09) المتتاليات

❖ 1. المتتاليات العددية

◆ متتالية عددية

تعريف متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$ هذا الترميز الجديد يسمى الترميز دليل.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

ملاحظة في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته

مثال: المتتالية w_n حيث أن $w_n=\frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b ($b\in\mathbb{N}$) من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

◆ طرق توليد متتالية عددية (يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

توليد متتالية عددية بالحد العام

- إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

ملاحظة: يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n=f(n)$

توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية

- لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x\in D$ فإن $f(x)\in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} والعلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n\geq n_0$

الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.

❖ 2. التمثيل البياني لمتتالية عددية

◆ متتالية معرفة بالحد العام.

- يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور الفواصل
- يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).

◆ متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 والعلاقة التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ مجموعة النقط $M(u_n;f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس للمتتالية

❖ 3. اتجاه تغير متتالية عددية

• متتالية متزايدة

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

• متتالية متناقصة

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

• متتالية ثابتة

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} = u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

• متتالية رتيبة

المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب)

❖ 4. المتتاليات الحسابية

• تعريف متتالية حسابية

تعريف نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$.

يسمى r أساس المتتالية (u_n).

ملاحظة: إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي الحد الأول u_0 .

• الحد العام لمتتالية حسابية

مبرهنة 1 (تقبل بدون برهان)

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r.

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n = u_0 + nr$ من أجل كل عدد طبيعي n

ملاحظات:

إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 + (n-1)r$.

بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول (p عدد طبيعي أصغر من n) فإن عبارة الحد العام هي الحد

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

• تعيين الحد العام يعود إلى كتابة (u_n) بدلالة n.

❖ مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية

مبرهنة 2: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r. ليكن المجموع: $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ ،

من أجل كل عدد طبيعي n : $S = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

S يساوي عدد الحدود مضروب في نصف مجموع الحد الأول و الحد الأخير .

❖ 5. المتتاليات الهندسية

• تعريف متتالية هندسية

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n \times q$ (يسمى q أساس المتتالية (u_n))

ملاحظة

- إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة جميع حدودها تساوي u_0.
- إذا كان $q = 0$ فإن حدود المتتالية معدومة إبتداءا من الحد الثاني.

◆ الحد العام لمتتالية هندسية

مبرهنة 1:(تقبل بدون برهان):
(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q.
عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) $u_n = u_0 \times q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .
ملاحظات:

- إذا كان الحد الأول u_1 عبارة الحد العام $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- بصفة عامة إذا كان u_p (pعدد طبيعي أصغر من n) الحد الأول فإن عبارة الحد العام $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n.

◆ مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

مبرهنة 2 (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q. ليكن المجموع:
$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$

- إذا كان $q = 1$ فإن $S = (n+1)u_0$ من أجل كل عدد طبيعي n .
- إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

S يساوي الحد الأول مضروب في النسبة $\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ حيث $n+1$ هو عدد الحدود.

❖ 6. نهاية متتالية عددية

◆ نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة

مبرهنة1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $]\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

◆ نهاية غير منتهية لمتتالية عددية

تعاريف (u_n) متتالية عددية.

- المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]\alpha, +\infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة ونرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]-\infty; \alpha[$ مع $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة ونرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

مبرهنة 2 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي.

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

ملاحظة النتائج والنظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات.

◆ نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

مبرهنة 1: (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.
إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ وإذا كان ابتداءا من عدد طبيعي n_0، $v_n \leq u_n \leq w_n$ فإن
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

برهنة 2 (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان. إذا كان ابتداءا من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \geq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

برهنة 3 (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان. إذا كان ابتداءا من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \leq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

متتالية عددية متقاربة

تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءا من رتبة معينة ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim[u_n] = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظات:

- إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.
- إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة).

نهاية متتالية هندسية

برهنة (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q .

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ و المتتالية (u_n) متقاربة.
- إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

150. تمرين رقم 01

اليوتيوب: المتتاليات للسنة الثانية ثانوي رقم 1

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_n = n^2 - n$$

1) احسب $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n

2) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

الحل

إضافة:

في حالة إذا ما طلب حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 نجد:

$$u_0 = 0 - 0 = 0$$
$$u_1 = 1 - 1 = 0$$
$$u_2 = 4 - 2 = 2$$

1) حساب $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$$
$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - n - 1$$
$$u_{n+1} = n^2 + n$$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = n^2 + n - (n^2 - n)$

$$= n^2 + n - n^2 + n$$

إذن: $u_{n+1} - u_n = 2n$

2) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

بما أن: $u_{n+1} - u_n = 2n$

و $n \in \mathbb{N}$ فإن: $2n \geq 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة على $\mathbb{N}$.

151. تمرين رقم 02

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانية ثانوي رقم 1

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_n = -3n^2 + 1$$

1) احسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .

2) اكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} و u_{3n+2}

الحل

ملاحظة

- إذا كانت المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن حدها الأول هو u_0

1) حساب الحدود

$$u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$$

ومنه: $u_0 = 1$

$$u_1 = -3(1)^2 + 1 = -3 + 1 = -2$$

ومنه: $u_1 = -2$

$$u_2 = -3(2)^2 + 1 = -12 + 1 = -11$$

ومنه $u_2 = -11$

$$u_3 = -3(3)^2 + 1 = -27 + 1 = -26$$

ومنه: $u_3 = -26$

$$u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1200 + 1$$

ومنه: $u_{20} = -1199$

$$u_{134} = -3(134)^2 + 1 = -53867$$

ومنه: $u_{134} = -53867$

2) كتابة بدلالة n الحدود التالية u_{n+1} ، u_{2n} و u_{3n+2}

$$u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1$$
$$= -3(n^2 + 2n + 1) + 1$$
$$= -3n^2 - 6n - 3 + 1$$

ومنه: $u_{n+1} = -3n^2 - 6n - 2$

$$u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -3(4n^2) + 1$$

ومنه: $u_{2n} = -12n^2 + 1$

$$u_{3n+2} = -3(3n+2)^2 + 1$$
$$= -3(9n^2 + 12n + 4) + 1$$

ومنه: $u_{3n+2} = -27n^2 - 36n - 11$

152. تمرين رقم 03

اليوتيوب: المتتالية الحسابية للسنة الثانية ثانوي (جميع الشعب) رقم 1

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بأساسها $r = -4$ بالعلاقة: $2u_4 - 3u_7 = 51$

1) احسب الحد الأول u_0 .

2) اكتب عبارة u_n بدلالة n .

3) ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

4) احسب الحد العشرين.

5) بين أن العدد (-2011) حد من حدود المتتالية (u_n) وماهي رتبته؟

6) احسب المجموع:

$$S = u_{19} + u_{20} + \cdots + u_{503}$$

الحل

1) حساب الحد الأول u_0

(u_n) متتالية حسابية ومنه:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

ومنه:

$$u_4 = u_0 + (4-0)r$$
$$u_4 = u_0 + 4(-4)$$
$$u_4 = u_0 - 16$$
$$u_7 = u_0 + (7-0)r$$
$$u_7 = u_0 + 7(-4)$$
$$u_7 = u_0 - 28$$

ولدينا: $2u_4 - 3u_7 = 51$

بالتعويض نجد:

$$2(u_0 - 16) - 3(u_0 - 28) = 51$$
$$2u_0 - 32 - 3u_0 + 84 = 51$$
$$-u_0 = 51 - 52$$
$$-u_0 = -1$$

ومنه: $u_0 = 1$

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n

لدينا

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

و $u_0 = 1$

ومنه: $u_n = 1 + n(-4)$

$$u_n = 1 - 4n$$

3) اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_n = -4n + 1$

بما أن (u_n) متتالية حسابية وأساسها $r = -4$ و $-4 < 0$ (سالب)

- إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ملاحظة في المتتالية الحسابية إذا كان $r < 0$

فالمتتالية متناقصة تماما

و إذا كان $r > 0$ فالمتتالية متزايدة تماما

4) حساب الحد العشرين

$$u_n = 1 - 4n$$

ملاحظة عدد الحدود هو

1 – دليل الحد الأخير + دليل الحد الأول = الحدود عدد المطلوب

ومنه نحسب u_{19}:

$$u_{19} = 1 - 4(19)$$
$$= 1 - 76$$

ومنه: $u_{19} = -75$

5) البرهان أن العدد (-2011) حد من حدود المتتالية (u_n)

نحل المعادلة $u_n = -2011$

$$1 - 4n = -2011$$
$$-4n = -2012$$
$$4n = 2012$$
$$n = \frac{2012}{4} = 503 \in \mathbb{N}$$

ومنه (-2011) حد من حدود المتتالية (u_n)

- رتبة الحد 503 هي 504

6) حساب المجموع S

$$S = u_{19} + u_{20} + \cdots + u_{503}$$

لدينا: $u_{19} = -75$

و $u_{503} = -2011$

مجموع المتتالية الحسابية هو:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}]$$

$$S = \frac{503 - 19 + 1}{2}[u_{19} + u_{503}]$$

$$S = \frac{485}{2}[-75 + (-2011)]$$

ومنه: $S = \frac{485}{2}[-2086]$

153. تمرين رقم 04

اليوتيوب: المتتاليات السنة الثانية ثانوي رقم 2

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

الحل

إضافة

حساب الحدود u_1 ، u_2

$$u_{0+1} = \frac{1}{3}u_0 + 2$$

ولدينا: $u_0 = 2$

$$u_1 = \frac{1}{3}(2) + 2 = \frac{2}{3} + \frac{6}{3}$$
$$u_1 = \frac{8}{3}$$

$$u_{1+1} = \frac{1}{3}u_1 + 2$$
$$u_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\right) + 2 = \frac{8}{9} + \frac{18}{9}$$
$$u_2 = \frac{26}{9}$$

- البرهان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول

- حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن:

$$v_{n+1} = q \times v_n$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}\left[u_n - \frac{1}{\frac{1}{3}}\right]$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3)$$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول v_0.

حساب v_0

$$v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$$

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n:

$$v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$$
$$v_n = -1\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

154. تمرين رقم 05

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانية ثانوي رقم 05

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n \end{cases}$$

1-احسب u_1 ، u_2 ، u_3

2-(v_n) متتالية معرفة بـ:

$$v_n = u_n - 4n + \alpha$$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

أ-عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب-اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3-احسب بدلالة n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

الحل

1-حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 2(0)$$
$$u_1 = \frac{1}{2}(2) + 0$$
$$u_1 = 1$$
$$u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 2(1)$$
$$u_2 = \frac{1}{2}(1) + 2$$
$$u_2 = \frac{5}{2}$$
$$u_{2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right) + 2(2)$$
$$u_3 = \frac{5}{4} + \frac{16}{4}$$
$$u_3 = \frac{21}{4}$$

2-تعيين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون متتالية هندسية يجب: $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4(n+1) + \alpha$$

بالتعويض نجد:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 4n - 4 + \alpha$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2n - 4 + \alpha$$
$$= \frac{1}{2}(v_n + 4n - \alpha) - 2n - 4 + \alpha$$
$$= \frac{1}{2}v_n + 2n - \frac{\alpha}{2} - 2n - 4 + \alpha$$
$$= \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}\alpha - 4 + \alpha$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب:

$$-\frac{1}{2}\alpha - 4 + \alpha = 0$$
$$\frac{\alpha}{2} = 4$$
$$\alpha = 8$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب $\alpha = 8$ و $q = \frac{1}{2}$

حساب v_0

$$v_0 = 2 - 4(0) + 8 \quad v_0 = 10$$

ان (v_n) متتالية هندسية فإن :

$$v_n = v_0 q^n$$

$$v_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ستنتاج u_n بدلالة n

$$v_n = u_n - 4n + 8$$

$$u_n = v_n + 4n - 8$$

$$u_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 8$$

حساب S_n بدلالة n

لدينا $u_n = v_n + 4n - 8$

(u_n) هي مجموع للمتتاليتين (w_n) الحسابية و (v_n) الهندسية حيث $w_n = 4n - 8$

$$u_n = v_n + w_n$$

$$S_n = S'_n + S''_n$$

عبارة عن مجموع متتاليتين

$$S_n = v_n \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + \frac{n - 0 + 1}{2}[w_0 + w_n]$$

$$S_n = 10\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} + \frac{n+1}{2}(-8 + u_n - 8)$$

$$S_n = 10\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2}} + \frac{n+1}{2}[4n - 16]$$

$$S_n = -20\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) + (n+1)(2n-8)$$

155. تمرين رقم 06

الموضوع: المتتالية العددية للثانية ثانوي رقم 06

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بـ:

$u_0 = a$ ومن أجل كل $n \in N$

$$3u_{n+1} = 2(u_n - 1)$$

1- عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) متتالية ثابتة.

2- نفرض أن $a = -1$

أ- المتتالية العددية (v_n) المعرفة على N بـ:

$$v_n = u_n + 2$$

بين انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$3v_{n+1} - 2v_n = 0$$

ب- استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

جـ- احسب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .

الحل

1- تعيين قيمة a حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

تكون (u_n) متتالية ثابتة إذا وفقط اذا كان

$$u_{n+1} = u_n = u_0 = a$$

لدينا $3u_{n+1} = 2(u_n - 1)$

أي $2(a-1) = 3a$

$$2a - 2 = 3a$$

$$3a - 2a = -2$$

$$a = -2$$

ومنه قيمة a حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة هي $a = -2$

II-1-أ-البرهان أن $3v_{n+1} - 2v_n = 0$

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + 2$

$$3v_{n+1} - 2v_n = 3(u_{n+1} + 2) - 2(u_n + 2)$$

$$3v_{n+1} - 2v_n = 3\left(\frac{2(u_n - 1)}{3} + 2\right) - 2u_n - 4$$

$$= \frac{6(u_n - 1)}{3} + 6 - 2u_n - 4$$

$$= 2(u_n - 1) + 6 - 2u_n - 4$$

$$= 2u_n - 2 + 6 - 2u_n - 4 = 0$$

ومنه $3v_{n+1} - 2v_n = 0$

II-1-ب-استنتاج ان (v_n) متتالية هندسية مع تعيين اساسها وحدها الاول v_0

لدينا $3v_{n+1} - 2v_n = 0$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن يكون

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

ولدينا $v_{n+1} = v_n \times \frac{2}{3}$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول v_0

حساب v_0

$$v_0 = -1 + 2$$

$$v_0 = 1$$

II-1-جـ-حساب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية: $v_n = v_0 q^n$

$$v_n = 1 \times q^n$$

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

عبارة u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = u_n + 2$

$$u_n = v_n - 2$$

$$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2$$

إضافة:

إيجاد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 = -2$$

لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

156. تمرين رقم 07

البوتيوب: المتتاليات العددية للثانوي رقم 7

1-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$-3x^2 + 8x + 3 = 0$$

2-a، b، c و x أعداد حقيقية غير معدومة حيث

$a = 2x + 1$ ، $b = x\sqrt{7}$ و $c = 2x + 3$

عين قيمة العدد الحقيقي x بحيث تشكل الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدود متعاقبة من متتالية هندسية متزايدة.

