04) الاحتمالات

❖ 1. مصطلحات

- نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.
- في تجربة عشوائية، مجموعة النتائج الممكنة تسمى مجموعة الإمكانيات ويرمز لها بالرمز Ω .

ليكن A جزءاً من Ω ، نقول عندئذ أن A حادثة.

- إذا احتوت المجموعة الجزئية A على عنصر وحيد فإنها تدعى حادثة أولية.
- Ω هي الحادثة الأكيدة و ϕ هي الحادثة المستحيلة. (ϕ الجزء الخالي)
- إذا كانت A حادثة ما فإن حادثتها العكسية يرمز لها بـ $\bar{A}$ وهي التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A
- لتكن A و B حادثتين نرمز بـ $A \cap B$ للحادثة "A و B " وهي التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B
- إذا كانت $A \cap B$ خالية أي $A \cap B = \emptyset$ نقول عندئذ أن الحادثتين A و B غير متلائمتين.
- نرمز بـ$A \cup B$ للحادثة "A أو B " وهي التي تحوي عناصر A وعناصر B أيضا

❖ 2. قانون الاحتمال

تعريف قانون احتمال P لتجربة عشوائية هو إرفاق كل مخرج e_i بعدد موجب p_i مع $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$ بحيث يتحقق ما يلي $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$

➢ نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω و قانون احتمال P على Ω

يسمى العدد p_i احتمال تحقق المخرج e_i

ملاحظة1: بما أن كل عدد p_i موجب فهو أصغر من المجموع 1 ومنه $0 \leq p_i \leq 1$ من أجل كل i طبيعي من 1 الى n

ملاحظة2: احتمال الحادثة A يرمز له بـ $P(A)$ ويساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A

❖ 3. تساوي الاحتمال

تعريف نقول عن تجربة أنها متساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال، نقول عندئذ أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع

تنبيه: يشار إلى تساوي الاحتمال من خلال عبارات تتضمنها نصوص وصف التجربة مثل أن يقال " زهرة نرد غير مزيفة " أو " قطعة نقود متوازنة " أو " كريات لا نفرق بينها عند اللمس " .....

وهذا يعني أن احتمال ظهور أي وجه عند رمي زهرة نرد غير مزيفة هو $\frac{1}{6}$ (كل وجه له نفس الحظ للظهور)

أما عند رمي قطعة نقود متوازنة فإن احتمال ظهور " وجه " هو $\frac{1}{2}$ واحتمال ظهور " ظهر" هو $\frac{1}{2}$ أيضا وهكذا

بالنسبة للكريات، فلو فرضنا أن الصندوق يحوي n كرية فإن احتمال ظهور أية كرية هو $\frac{1}{n}$

ملاحظة تساوي الاحتمال يتعلق كذلك بالمجموعة الشاملة (يعني بالسؤال المطروح)

نتيجة في حالة تساوي الاحتمال

كل مخرج $\{e_i\}$ له احتمال p_i حيث $p_i = \frac{1}{n}$

إذا كانت الحادثة A تحوي m عنصرا يكون احتمالها $P(A)$ حيث $P(A) = m \times \frac{1}{n}$

أي أن $$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

ملاحظة: بما أن $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$ فإن $p(\Omega) = 1$ ونضع $p(\phi) = 0$

❖ 4. خواص الاحتمالات

لتكن Ω المجموعة الشاملة (النتائج الممكنة) لتجربة عشوائية نزود Ω بالاحتمال P

- من أجل كل حادثة A فإن $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$ و $P(\emptyset) = 0$
- إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين ($A \cap B = \emptyset$) فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ حيث $\bar{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A
- إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B ($A \subset B$) فإن $P(A) \leq P(B)$

تعاريف

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية (نعتبر هذه النتائج أعدادا حقيقية)

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots, e_n\}$$

ليكن P احتمالا على Ω ، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $p_i = P(e_i)$

أمل قانون الاحتمال هو العدد E حيث $E = \sum_{i=1}^{n} e_i p_i$

- تباين قانون الاحتمال هو العدد V حيث $V = \sum_{i=1}^{n} (e_i - E)^2 p_i$
- يمكن كتابة التباين V على الشكل $V = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 \, p_i - E^2$
- الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد $\sigma = \sqrt{V}$

ملاحظة: الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا أن قيم الطبع هي عناصر Ω والتواترات النظرية هي القيم p_i .

❖ 5. المتغير العشوائي

مثال: نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات متتابعة و نسجل النتيجة " وجه $= F$ " ، " ظهر $= P$ "

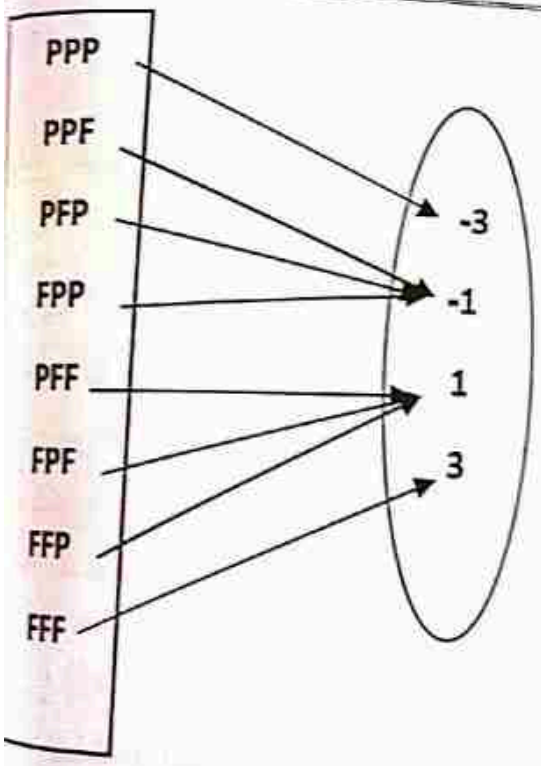
مجموعة المخارج هي $E =$

$\{ PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF \}$

نعتبر اللعبة التالية: يربح اللاعب دينارا واحدا كلما ظهر (وجه F) و يخسر دينارا واحدا كلما ظهر (ظهر P)

نعتبر الدالة X التي ترفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسب لها.

