1)-4$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y=-3x-1$

د . حل المتراجحة الآتية : $g'(x)\prec 0$ $x\in]0;2[$

2. باستعمال (C) **، بين أن** $a=1$ **،** $b=-3$ **و** $c=-2$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)=ax^3+bx^2+c$ و $g'(x)=3ax^2+2bx$

لدينا : $\begin{cases} g(0)=-2 \\ g(1)=-4 \\ g'(2)=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} c=-2 \\ a+b-2=-4 \\ 12a+4b=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} c=-2 \\ a+b=-2 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} c=-2 \\ -a-b=2.....(1) \\ 3a+b=0......(2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $2a=2$ ومنه $a=1$

نعوض قيمة a في (1) نجد $1+b=-2$ و منه $b=-3$

اذن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$: من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)=x^3-3x^2-2$

3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **محصور بين العددين 3.1 و 3.2 :**

g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[3.1;3.2]$ و لدينا : $\begin{cases} g(3.1)\prec 0 \\ g(3.2)\succ 0 \end{cases}$ أي $g(3.1)\times g(3.2)\prec 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathfrak{R}$ حلا وحيدا α حيث $3.1\prec\alpha\prec 3.2$.

4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x **؛ إشارة** $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

5. بين أن (C) **يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)=3x^2-6x$ و $g''(x)=6x-6$

$g''(x)>0$ من أجل $x\prec 1$ و $g''(x)<0$ من أجل $x\succ 1$ و $g(1)=-4$

g'' تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها إذن $A(1;-4)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C).

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

⇦ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لـ(C_f).

2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{1\}$ يكون : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$.

من أجل كل x من $R-\{1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(3x^2)(x-1)^2-2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\left[(3x^2)(x-1)-2(x^3+1)\right]}{(x-1)(x-1)^3}=\frac{(3x^2)(x-1)-2(x^3+1)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3-2}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2-2}{(x-1)^3}=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

استنتج اتجاه تغير f :

x	$-\infty$			1		α		$+\infty$
$g(x)$		-			-	0	+	
$(x-1)^3$		-		0	+		+	
$f'(x)$		+		‖	-	0	+	

f متزايدة تماما على $]-\infty;1[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1;\alpha]$.

و شكل جدول تغيراتها .

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

حساب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$:

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1-x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

استنتاج أن (C_f) يقبل م م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-x=2$ معناه $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-x-2=0$ معناه $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+2)=0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ) :

$$f(x)-(x+2)=\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2}-2=\frac{2x^2-x+1-2(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-x+1-2x^2+4x-2}{(x-1)^2}=\frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$		1
$f(x)-y$	-	0	+		+
الوضع النسبي	(C_f) **تحت** (Δ)	(C_f) **يقطع** (Δ) **يقطع** $B\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$	(C_f) **فوق** (Δ)		(C_f) **فوق** (Δ)

4. بيان أن $f(\alpha)=3+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ **:**

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha^2-2=0$ ومنه $\alpha^3=3\alpha^2+2$.

من جهة أخرى : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3+1}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha^2+2+1}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha^2+3}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha^2-6\alpha+3+6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و منه

$f(\alpha)=\dfrac{3(\alpha^2-2\alpha+1)+6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\dfrac{3(\alpha-1)^2+6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\dfrac{3(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2}+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=3+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$.

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ **:**

لدينا $3.1\prec\alpha\prec3.2$ ومنه $2.1\prec\alpha-1\prec2.2$ ومنه $4.41\prec(\alpha-1)^2\prec4.84$ ومنه $0.2\prec\dfrac{1}{(\alpha-1)^2}\prec0.22$ ومنه $1.2\prec\dfrac{6}{(\alpha-1)^2}\prec1.32$

ومنه $1.2\times3.1\prec\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\prec1.32\times3.2$ ومنه $3+3.72\prec3+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\prec3+4.22$ إذن $6.72\prec f(\alpha)\prec7.22$.