الحل

1-حل المعادلة $-3x^2 + 8x + 3 = 0$

نحسب المميز (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 64 - 4(-3)(3)$$
$$= 64 + 36$$
$$= 100$$
$$\sqrt{\Delta} = 10$$

$\Delta > 0$ للمعادلة حلان متمايزان:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 10}{2(-3)}$$
$$x_1 = \frac{-18}{-6} \Rightarrow x_1 = 3$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 10}{2(-3)}$$
$$x_2 = \frac{2}{-6} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}$$

ومنه $S = \left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}$

2- تعيين قيمة x بحيث الأعداد a و b و c تشكل حدود متعاقبة لمتتالية هندسية متزايدة

من قانون الوسط الهندسي $a \times c = b^2$

$$(2x + 1)(2x + 3) = (x\sqrt{7})^2$$
$$4x^2 + 6x + 2x + 3 = 7x^2$$
$$4x^2 + 8x + 3 - 7x^2 = 0$$
$$-3x^2 + 8x + 3 = 0$$

ومنه $x_1 = 3$ ، $x_2 = -\frac{3}{1}$

حتى تكون المتتالية هندسية يجب

$a > 1$ و $u_0 > 0$

بالتعويض بـ $x = 3$: $a = 2(3) + 1$

$$a = 7$$
$$b = 3\sqrt{7}$$
$$c = 9$$

بالتعويض بـ $x = -\frac{1}{3}$

$a = -1 + 1 = 0$ (مرفوض)

ومنه قيمة x التي تجعل الحدود a ، b ، c متتابعة للمتتالية هندسية متزايدة هي $x = 3$

157. تمرين رقم 08

البوتيوب: المتتاليات العددية للثانوي رقم 08

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1-احسب u_1 ، u_2 و u_3.

2-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3-بين أنه يمكن كتابة u_n على الشكل:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

4-استنتج بدلالة n المجموع:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

الحل

1-حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{6}$$
$$u_3 = \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{12}$$

2- البرهان أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

حتى تكون (u_n) متناقصة تماما يجب:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{n-n-2}{n(n+1)(n+2)}$$
$$u_{n+1}-u_n=-\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$
$n(n+1)(n+2)>0$ في $\mathbb{N}^*$
$u_{n+1}-u_n<0$ أي $-2<0$
ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بين أنه يمكن كتابة u_n على الشكل

$$u_n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$$

$n\in\mathbb{N}^*$ حيث

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}=\frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}$$
$$=\frac{an+a+bn}{n(n+1)}=\frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

بالمطابقة مع $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ نجد :

$$\begin{cases}a+b=0\\a=1\\1+b=0\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

ومنه $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

استنتاج المجموع S_n بدلالة n

$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$u_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$u_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$u_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$u_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$
$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

بالجمع العمودي طرف لطرف نجد:

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

ومنه

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{1(n+1)-1}{n+1}$$

إضافة

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n}\right)=1$$

158. تمرين رقم 09

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثنوي رقم 9

(v_n) متتالية معرفة على N بـ: $v_n=\frac{2n+1}{n+3}$

-احسب v_n-2.

-ماهي نهاية (v_n) .

-جد بدلالة n_0 بحيث يكون ابتداء من n_0 كل حدود (v_n) تنتمي الى المجال $]2-10^{-5};2+10^{-5}[$

الحل

- حساب v_n-2

$$v_n-2=\frac{2n+1}{n+3}-2$$
$$=\frac{2n+1-2n-6}{n+3}$$
$$v_n-2=-\frac{5}{n+3}$$

- نهاية (v_n)

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+3}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n}=2$$

- ايجاد بدلالة n_0 حتى يكون ابتداء من n_0 كل حدود (v_n) تنتمي الى المجال $]2-10^{-5};2+10^{-5}[$

$$2-10^{-5}<v_n<2+10^{-5}$$

نضيف (-2) فنجد :

$$-10^{-5}<v_n-2<10^{-5}$$

و $v_n-2=-\frac{5}{n+3}$

أي $-10^{-5}<-\frac{5}{n+3}<10^{-5}$

$$-10^{-5}<-\frac{5}{n+3}$$

نضرب في (-1) فنجد :

$$10^{-5}>\frac{5}{n+3}$$

نضرب في (10^5) فنجد :

$$1 > 10^{-5} \times \frac{5}{n+3}$$

نضرب في $(n+3)$

$$(n+3) > 10^{5} \times 5$$
$$n+3 > 500000$$
$$n > 499997$$

مع $n \in \mathbb{N}$

ومنه $n_0 = 499998$

أي $2 - 10^{-5} < v_{499998} < 2 + 10^{-5}$

159. تمرين رقم 10

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانوي تمرين رقم 10

في أول جانفي من عام 2000 أودع عامل في أحد البنوك مبلغا قدره $9000DA$ بفائدة سنوية تبلغ 12%، ونعتبر من أجل كل n عدد طبيعي العدد u_n الذي يمثل رصيد هذا العامل في سنة $(2000+n)$

- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3.
- احسب رصيد العامل في سنة 2005.
- احسب u_{n+1} بدلالة u_n.
- استنتج طبيعة المتتالية (u_n).
- اكتب u_n بدلالة n.
- كم يبلغ رصيد العامل سنة 2015 ؟

الحل

- حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

لدينا $u_0 = 9000\ DA$

$$u_1 = u_0 + 0{,}12u_0$$
$$u_1 = u_0(1+0{,}12)$$
$$u_1 = 1{,}12u_0$$
$$u_1 = 10080\ DA$$

$$u_2 = u_1 + 0{,}12u_1$$
$$u_2 = u_1(1+0{,}12)$$
$$u_2 = 1{,}12u_1$$
$$u_2 = 1{,}12(10080)$$
$$u_2 = 11289{,}6\ DA$$

$$u_3 = u_2 + 0{,}12u_2$$
$$u_3 = 1{,}12u_2$$
$$u_3 = 1{,}12(11289{,}6)$$
$$u_3 = 12644.352\ DA$$

- حساب رصيد العامل في سنة 2005

$$2005 = 2000 + 5$$
$$u_{5(n=5)} = 1{,}12u_4$$
$$u_4 = 1{,}12u_3$$
$$u_5 = 1{,}12 \times 1{,}12u_3$$
$$u_5 = (1{,}12)^2 u_3$$
$$u_5 = 15861{,}075\ DA$$

- حساب u_{n+1} بدلالة u_n

من أجل n عدد طبيعي لدينا

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}12u_n$$
$$u_{n+1} = 1{,}12u_n$$

استنتاج طبيعة المتتالية (u_n)

بما أن $u_{n+1} = 1{,}12u_n$

وكل متتالية تكتب من الشكل $u_{n+1} = u_n \cdot q$ هي متتالية هندسية

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1{,}12$

- كتابة u_n بدلالة n

بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن :

$$u_n = u_0 \times q^n$$
$$u_n = 9000 \times (1{,}12)^n$$

- حساب رصيد العامل سنة 2015

u_n الذي يمثل رصيد هذا العامل في سنة $(2000+n)$

$$2000 + n = 2015$$
$$n = 2015 - 2000$$
$$n = 15$$
$$u_{15} = 9000 \times (1{,}12)^{15}$$
$$u_{15} = 49262{,}091\ DA$$

ومنه رصيد العامل سنة 2015 هو $49262{,}091DA$

160. تمرين رقم 11

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانوي تمرين رقم 11

α ، β ، γ حدود متعاقبة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية أساسها موجب

- عين α ، β و γ حيث:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 9 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 35 \end{cases}$$

الحل

تعيين α ، β و γ

$$u_n = u_p + (n-p)r$$
$$r > 0$$

و $\alpha + \beta + \gamma = 9 \ldots\ldots (1)$

الوسط الحسابي: $\alpha + \gamma = 2\beta$

بالتعويض في (1) نجد:

$$2\beta + \beta = 9$$
$$3\beta = 9$$

$$\beta = 3$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 35 \quad \dots (2)$$

$$\beta = \alpha + r$$
$$\alpha = \beta - r$$
$$\alpha = 3 - r$$
$$\gamma = \beta + r$$
$$\gamma = 3 + r$$

بالتعويض في (2) نجد:

$$(3-r)^2 + 9 + (3+r)^2 = 35$$
$$9 + r^2 - 6r + 9 + 9 + r^2 + 6r = 35$$
$$27 + 2r^2 = 35$$
$$2r^2 = 35 - 27$$
$$2r^2 = 8$$
$$r^2 = 4$$
$$\begin{cases} r = 2 & \text{(مقبول)} \\ r = -2 & \text{(مرفوض)} \end{cases}$$

بتعويض قيمة r نجد:

$$\begin{cases} \alpha = 3 - 2 = 1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

ومنه: $\alpha = 1$ ، $\beta = 3$ ، $\gamma = 5$

161. تمرين رقم 12

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانوي رقم 13

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_0 = 5$ وأساسها 4.

1) احسب u_n بدلالة n ثم احسب:

$u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n

2) إذا كان مجموع ثمانية حدود متعاقبة من هذه المتتالية هو 2008 فما هو الحد الأول من هذه الحدود.

الحل

1) حساب (u_n) بدلالة n

بما أن (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$u_n = u_0 + nr$$
$$u_n = 5 + 4n$$

- حساب S_n بدلالة n حيث

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$S_n = \frac{n - 0 + 1}{2}(u_0 + u_n)$$
$$S_n = \frac{n+1}{2}(5 + 5 + 4n)$$
$$S_n = \frac{n+1}{2}(10 + 4n)$$
$$S_n = (n+1)(5 + 2n)$$

2) إيجاد الحد الأول

ليكن الحد الأول هو a:

$$a + (a+4) + (a+2(4)) + (a+3(4)) + (a+4(4)) + (a+5(4)) + (a+6(4))(a+7(4)) = 2008$$
$$8a + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 = 2008$$
$$8a = 2008 - 112$$
$$8a = 1896$$
$$a = \frac{1896}{8}$$
$$a = 237$$

ومنه قيمة أول حد لمجموع ثمانية حدود متتابعة لمتتالية حسابية هو $a = 237$.

162. تمرين رقم 13

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانوي رقم 14

في 1 جانفي 2001 أودع راند رصيد $10000\ DA$ ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ $1500\ DA$ في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد)، نرمز بـ: u_n إلى رصيد راند في 1 جانفي من السنة $2001 + n$

1) عين u_0 ثم احسب u_1.

كم كان رصيد راند في أول جانفي 2003

2) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 1.05\, u_n - 1500$$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = u_n - 30000$$

- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الحل

1) تعيين u_0 وحساب u_1

$$u_0 = 10000\ DA$$

حساب u_1:

$$u_1 = u_0 + 0.05\, u_0 - 1500$$
$$u_1 = (1 + 0.05)u_0 - 1500$$
$$u_1 = 9000\ DA$$

- تعيين رصيد راند في اول جانفي 2003

نحل المعادلة:

$$2001 + n = 2003$$
$$n = 2003 - 2001$$
$$n = 2$$

و

$$u_2 = u_1 + 0.05u_1 - 1500$$
$$u_2 = 1.05\,u_1 - 1500$$
$$u_2 = 1.05(9000) - 1500$$
$$u_2 = 7950\ DA$$

- قيمة رصيد راند في اول جانفي لسنة 2003 هي $7950\ DA$

2) البرهان ان $u_{n+1} = 1.05u_n - 1500$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + 0.05u_n - 1500$$

ومنه: $u_{n+1} = 1.05u_n - 1500$

3) البرهان ان (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب

$$v_{n+1} = v_n \times q$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 30000$$
$$v_{n+1} = 1.05u_n - 1500 - 30000$$
$$v_{n+1} = 1.05u_n - 31500$$
$$v_{n+1} = 1.05\left[u_n - \frac{31500}{1.05}\right]$$
$$v_{n+1} = 1.05(u_n - 30000)$$
$$v_{n+1} = 1.05\ v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1.05$ وحدها الأول v_0 .

- حساب v_0

$$v_0 = u_0 - 30000$$
$$= 10000 - 30000$$
$$v_0 = -20000$$

عبارة الحد العام لـ v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0\, q^n$$
$$v_n = -20000(1.05)^n$$

ولدينا: $v_n = u_n - 30000$

$$u_n = v_n + 30000$$
$$u_n = -20000(1.05)^n + 30000$$

- حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}[-20000(1.05)^n + 30000]$$
$$\lim_{n\to+\infty}(1.05)^n = +\infty$$

لأن $1.05 > 0$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

163. تمرين رقم 14

الموضوع: المتتاليات العددية تتمة تمارين رقم 15

1) حلل العدد الطبيعي 1024 الى جداء عوامل أولية.

2) (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_0 ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3 \times 4^n$

أ- احسب الحدود الخمس الأولى لهذه المتتالية

ب) أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها.

ج) عين الحد الذي قيمته 3072 .

د) احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n.

هـ) جد قيمة الجداء: $p_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ بدلالة n

الحل

1) تحليل العدد 1024 الى جداء عوامل اولية

1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
8	2
4	2
2	2
1	2

$$1024 = 2^{10}$$

2) أ-حساب الحدود الخمس الاولى لـ (u_n)

$$u_0 = 3 \times 4^0 = 3$$
$$u_1 = 3 \times 4^1 = 12$$
$$u_2 = 3 \times 4^2 = 48$$
$$u_3 = 3 \times 4^3 = 192$$
$$u_4 = 3 \times 4^4 = 768$$

2) ب- اثبات ان (u_n) متتالية هندسية

حتى تكون (u_n) متتالية هندسية يجب:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$
$$u_{n+1} = 3 \times 4^{n+1} = 3 \times 4^n \times 4^1$$

ومنه: $u_{n+1} = 4 \times u_n$

أي المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول: $u_0 = 3$

الموضوع: المتتاليات العددية (الدورة رقم 2)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيمين (Δ) و (D) بمعادلتيهما: $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x-2$ على الترتيب:

- ارسم المستقيمين (Δ) و (D)

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على N كما يلي:

$u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$

أ) مثل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب) عين α فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (D) .