يسمى X المتغير العشوائي المعرف على E



تعريف1:

Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية نسمي متغيرا عشوائيا كل دالة عددية معرفة على Ω

عموما:
X متغير عشوائي معرف على Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية
لتكن I مجموعة قيم X أي $I = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\}$
ولتكن p_i احتمال الحادثة: " X يأخذ القيمة x_i ". أي $(X = x_i)$ نبرهن أن $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n = 1$

تعريف 2:
قانون احتمال لمتغير عشوائي X هو الدالة المعرفة على I (مجموعة قيم X) والتي ترفق بكل قيمة x_i من I العدد $p(X = x_i)$

تعريف 3 :
الأمل الرياضياتي للمتغير X هو العدد $E(X)$ حيث $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
تباين المتغير X هو العدد: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$
الانحراف المعياري للمتغير X هو العدد: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
ويمكن كتابة $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 P_i - \left(E(X)\right)^2$ حيث $p_i = p(X = x_i)$

73. تمرين رقم 01

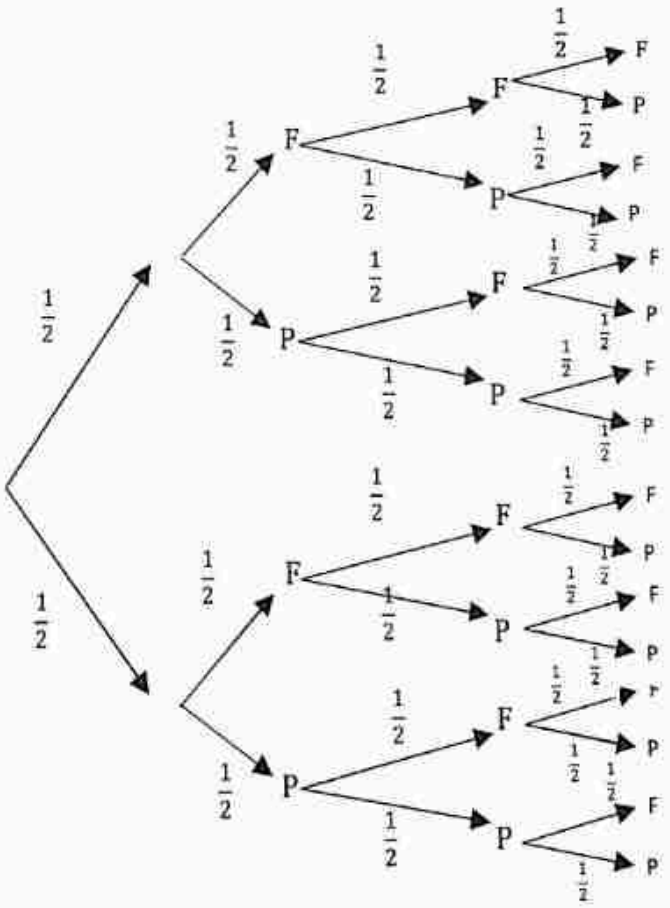
اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية ثانوي رقم 1

قطعة نقدية غير مزيفة ذات وجه F وظهر P.
نرمي القطعة أربع مرات متتالية ونعتبر الحوادث التالية:
A: الحصول على أربع أوجه أي F.
B: الحصول على وجهين وظهرين.
C: الحصول على ثلاث أوجه وظهر.
1-قم بإنشاء شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
2-أعط عدد الحالات الممكنة.
3-احسب احتمال A، B وC.

الحلّ

الرمية الأولى	الرمية الثاني	الرمية الثالثة	الرمية الرابعة

1-إنشاء شجرة الاحتمالات



2-الحالات الممكنة

عدد الحالات الممكنة: 16

3-حساب الاحتمالات

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

احتمال A: الحصول على أربع أوجه، من الشجرة لدينا:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{1}{16}$$

احتمال B: الحصول على وجهين وظهرين

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

احتمال C: الحصول على ثلاث أوجه وظهر

$$P(C) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

74. تمرين رقم 02

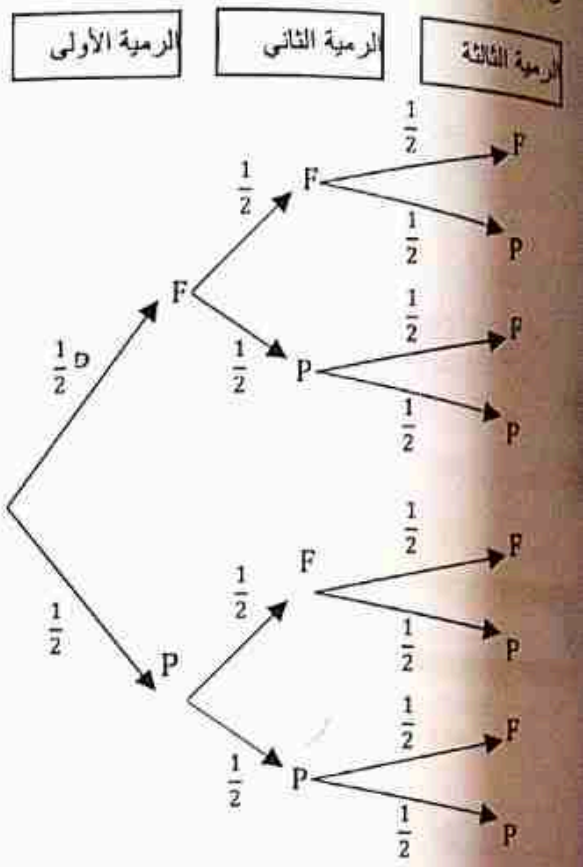
اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية ثانوي رقم 2

نرمي قطعة نقدية غير مزيفة 3 مرات متتابعة.
ليكن x المتغير العشوائي الذي يرفق بكل 3 رميات متتابعة عدد الأوجه الظاهرة F
1- أوجد عدد الحالات الممكنة.
2- أوجد مجموعة قيم x.
3- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x.
4- أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي x.
5- أحسب التباين والانحراف المعياري للمتغير x

الحل

1- إيجاد الحالات الممكنة

رسم شجرة الاحتمالات



$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

تعيين الحالات الممكنة: 8 حالات.

2- إيجاد مجموعة قيم x

قيم x هي: $I = \{0,1,2,3\}$

3- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x

من خلال الحالات الممكنة Ω لدينا:

$x = 0$: في حالة واحدة هي عدم ظهور أي وجه F، ومنه:

$$P(x=0) = \frac{1}{8}$$

$x = 1$: ثلاث حالات، ومنه:

$$P(x=1) = \frac{3}{8}$$

$x = 2$: ثلاث حالات، ومنه:

$$P(x=2) = \frac{3}{8}$$

$x = 3$: في حالة واحدة هي ظهور الوجه F في كل مرة:

$$P(x=3) = \frac{1}{8}$$

نلخص قانون الاحتمال في الجدول الأتي:

x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

4- حساب الأمل الرياضي للمتغير x

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i\, P(x=x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3+6+3}{8}$$

$$E(x) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

5- حساب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي x

- حساب التباين $V(x)$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - E(x))^2\, p_i$$

$$V(x) = \left(0-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right) + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right) + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right) + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$V(x) = \frac{24}{32} = 0.75$$

- حساب الانحراف المعياري $\sigma(x)$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{24}{32}} \approx 1.26$$

75. تمرين رقم 03

اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية ثانوي رقم 3

نرمي زهر نرد، أوجهه الستة تحمل الأرقام من 1 إلى 6.