5. تبيين أن: (C_f) **يقبل مماسا** (T) **موازيا لـ** (Δ)**:**

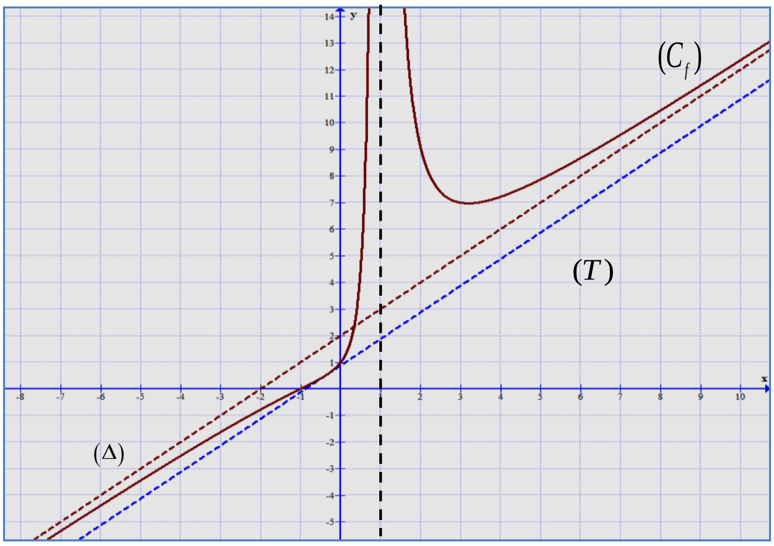
$f'(x)=1$ و منه $\dfrac{x^3-3x^2-2}{(x-1)^3}=1$ و منه $x^3-3x^2-2=(x-1)^3$ و منه $x=\dfrac{-1}{3}$

(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=\dfrac{-1}{3}$.

معادلته:

معادلة (T) هي : $y=f'\left(\dfrac{-1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{-1}{3}\right)$ و منه $y=1(x+\dfrac{1}{3})+\dfrac{13}{24}$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y=x+\dfrac{7}{8}$

6. حساب $f(-1)$ **ثم انشاء** (Δ) **و المنحنى** (C_f) **:**



7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m **؛ عدد حلول المعادلة :** $f(x)=m$ (المناقشة أفقية)

⇦ إذا كان $m\in\left]-\infty;f(\alpha)\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا . ⇦ إذا كان $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلان .

⇦ إذا كان $m\in\left]f(\alpha);+\infty\right[$ المعادلة تقبل 3 حلول.

و المعادلة $f(x)=x+m$ **.**

⇦ إذا كان $m \in \left]-\infty;\frac{7}{8}\right[$ لا توجد حلول . ⇦ إذا كان $m = \frac{7}{8}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا .

⇦ إذا كان $m \in \left]\frac{7}{8};2\right[$ المعادلة تقبل حلان . ⇦ إذا كان $m = 2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

⇦ إذا كان $m \in \left]2;+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلان .

8. h الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$

⇦ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة) :

من أجل كل x من $R-\{1\}$ لدينا ، $h'(x) = 2\times[f'(x)]\times[f(x)]$

x	$-\infty$ -1	1	α $+\infty$
$f'(x)$	+	+	‖	- 0 +
$f(x)$	- 0 +	‖	+	+
$h'(x)$	- 0 +	‖	- 0 +

f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;1[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $]1;\alpha]$.

x	$-\infty$ -1	1	α $+\infty$
$h'(x)$	- 0 +	‖	- 0 +
$h(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $[f(\alpha)]^2$ ↗ $+\infty$

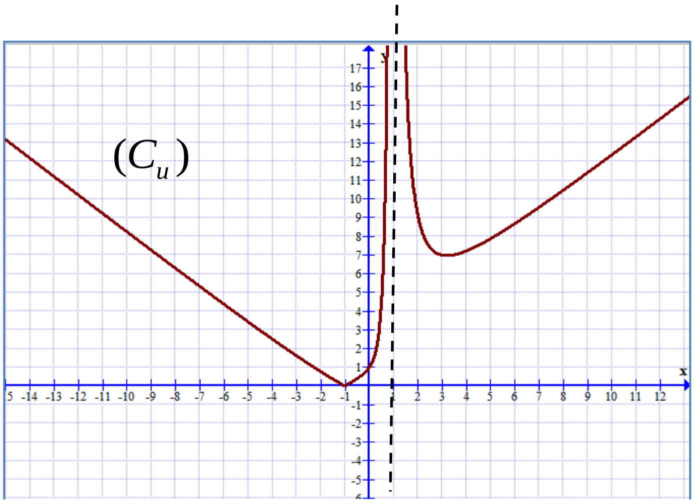
9. u الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي :

$u(x) = |f(x)|$ (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u.