ج) أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية(u_n)

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد حقيقي n بالعلاقة: $v_n=u_n+4$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

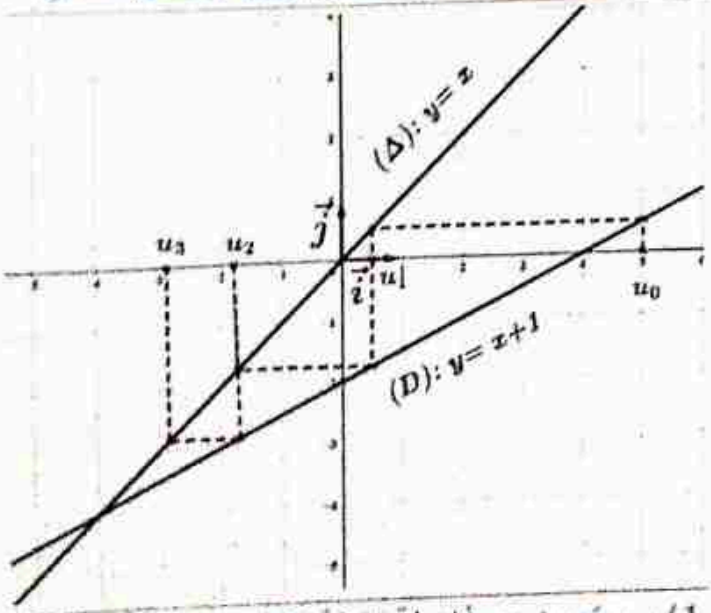
ج) احسب بدلالة n المجموعين:

$S_1=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

$S_2=u_0+u_1+\cdots+u_n$

الحل

1) ارسم المستقيمين (Δ) و (D) وتمثيل الحدود



1) ب- تعيين α فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (D)

لدينا: $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x-2$

نضع: $x=\frac{1}{2}x-2$

1) ج- إيجاد الحد الذي قيمته 3072

حل المعادلة:

$$u_n=3072$$
$$3\times 4^n=3072$$
$$4^n=\frac{3072}{3}$$
$$4^n=1024=2^{10}$$
$$4^n=2^{10}$$
$$(2^2)^n=2^{10}$$
$$2^{2n}=2^{10}$$

أي $2n=10$

ومنه $n=5$

ومنه قيمة n التي من أجلها $u_n=3072$ هي $n=5$

2) أ- حساب المجموعة S_n بدلالة n

بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن:

$$S_n=u_0\times\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=3\times\frac{4^{n+1}-1}{4-1}$$
$$S_n=4^{n+1}-1$$

2) ب- إيجاد قيمة الجداء P_n بدلالة n .

$u_n=u_0q^n$ ، $u_0=u_0$

$$u_1=u_0\times q$$
$$u_2=u_0\times q^2$$
$$u_3=u_0\times q^3$$
$$u_4=u_0\times q^4$$
$$\vdots$$
$$u_n=u_0\times q^n$$

ومنه:

$$P_n=(u_0)(u_0q)(u_0q^2)\dots(u_0q^n)$$
$$n=u_0\,u_0\,u_0\dots u_0\,q\,q^2q^3\dots q^n$$
$$P_n=u_0^{n+1}q^{\left(\frac{1+2+3\dots+n}{\text{متتالية حسابية } r=1}\right)}$$
$$p_n=3\times 4^{\frac{n}{2}(1+n)}$$

$$x - \frac{1}{2}x = -2$$
$$\frac{x}{2} = -2$$
$$x = -4$$

ومنه $x = -4$ هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (D)

1) ج- التخمين حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ وتتقارب نحو فاصلة تقاطع (Δ) و (D) التي هي $\alpha = -4$.

2) أ- اثبات أن (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 4)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول v_0 حيث: $v_0 = u_0 + 4 = 5 + 4 = 9$

2) ب- التعبير عن v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n$$
$$v_n = 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

استنتاج عبارة المتتالية (u_n)

$$u_n = v_n - 4$$
$$u_n = 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left[9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$$

لأن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\right]$$
$$= 0 - 4 = -4$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$

2) ج- حساب المجموع كل من S_1 و S_2

أولا S_1:

$$S_1 = \text{الحد الأول للمجموع} \times \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

$$S_1 = v_0 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_1 = 9\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_1 = -18\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

ثانيا S_2:

لدينا: $v_n = u_n + 4$

$$u_n = v_n - 4$$
$$u_0 = v_0 - 4$$
$$u_1 = v_1 - 4$$
$$u_2 = v_2 - 4$$
$$\vdots$$
$$u_n = v_n - 4$$

بالجمع العمودي طرفا لطرف نجد:

$$S_2 = S_1 - 4(n+1)$$
$$S_2 = -18\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] - 4(n+1)$$

165. تمرين رقم 16

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانية ثانوي رقم 18

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n = 2^n$ و $v_n = 3n - 7$

1) أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية.

2) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية.

3) أحسب بدلالة n كل من:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S''_n = (-6) + (-2) + (3) + \cdots + (2^n + 3n - 7)$$
$$T_n = u_0^3 + u_1^3 + \cdots + u_n^3$$
$$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$$
$$T'_n = u_0^{10} + u_1^{10} + \cdots + u_n^{10}$$
$$k_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$
$$k'_n = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \cdots + \sqrt{u_n}$$

الحل

- نبرهن أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية

حتى تكون (u_n) متتالية هندسية يجب أن:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \times 2$$

$$u_{n+1} = 2u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $u_0 = 1$.

- نبرهن أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية

حتى تكون (v_n) متتالية حسابية يجب أن:

$$v_{n+1} = v_n + r$$

$$v_{n+1} = 3(n+1) - 7$$

$$v_{n+1} = 3n + 3 - 7$$

$$v_{n+1} = 3n - 7 + 3$$

$$v_{n+1} = v_n + 3$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول: $v_0 = 3(0) - 7 = -7$

ب) حساب بدلالة n المجاميع والجداءات

- حساب S_n بدلالة n:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

S_n يمثل مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

حيث: $S_n = u_0 \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$

$$S_n = 2^{n+1} - 1$$

- حساب S'_n بدلالة n

$$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

S'_n يمثل مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

حيث:

$$S'_n = \frac{n+1}{2}[v_0 + v_n]$$

$$S'_n = \frac{n+1}{2}[-7 + 3n - 7]$$

$$S'_n = \frac{n+1}{2}[3n - 14]$$

- حساب S''_n بدلالة n

$$S''_n = (-6) + (-2) + (3) + \cdots + (2^n + 3n -$$

S''_n يمثل مجموع لمجموعين لمتتالية حسابية ومتتالية هندسية أي:

$$S''_n = S_n + S'_n$$

$$S''_n = (2^{n+1} - 1) + \frac{n+1}{2}(3n - 14)$$

- حساب P_n بدلالة n

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$$

تعيين جميع الحدود بدلالة الحد الأول u_0 والأساس 2

لدينا: $u_n = u_0\, q^n$ و $u_n = 2^n$

$$u_0 = u_0$$

$$u_1 = u_0\, q$$

$$u_2 = u_0\, q^2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$u_n = u_0\, q^n$$

$$u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = (u_0)(u_0 q)(u_0 q^2) \ldots (u_0\, q^n)$$

$$P_n = u_0^{n+1}[q \times q^2 \times q^3 \ldots \times q^n]$$

$$P_n = u_0^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n}$$

$$P_n = 2^{1+2+\ldots+n}$$

$$P_n = 2^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

- حساب T_n بدلالة n

$$T_n = u_0^3 + u_1^3 + \cdots + u_n^3$$

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_0^3 = u_0^3$$

$$u_1^3 = (u_0 q)^3$$

$$u_2^3 = (u_0\, q^2)^3$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$u_n^3 = (u_0\, q^n)^3$$

$$T_n = (u_0)^3 + (u_0 \times q)^3 + (u_0 \times q^2)^3 \ldots + (u_0 \times q^n)^3$$

$$T_n = (1)^3 + (2)^3 + (2^2)^3 \ldots + (2^n)^3$$

$$T_n = 1 + 2^3 + 2^6 + \cdots + 2^{3n}$$

تنتج متتالية هندسية (8^n) أساسها $q' = 8$

ومنه $T_n = 1 \times \frac{8^{n+1}-1}{8-1}$

$$T_n = \frac{8^{n+1} - 1}{8 - 1} = \frac{8^{n+1} - 1}{7}$$

- حساب T'_n بدلالة n

$$T'_n = \underbrace{u_0^{10} \times u_1^{10} \times \ldots \times u_n^{10}}_{\text{متتالية هندسية } q''=2^{10}}$$

$$T'_n = 1 \times \frac{1024^{n+1} - 1}{1024 - 1}$$

$$T'_n = \frac{1024^{n+1} - 1}{1023}$$

- حساب k_n بدلالة n

$$k_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$

$$u_0 = u_0$$

$$u_1 = u_0\, q$$

$$u_2 = u_0 q^2$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_0 q^n$$

$$k_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$k_n = \underbrace{\frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{مجموع متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2}}$$

$$k_n = 1 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$k_n = -2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)$$

- حساب k'_n بدلالة n

$$k'_n = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \cdots + \sqrt{u_n}$$

$$\sqrt{u_n} = \sqrt{2^n} = (2^n)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{\frac{n}{2}}$$
$$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n$$
$$\sqrt{u_n} = (\sqrt{2})^n$$

ومنه $\left(\sqrt{u_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $q = \sqrt{2}$

حيث $k'_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + (\sqrt{2})^n$

$$k'_n = 1 \times \frac{(\sqrt{2})^{n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$k'_n = \frac{(\sqrt{2})^{n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

166. تمرين رقم 17

اليوتيوب: المتتالية العددية للثانية ثانوي رقم 19

لتكن (v_n) متتالية حسابية متزايدة تماما على N :
عين أساسها q وحدها الأول v_0 إذا علمت أن :

$$\begin{cases} v_0 \times v_2 = 39 \\ v_0 + v_1 + v_2 = 24 \end{cases}$$

- احسب v_n بدلالة n
- احسب S_n بدلالة n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

الحل

- تعيين v_n و q

$$v_n = v_p + (n-p)q$$
$$v_0 + v_1 + v_2 = 24$$

الوسط الحسابي:

$$v_0 + v_2 = 2v_1$$
$$2v_1 + v_1 = 3v_1 = 24$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{24}{3} = 8$$
$$v_1 = 8$$
$$v_0 \times v_2 = 39 \quad \ldots\ldots (1) \text{ و}$$
$$v_1 = v_0 + q$$
$$8 = v_0 + q$$
$$v_0 = 8 - q$$
$$v_2 = v_1 + q$$
$$v_2 = 8 + q$$

بالتعويض في (1):

$$(8-q)(8+q) = 39$$
$$64 - q^2 = 39$$
$$64 - 39 = q^2$$
$$q^2 = 25 \begin{cases} q = -5 < 0 & \text{مرفوض} \\ q = 5 \end{cases}$$

ومنه الأساس $q = 5$

حساب v_0 : $v_0 = 8 - 5$

ومنه $v_0 = 3$

- حساب v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 + (n-0)q$$
$$v_n = 3 + 5n$$

حساب S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$
$$S_n = \frac{n+1}{2}(3 + 3 + 5n)$$
$$S_n = \frac{n+1}{2}(6 + 5n)$$

167. تمرين رقم 18

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانية ثانوي رقم 20

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -1$
وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$
وذلك من أجل كل عدد طبيعي n

نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_{n+1} - u_n$
1-احسب v_n بدلالة n ثم بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
2-استنتج جهة تغير المتتالية (v_n)
3-احسب المجموع S بحيث : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
4-استنتج عبارة u_n بدلالة n
5-احسب نهاية المتتالية (u_n) عند $+\infty$

الحل

1-حساب v_n بدلالة n

لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$v_n = u_n + 2n + 1 - u_n$$
$$v_n = 2n + 1$$

بين أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية:

حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية حسابية يجب:

$$v_{n+1} - v_n = r$$
$$v_{n+1} - v_n = 2(n+1) + 1 - [2n+1]$$
$$= 2n + 2 + 1 - 2n - 1$$
$$v_{n+1} - v_n = 2 \quad (2 \in \mathbb{R})$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$

حساب v_0 :

$$v_0 = 2(0) + 1 = 1$$
$$v_0 = 1$$

2-استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

بما أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2 > 0$

وهو موجب تماما ومنه المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3-حساب S بدلالة n

$$S = \frac{n+1}{2}[v_0 + v_n]$$
$$S = \frac{n+1}{2}[1 + 2n + 1]$$
$$S = \frac{n+1}{2}(2 + 2n)$$
$$S = (n+1)(n+1)$$
$$S = (n+1)^2$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$
$$v_0 = u_1 - u_0$$
$$v_1 = u_2 - u_1$$
$$v_3 = u_4 - u_3$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

بالجمع طرف لطرف نجد:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \cdots (u_n - u_{n-1})$$

ومنه $\underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}_{\text{مجموع متتالية حسابية}} = -u_0 + u_n$

$$\frac{n-1-0+1}{2}(v_0 + 2n - 1) = 1 + u_n$$
$$\frac{n}{2}[2n] - 1 = u_n$$
$$n^2 - 1 = u_n$$
$$u_n = n^2 - 1$$

4-حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$$

168. تمرين رقم 19

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانية ثانوي رقم 21

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$

وبالعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

أ-أوجد قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية ثابتة

ب-نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - 3$

1-أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2-أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3-ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4-احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

الحل

أ-إيجاد قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة يجب أن :

$$u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$$
$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + 2$$
$$\alpha - \frac{1}{3}\alpha = 2$$
$$\frac{2\alpha}{3} = 2$$

$$2\alpha = 6$$
$$\Rightarrow \alpha = 3$$

حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة يجب أن تكون $\alpha = 3$

ب-1-البرهان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب :

$$v_{n+1} = v_n \times q$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

حساب v_0 :

$$v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$$
$$v_0 = -1$$

ب-2-حساب v_n بدلالة n

بما أن (v_n) متتالية هندسية :

$$v_n = v_0 q^n$$
$$v_n = -1\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