هذا النرد مزيف بحيث احتمال ظهور كل وجه معطى كما يلي:

$P(1) = 0.12, P(2) = 0.13, P(3) = 0.25,$
$P(4) = 0.15, P(5) = 0.3, P(6) = 0.05$

- أحسب احتمال الحادثة:

A: "ظهور رقم زوجي".
B: "ظهور رقم فردي".
C: "ظهور رقم أولي".
D: "ظهور رقم مضاعف للعدد 3".

الحل

الحالات الممكنة: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

حساب الاحتمالات

A: "ظهور رقم زوجي": $A = \{2,4,6\}$، ومنه:

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$$

$$P(A) = 0.13 + 0.15 + 0.05 = 0.33$$

B: "ظهور رقم فردي": $B = \{1,3,5\}$، ومنه:

$$P(B) = P(1) + P(3) + P(5)$$

السلسلة الفضية

$P(B) = 0.12 + 0.25 + 0.3 = 0.67$

C: "ظهور رقم أولي": $C = \{2,3,5\}$، ومنه:

$P(C) = P(2) + P(3) + P(5)$

$P(C) = 0.13 + 0.25 + 0.3 = 0.68$

D: "ظهور رقم مضاعف للعدد 3": $D = \{3,6\}$، ومنه

$P(D) = P(3) + P(6)$

$P(D) = 0.25 + 0.05 = 0.3$

76. تمرين رقم 04

اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية ثانوي رقم 4

1-أحسب احتمال الحوادث A_1، A_2، A_3، وA_4 اعتمادا على قانون الاحتمال المعطى في الجدول الآتي:

1	2	3	4
0.1	0.2	0.3	0.4

$A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{3,4\}, A_3 = \{1\}, A_4 = A_2 \cap A_3$

2-اعتمادا على قانون الاحتمال المعطى في الجدول الآتي احسب احتمال جميع الحوادث التي تشملها مجموعة الإمكانيات $\{a,b,c\}$

a	b	c
0.25	0.45	0.3

الحلّ

1- حساب الاحتمالات

$P(A_1) = 0.6$

$P(A_2) = 0.7$

$P(A_3) = 0.1$

$P(A_4) = P(A_2 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0$

2- حساب الاحتمالات

$P(\emptyset) = 0$ ، $P(\{a\}) = 0.25$

$P(\{b\}) = 0.45$ ، $P(\{c\}) = 0.3$

$P(\{a,b\}) = 0.7$ ، $P(\{a,c\}) = 0.55$

$P(\{b,c\}) = 0.75$ ، $P(\{a,b,c\}) = 1$

77. تمرين رقم 05

اليوتيوب: الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للثانية ثانوي رقم 6

إليك قانون الاحتمال الآتي:

x_i	-6	-5	-4	4	5	8
$P(x = x_i)$	0.1	0.2	0.05	0.4	0.05	0.2

- أحسب الأمل الرياضي.
- أحسب التباين والانحراف المعياري.

- حساب الأمل الرياضي

$E(x) = \sum_{i=1}^{i=6} x_i P(x = x_i)$

$E(x) = -6(0.1) - 5(0.2) - 4(0.05) + 4(0.4) + 5(0.05) + 8(0.2)$

$E(x) = 1.65$

- حساب التباين والانحراف المعياري للمتغير x

- حساب التباين

$V(x) = \sum_{i=1}^{i=6} (x_i - E(x))^2 p_i$

$V(x) = (-6 - 1.65)^2(0.1) + (-5 - 1.65)^2(0.2) + (-4 - 1.65)^2(0.05) + (4 - 1.65)^2(0.4) + (5 - 1.65)^2(0.05) + (8 - 1.65)^2(0.2)$

$V(x) = 34.4$

- حساب الانحراف المعياري

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{34.4} \approx 5.87$

78. تمرين رقم 06

اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية ثانوي رقم 7

نعتبر $\Omega = \{-1,0,2,5,6,10\}$ ونعرف قانون الاحتمال على Ω كما في الجدول الآتي:

e_i	-1	0	2	5	6	10
$P(x = e_i)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	a

1- عين العدد الحقيقي a.

2- أحسب الأمل لهذا القانون.

3- أحسب التباين ثم الانحراف المعياري لهذا القانون.

الحل

1- تعيين العدد الحقيقي a

حسب قانون الاحتمال لدينا:

$$\frac{4}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + a = 1$$

$$a = 1 - \frac{12}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

2- حساب الأمل لهذا القانون

$E = \sum_{i=1}^{i=6} e_i P(x = e_i)$

$$E = -1\left(\frac{4}{15}\right) + 0\left(\frac{1}{15}\right) + 2\left(\frac{1}{15}\right) + 5\left(\frac{2}{15}\right) + 6\left(\frac{4}{15}\right) + 10\left(\frac{3}{15}\right)$$

$$E = \frac{62}{15} \approx 4.13$$

3- حساب التباين والانحراف المعياري لهذا القانون

- حساب التباين

$$V = \sum_{i=1}^{6} (e_i - E)^2 p_i$$

$$V = (-1 - 4.13)^2 \left(\frac{4}{15}\right) + (0 - 4.13)^2 \left(\frac{1}{15}\right) + (2 - 4.13)^2 \left(\frac{1}{15}\right) + (5 - 4.13)^2 \left(\frac{2}{15}\right) + (6 - 4.13)^2 \left(\frac{4}{15}\right) + (10 - 4.13)^2 \left(\frac{3}{15}\right)$$

$$V = \frac{3686}{225}$$

- حساب الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{3686}{225}} \approx 4.05$$

.79. تمرين رقم 07

اليوتيوب: الاحتمالات والمتتاليات الثانية ثانوي رقم 8

زهرة نرد مزيفة ذات أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4

نرمز بالرمز P_i لاحتمال ظهور الوجه ذي الرقم i مع $i \in \{1,2,3,4\}$.

نعلم أن $P_2 = \frac{1}{5}$ وأن الحدود P_1، P_2، P_3، P_4 تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب.

1) أحسب P_1، P_3، P_4.

2) احسب احتمال ظهور رقم فردي.

الحل

1) حساب P_1، P_3، P_4

لدينا:

$$U_n = U_p + (n - P)r$$

$$U_2 = U_1 + (2 - 1)r = U_1 + r$$

$$P_1 = P_2 - r$$

$$P_2 = \frac{1}{5}$$

$$P_3 = P_2 + r$$

$$P_4 = P_2 + 2r$$

حساب P_1، P_3، P_4: نعلم أن:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

$$\frac{1}{5} - r + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + r + \frac{1}{5} + 2r = 1$$

$$2r = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$r = \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{10}$$

بتعويض قيمة r:

$$P_1 = P_2 - r = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P_2 = \frac{1}{5}$$

$$P_3 = P_2 + r = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P_4 = P_2 + 2r = \frac{1}{5} + 2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{2}{5}$$

2) حساب احتمال ظهور رقم فردي

ليكن A حادثة ظهور رقم فردي:

$$P(A) = P_1 + P_3 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

.80. تمرين رقم 08

اليوتيوب: الاحتمالات السنة الثانية ثانوي رقم 9

يحتوي وعاء على 6 قريصات لا نفرق بينها عند اللمس.