⇦ انشاء (C_u) انطلاقا من (C_f) :

يكون (C_u) منطبقا على (C_f) في المجالات التي يكون فيه (C_f) فوق محور الفواصل .

يكون (C_u) مناظر لـ (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه (C_f) تحت محور الفواصل .



10. v الدالة المعرفة على المجال $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $v(x) = f(|x|)$ (C_v) هو التمثيل البياني للدالة v.

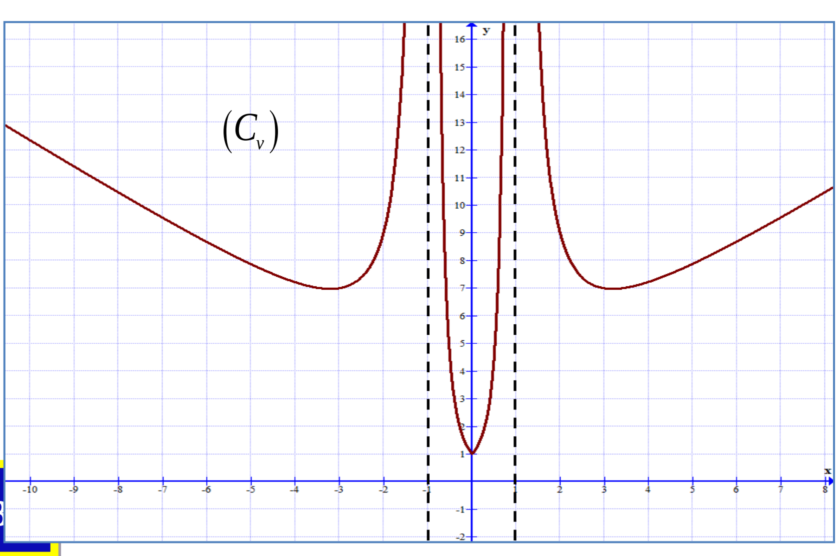
⇦ بين أن v زوجية

من اجل $x \in D_u$ ، $-x \in D_u$ و:

$v(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = v(x)$. إذن الدالة u زوجية .

أنشاء (C_v) انطلاقا من (C_f) :

يكون (C_v) منطبقا على (C_f) في المجال $[0;1[\cup]1;+\infty[$ ، و بما أن الدالة u زوجية فإن منحنيها متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .



11. k **الدالة المعرفة على المجال** $R-\{2\}$ **كما يلي :** $k(x)=f(x-1)+2$ (C_k) **هو التمثيل البياني للدالة** k.

⇦ **اشرح كيفية انشاء** (C_k) **انطلاقا من** (C_f)**.**

$k(x)=f(x-1)+2$ من الشكل $k(x)=f(x+a)+b$ مع $a=-1$ و $b=2$.

إذن (C_k) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1;-2)$.

تمـــــــــــــارين

التمرين -1-

I • f الدالة المعرفة على المجموعة R^* كما يلي : $f(x) = x^2+1+\frac{2}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ- احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها .

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

ج-ادرس إشارة $f(x)$ على R^* .(تحقق أولا أن $f(-1)=0$)

2. (P) قطع مكافئ معادلته : $y = x^2+1$

أ- احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x^2+1)\right]$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x^2+1)\right]$ ماذا تستنتج ؟

ب-ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (P).

3. أنشئ (C_f) و (P) في نفس المعلم.

4. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة $x^2+2+\frac{2}{x}=m$

5. k الدالة المعرفة على المجموعة R^* كما يلي : $k(x) = x^2+1+\frac{2}{|x|}$ و (C_k) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ-أكتب $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

ب-بين أن k دالة زوجية .

ج-استنتج (C_k) بالاستعانة بـــ (C_f) .

$II \bullet h$ الدالة المعرفة على المجموعة R^* كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$.