-استنتاج u_n بدلالة n

لدينا $v_n = u_n - 3$

$$v_n + 3 = u_n$$
$$u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

ب-3-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$ على N :

$$u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$
$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[-\left(\frac{1}{3}\right) + 1\right]$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)$$

و $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$ ، $\frac{2}{3} > 0$

أي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N

ب-4-حساب المجموع S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$
$$u_0 = -\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3$$
$$u_1 = -\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

بالجمع طرف لطرف نجد :

$$S_n = v_0 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} + 3(n - 0 + 1)$$

$$S_n = -1 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} + 3(n + 1)$$

169. تمرين رقم 20

اليوتيوب: المتتالية العددية للثانية ثانوي رقم 23

1-(u_n) متتالية عددية معرفة على N بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ 6u_{n+1} - 4u_n = n + 3 \end{cases}$$

-احسب u_1 ، u_2

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 2u_n - n$

-أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

-اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

-احسب بدلالة n كل من :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$S''_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$

الحل

-حساب u_1 و u_2

$$6u_{n+1} - 4u_n = n + 3$$
$$6u_{n+1} = n + 3 + 4u_n$$

$$u_{n+1} = \frac{n+3+4u_n}{6}$$

$$u_1 = \frac{3+4(1)}{6}$$

$$u_1 = \frac{7}{6}$$

$$u_2 = \frac{4+4\left(\frac{7}{6}\right)}{6} = \frac{4+\frac{28}{6}}{6} = \frac{52}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$u_2 = \frac{52}{36}$$

بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} - (n+1)$$

$$v_{n+1} = 2\left(\frac{n+3+4u_n}{6}\right) - n - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{2n+6+8u_n}{6} - n - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{2n+6+8u_n-6n-6}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{8u_n-4n}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{8u_n}{6} - \frac{4n}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{4u_n}{3} - \frac{2n}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(2u_n - n)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$ ومنه

أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

حساب v_0: $v_0 = 2u_0 - 0 = 2$

كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا $v_n = 2u_n - n$

$$v_n + n = 2u_n$$

$$u_n = \frac{v_n + n}{2}$$

$$u_n = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n}{2}$$

حساب S_n بدلالة n

S_n مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية

$$S_n = 2 \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1}$$

$$S_n = -6\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

حساب S'_n بدلالة n

لدينا $v_n = 2u_n - n$

$$2u_n = v_n + n$$

$$u_n = \frac{v_n + n}{2}$$

$$S'_n = \frac{S_n + n(n+1)}{2}$$

$$S'_n = \frac{-6\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + n(n+1)}{2}$$

حساب S''_n بدلالة n

S''_n هو جداء لحدود متتابعة للمتتالية هندسية

لحسابه نكتب جميع الحدود بدلالة v_0 و q

$$S''_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$

$$v_0 = v_0$$
$$v_1 = v_0 q$$
$$v_2 = v_0 q^2$$
$$v_3 = v_0 q^3$$
$$\vdots$$
$$v_n = v_0 q^n$$

$$S''_n = (v_0) \times (v_0 q) \times (v_0 q^2) \times \ldots \times (v_0 q^n)$$

$$S''_n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+3+\cdots+n}$$

$$S''_n = 2^{n+1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{\text{حدود متتالية حسابية}}}$$

$$S''_n = 2^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}\right]$$

170. تمرين رقم 21

اليوتيوب: المتتاليات العددية للتتالية لتقوي رقم 24

نعتبر كثيري الحدود:

$$P(x) = 3x^3 + 11x^2 - 2x - 24$$

و $Q(x) = x^2 + 5x + 6$

1) أ- تحقق من أن (-2) هو جذر لـ $P(x)$ ثم استنتج حينئذ كل جذور $P(x)$.

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي:

$$u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

أ- اختزل العبارة u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

ب- أثبت أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

3) ليكن المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

-اكتب S_n بدلالة n ثم أوجد قيمة n بحيث

$$S_n = 1022$$

4) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي:

$$v_n = 2^{u_n}$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أحسب بدلالة n المجموع:

$$S'_n = 2^{u_0} + 2^{u_1} + 2^{u_2} + \cdots + 2^{u_n}$$

الحل

1) أ- التحقق أن $P(-2) = 0$

لدينا: $P(x) = 3x^3 + 11x^2 - 2x - 24$

$$P(-2) = 3(-8) + 44 + 4 - 24$$
$$= -24 + 48 - 24$$
$$= 48 - 48 = 0$$

ومنه: (-2) هو جذر لـ $P(x)$.

- استنتاج كل جذور $P(x)$

$$P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$$

و: $P(x) = 3x^3 + 11x^2 - 2x - 24$

تستعمل القسمة الإقليدية:

$3x^3 + 11x^2 - 2x - 24$	$x + 2$
$-3x^3 - 6x^2$	$3x^2 + 5x - 12$
$5x^2 - 2x$	
$-5x^2 - 10x$	
$-12x - 24$	
$+12x + 24$	
0	

- إيجاد جذري $3x^2 + 5x - 12$

نحل المعادلة: $3x^2 + 5x - 12 = 0$

$$(\Delta) = b^2 - 4ac = 25 - 4(3)(-12)$$
$$= 25 + 144 = 169 > 0$$
$$\sqrt{\Delta} = 13$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 13}{6} = -\frac{18}{6} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$3x^2 + 5x - 12 = (x+3)(3x-4)$

ومنه:

$$P(x) = (x+2)(x+3)(3x-4)$$

جذور $P(x)$ هي: -2 ، -3 ، $\frac{4}{3}$

1) ب- حل المعادلة $Q(x) = 0$

$$Q(x) = x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-5-1}{2(1)} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-5+1}{2(1)} = -\frac{4}{2} = -2$$

ومنه $S = \{-3; -2\}$

وبالتالي: $Q(x) = (x+3)(x+2)$

2) أ- اختزال عبارة (u_n)

لدينا:

$$u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{(n+2)(n+3)(3n-4)}{(n+2)(n+3)}$$
$$u_n = 3n - 4$$

2) ب- البرهان أن (u_n) متتالية حسابية

حتى تكون (u_n) متتالية حسابية يجب:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_{n+1} = 3(n+1) - 4 = 3n + 3 - 4$$
$$= (3n-4) + 3$$
$$u_{n+1} = u_n + 3$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول u_0 حيث: $u_0 = -4$

$$u_0 = 3(0) - 4 = -4$$

3) كتابة S_n بدلالة n

S_n عبارة عن مجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية حيث:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع})$$

$$S_n = \frac{n-0+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(3n-8)$$

ايجاد قيمة n حيث $S_n = 1022$

نحل المعادلة: $S_n = 1022$

$$\frac{n+1}{2}(3n-8) = 1022$$
$$(n+1)(3n-8) = 2044$$
$$3n^2 - 8n + 3n - 8 - 2044 = 0$$

$$3n^2 - 5n - 2052 = 0$$
$$\Delta = 25 - 4(3)(2052)$$
$$\Delta = 25 + 12(2052)$$
$$\Delta = 24649 \quad \sqrt{\Delta} = 157$$
$$x_1 = \frac{5 - 157}{6} \notin \mathbb{N}$$
$$x_2 = \frac{5 + 157}{6} = 27 \in \mathbb{N}$$

ومنه من أجل $n = 27$ فإن: $S_n = 1022$

أي $S_{27} = 1022$

4) أ- البرهان أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

لدينا:

$$v_n = 2^{3n-4}$$
$$v_{n+1} = 2^{3(n+1)-4}$$
$$= 2^{3n+3-4} = 2^{3n-4+3}$$
$$v_{n+1} = 2^{3n-4} \times 2^3$$
$$v_{n+1} = v_n \times 2^3$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها

$q = 2^3 = 8$ وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = 2^{0-4} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

ب- حساب S'_n بدلالة n

لدينا: $S'_n = 2^{u_0} + 2^{u_1} + 2^{u_2} + \cdots + 2^{u_n}$

$$S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

S'_n عبارة عن مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية

حيث: $S'_n = v_0 \times \frac{(8)^{n-0+1} - 1}{8 - 1}$

$$S'_n = \frac{1}{16} \times \frac{(8)^{n+1} - 1}{7}$$

171. تمرين رقم 22

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانية ثانوي رقم 25

1) لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بالعبارة:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ 2n\, u_{n+1} = (n+1)u_n \end{cases}$$ بحيث حدودها موجبة

أ- احسب الحدود: u_2 و u_3

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2) نضع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1

ب- ادرس نهاية المتتالية (v_n) .

ج- عبر عن u_n بدلالة n

3) ادرس نهاية المتتالية (w_n) المعرفة بـ:

$$w_n = \frac{u_n}{n+1}$$

الحل

1) أ- حساب u_2 و u_3

لدينا:

$$2n\, u_{n+1} = (n+1)u_n$$

أي: $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{2n}$

$$u_2 = \frac{2u_1}{2} = u_1 = 1$$
$$u_3 = \frac{3u_2}{4} = \frac{3}{4}$$

ب- البرهان أن المتتالية (u_n) متتالية متناقصة

لبرهنة أن (u_n) متناقصة ندرس إشارة الفرق $(u_{n+1} - u_n)$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)u_n}{2n} - u_n$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1-2n)u_n}{2n}$$
$$= \frac{(-n+1)u_n}{2n}$$

نعلم أن حدود المتتالية (u_n) موجبة $u_n \geq 0$ و $2n > 0$

و $-n + 1 \leq 0$ أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$

ومنه (u_n) متتالية متناقصة.

2) أ- البرهان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{(n+1)u_n}{2n}}{(n+1)}$$
$$= \frac{(n+1)u_n}{2n} \times \frac{1}{n+1}$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2n}u_n = \frac{u_n}{n} \times \frac{1}{2}$$
$$v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{2}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

- حساب v_1

$$v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

n عبارة v_n بدلالة

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$
$$v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2) نهاية $\lim_{n\to+\infty} v_n$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ لأن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

ومنه (v_n) متتالية متقاربة نحو 0

ج- التعبير عن u_n بدلالة n

لدينا:

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$u_n = n \times v_n$$
$$u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

3) دراسة $\lim_{n\to+\infty} w_n$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n+1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \text{ و}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} 1(0) = 0$$

المتتالية (w_n) متقاربة نحو 0

172. تمرين رقم 23

اليوتيوب: المتتاليات العددية للثانية ثانوي رقم 27

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$

1) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

أ- مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 . دون حسابها، مبرزا خطوط الرسم.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ- عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

ج- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتحقق من صحة تخمينك.

د) بين أن المتتالية (v_n) متقاربة ثم عين نهاية (u_n)

هـ) احسب بدلالة n المجموع

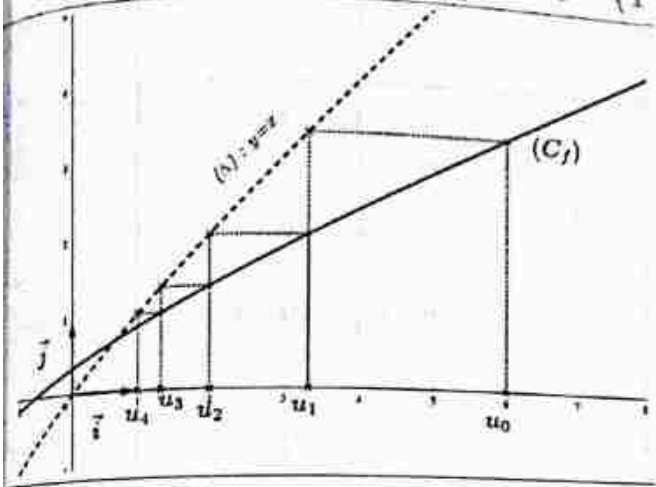
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

و) احسب بدلالة n الجداء:

$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

الحل

1) أ- رسم (C_f) والمستقيم (Δ) وتمثيل الحدود



1) ب- وضع تخمين حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ وتتقارب نحو فاصلة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) .

2) أ- تعيين قيمة α

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن تكون

$$v_{n+1} = v_n \times q$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$$

ولدينا: $u_n = v_n - \alpha$ ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - \alpha) + \frac{1}{3} + \alpha$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} + \alpha$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن يكون:

$$-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} + \alpha = 0$$
$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} = 0$$
$$\alpha = -\frac{1}{3} \times 2$$

$$a=-\frac{2}{3}$$

و a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية هي
$a=$ ، أساسها $q=\frac{1}{2}$ حيث $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

الحد الأول v_0

$v_n=u_n-\frac{2}{3}$ أي $v_n=u_n+$

$v_0=u_0-\frac{2}{3}$

$$v_0=6-\frac{2}{3}$$

$$v_0=\frac{16}{3}$$

ـ التعبير عن v_n بدلالة n

$$v_n=v_0\times q^n$$

$$v_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

تعبير عن u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ أي $u_n=v_n+\frac{2}{3}$

ومنه: $u_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$

ـ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$

حيث $u_{n+1}=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{1}{2}-1\right]$$

$$=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{-1}{2}\right]$$

حيث $\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n>0$ و $\left[\frac{-1}{2}\right]<0$ وعليه

$u_{n+1}-u_n<0$ ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ وذلك يتوافق مع التخمين السابق

ـ البرهان أن (v_n) متتالية متقاربة

حتى تكون (v_n) متتالية متقاربة يجب:

$$\lim_{n\to+\infty} n=L$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

لأن: $-1<\frac{1}{2}<1$ أي $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

ومنه (v_n) متقاربة نحو 0.

ـ تعيين $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

ومنه (u_n) متتالية متقاربة نحو $\frac{2}{3}$

2-و-حساب S بدلالة n

$$S=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

لدينا:

$$v_n=u_n-\frac{2}{3}\Rightarrow u_n=v_n+\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} u_0=v_0+\frac{2}{3} \\ + \\ u_1=v_1+\frac{2}{3} \\ + \\ . \\ . \\ + \\ u_n=v_n+\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$S=\underbrace{v_0+v_1+\cdots+v_n}_{\text{مجموع لمتتالية هندسية}}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{3}$$

$$q=\frac{1}{2}\text{ ، }v_0=\frac{16}{3}$$

$$S=v_0\times\left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right]+\frac{2}{3}(n+1)$$

$$S=\frac{16}{3}\times\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right]+\frac{2}{3}(n+1)$$

$$S=-\frac{32}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]+\frac{2}{3}(n+1)$$

2-و-حساب الجداء P_n بدلالة n

$$P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$$

$$v_0=v_0$$

$$v_1=v_0\times q$$

$$v_2=v_0\times q^2$$

$$v_3=v_0\times q^3$$

.