كل منها مرقمة بعدد أولي ينتمي إلى مجموعة الأعداد الأولية الستة الأولى.

نسحب من الوعاء قريصتين في آن واحد وعشوائيا.

ليكن x المتغير العشوائي الذي يأخذ مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان.

1) عين قيم المتغير العشوائي x.

2) اكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x.

3) احسب الأمل الرياضي.

4) احسب التباين والانحراف المعياري.

الحل

1- تعيين قيم المتغير العشوائي x

عدد الحالات الممكنة: 15 حالة

D2 \ D1	2	3	5	7	11	13
2						
3	(3,2)					
5	(5,2)	(5,3)				
7	(7,2)	(7,3)	(7,5)			
11	(11,2)	(11,3)	(11,5)	(11,7)		
13	(13,2)	(13,3)	(13,5)	(13,7)	(13,11)	

- قيم المتغير العشوائي x:

$$x_i = \{5,7,8,9,10,12,13,14,15,16,18,20,24\}$$

2- كتابة قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

x_i	5	7	8	9	10	12
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

x_i	13	14	15	16	18	20	24
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

3- حساب الأمل الرياضي

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=13} x_i\,P(x=x_i)$$
$$E(x)=(5+7+8+9+10+12+13+14+15+20+24)\left(\frac{1}{15}\right)+(16+18)\left(\frac{2}{15}\right)$$
$$E(x)=\frac{205}{15}\approx 13.7$$

4- حساب التباين والانحراف المعياري

حساب التباين

$$V(x)=\sum_{i=1}^{13}(x_i-E(x))^2 p_i$$
$$V(x)=(5-13.7)^2\left(\frac{1}{15}\right)+\cdots+(24-13.7)^2\left(\frac{1}{15}\right)$$
$$V(x)=\frac{364.35}{15}\approx 24.29$$

حساب الانحراف

$$\sigma(x)=\sqrt{v(x)}=\sqrt{24.29}\approx 4.9$$

81. تمرين رقم 09

اليوتيوب: الاحتمالات السنة الثانية ثانوي رقم 10

يرمي لاعب زهري نرد متوازنين على شكل رباعي أوجه كل منهما تحمل الأرقام: 1، 2، 3، 4
ليكن المتغير العشوائي x المعرف كما يلي:
إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين زوجيا، يربح نفس مجموع الرقمين بالدينار.
إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين فرديا، يخسر نفس مجموع الرقمين بالدينار.
1) عين قيم المتغير العشوائي x.
2) عين قانون احتمال المتغير x.
3) أحسب كلا من: الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغير x.

الحل

1) تعيين قيم المتغير العشوائي x

- عدد الحالات الممكنة 16 حالة

D_1 / D_2	1	2	3	4
1	2	−3	+4	−5
2	−3	+4	−5	+6
3	+4	−5	+6	−7
4	−5	+6	−7	+8

ب- قيم المتغير العشوائي x

$$x_i=\{-7,-5,-3,2,4,6,8\}$$

2) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x

x_i	−7	−5	−3	2	4	6	8
$P(x=x_i)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

3) حساب الأمل التباين والانحراف

حساب الأمل الرياضي

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=7} x_i\,P(x=x_i)$$
$$E(x)=-7\left(\frac{2}{16}\right)-5\left(\frac{4}{16}\right)-3\left(\frac{2}{16}\right)+2\left(\frac{1}{16}\right)+4\left(\frac{3}{16}\right)+6\left(\frac{3}{16}\right)+8\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$E(x)=0$$

حساب التباين

$$V(x)=\sum_{i=1}^{i=7}(x_i-E(x))^2 p_i$$
$$V(x)=(-7-0)^2\left(\frac{2}{16}\right)+\cdots+(8-0)^2\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$V(x)=\frac{440}{16}\approx 27.5$$

حساب الانحراف المعياري

$$\sigma(x)=\sqrt{v(x)}=\sqrt{27.5}\approx 5.24$$

82. تمرين رقم 10

اليوتيوب: الاحتمالات والمتتاليات السنة الثانية ثانوي رقم 11

ليكن الفضاء E المتعلق بتجربة حيث:
$E=\{1,2,3,4\}$.
ولنعرف قانون الاحتمال كما يلي:

1	2	3	4
P_1	P_2	P_3	P_4

أحسب: P_1، P_2، P_3، P_4 علما أنها تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية وأن أملها الرياضي يساوي3

الحل

- حساب P_1، P_2، P_3، P_4

لدينا

$$P(E)=P_1+P_2+P_3+P_4=1$$

الأمل الرياضي يساوي 3 معناه:

$P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 = 3$

بما أن P_1، P_2، P_3، P_4 تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

$$P_2 = P_1 + r$$
$$P_3 = P_1 + 2r$$
$$P_4 = P_1 + 3r$$

بالتعويض في علاقة $P(E)$ نجد:

$$P(E) = P_1 + P_1 + r + P_1 + 2r + P_1 + 3r = 1$$
$$4P_1 + 6r = 1$$

بالتعويض في علاقة الأمل الرياضي نجد:

$$P_1 + 2(P_1 + r) + 3(P_1 + 2r) + 4(P_1 + 3r) = 3$$
$$10P_1 + 20r = 3$$

نقوم بحل جملة المعادلتين ذات المجهولين P_1 و r:

$$\begin{cases} 4P_1 + 6r = 1 \\ 10P_1 + 20r = 3 \end{cases}$$

نجد: $r = \frac{1}{10}$ و $P_1 = \frac{1}{10}$ ومنه:

$$P_1 = \frac{1}{10}$$

$$P_2 = P_1 + r = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P_3 = P_1 + 2r = \frac{1}{10} + 2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{3}{10}$$

$$P_4 = P_1 + 3r = \frac{1}{10} + 3\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

83. تمرين رقم 11

الموضوع: الاحتمالات للسنة الثانية ثانوي رقم 12

كيس يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات سوداء وكرة بيضاء، نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع، ونعتبر المتغير العشوائي x الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء المسحوبة.

1) مثل النتائج باستعمال:

أ- شجرة الاحتمالات.

ب- جدول.

2) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x بطريقتين:

أ- شجرة الاحتمالات.

ب- الجدول.

3) احسب:

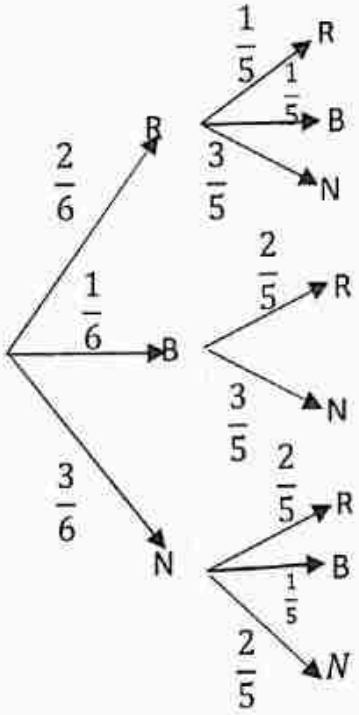
الأمل الرياضي $E(x)$.