1. احسب نهايات h عند حدود مجالات تعريفها . (نهاية دالة مركبة)
2. ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها. (دون حساب عبارة h)

$III \bullet g$ الدالة المعرفة على المجموعة D كما يلي : $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

1. أ- عين D مجموعة تعريف الدالة g.
ب- احسب نهايات g عند حدود مجالات تعريفها . (نهاية دالة مركبة)

ج-ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها. (دون حساب عبارة g)

2. بين أنه من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;-1[$ ؛ $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=-\sqrt{\dfrac{x^2-x+2}{x(x+1)}}$.
- ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند 1- و فسر النتيجة هندسيا .
3. أ- بين أنه من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;-1[$ ؛ $g(x)-x=\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{f(x)}+x}$.
ب- استنتج أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
4. أنشئ (C_g).
5. اشرح كيفية رسم (C_u) منحنى الدالة u المعرفة على D كما يلي: $u(x)=2+\sqrt{f(x)}$.

التمرين -2-

$I \bullet g$ دالة معرفة على المجموعة R كما يلي $g(x)=x^3+6x+12$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g .ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن $g(x)=0$ تقبل في $]-2;+\infty[$ ؛حلا وحيدا α . تحقق من أن : $-2\prec\alpha\prec-1$
3. جد حصرا لـ α سعته 10^{-1}.
4. استنتج إشارة $g(x)$ على R .

$II \bullet f$ الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$ و (C_f) تمثيلها في معلم م . م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها .
2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$.
3. ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(\alpha)-f(\alpha)}{x-\alpha}$
5. بين أن $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
6. أ-بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$ عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

7. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .

8. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة : $x^3 - m(2 + x^2 + 6m^{-1}) = 0$

9. h الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$.

❖ ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيراتها. (دون حساب عبارة h)

10. g الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x) = |f(x)|$. (C_g) تمثيلها في معلم م . م $(O;\vec{i};\vec{j})$

❖ أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم أنشئ (C_g) بالاستعانة بـــ (C_f).

11. g الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $k(x) = f(-|x|)$. (C_k) تمثيلها في معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ-أكتب $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

ب-بين أن k دالة زوجية .

ج-استنتج (C_k) بالاستعانة بـــ (C_f) .

التمرين -3-

I• g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1. أدرس تغيرات الدالة g .ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن $g(x) = 0$ تقبل في R ؛حلا وحيدا α . تحقق من أن : $-1 \prec \alpha \prec 0$.
3. جد حصرا لــ α سعته 10^{-1}.
4. استنتج إشارة $g(x)$ على R .

II• f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها .
2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ $f'(x) = \dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
3. ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. عين الثوابت الحقيقية a ، b ، c بحيث يكون ؛ من أجل كل x من $\Re$ فإن :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

5. أ-بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ $f''(x)=\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$. ثم بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f). (يعطى $f(\alpha)=-2.13$)

ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=m^2$

7. h الدالة المعرفة على المجموعة D كما يلي : $h(x)=\frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+1}$. و (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

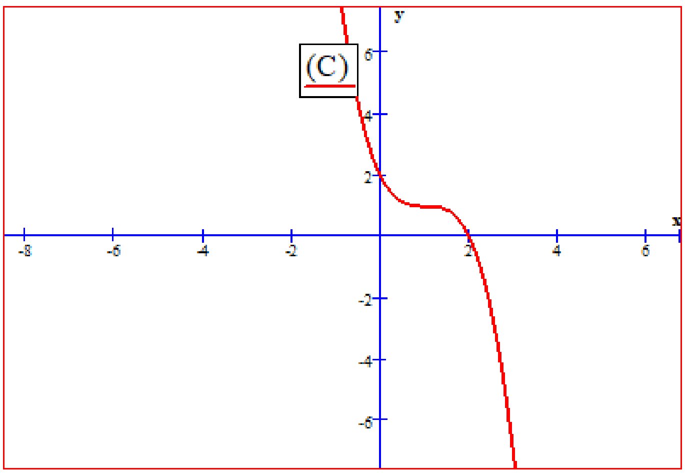
أ- عين D مجموعة تعريف الدالة h.