.

$$v_n=v_0\times q^n$$

ومنه

$$P_n=v_0(v_0q)(v_0q^2)(v_0q^3)\ldots.(v_0q^n)$$

$$P_n=(v_0\times v_0\ldots\times v_0)(q\times q^2\times q^3\times\ldots\times q^n)$$

$$P_n=v_0^{n+1}(q^{1+2+3+\cdots+n})$$

$$P_n = \left(\frac{16}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1+2+3+\cdots+n}{\text{حدود متتالية حسابية}}}$$

$$P_n = \left(\frac{16}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1+1}{2}(1+n)}$$

$$P_n = \left(\frac{16}{3}\right)^{n+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}\right]$$

173. تمرين رقم 24

اليوتيوب: المتتالية العددية للثانوي رقم 28 :

I) -لتكن (w_n) متتالية معرفة بالعلاقة: $w_n = \frac{4n+1}{2}$

1-برهن أن المتتالية (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول

2-عين قيمة n حتى يكون $w_n = \frac{201}{2}$ ثم احسب المجموع: $S_{50} = w_0 + w_1 + \cdots + w_{50}$

3-بعد حساب نهاية المتتالية، استنتج أن المتتالية (w_n) متباعدة

II) -نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كالتالي:

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2$

1-احسب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3

2-أثبت أن المتتالية (u_n) لا حسابية ولا هندسية

نضع المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 1$

3-برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول

4-اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

5-احسب المجموع: $S_9 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$

الحل

I-1-البرهان أن المتتالية (w_n) متتالية حسابية

حتى تكون (w_n) متتالية حسابية نبرهن أن :

$$w_{n+1} = w_n + r$$

أو

$$w_{n+1} - w_n = r(r \in \mathbb{R}^*)$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{4(+1)+1}{2} - \frac{4n+1}{2}$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{4n+4+1-4n-1}{2} = 2$$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$

-حساب w_0 : $w_0 = \frac{4(0)+1}{2} = \frac{1}{2}$

I-2-تعيين قيمة n حتى يكون $w_n = \frac{201}{2}$

$$\frac{4n+1}{2} = \frac{201}{2}$$

$$(4n+1)2 = 2(201)$$

$$4n = 200 \Rightarrow n = \frac{200}{4} = 50 \in N$$

ومنه قيمة n حتى تكون $w_n = \frac{201}{2}$ هي $n = 50$

-حساب المجموع S_{50}

بما أن (w_n) متتالية حسابية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الاخير للمجموع} + \text{الحد الاول للمجموع}]$$

$$S_{50} = \frac{50-0+1}{2}[w_0 + w_{50}]$$

$$S_{50} = \frac{51}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{201}{2}\right] = \frac{51}{2}\left[\frac{202}{2}\right]$$

$$S_{50} = \frac{51(202)}{4}$$

I-3-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n+1}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{4n}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2n + \frac{1}{2} = +\infty$$

ومنه (w_n) تالية متباعدة $(+\infty)$

II-1-حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

لدينا $u_{n+1} = 3u_n - 2$

$$u_1 = 3u_0 - 2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$u_1 = 4$$

$$u_2 = 3u_1 - 2 = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$u_2 = 10$$

$$u_3 = 3u_2 - 2 = 3(10) - 2 = 30 - 2 = 28$$

$$u_3 = 28$$

II-2-إثبات أن المتتالية (u_n) متتالية لا حسابية ولا هندسية

أولا : لا حسابية :

حتى تكون المتتالية (u_n) ليست حسابية نبرهن أن:

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$$

$$4 - 2 = 2 \text{ ، } 10 - 4 = 6$$

$6 \neq 2$ ومنه المتتالية (u_n) ليست متتالية حسابية

ثانيا : لا هندسية

حتى تكون المتتالية (u_n) ليست هندسية نبرهن أن

$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{2} = 2$ ، $\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

ومنه المتتالية (u_n) ليست متتالية هندسية

ب- اثبات ان (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن يتحقق:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$

$$v_{n+1} = 3u_n - 2 - 1$$

$$v_{n+1} = 3u_n - 3 = 3(u_n - 1)$$

$$v_{n+1} = 3v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول v_0 حيث $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

ج-كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 . q^n$$

$$v_n = 1 \times (3)^n$$

$$v_n = 3^n$$

-استنتاج u_n بدلالة n

لدينا $v_n = u_n - 1$

$$u_n = v_n + 1$$

$$u_n = 3^n + 1$$

د-حساب المجموع S_9

$$S = \text{الحد الاول للمجموع} \times \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

$$S_9 = 1 \times \frac{3^{9-0+1} - 1}{3 - 1}$$

$$S_9 = \frac{3^{10} - 1}{2}$$

174. تمرين رقم 25

الموضوع: المتتالية العددية لثانية ثانوي رقم 29

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} \end{cases}$$

ولتكن المتتالية العددية (v_n) حيث : $v_n = u_n^2 - 6$

1-برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0

2-اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4-استنتج تقارب كلا المتتاليتين (v_n) و (u_n)

5-احسب المجموع S_n بدلالة n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

6-احسب T_n بدلالة n حيث :

$$T_n = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \cdots + \sqrt{v_n}$$

الحل

1-البرهان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن يكون:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

لدينا: $v_n = u_n^2 - 6$

أي $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 6$

$$v_{n+1} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2}\right)^2 - 6$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n^2 + 2 - 6$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n^2 - 4$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}\left[u_n^2 - \frac{4}{\frac{2}{3}}\right]$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n^2 - 6)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول v_0 حيث :

$$v_0 = u_0^2 - 6 = 3^2 - 6 = 9 - 6 = 3$$

أي $v_0 = 3$

2-كتابة v_n بدلالة n

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن: $v_n = v_0 \times q^n$

$$v_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

-استنتاج u_n بدلالة n

$$v_n = u_n^2 - 6$$

$$v_n + 6 = u_n^2$$

$$\Rightarrow u_n = \sqrt{v_n + 6} = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6}$$

$$u_n = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6}$$

3-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

لأن : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6}$$

و $\lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{6}$

4-استنتاج تقارب (v_n) و (u_n)

بما أن $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ فإن: (v_n) متتالية متقاربة نحو 0

وبما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{6}$ فإن : (u_n) متتالية متقاربة نحو $\sqrt{6}$

أي (u_n) متتالية متقاربة نحو l $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

5-حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

بما أن S_n هو مجموع لحدود متتالية لمتتالية هندسية (v_n) أساسها $q = \frac{2}{3}$ ، $v_0 = 3$ فإن :

$$S_n = v_0 \times \frac{q^{n-0+1}-1}{q-1} = 3 \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1}$$

$$S_n = -9\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)} - 1\right]$$

إضافة

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} -9\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)} - 1\right] = 9$$

6-حساب T_n بدلالة n

$$T_n = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \cdots + \sqrt{v_n}$$

لدينا $v_0 = 3$ ومنه $\sqrt{v_0} = \sqrt{3}$

$$\sqrt{v_1} = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^1}$$

. .

. .

$$\sqrt{v_n} = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ومنه :

$$T_n = \sqrt{3} + \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^1} + \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \cdots + \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$T_n = \sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^1} + \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \cdots + \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$T_n = \sqrt{3}\left[1 + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^1} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \cdots + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right]$$

هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية حيث $q' = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$T_n = \sqrt{3}\,\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{n+1} - 1}{\sqrt{\frac{2}{3}} - 1}$$

175. تمرين رقم 26

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 6 \end{cases}$$

1-أثبت أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها

2- أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4.

3- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

4- أوجد قيمة n بحيث يكون $u_n = 71$

5- احسب المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

الحل

1- إثبات أن المتتالية (u_n) حسابية

حتى تكون (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبرهن أن $u_{n+1} - u_n = r$ حيث أساسها r

$u_{n+1} - u_n = u_n + 6 - u_n = 6$

ومنه المتتالية (u_n) حسابية اساسها $r = 6$

2- حساب الحدود

حساب u_1

$$u_{n+1} = u_n + 6$$
$$u_1 = u_0 + 6$$
$$= 5 + 6$$
$$u_1 = 11$$

حساب u_2

$$u_2 = u_1 + 6$$
$$u_2 = 11 + 6$$
$$u_2 = 17$$

حساب u_3

$$u_3 = u_2 + 6$$
$$u_3 = 17 + 6$$
$$u_3 = 23$$

حساب u_4

$$u_4 = u_3 + 6$$
$$u_4 = 23 + 6$$

$u_4 = 29$

- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

بما أن (u_n) متتالية حسابية فإن

$$u_n = u_0 + (n-0)r$$
$$u_n = u_0 + nr$$
$$u_n = 5 + 6n$$

- إيجاد قيمة العدد الطبيعي n حيث $u_n = 71$

$$5 + 6n = 71$$
$$6n = 71 - 5$$
$$6n = 66$$
$$n = \frac{66}{6}$$
$$n = 11$$

إذن قيمة n حتى تكون $u_n = 71$ هي 11

$$u_{11} = 71$$

- حساب المجموع S_n

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأخير المجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}]$$

$$S_n = \frac{n-1+1}{2}[u_1 + u_n]$$
$$S_n = \frac{n}{2}[11 + 5 + 6n]$$
$$S_n = \frac{n}{2}[16 + 6n]$$
$$S_n = \frac{16n + 6n^2}{2}$$
$$S_n = \frac{2(8n + 3n^2)}{2}$$
$$S_n = 8n + 3n^2$$

176. تمرين رقم 27

يوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 03

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حيث: $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$.

1- أوجد الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية.

2- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3- احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ثم اوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 250$.

الحل

1- إيجاد الحد الأول u_0 والأساس r

$$u_2 = u_0 + 2r$$
$$u_3 = u_0 + 3r$$
$$u_5 = u_0 + 5r$$

$$u_0 + u_3 = 18$$
$$u_0 + u_0 + 3r = 18 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$u_2 + u_5 = 34$$
$$u_0 + 2r + u_0 + 5r = 34 \ldots\ldots(2)$$
$$\begin{cases} 2u_0 + 3r = 18 \\ 2u_0 + 7r = 34 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (2u_0 + 3r)(-1) = (18)(-1) \\ 2u_0 + 7r = 34 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2u_0 - 3r = -18 \\ 2u_0 + 7r = 34 \end{cases}$$

- بالجمع نجد:

$$4r = 16$$
$$r = \frac{16}{4} = 4$$

- بتعويض قيمة r نجد:

$$2u_0 + 3(4) = 18$$
$$2u_0 + 12 = 18$$
$$2u_0 = 18 - 12$$
$$2u_0 = 6$$
$$u_0 = 3$$

2- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

$$u_0 = 3 \text{ و } r = 4$$
$$u_n = u_0 + (n-0)r$$
$$u_n = 3 + n(4)$$
$$u_n = 3 + 4n$$

3- حساب S_n بدلالة n

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأخير المجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}]$$

$$S_n = \frac{n-1+1}{2}[u_1 + u_n]$$
$$S_n = \frac{n}{2}[7 + 3 + 4n]$$
$$S_n = \frac{n}{2}[10 + 4n]$$
$$S_n = \frac{4n^2 + 10n}{2}$$
$$S_n = 2n^2 + 5n$$

- إيجاد العدد الطبيعي n بحيث

$$S_n = 250$$
$$5n + 2n^2 = 250$$
$$5n + 2n^2 - 250 = 0$$
$$c = -250 \ ، \ b = 5 \ ، \ a = 2$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(2)(-250)$$
$$\Delta = 2025 > 0$$

للمعادلة حلان متمايزان

$$\sqrt{\Delta} = 45$$
$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 45}{4} = \frac{-50}{4}$$
$$= -12.5 \notin \mathbb{N}$$ مرفوض

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 45}{4} = \frac{40}{4}$$
$$= 10 \in \mathbb{N}$$ مقبول

ومنه قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 250$ هي 10 أي $S_{10} = 250$.

177. تمرين رقم 28

اليوتوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 02

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r

1) احسب الحد الأول والأساس علما أن:

$$\begin{cases} u_3 = 17 \\ 2u_5 - u_{10} = 2 \end{cases}$$ و

2) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث

$$S_n = u_3 + u_4 + \cdots + u_n$$

4) عين العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 6456$.

الحل

1- حساب الحد الأول u_0 والأساس r

$$u_n = u_p + (n - p)r$$
$$u_5 = 17 + 2r$$
$$u_{10} = 17 + 7r$$
$$2u_5 - u_{10} = 2$$
$$2[17 + 2r] - [17 + 7r] = 2$$
$$34 + 4r - 17 - 7r = 2$$
$$-3r + 17 = 2$$
$$-3r = 2 - 17$$
$$-3r = -15$$
$$r = 5$$ ومنه

حساب u_0

$$r = 5$$
$$u_3 = 17$$
$$u_3 = u_0 + (3 - 0)r$$
$$17 = u_0 + 3(5)$$
$$17 = u_0 + 15$$
$$u_0 = 17 - 15$$
$$u_0 = 2$$

2- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 + (n - 0)(5)$$
$$u_n = 2 + n(5)$$
$$u_n = 2 + 5n$$

3- حساب المجموع S_n بدلالة n

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأخير المجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}]$$
$$S_n = \frac{n - 3 + 1}{2}[u_3 + u_n]$$
$$S_n = \frac{n - 2}{2}[17 + 2 + 5n]$$
$$= \frac{n - 2}{2}[19 + 5n]$$

4- تعيين العدد الطبيعي n حيث $S_n = 6456$

$$S_n = 6456$$ أي $\frac{n-2}{2}(19 + 5n) = 6456$

$$2\left[\frac{n - 2}{2}(19 + 5n) = 6456\right]$$
$$(n - 2)(5n + 19) = 12912$$
$$5n^2 + 19n - 10n - 38 = 12912$$
$$5n^2 + 9n - 38 - 12912 = 0$$
$$5n^2 + 9n - 12950 = 0$$
$$c = -12950 \ ، \ b = 9 \ ، \ a = 5$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 4(5)(-12950)$$
$$\Delta = 259081 > 0$$
$$\sqrt{\Delta} = 509$$

للمعادلة حلان متمايزان

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-509}{2(5)} = -51.8 \notin \mathbb{N}$ مرفوض

$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9+509}{2(5)} = \frac{500}{10} = 50 \in \mathbb{N}$ n_2 مقبول لأنه عدد طبيعي ومنه قيمة n حتى يكون $S_n = 6456$ هي $n = 50$.