التباين $V(x)$ و الانحراف المعياري $\sigma(x)$.

الحل

1) تمثيل النتائج

أ- شجرة الاحتمال



$$P(R \cap R) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$
$$P(R \cap B) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$
$$P(R \cap N) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$
$$P(B \cap R) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$
$$P(B \cap N) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$
$$P(N \cap R) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$
$$P(N \cap B) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$
$$P(N \cap N) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

ب- الجدول:

عدد الحالات الممكنة: 30 حالة.

س1 / س2	R_1	R_2	B_1	N_1	N_2	N_3
R_1		0	0	1	1	1
R_2	0		0	1	1	1
B_1	0	0		1	1	1
N_1	1	1	1		2	2
N_2	1	1	1	2		2
N_3	1	1	1	2	2	

قيم المتغير x: $x_i \in \{0,1,2\}$

2) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x

قيم المتغير x: $x_i \in \{0,1,2\}$

أ- شجرة الاحتمال

$$P(x=0)=\frac{2}{30}+\frac{2}{30}+\frac{2}{30}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$
$$P(x=1)=\frac{6}{30}+\frac{3}{30}+\frac{6}{30}+\frac{3}{30}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$$
$$P(x=2)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	$\frac{6}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{6}{30}$

ب- الجدول: انطلاقا من الجدول السابق لدينا:

x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	$\frac{6}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{6}{30}$

3) حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف

- **الأمل الرياضي $E(x)$**

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=3} x_i\,P(x=x_i)$$
$$E(x)=0\left(\frac{6}{30}\right)+1\left(\frac{18}{30}\right)+2\left(\frac{6}{30}\right)$$
$$=\frac{18+12}{30}=1$$

- **التباين $V(x)$**

$$V(x)=\sum_{i=1}^{3}(x_i-E(x))^2\,p_i$$
$$V(x)=(0-1)^2\left(\frac{6}{30}\right)+(1-1)^2\left(\frac{18}{30}\right)+(2-1)^2\left(\frac{6}{30}\right)$$
$$V(x)=\frac{6+0+6}{30}=\frac{2}{5}=0.4$$

- **الانحراف المعياري $\sigma(x)$**

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{2}{5}}\approx 0.63$$

84. تمرين رقم 12

اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية والثالثة ثانوي رقم 8

يحتوي كيس على 7 كريات منها 3 كرات سوداء تحمل الأرقام 1، 2 و3، و4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3 و4.

نسحب عشوائيا من الكيس كرة واحدة.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

N: "سحب كرة سوداء"

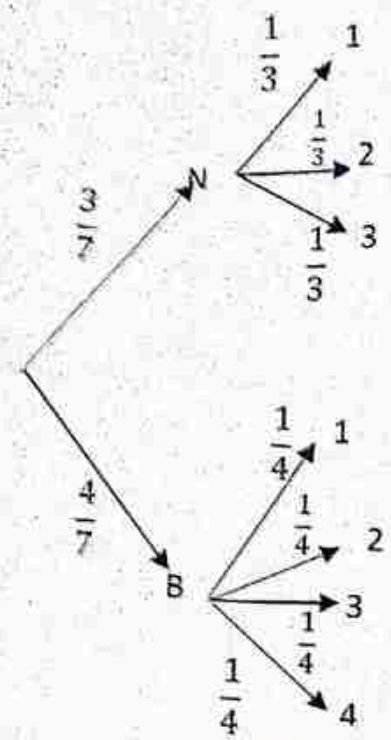
B: "سحب كرة بيضاء"

C: "سحب كرة تحمل رقما زوجيا"

2) أحسب احتمال الحوادث: $N\cap B$، $N\cap C$، $B\cap C$، $N\cup B$، $N\cup C$ و $B\cup C$.

* الحل

1) حساب احتمال الحوادث



حساب الاحتمالات

N: "سحب كرة سوداء"

$$P(N)=\frac{3}{7}$$

B: "سحب كرة بيضاء"

$$P(B)=\frac{4}{7}$$

C: "سحب كرة تحمل رقما زوجيا": هناك 3 كريـ
فقط تحمل رقما زوجيا من أصل 7 كرات، ون

$$P(C)=\frac{3}{7}$$

2) حساب احتمال الحوادث

$N\cap B$: أي سحب كرة واحدة سوداء وبيضاء في نفس الوقت، وهذا مستحيل فالحادثتان غير متلائمتين، ومنه $P(N\cap B)=0$

$N\cap C$: أي سحب كرة واحدة سوداء تحمل رقما زوجيا:

$$P(N\cap C)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$$

$B\cap C$: أي سحب كرة واحدة بيضاء تحمل رقما زوجيا:

$$P(B\cap C)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{7}$$

$N \cup B$: أي سحب كرة سوداء أو كرة بيضاء، وهذه حادثة أكيدة، فالكرة المسحوبة لا بد أن تكون بيضاء أو سوداء، أي:

$$P(N \cup B) = 1$$

$N \cup C$: أي سحب كرة واحدة سوداء أو كرة تحمل رقما زوجيا:

$$P(N \cup C) = P(N) + P(C) - P(N \cap C)$$

$$P(N \cup C) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

$B \cup C$: أي سحب كرة واحدة بيضاء أو كرة تحمل رقما زوجيا:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$P(B \cup C) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

85. تمرين رقم 13

اليوتيوب: الاحتمالات السنة الثانية والثالثة ثانوي رقم 14

كيس A به أقلام 6 زرقاء و4 حمراء، وكيس آخر به أقلام: 9 زرقاء و5 حمراء.

نسحب بطريقة عشوائية قلما من كل كيس.

1) ما هو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب (عدد عناصر المجموعة Ω).

2) احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية:

E: "الحصول على قلمين حمراوين".

F: "الحصول على قلم واحد أحمر".

G: "الحصول على الأقل على قلم أحمر".

الحل

1) عدد الحالات الممكنة

عدد عناصر المجموعة Ω هو

$$10 \times 14 = 140$$

2) حساب احتمال الحوادث

E: "الحصول على قلمين حمراوين"

$$P(E) = \frac{4 \times 5}{140} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = 0.14$$

F: "الحصول على قلم واحد أحمر".

$$P(F) = \frac{4 \times 9 + 5 \times 6}{140} = \frac{33}{70} = 0.47$$

G: "الحصول على الأقل على قلم أحمر".

$$P(G) = P(E) + P(F) = 0.61$$

86. تمرين رقم 14

اليوتيوب: الاحتمالات السنة الثانية والثالثة ثانوي رقم 15

نرمي قطعة نقدية متوازنة ونسجل النتيجة المحصل عليها (وجه F أو ظهر P).