ب-تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $h(x)=\frac{x^3+x-2}{x^2+1}+1$

ج- بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يسمح لنا بالانتقال من (C_f) إلى (C_h) .

التمرين -4-

g دالة معرفة على R بتمثيلها البياني (C) كما هو موضح في الشكل :



1. عين العبارة المناسبة للدالة g.

$g(x)=-x^3+3x^2-3x+2$, $g(x)=-x^3+2x^2-3x+2$, $g(x)=-x^3+3x^2-3x+1$,

2. احسب نهايات g عند حدود مجالات تعريفها .

3. أدرس اتجاه تغير الدالة g . و شكل جدول تغيراتها .

4. احسب $g(2)$ ثم استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $g(-x)$ على R .

II • f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x^3+6x^2+6x+1}{(x+1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

9. احسب نهايات f . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .

10. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\frac{2g(-x)}{(x^2+1)^3}$.

11. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .

12. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{-1\}$ ؛ $f(x)=2x+2-\frac{1}{(x+1)^2}$

13. أ- بين أن (Δ) الذي $y=2x+2$ معادلة له مستقيم مقارب (C_f) .

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

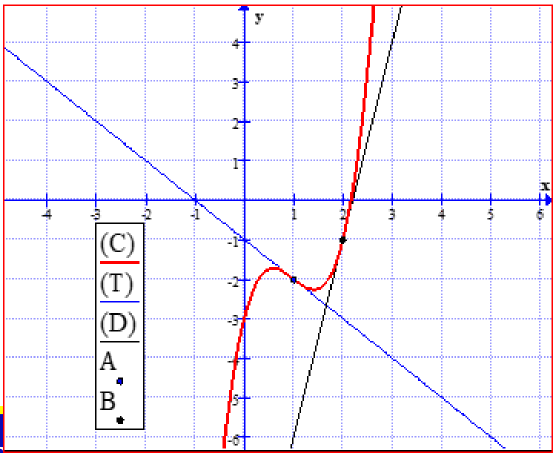
14. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.3\prec\alpha\prec-0.2$.فسر النتيجة هندسيا.

15. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .

ناقش ؛ حسب قيم m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=2x+m$

التمرين -5-

$I)$ • g دالة معرفة على R بـــ $g(x)=2x^3-6x^2+5x-3$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل : (T) هو مماس المنحنى (C) عند النقطة $A(1;-2)$ و (D) هو مماس المنحنى (C) عند النقطة $B(2;-1)$.



1. خمن وجود نقطة انعطاف للمنحنى (C) ثم اثبت صحة تخمينك حسابيا .

2. عين بيانيا $g'(2)$ و $g'(1)$ و معادلة لكل من (T) (D).

3. بين أن $g(x)=0$ تقبل في R حلا وحيدا α (بيانيا) .

4. تحقق حسابيا أن : $2\prec\alpha\prec2.3$.

5. استنتج إشارة $g(x)$ على R .

II) • f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+x+1}{(x-1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ثم استنتج المستقيم المقارب العمودي لـ (C_f) .
2. تحقق أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$.
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
4. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{1\}$ ؛ $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$
5. أ- بين أن (Δ) الذي معادلته $y=2x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .
   ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-0.5 \prec \beta \prec 0$ و فسر النتيجة هندسيا.
7. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .
8. عين قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تكون المعادلة $f(x)=2x+m$ تقبل حلين .

III) • h الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{2x^2-x}{x-1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{1\}$ ؛ $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-1}$
2. أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) و (C_g) .
   ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (C_g) .

IV) • k الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ بـ $k(x)=\dfrac{2x^3-2x^2-x+2}{(x-1)^2}$ و (C_k) تمثيلها البياني في معلم م و م

1. عين قيمة العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل x من $R-\{1\}$ ، يكون $k(x)=f(x)+a$
2. بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يسمح لنا بالانتقال من (C_f) إلى (C_k) .

V) • u الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{1\}$ بــ : $u(x)=[f(x)]^2$.

❖ ادرس تغيرات الدالة u و شكل جدول تغيراتها. (دون حساب عبارة u)

وفقكـــــم الله في