$S_{50} = 6456$

178. تمرين رقم 29

تعليمة: تمرين للفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 10

أثبتت دراسة أن 5% من عمال إحدى قطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا، علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعبر بالألف هو الوحدة ونرمز له بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي $u_0 = 50$

1- احسب u_1 و u_2.

2- أ- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = 0.95u_n + 3$$

ب- بين ان المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

3- من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = 60 - u_n$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها والأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

ج- قدر عدد العمال سنة 2017.

د- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

هـ- احسب نهاية المتتالية (u_n) هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

الحل

1- حساب u_1 و u_2

حساب u_1:

$$u_1 = u_0 - \frac{5}{100}u_0 + 3$$
$$u_1 = 50 - 0.05(50) + 3$$
$$u_1 = 50.5$$

حساب u_2:

$$u_2 = u_1 - 0.05u_1 + 3$$
$$u_2 = 50.5 - 0.05(50.5) + 3$$
$$u_2 = 50.975$$

2- أ- البرهان ان $u_{n+1} = 0.95u_n + 3$

$$u_1 = u_0 - 0.05u_0 + 3$$
$$u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100}u_n + 3$$
$$u_{n+1} = u_n - 0.05u_n + 3$$
$$u_{n+1} = u_n(1 - 0.05) + 3$$

ومنه:

$$u_{n+1} = 0.95u_n + 3$$

ب- البرهان ان (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

البرهان ان (u_n) ليست حسابية

حتى تكون (u_n) متتالية حسابية

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1$$
$$u_1 - u_0 = 50.5 - 50 = 0.5$$
$$u_2 - u_1 = 50.975 - 50.5 = 0.475$$
$$0.5 \neq 0.475$$
$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

ومنه المتتالية (u_n) ليست حسابية

البرهان ان (u_n) ليست هندسية

$$u_{n+1} = u_n . q$$
$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{50.5}{50} = 0.01$$
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{50.975}{50.5} = 1.009$$
$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

ومنه المتتالية (u_n) ليست هندسية

3- أ- البرهان ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية

تكون (v_n) هندسية إذا كان $v_{n+1} = v_n . q$

$$v_n = 60 - u_n$$
$$v_{n+1} = 60 - (0.95u_n + 3)$$
$$v_{n+1} = 60 - 0.95u_n - 3$$
$$v_{n+1} = 57 - 0.95u_n$$
$$v_{n+1} = 0.95 \times \left(\frac{57}{0.95} - u_n\right)$$
$$v_{n+1} = 0.95 \times (60 - u_n)$$
$$v_{n+1} = 0.95v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 0.95$

$$v_0 = 60 - 50$$
$$= 10$$

ب- كتابة v_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية

$$v_n = v_0 \times q^{n-0}$$
$$v_n = 10 \times (0.95)^n$$

- استنتاج u_n بدلالة n

لدينا $v_n = 60 - u_n$

$$u_n = 60 - v_n$$
$$u_n = 60 - 10 \times (0.95)^n$$

ج- ايجاد عدد العمال سنة 2017.

$$u_n = 60 - 10 \times (0.95)^n$$
$$2012 + n = 2017$$
$$n = 2017 - 2012 = 5$$

$u_5 = 60 - 10 \times (0.95)^5 = 52.262$

د- تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $(u_{n+1} - u_n)$

$$u_{n+1} - u_n = 60 - 10 \times (0.95)^{n+1} - 60 + 10 \times (0.95)^n$$
$$= -10 \times (0.95)^n \times (0.95) + 10 \times (0.95)^n$$
$$= 10 \times (0.95)^n[-0.95 + 1]$$
$$= 0.5 \times (0.95)^n > 0$$

لأن $0.5 > 0$ و $(0.95)^n > 0$

إذن $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه المتتالية (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

هـ- حساب $\lim u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} [60 - 10(0.95)^n] = 60$$

لأن $0.95 = \frac{95}{100}$

$$-1 < \frac{95}{100} < 1$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} (0.95)^n = 0$

- معرفة إن كان يصل عدد العمال المصنع إلى 60000 عامل

1b

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 60$

فلا يمكن أن يصل عدد العمال إلى 60000 لأن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 60$

2b نحل المعادلة $u_n = 60$

$$60 - 10.(0.95)^n = 60$$
$$-10.(0.95)^n < 0$$
$$10 \neq 0$$
$$(0.95)^n > 0$$

ولا يوجد حل للمعادلة أي تناقض

ومنه لا يمكن الوصول إلى 60000 عامل مهما كان عدد السنين.

179. تمرين رقم 30

اليوتيوب: امتياز الفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 11

لتكن المتتالية (u_n) والمتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1- أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، احسب w_n بدلالة n.

2- أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.

3- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ وأن المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4- عين (u_n) و (v_n) بدلالة n.

5- استنتج نهاية (u_n) ونهاية (v_n).

الحل

1- البرهان أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية

تكون (w_n) متتالية هندسية إذا كان

$$w_{n+1} = w_n.q$$
$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$$
$$= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4}$$
$$= \frac{4(u_n + 2v_n)}{3 \times 4} - \frac{3(u_n + 3v_n)}{4 \times 3}$$
$$= \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$
$$= \frac{u_n - v_n}{12} = \frac{1}{12}.(u_n - v_n)$$
$$= \frac{1}{12}w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية اساسها $q = \frac{1}{12}$

- حساب (w_n) بدلالة n.

بما أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول.

$$w_0 = 11$$
$$w_n = w_0.q^{n-0}$$
$$w_n = w_0.q^n$$
$$w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

2- إثبات أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة

تكون (t_n) متتالية ثابتة إذا كان

$t_{n+1} = t_n$ أو $t_{n+1} - t_n = 0$

$$t_{n+1} - t_n = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} - (3u_n + 8v_n)$$
$$= 3\left(\frac{u_n+2v_n}{3}\right) + 8\left(\frac{u_n+3v_n}{4}\right) - 3u_n - 8v_n$$
$$= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n - 3u_n - 8v_n = 0$$

ومنه $t_{n+1} - t_n = 0$

أي المتتالية (t_n) متتالية ثابتة أي $t_{n+1} = t_n = t_0$

3- اثبات أن المتتالية (u_n) متتالية متناقصة على $\mathbb{N}$

حتى تكون (u_n) متتالية متناقصة يجب أن يكون $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{3u_n}{3}$$
$$=\frac{u_n+2v_n-3u_n}{3}=\frac{-2u_n+2v_n}{3}$$
$$=\frac{-2}{3}(u_n-v_n)=-\frac{2}{3}\times 11\left(\frac{1}{12}\right)^n \leq 0$$
لأن $11\left(\frac{1}{12}\right)^n > 0$
و $-\frac{2}{3}<0$
ومنه (u_n) متتالية متناقصة على $\mathbb{N}$.

- نبين أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما $\mathbb{N}$.

يجب أن نجد $v_{n+1}-v_n \geq 0$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{4v_n}{4}$$
$$=\frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}$$
$$=\frac{u_n-v_n}{4}=\frac{1}{4}(u_n-v_n)=\frac{1}{4}w_n$$
$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4}.11.\left(\frac{1}{12}\right)^n \geq 0$$
ومنه (v_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4- تعيين u_n و v_n بدلالة n

لدينا أن المتتالية t_n ثابتة أي $t_n=t_0$

$$t_0=3u_0+8v_0=36+8$$
$$t_0=44$$
$$t_n=44$$
$$\begin{cases} u_n-v_n=11\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n+8v_n=44 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 8(u_n-v_n)=8\left(11\left(\frac{1}{12}\right)^n\right) \\ 3u_n+8v_n=44 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 8u_n-8v_n=88\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n+8v_n=44 \end{cases}$$

بالجمع:

$$11u_n=88\left(\frac{1}{12}\right)^n+44$$
$$u_n=8\left(\frac{1}{12}\right)^n+4$$
$$u_n-v_n=11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$
$$v_n=u_n-11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$
$$v_n=8\left(\frac{1}{12}\right)^n+4-11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$
$$v_n=-3\left(\frac{1}{12}\right)^n+4$$

5- استنتاج نهاية (u_n) و نهاية (v_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[8\left(\frac{1}{12}\right)^n+4\right]$$
بما أن $-1<\frac{1}{12}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left[8\left(\frac{1}{12}\right)^n\right]=0$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=4$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-3\left(\frac{1}{12}\right)^n+4\right]$$
$$=4$$
$$\lim_{n\to+\infty} w_n=\lim_{n\to+\infty} 11\left(\frac{1}{12}\right)^n=0$$
لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n=0$

تمرين رقم 31 .180

اليوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 12

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره $50000\ DA$ في صندوق التوفير والاحتياط، يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.
يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغ قدره $5000\ DA$ (بعد حساب الفوائد)
يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008+n$

1-أ- احسب كلا من u_0 ، u_1 ، u_2.

ب- هل (u_n) متتالية هندسية؟ هل هي متتالية حسابية؟ برر إجابتك.

ج- بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا
$u_{n+1}=1.05u_n-5000$

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n
$v_n=u_n-100\,000$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n
$u_n=-50\,000\times(1.05)^n+100\,000$

3- ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015.

بـ- الحل

1- أ- حساب الحدود

- u_0 :

$$u_0 = 50\,000\ DA$$

- u_1 :

$$u_1 = u_0 + \frac{5}{100}u_0 - 5000$$
$$u_1 = u_0(1 + 0.05) - 5000$$
$$u_1 = 1.05u_0 - 5000$$
$$u_1 = 1.05(50000) - 5000$$
$$u_1 = 47500\ DA$$

u_2:

$$u_2 = u_1 + \frac{5}{100}u_1 - 5000$$
$$u_2 = 1.05u_1 - 5000$$
$$u_2 = 44875\ \text{DA}$$

u_3:

$$u_3 = u_2 + \frac{5}{100}u_2 - 5000$$
$$u_3 = 1.05u_2 - 5000$$
$$u_3 = 42118.75\ DA$$

بـ- معرفة اذا كانت (u_n) متتالية هندسية أو حسابية

- معرفة اذا كانت (u_n) متتالية هندسية

تكون (u_n) متتالية هندسية إذا كان $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0}$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{47500}{50000} = 0.95$$
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{44875}{47500} = 0.945$$

و $0.95 \neq 0.945$

ومنه (u_n) ليست متتالية هندسية.

- معرفة إذا كانت (u_n) متتالية حسابية

تكون (u_n) متتالية حسابية إذا كان

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1$$
$$u_1 - u_0 = 47500 - 5000 = -2500$$
$$u_2 - u_1 = 44875 - 47500 = -2625$$
$$-2500 \neq -2625$$
$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

ومنه المتتالية (u_n) ليست حسابية

جـ- البرهان أن $u_{n+1} = 1.05u_n - 5000$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100}u_n - 5000$$
$$u_{n+1} = u_n + 0.05u_n - 5000$$
$$u_{n+1} = u_n(1 + 0.05) - 5000$$

ومنه $u_{n+1} = 1.05u_n - 5000$

2- أ- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يكفي أن نبرهن أن

$$v_{n+1} = v_n \cdot q$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 100\,000$$
$$v_{n+1} = 1.05u_n - 5000 - 100\,000$$
$$v_{n+1} = 1.05u_n - 105000$$
$$v_{n+1} = 1.05\left(u_n - \frac{105000}{1.05}\right)$$
$$v_{n+1} = 1.05(u_n - 100\,000)$$

ومنه $v_{n+1} = 1.05v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1.05$

$$v_0 = u_0 - 100\,000 = 50\,000 - 100\,000$$
$$= -50\,000$$

بـ- كتابة v_n بدلالة n

(v_n) م هندسية أي

$$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$
$$v_n = v_0 q^n$$
$$v_n = -50000(1.05)^n$$

- استنتاج أن

$$u_n = -50\,000 \times (1.05)^n + 100\,000$$

لدينا $v_n = u_n - 100\,000$

نعوض v_n بقيمتها نجد:

$$u_n = -50\,000 \times (1.05)^n + 100\,000$$

3- ايجاد المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية سنة 2015

$$2008 + n = 2016$$
$$n = 2016 - 2008$$
$$n = 8$$
$$u_8 = -50\,000(1.05)^8 + 100\,000$$
$$u_8 = 26127.22781$$

إذن مبلغ هذا الشخص نهاية سنة 2015 هو:

$$u_8 = 26127.23\ DA$$

181. تمرين رقم 32

اليوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات السنة الثانية ثانوي رقم 14

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 1$

و $u_1 = 2$

ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[-\{0\}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$$

1- اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول بدلالة α.

2- هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

3- احسب بدلالة α و n المجموع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots v_n$$

4- عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$

5- استنتج عندئذ u_n بدلالة n ثم بين أن (u_n) متتالية متقاربة.