1- ما احتمال الحصول على وجه F ثم أكمل الشجرة بوضع الاحتمال المناسب.

2- نرمي القطعة النقدية نفسها مرة ثانية، أكمل الشجرة تبعا للرمية الأولى.

3- نرمي القطعة مرة ثالثة:

أ- عين كل المخارج على الشجرة.

ب- ما هو عدد المخارج التي تحوي وجها مرة واحدة فقط؟

ج- كيف نستعمل الشجرة لحساب احتمال الحصول على وجه مرة واحدة؟

الحل

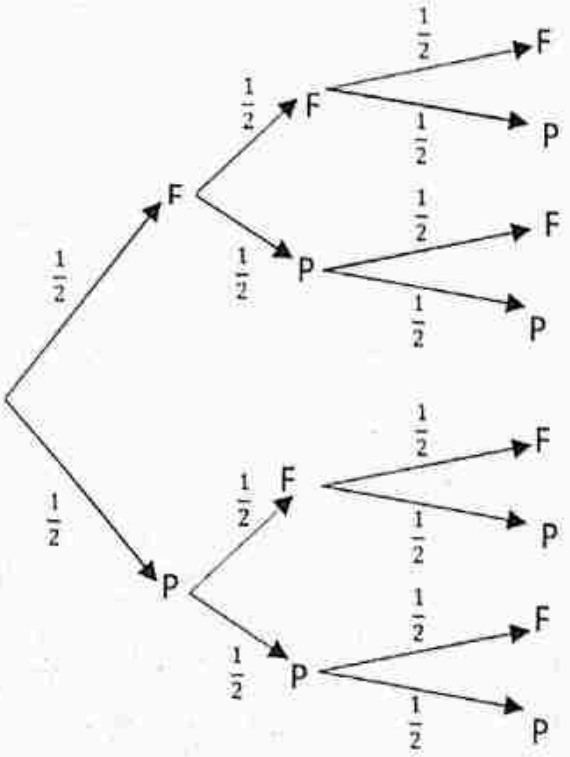
1) حساب احتمال الحصول على وجه F

لدينا

$$E = \{F, P\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

2) إكمال شجرة الاحتمال



3) عدد المخارج التي تحوي وجها واحدا فقط

عدد المخارج الممكنة: 8 مخارج.

$E' = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

عدد المخارج التي تحوي وجها واحدا فقط: 3 مخارج

$A' = \{PPF, PFP, FPP\}$

حساب احتمال الحصول على وجه F مرة واحدة:

$$P(A') = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{A'}{E'} = \frac{3}{8}$$

87. تمرين رقم 15

اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية والثالثة ثانوي رقم 16

ثلاثة أكياس متماثلة U_1، U_2، U_3 كل منها يحوي 6 كريات متماثلة، الكيس U_1 يحوي كريتين بيضاوين وأربع كريات حمراء، الكيس U_2 يحوي ثلاث كريات بيضاء وثلاث كريات حمراء والكيس U_3 يحوي خمس كريات بيضاء وكرية حمراء.

نختار عشوائيا كيسا ثم نسحب منه دون اختيار كرية واحدة.

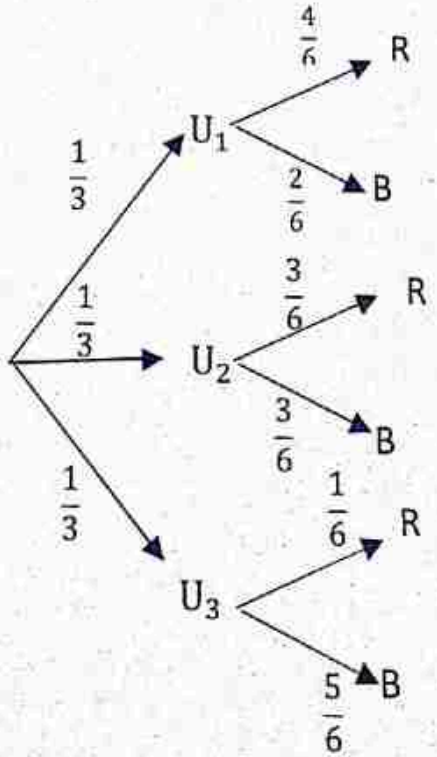
1) شكل شجرة الاحتمالات المتوازنة التي تنمذج هذه الوضعية.

2) ما احتمال سحب كرية بيضاء من الكيس U_3؟

3) ما احتمال سحب كرية بيضاء؟

الحل

1) تشكيل شجرة الاحتمالات



2) حساب احتمال سحب كرية بيضاء من الكيس U_1

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

1) حساب احتمال سحب كرية بيضاء

$$P(H) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2+3+5}{18} = \frac{5}{9}$$

88. تمرين رقم 16

اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية والثالثة ثانوي رقم 17

وضعت أسئلة امتحان شفوي في علبتين متماثلتين A و B

العلبة A تحتوي على 4 أسئلة في الثقافة العامة و6 أسئلة في مادة الاختصاص، والعلبة B تحتوي على 3 أسئلة ثقافية و7 أسئلة الاختصاص.

(عمليات سحب الأسئلة واختيار إحدى العلبتين متساوية الاحتمال)

يختار مترشح إحدى العلبتين ليسحب منها عشوائيا سؤالا واحدا

1) شكل شجرة الاحتمالات المتوازنة.

2) ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة A؟

3) ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة B؟

4) ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص؟

الحل

نضع:

S: أسئلة الاختصاص

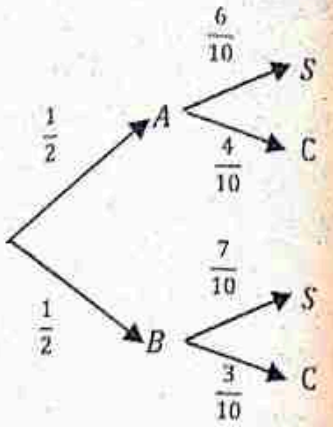
C: أسئلة ثقافية.

H: سؤال في مادة الاختصاص من العلبة A.

G: سؤال في مادة الاختصاص من العلبة B.

I: سؤال في مادة الاختصاص.

1) تشكيل شجرة الاحتمالات



2) حساب $P(H)$

$$P(H) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 0.3$$

3) حساب $P(G)$

$$P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{20} = 0.35$$

4) حساب $P(I)$

$$P(I) = P(H) + P(G) = \frac{3}{10} + \frac{7}{20} = \frac{13}{20} = 0.65$$

89. تمرين رقم 17

اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية والثالثة ثانوي رقم 18

في حظيرة للسيارات توجد 200 سيارة، 20 منها بها عطب في محرك و40 منها بها عطب في العجلات و10 منها بها كلا العطبين.

نختار عشوائيا سيارة من هذه الحظيرة.

A: حادثة "اختيار سيارة فيها عطب في محرك"

B: حادثة "اختيار سيارة فيها عطب في العجلات"

1) ما هو احتمال أن تكون السيارة بها عطب واحد على الأقل من العطبين.

2) ما هو احتمال أن تكون السيارة خالية من كلا العطبين.

الحل

1) حساب $P(A \cup B)$

لدينا

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{20}{200} + \frac{40}{200} - \frac{10}{200} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

2) حساب $P(\overline{A \cup B})$

لدينا

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

90. تمرين رقم 18

اليوتيوب: الاحتمالات للسنة الثانية والثالثة ثانوي رقم 19

كيسين A وB حيث A يحتوي على ثلاث كرات مرقمة من 1 إلى 3 وB يحتوي على ثلاث كرات مرقمة 2، 3، 4، نسحب من A كرة ومن B كرة أخرى.

1- x هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب من A وB مجموع الرقمين المحصل عليهما.

عين قانون احتمال المتغير العشوائي x ثم احسب $E(x)$، $V(x)$، $\sigma(x)$.

2- الأعداد المكتوبة على الكرات نضاعفها خمس مرات ونقوم بنفس السحب السابق.

y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب من A وB مجموع الرقمين المحصل عليهما.

أ- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي y.

ب- بين أن $E(y) = 5E(x)$ وأن $\sigma(y) = 5\sigma(x)$.

الحل

1) المتغير العشوائي x

أ- تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي x

- تعيين الحالات الممكنة: 9 حالات.

B \ A	1	2	3
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)

تعيين قيم x: $x \in \{3,4,5,6,7\}$

حساب الاحتمالات

$$P(x=3) = \frac{1}{9}$$
$$P(x=4) = \frac{2}{9}$$
$$P(x=5) = \frac{3}{9}$$
$$P(x=6) = \frac{2}{9}$$
$$P(x=7) = \frac{1}{9}$$

قانون الاحتمال: نلخصه بالجدول الآتي:

السلسلة القصية

x_i	3	4	5	6	7
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

ب- حساب $E(x)$

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=5} x_i\,P(x=x_i)$$

$$E(x)=3\left(\frac{1}{9}\right)+4\left(\frac{2}{9}\right)+5\left(\frac{3}{9}\right)+6\left(\frac{2}{9}\right)+7\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$E(x)=\frac{45}{9}=5$$

ج- حساب $V(x)$

$$V(x)=\sum_{i=1}^{i=5}(x_i-E(x))^2\,p_i$$

$$V(x)=(3-5)^2\left(\frac{1}{9}\right)+(4-5)^2\left(\frac{2}{9}\right)+(5-5)^2\left(\frac{3}{9}\right)+(6-5)^2\left(\frac{2}{9}\right)+(7-5)^2\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$V(x)=\frac{12}{9}=1.33$$

د- حساب $\sigma(x)$

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{12}{9}}\approx 1.15$$

2) المتغير العشوائي y

تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي y:

قيم y: لدينا $y=5x$، ومنه

$y\in\{15,20,25,30,35\}$

y_i	15	20	25	30	35
$P(y=y_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

بيان أن $E(y)=5E(x)$

$$E(y)=\sum_{i=1}^{i=5} y_i\,P(y=y_i)$$

$$E(y)=15\left(\frac{1}{9}\right)+20\left(\frac{2}{9}\right)+25\left(\frac{3}{9}\right)+30\left(\frac{2}{9}\right)+35\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$E(y)=\frac{225}{9}=25$$

ومنه $E(y)=25=5E(x)$.

بيان أن $\sigma(y)=5\sigma(x)$

$$V(y)=\sum_{i=1}^{i=5}(y_i-E(y))^2\,p_i$$

$$V(y)=(15-25)^2\left(\frac{1}{9}\right)+(20-25)^2\left(\frac{2}{9}\right)+(25-25)^2\left(\frac{3}{9}\right)+(30-25)^2\left(\frac{2}{9}\right)+(35-25)^2\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$V(y)=\frac{300}{9}\approx 33.25$$

$$\sigma(y)=\sqrt{V(y)}=\sqrt{\frac{300}{9}}\approx 5.76$$

ومنه $\sigma(y)=5.76=5\sigma(x)$.

91. تمرين رقم 19

اليوتيوب: اختبار الفصل الأول في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي (الاحتمالات) رقم 26

نرمي حجري نرد متزنين وجهاهما مُرقمان من 1 إلى 6

المجموعة Ω مجموعة الثنائيات $(x;y)$ مع

$1\le x\le 6$ و $1\le y\le 6$

نعرف عليهما قانون متساوي الاحتمال وليكن المتغير العشوائي X المعرف على Ω والذي يرفق بكل ثنائية $(x;y)$ العدد الحقيقي $|x-y|$.

1) ما هو عدد الإمكانيات للمجموعة Ω؟

2) ما هي قيم المتغير العشوائي X؟

3) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

4) احسب الأمل الرياضياتي والتباين والانحراف المعياري لـ X.

الحل

1) عدد إمكانيات المجموعة Ω

$$6\times 6=36$$

2) قيم X الممكنة

$$|x-y|=|y-x|$$

القيم الممكنة لـ X هي $X\in\{0;1;2;3;4;5\}$

3) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

نحسب احتمال الحوادث $X=0$ ، $X=1$ ، $X=2$ ، $X=3$ ، $X=4$ ، $X=5$

$$P(X=0)=\frac{6}{36}$$

$$P(X=1)=\frac{10}{36}$$

$$P(X=2)=\frac{8}{36}$$

$$P(X=3)=\frac{6}{36}$$

$$P(X=4)=\frac{4}{36}$$

$$P(X=5)=\frac{2}{36}$$

نلخص ذلك في الجدول التالي

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

- حساب $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=6} x_i p_i$$

$$E(X) = 0\left(\frac{6}{36}\right) + 1\left(\frac{10}{36}\right) + 2\left(\frac{8}{36}\right) + 3\left(\frac{6}{36}\right) + 4\left(\frac{4}{36}\right) + 5\left(\frac{2}{36}\right)$$

$$E(X) = \frac{70}{36} = 1.94$$

- حساب $V(X)$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=6} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{i=6} x_i^2 p_i - [E(x)]^2$$

$$= (0-1.94)^2\left(\frac{6}{36}\right) + (1-1.94)^2\left(\frac{10}{36}\right) + (2-1.94)^2\left(\frac{8}{36}\right) + (3-1.94)^2\left(\frac{6}{36}\right) + (4-1.94)^2\left(\frac{4}{36}\right) + (5-1.94)^2\left(\frac{2}{36}\right)$$

$$= 2.05$$

- حساب $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.05} = 1.43$$

92. تمرين رقم 20

التوجيه: اختبار الفصل الأول في الرياضيات (الاحتمالات) للسنة الثانية ثانوي رقم 27

لعبة تتمثل في رمي حجري نرد متزنين أوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6

يراهن لاعب بـ 100 دينار على الرقم 5، فإذا ظهر على وجهي الحجرين يتحصل على 400 دينار وإذا ظهر على وجه حجر واحد يتحصل على 300 دينار وفي الحالات الأخرى لا يحصل على شيء.