6- في كل مما يلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

- بين أن: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

- عين أصغر عدد طبيعي n حتى $\pi_n \leq 3^{-44}$

الحل

- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

كون (v_n) متتالية هندسية إذا كان $v_{n+1} = v_n.q$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - 3\alpha u_n$$
$$v_{n+1} = 2\alpha u_{n+1} + 3\alpha^2 u_n - 3\alpha u_{n+1}$$
$$v_{n+1} = -\alpha u_{n+1} + 3\alpha^2 u_n$$
$$v_{n+1} = -\alpha[u_{n+1} - 3\alpha u_n]$$
$$v_{n+1} = -\alpha v_n$$
$$v_{n+1} = v_n.[-\alpha]$$

نه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\alpha$

حساب v_0

$$v_0 = u_1 - 3\alpha u_0$$
$$v_0 = 2 - 3\alpha$$
$$v_n = v_0.q^n$$
$$v_n = (2-3\alpha)(-\alpha)^n$$

معرفة اذا كانت (v_n) متتالية متقاربة

أن (v_n) م هندسية أساسها $q = -\alpha$

$\alpha \in]-1;1[-\{$

$\alpha \neq 0$ و $-1 < -\alpha < 1$

نه $\lim_{n\to+\infty} (-\alpha)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

نه (v_n) متتالية متقاربة نحو 0

حساب S_n بدلالة α و n

مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q =$ وحدها الأول $v_0 = 2 - 3\alpha$

$$S_n = \text{الحد الأول للمجموع} \left[\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q-1}\right]$$

$$S_n = v_0 \frac{q^{n-0+1} - 1}{q-1}$$
$$= (2-3\alpha)\frac{(-\alpha)^{n+1} - 1}{-\alpha - 1}$$
$$= (2-3\alpha)\left[\frac{(-\alpha)^{n+1} - 1}{-(\alpha+1)}\right]$$
$$S_n = \frac{3\alpha - 2}{\alpha + 1}[(-\alpha)^{n+1} - 1]$$

4- تعيين قيمة α حيث $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3\alpha-2}{\alpha+1}((-\alpha)^{n+1} - 1)\right]$$
$$\lim_{n\to+\infty} (-\alpha)^{n+1} = 0$$

لأن: $\alpha \neq 0$ و $-1 < -\alpha < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3\alpha-2}{\alpha+1}(-1) = \frac{-3\alpha+2}{\alpha+1} = \frac{3}{4}$$
$$-12\alpha + 8 = 3\alpha + 3$$
$$-15\alpha = -5$$
$$\alpha = \frac{-5}{-15}$$
$$\alpha = \frac{1}{3}$$

- استنتاج u_n بدلالة n حيث $\alpha = \frac{1}{3}$

$$S_n = \frac{3\alpha-2}{\alpha+1}[(-\alpha)^{n+1} - 1]$$

نعوض قيمة α

$$S_n = \frac{3\left(\frac{1}{3}\right) - 2}{\frac{1}{3} + 1}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$
$$S_n = \frac{-3}{4}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$v_0 = u_1 - u_0$$
$$v_1 = u_2 - u_1$$
$$v_2 = u_3 - u_2$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$v_{n-1} = u \quad - u_{n-1}$$
$$v_n = u_{n+1} - u_n$$
$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n)$$
$$S_n = -u_0 + u_{n+1}$$

$$u_{n+1} = S_n + u_0$$
$$u_{n+1} = -\frac{3}{4}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 1$$
$$u_{n+1} = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{4} + 1$$
$$u_{n+1} = \frac{-3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{7}{4}$$

ومنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$u_n = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{7}{4}$$

- البرهان أن (u_n) متتالية متقاربة

لدينا $u_n = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{7}{4}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} = 0$$

لأن $-1 < -\frac{1}{3} < 1$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{7}{4}$

ومنه (u_n) متتالية متقاربة نحو $\frac{7}{4}$

5- أ- البرهان أن $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

$$v_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$
$$v_0 = 3$$
$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$
$$\pi_n = 3 \times 3\left(\frac{1}{3}\right) \times 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times \ldots \times 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$
$$\pi_n = 3^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times \ldots \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$
$$\pi_n = 3^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1+2+3+\cdots+n}$$
$$\pi_n = 3^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}$$
$$\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}$$
$$\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2n-2+n^2+n}{2}}$$

ومنه: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب- تعيين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

$$\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}} = 3^{-\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right)}$$
$$3^{-\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right)} \leq 3^{-44}$$
$$-\frac{n^2-n-2}{2} \leq -44$$
$$n^2 - n - 2 \geq 88$$
$$n^2 - n - 90 \geq 0$$

ندرس إشارة $n^2 - n - 90$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 1 - 4(1)(-90)$$
$$\Delta = 1 + 360$$
$$\Delta = 361$$
$$\sqrt{\Delta} = 19$$

$n_1 = \frac{1-19}{2} = \frac{-18}{2} = -9 \notin \mathbb{N}$ مرفوض

$n_2 = \frac{1+19}{2} = \frac{20}{2} = 10 \in \mathbb{N}$ مقبول

$$n^2 - n - 90 = (n+9)(n-10)$$
$$(n+9)(n-10) \geq 0$$

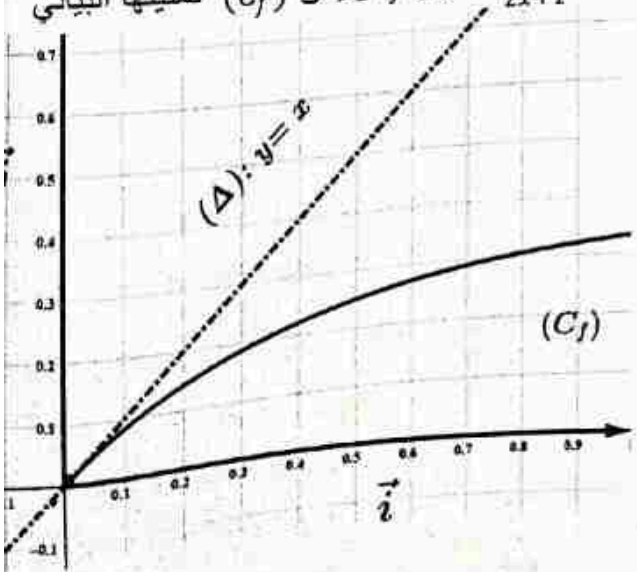
أصغر قيمة للعدد n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$ هي 10

182. تمرين رقم 33

اليوتيوب: اختبار الفصل الأخير في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 01:

(u_n) متتالية معرفة كما يلي $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1- f دالة عددية معرفة على المجال $[0;+\infty[$ حيث $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني



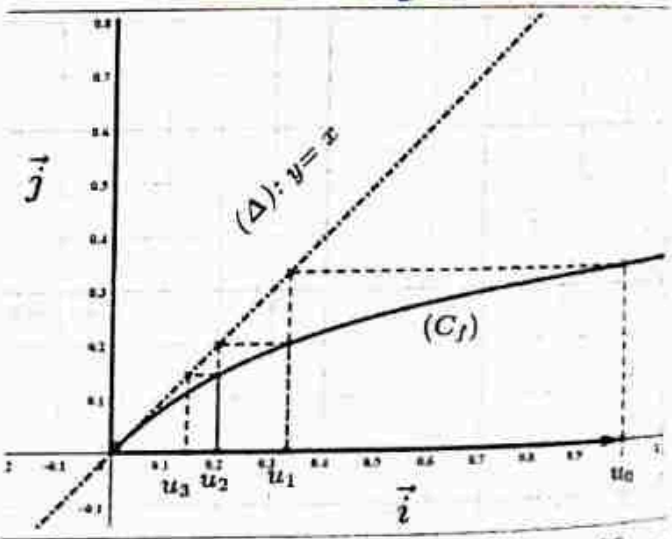
باستعمال المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ و
(C_f) ، مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2.
ب- خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) و $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2-(v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = \frac{1}{u_n}$
حيث $u_n \neq 0$.
أ- احسب قيمة كلا من v_0 ، v_1 ، v_2.
ب- برهن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2.
ج- اكتب عبارة الحد العام لـ v_n بدلالة n. ثم استنتج
عبارة (u_n) بدلالة n
د- احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$ ، $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ،ماذا تستنتج ؟
3- احسب المجموعين التاليين:

$$S_1 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$

$$S_2 = u_0.v_0 + u_1.v_1 + \cdots + u_{2016}.v_{2016}$$

الحل

1- تمثيل الحدود على محور الفواصل



ب- تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_0 > u_1 > u_2$$

المتتالية (u_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2- أ- حساب v_0 ، v_1 ، v_2.

حساب v_0:
$$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} :$$
$$v_0 = 1$$

حساب v_1:
$$v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$
$$v_1 = 3$$

حساب v_2
$$v_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$
$$v_2 = 5$$

ب- البرهان أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2

يكفي أن نبرهن أن: $v_{n+1} - v_n = 2$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}} = \frac{2u_n+1}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n+1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{2u_n+1-1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

ج- عبارة v_n بدلالة n

(v_n) متتالية حسابية حيث

$$v_n = v_0 + n.r$$
$$v_n = 1 + 2n$$

- استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n}$

$$\frac{1}{v_n} = u_n$$
$$u_n = \frac{1}{2n+1}$$

د- حساب $\lim_{n\to+\infty} v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$$

نستنتج أن المتتالية (v_n) متتالية متباعدة.

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0$$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0

3- حساب المجموعين S_1 و S_2

حساب S_1

$$S_1 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$
$$v_n = \frac{1}{u_n}$$
$$v_0 = \frac{1}{u_0}$$
$$v_1 = \frac{1}{u_1}$$
$$v_2 = \frac{1}{u_2}$$
$$\vdots$$
$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = S_1$$

S_1 مجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية

$$S_1 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}]$$

$$S_1 = \frac{n-0+1}{2}[v_0 + v_n]$$

$$S_1 = \frac{n+1}{2}[1 + 2n + 1]$$

$$S_1 = \frac{n+1}{2}[2n+2] = \frac{n+1}{2}(2)(n+1)$$

$$S_1 = (n+1)^2$$

- حساب S_2

$$S_2 = u_0 . v_0 + u_1 . v_1 + \cdots + u_{2016} . v_{2016}$$

$$S_2 = u_0 . \left(\frac{1}{u_0}\right) + u_1 . \left(\frac{1}{u_1}\right) + \cdots + u_{2016} . \left(\frac{1}{u_{2016}}\right)$$

$$S_2 = 1 + 1 + \cdots + 1 = 1(2017)$$

$$S_2 = 2017$$

183. تمرين رقم 34

اليوتيوب: اختبار الفصل الأخير في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 03:

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0 = 6 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

1- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

أ- مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 دون حسابها، مبرزا خطوط الإنشاء

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ- عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n.

ج- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم تحقق من صحة تخمينك.

د-بين أن المتتالية (v_n) متقاربة ثم عين نهاية (u_n)

هـ- احسب بدلالة n المجموع

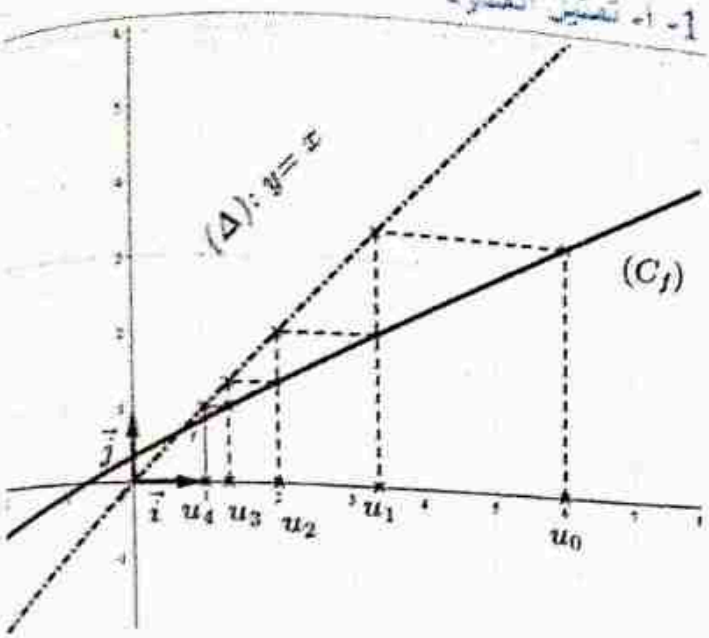
$$S = u_0 + u_1 + \cdots u_n$$

و- احسب بدلالة n الجداء

$$p_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$

الحل

1- أ- تمثيل الحدود



ب- وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ وتتقارب نحو فاصلة تقاطع (C_f) مع (Δ).

2- أ-تعيين قيم α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

$$v_{n+1} = v_n . q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} + \alpha$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} + \alpha$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن يكون

$$-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} + \alpha = 0$$

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha = -\frac{2}{3}$$

ومنه قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية هي $\alpha = \frac{-2}{3}$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$

- تحديد v_0

$$v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

$$v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{18-2}{3}$$

$$v_0 = \frac{16}{3}$$

ب- التعبير عن v_n و u_n وبدلالة n

التعبير عن v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 q^n$$
$$v_n = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

التعبير عن u_n بدلالة n

$u_n = v_n - \alpha$ أي $v_n = u_n + \alpha$

$$u_n = v_n + \frac{2}{3}$$
$$u_n = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$

ج- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق $(u_{n+1} - u_n)$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} - \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right]$$
$$= \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[-\frac{1}{2}\right] < 0$$

$\frac{16}{3} > 0$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$

$-\frac{1}{2} < 0$ إذن $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ وذلك يتوافق مع التخمين السابق.

د- البرهان أن (v_n) متتالية متقاربة

تكون (v_n) متقاربة إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$$

لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

ومنه (v_n) متتالية متقاربة نحو 0

- حساب نهاية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$

ومنه: (u_n) متتالية متقاربة نحو $\frac{2}{3}$

هـ- حساب المجموع S بدلالة n

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

لدينا $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

$$v_0 = u_0 + \frac{2}{3}$$
$$v_1 = u_1 + \frac{2}{3}$$
$$\vdots$$
$$v_n = u_n + \frac{2}{3}$$

$$S = \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{v_0=\frac{16}{3},\ q=\frac{1}{2}\text{ مع هندسية}} + \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{3}}_{\text{متتالية ثابتة}}$$

$$S = v_0\frac{q^{n-0+1} - 1}{q - 1} + \frac{2}{3}(n - 0 + 1)$$
$$S = \frac{16}{3}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$
$$S = \frac{-32}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] + \frac{2}{3}(n+1)$$

و- حساب الجداء P_n

$$p_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$
$$v_0 = v_0$$
$$v_1 = v_0.q$$
$$v_2 = v_0.q^2$$
$$\vdots$$
$$v_n = v_0.q^n$$
$$p_n = v_0.v_0.q \times v_0.q^2 \times \ldots \times v_0.q^n$$
$$p_n = (v_0 \times v_0 \times \ldots \times v_0)(q \times q^2 \times q^3 \times \ldots q^n)$$
$$p_n = v_0^{n+1}(q^{1+2+\cdots+n}) = \left(\frac{16}{3}\right)^{n+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1+1}{2}[n+1]}\right]$$
$$p_n = \left(\frac{16}{3}\right)^{n+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}[n+1]}\right]$$

184. تمرين رقم 35

اليوتيوب: احتمال الفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 15

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1- أ- احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1.

ب- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ج- احسب S_n حيث $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

2-(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي:

$v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ- احسب v_2 و v_3.

ب- نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ج- اكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

الحل

1- أ- حساب u_2 والاساس q واستنتاج u_1

$$u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$$

الوسط الهندسي $u_1 \times u_3 = u_2^2$

$$u_2^2 \times u_2 = 216$$
$$u_2^3 = 216$$
$$u_2 = \sqrt[3]{216}$$
$$u_2 = 6$$

- حساب q

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \ldots (1)$$
$$u_1 + 12 + u_3 = 32$$
$$u_2 = u_1 . q^{2-1}$$
$$u_2 = u_1 . q$$
$$6 = u_1 . q$$
$$u_1 = \frac{6}{q}$$

$$u_3 = u_2 . q^{3-2}$$
$$u_3 = 6 . q$$
$$\frac{6}{q} + 12 + 6q = 32$$
$$\frac{6 + 12q + 6q^2}{q} = 32$$
$$6 + 12q + 6q^2 = 32q$$
$$6q^2 - 20q + 6 = 0$$

بالقسمة على 2

$$3q^2 - 10q + 3 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 100 - 4(3)(3)$$
$$\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$$
$$\sqrt{\Delta} = 8$$
$$q_1 = \frac{10 - 8}{6}$$
$$q_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ مرفوض

$$q_2 = \frac{10 + 8}{6}$$
$$q_2 = 3$$ مقبول

- استنتاج u_1

لدينا $u_1 = \frac{6}{q}$

$$u_1 = \frac{6}{3} = 2$$

ب- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$
$$u_n = 2 \times 3^{n-1}$$

ج- حساب S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$S_n = u_1 \frac{q^{n-1+1} - 1}{q - 1}$$
$$S_n = 2\frac{3^n - 1}{2}$$
$$S_n = 3^n - 1$$

- تعيين n حيث $S_n = 728$

$$S_n = 728$$
$$3^n - 1 = 728$$
$$3^n = 728 + 1$$
$$3^n = 729$$

بقسمة 729 على 3 نجد $729 = 3^6$

إذن $3^n = 3^6$

ومنه قيمة n هي $n = 6$

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1$$

$$v_2 = \frac{3}{2}(2) + 2$$

$$v_2 = 5$$

$$v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2$$

$$v_3 = \frac{3}{2}(5) + \frac{12}{2}$$

$$v_3 = \frac{15+12}{2}$$

$$v_3 = \frac{27}{2}$$

البرهان ان (w_n) متتالية هندسية

كون (w_n)متتالية هندسية إذا تحقق

$$w_{n+1} = w_n . q'$$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3}$$

ما أن (u_n) م هندسية $u_{n+1} = u_n . 3$

$$w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{u_n . 3} - \frac{2}{3}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{v_n}{u_n} - \frac{1}{3}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right]$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$$

ومنه (w_n) م هندسية أساسها $q' = \frac{1}{2}$

كتابة w_n بدلالة n

$$w_n = w_1 \times q^{n-1}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3}$$

$$w_1 = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$w_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

استنتاج v_n بدلالة n

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$$

$$w_n + \frac{2}{3} = \frac{v_n}{u_n}$$

$$v_n = u_n\left(w_n + \frac{2}{3}\right)$$

$$v_n = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right)(2 \times 3^{n-1})$$

185. تمرين رقم 36

اليوتيوب: مراجعة شاملة في الرياضيات للثانية ثانوي للفصل الاخير رقم 1

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، u_0 حدها الأول وأساسها q حيث $u_0 = 3$ و $u_1 \times u_3 = 144$

1- احسب u_2 ثم الأساس q .

2- اكتب u_n بدلالة n

3- بين أن العدد 96 حد من حدود المتتالية (u_n) ثم عين رتبته.

4- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

5- احسب قيمة الحد الخامس للمتتالية (u_n)

6- من اجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

أ- بين ان $S_n = 3(2^{n+1} - 1)$

ب- عين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 381$

لاحظ أن $2^7 = 128$

الحل

1- حساب u_2

لدينا $u_1 \times u_3 = 144$

الوسط الهندسي $a \times c = b^2$

$$u_1 \times u_3 = u_2^2$$

$$u_2^2 = 144$$

$$(u_2)_1 = \sqrt{u_{2_1}^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$(u_2)_2 = -\sqrt{144} = -12$$

$(u_2)_2 = -\sqrt{144} = -12$ مرفوض

ومنه $u_2 = 12$

- تعيين الأساس

$$u_n = u_p . q^{n-p}$$
$$u_2 = u_0 . q^{2-0}$$
$$12 = 3q^2$$
$$q^2 = 4$$
$$q_1 = \sqrt{4} = 2$$
$$q_2 = -\sqrt{4} = -2$$

$q_2 = -2$ مرفوض

إذن الأساس هو $q = 2$

2- كتابة u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 \times q^n$$
$$u_n = 3 \times 2^n$$

3- البرهان أن العدد 96 حد من حدود المتتالية (u_n)

نحل المعادلة $u_n = 96$

$$3 \times 2^n = 96$$
$$2^n = 32$$

بالقسمة المتتالية لـ 32 على 2 نجد

$$2^n = 32 = 2^5$$
$$n = 5$$

ومنه 96 حد من حدود المتتالية (u_n)

- تعيين رتبة u_5

$$5 - 0 + 1 = 6$$

4- البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة:

تكون (u_n) متزايدة إذا كان $u_{n+1} - u_n > 0$

$$u_{n+1} - u_n = 3 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n$$
$$= 3 \times 2 \times 2^n - 3 \times 2^n$$
$$= 3 \times 2^n[2 - 1]$$
$$= 3 \times 2^n > 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

5- حساب قيمة الحد الخامس

الحد الخامس هو u_4

$$u_4 = 3 \times 2^4 = 48$$

6- البرهان ان $S_n = 3(2^{n+1} - 1)$

$$S_n = \text{الحد الأول} \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$
$$= 3\left[\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\right]$$
$$S_n = 3(2^{n+1} - 1)$$

ب- تعيين n حتى يكون $S_n = 381$

$S_n = 381$ يكافئ $3(2^{n+1} - 1) = 381$

$$2^{n+1} - 1 = 127$$
$$2^{n+1} = 128$$

نعلم أن $128 = 2^7$

$$2^{n+1} = 2^7$$

بالمطابقة نجد

$$n + 1 = 7$$
$$n = 6$$

إذن $S_6 = 381$

186. تمرين رقم 37

اليوتيوب: مراجعة شاملة في الرياضيات للفصل الاخير للثانية ثانوي رقم 2(المتتاليات العددية)

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n

$u_{n+1} = u_n + 4n + 4$ و $v_n = u_n - 2n^2$

1- احسب u_1 و u_2 ثم تحقق أن المتتالية (u_n) ليست حسابية

2- عيّن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3- أثبت ان المتتالية (v_n) حسابية، عين أساسها وحدها الأول ثم استنتج اتجاه تغيرها.

4- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

5- بين أن العدد 2022 حد من حدود المتتالية (v_n) ثم حدّد رتبته.

6- احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

7- عين العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 2070$

الحل

1- حساب u_1 و u_2

$$u_{0+1} = u_0 + 4(0) + 4$$
$$= 2 + 4$$
$$u_1 = 6$$
$$u_2 = u_1 + 4 + 4$$
$$= 6 + 4 + 4$$
$$u_2 = 14$$

التحقق أن المتتالية (u_n) ليست حسابية

تكون (u_n) متتالية لا حسابية إذا كان

$$u_0 + u_2 \neq 2u_1$$
$$u_0 + u_2 = 2 + 14 = 16$$
$$2u_1 = 2(6) = 12$$
$$16 \neq 12$$

إذن $u_0 + u_2 \neq 2u_1$

المتتالية (u_n) ليست حسابية

- تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$u_{n+1} - u_n = u_n + 4n + 4 - u_n = 4n + 4$

$u_{n+1} - u_n > 0$

المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- إثبات أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية

(v_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان

$v_{n+1} - v_n = r$

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - 2(n+1)^2 - [u_n - 2n^2]$

$= u_n + 4n + 4 - 2(n^2 + 1 + 2n) - u_n + 2n^2$

$= u_n + 4n + 4 - 2n^2 - 2 - 4n - u_n + 2n^2$

$= 2$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$

وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2(0)^2$

$v_0 = 2$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

بما أن (v_n) متتالية حسابية وأساسها $r = 2 > 0$

فإن (v_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

4- كتابة v_n بدلالة n

$v_n = v_0 + (n - 0)r$

$v_n = 2 + 2n$

- استنتاج u_n بدلالة n

لدينا $v_n = u_n - 2n^2$

$u_n = v_n + 2n^2$

$2 + 2n = u_n - 2n^2$

$u_n = 2n^2 + 2n + 2$

5- البرهان ان العدد 2022 حد من حدود المتتالية (v_n)

نحل المعادلة $v_n = 2022$

$2n + 2 = 2022$

$2n = 2020$

$n = 1010$

ومنه 2022 حد من حدود المتتالية (v_n)

- تحديد رتبة الحد 1010

$1010 - 0 + 1 = 1011$

6- حساب S_n

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}]$

$= \frac{n - 1 - 0 + 1}{2}[v_0 + v_{n-1}]$

$= \frac{n}{2}(2 + 2n)$

$S_n = n(n+1)$

7- تعيين العدد الطبيعي n حيث $S_n = 2070$

$S_n = 2070$ تكافئ $n^2 + n = 2070$

$n^2 + n - 2070 = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(-2070)$

$= 8281 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 91$

للمعادلة حلان

$n_1 = \frac{-1 - 91}{2} = -\frac{92}{2}$

$n_1 = -46$ مرفوض

$n_2 = \frac{-1 + 91}{2}$

$n_2 = 45$

ومنه قيمة n حتى يكون $S_n = 2070$ هي

$n = 45$

$S_{45} = 2070$

187. تمرين رقم 38

اليوتيوب: مراجعة شاملة في المتتاليات للسنة الثانية ثانوي (فيديو مهم) (تقني، علمي، رياضي)

I-

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1 + 4u_2 - u_3 = 7 \end{cases}$

1- احسب u_1 ، u_2 و u_3 ثم الأساس r و u_0

2- عين (u_n) بدلالة n ، هل العدد (2021) حد من حدود (u_n) محددا رتبته

3- احسب المجموع S :

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2016}$

II-

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_1 = 6$ و $v_4 = 48$

1- احسب الأساس q والحد الأول v_0

2- اكتب v_n بدلالة n ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

3- بين أن العدد 768 حد من حدود المتتالية (v_n)

4- احسب بدلالة n المجموع S'_n

$S'_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+1}$

الحل

المتتالية الحسابية

$$u_{n+1} - u_n = r$$

عبارة الحد العام

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

الوسط الحسابي: a ، b ، c

$$a + c = 2b$$

المجموع:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}]$$

-I

1- حساب u_1 ، u_2 و u_3 ثم الأساس r و u_0

لدينا $u_1 + u_2 + u_3 = 9$

$$u_1 + u_3 = 2u_2$$

$$2u_2 + u_2 = 9$$

$$u_2 = 3$$

$$\begin{cases} u_1 + 3 + u_3 = 9 \\ u_1 + 4(3) - u_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 6 \\ u_1 - u_3 = -5 \end{cases}$$

بالجمع نجد:

$$2u_1 = 1$$

$$u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 9$$

$$\frac{1}{2} + 3 + u_3 = 9$$

$$u_3 = \frac{11}{2}$$

- ايجاد الأساس

لدينا عبارة الحد العام:

$$u_2 = u_1 + (2-1)r$$

$$3 = \frac{1}{2} + r$$

$$r = \frac{5}{2}$$

ايجاد الحد الأول

$$u_2 = u_0 + (2-0)r$$

$$u_2 = u_0 + 2\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$u_0 = u_2 - 5$$

$$= 3 - 5$$

$$u_0 = -2$$

2- كتابة u_n بدلالة n

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

$$u_n = u_0 + (n)r$$

$$u_n = -2 + n\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$u_n = \frac{5}{2}n - 2$$

- معرفة إذا كان 2021 حد من حدود المتتالية (u_n)

نحل المعادلة $u_n = 2021$

$$\frac{5}{2}n - 2 = 2021$$

$$\frac{5}{2}n = 2023$$

$$n = \frac{2023 \times 2}{5}$$

$$n = 809.2 \notin \mathbb{N}$$

ومنه 2021 ليس حدا من حدود المتتالية (u_n)

3- حساب المجموع S

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2016}$$

بما أن (u_n) متتالية حسابية فمجموع حدودها يكون

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}[\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}]$$

$$= \frac{2016 - 0 + 1}{2}[u_0 + u_{2016}]$$

$$= \frac{2017}{2}[-2 + 5038]$$

$$= 5078806$$

-II

المتتالية الهندسية

$$v_{n+1} = v_n \cdot q$$

عبارة الحد العام

$$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$

الوسط الهندسي

$$a.c = b^2$$

المجموع

$$S = \text{الحد الأول للمجموع} \left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right]$$

الحد الأول للمجموع $= S$ $\left|\dfrac{q^{\text{عدد الحدود}}-1}{q-1}\right|$

1. حساب q و v_0

$$v_4 = v_1 . q^{4-1}$$
$$48 = 6 . q^3$$
$$8 = q^3$$

نعلم أن $8 = 2^3$

$$2^3 = q^3$$
$$q = 2$$

حساب v_0

$$v_1 = v_0 q^{1-0}$$
$$6 = v_0 . 2$$
$$v_0 = 3$$

2. كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 . q^n$$
$$v_n = 3.2^n$$

دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n)

$$v_n = 3.2^n$$
$$q > 1$$
$$v_0 > 0$$

ومنه (v_n) متتالية متزايدة تماما

3- البرهان أن العدد 768 حد من حدود المتتالية (v_n)

نحل المعادلة $v_n = 768$

$$2^n = \frac{768}{3}$$
$$2^n = 256$$

نعلم أن $256 = 2^8$

$$2^n = 2^8$$
$$n = 8$$

ومنه العدد 768 حد من حدود المتتالية (v_n) ورتبته

$$8 - 0 + 1 = 9$$

$$v_8 = 768$$

4- حساب المجموع S'_n

$$S'_n = v_1 \left[\frac{q^{\text{عدد الحدود}}-1}{q-1}\right]$$
$$= v_1 \left[\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right]$$
$$= 6 \left[\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right]$$
$$S'_n = 6[2^{n+1}-1]$$