الربح أو الخسارة المتحصل عليهما منقوص من الرهان تُعرّف متغير عشوائي X.

1) ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟

2) اعط قيم احتمال المتغير العشوائي X.

3) احسب $E(x)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$.

الحل

1) قيم المتغير العشوائي

عدد الحالات الممكنة $6 \times 6 = 36$

$X = 400 - 100 = 300$

يربح 300

أو

$X = 300 - 100 = 200$

يربح 200

أو

$X = 0 - 100 = -100$

يخسر 100

قيم X هي $X \in \{-100; 200; 300\}$

2) قانون احتمال المتغير العشوائي X

- نحسب احتمال الحوادث :

$X = 300$

$X = 200$

$X = -100$

$$P(X = 300) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 200) = \frac{10}{36}$$

$$P(X = -100) = 1 - P(X = 300) - P(X = 200) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{10}{36} = \frac{25}{36}$$

$$P(X = 300) + P(X = 200) + P(X = -100) = 1$$

نلخص قانون الاحتمال في الجدول التالي

x_i	300	200	-100
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

3) حساب $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$

- حساب $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i p_i$$

$$= 300\left(\frac{1}{36}\right) + 200\left(\frac{10}{36}\right) - 100\left(\frac{25}{36}\right)$$

$$= -\frac{200}{36}$$

$$E(X) = -5.55$$

- حساب $V(X)$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=3} (x_i - E(X))^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{i=3} x_i^2 p_i - [E(x)]^2$$

$$= (300 + 5.55)^2 \left(\frac{1}{36}\right) + (200 + 5.55)^2 \left(\frac{10}{36}\right) + (-100 + 5.55)^2 \left(\frac{25}{36}\right)$$

$$V(x) = 23541.66$$

- حساب $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{23541.66} = 153.44$$

93. تمرين رقم 21

اليوتيوب: اختبار الفصل الثالث في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 02

يحتوي كيس على 5 قريصات ، 3 قريصات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 وقريصتان حمراوتان مرقمة من 4 إلى 5 لا نميز بينها عند اللمس.

نسحب قريصتين على التوالي (دون إرجاع) ونسجل نتيجة كل حساب.

1- احسب احتمالات الحوادث التالية:

A : القريصتان حمراوتان

B : القريصتان من نفس اللون

C : القريصتان من لونين مختلفين

D : القريصتان تحملان رقم زوجي

2- يؤدي سحب قريصة حمراء إلى ربح 8000 دج وسحب قريصة بيضاء إلى خسارة 4000 دج نعرف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل في اللعبة.

أ- عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

جـ- احسب الأمل الرياضياتي والتباين.

الحل

1- حساب احتمال الحوادث

حساب $P(A)$

$$P(A) = \frac{1}{10}$$

حساب $P(B)$

$$P(B) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

حساب $P(C)$

ط1:

$$P(C) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P(C) = \frac{3}{5}$$

ط2:

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1$$

$$P(C) + P(\bar{C}) = 1$$

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{5}{5} - \frac{2}{5}$$

$$P(C) = \frac{3}{5}$$

حساب $P(D)$:

نرمز بـ H للرقم الزوجي

نرمز بـ $\bar{H}$ للرقم الفردي

$$P(D) = P(H \cap H) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

2- أ- القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

$$X = \{-8000; 4000; 16000\}$$

ب- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

$$X = -8000\ DA$$

$$P(X = -8000) = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 4000) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$X = 16000$$

$$P(X = 16000) = \frac{1}{10}$$

X	$X = -8000$	$X = 4000$	$X = 16000$	المجموع
$P(x = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

ج- حساب الأمل الرياضياتي $E(x)$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} (x_i) p_i$$

$$E(\ ) = (-8000)\left(\frac{3}{10}\right) + 4000\left(\frac{6}{10}\right) + 16000\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= -\frac{24000}{10} + \frac{24000}{10} + \frac{16000}{10} = 1600$$

- حساب التباين

$$V(x) = \sum_{i=1}^{i=3} (X_i - E(X))^2 P_i$$

$$= (-8000-1600)^2\left(\frac{3}{10}\right) + (4000-1600)^2\left(\frac{6}{10}\right) + (16000-1600)^2\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= (-9600)^2\left(\frac{3}{10}\right) + (2400)^2\left(\frac{6}{10}\right) + (14400)^2\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$V(x) = 51840000$$

94. تمرين رقم 22

اليوتوب: اختار الفصل الثاني في الرياضيات للثانية ثانوي بشرح مفصل و رائع (الاحتمالات)

نعتبر المعادلة $(E) \dots\dots x^2 + mx + p = 0$

نرمي زهر نرد متزن مرقم من 1 إلى 6

مرتين متتاليتين، العدد الذي يظهر في الرمية الأولى يمثل m وفي الرمية الثانية يمثل p

نعتبر الحوادث A ، B و C حيث:

A : "المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين"

B: "المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا"

C : " المعادلة (E) لا تقبل أي حل حقيقي"

- احسب احتمال الحوادث A ، B و C

الحل

- حساب احتمال الحوادث

$m \in \{1;2;3;4;5;6\}$

$p \in \{1;2;3;4;5;6\}$

m \ p	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

عدد الحالات الممكنة $6 \times 6 = 36$

$$x^2 + mx + p = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = m^2 - 4p$$

المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين إذا كان $\Delta > 0$

$$m^2 - 4p > 0$$

$$m^2 > 4p$$

$$m > 2\sqrt{p}$$

- لما $p = 1$

$m > 2$

4 ثنائيات

لما $p = 2$ يكون $m > 2\sqrt{2}$

$m > 2.82$

$m \geq 3$

4 ثنائيات

- لما $p = 3$

$m > 2\sqrt{3}$

$m > 3.46$

3 ثنائيات

- لما $p = 4$

$m > 4$

2 ثنائيات

- لما $p = 5$ يكون $m > 2\sqrt{5}$

$m > 4.48$

$m \geq 5$

2 ثنائيات

- لما $p = 6$ يكون $m > 2\sqrt{6}$

$m > 4.89$

$m \geq 5$

2 ثنائيات

$$p(A) = \frac{17}{36}$$

حساب $p(B)$

(E) تقبل حلا مضاعفا إذا كان $\Delta = 0$

أي $m = 2\sqrt{p}$

لما $p = 1$ يكون $m = 2$ أي

$(m;p) = (2;1)$

لما $p = 4$ يكون $m = 4$

$(m;p) = (4;4)$

$$p(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

- حساب $p(C)$

$$p(A) + p(B) + p(C) = 1$$

$$\frac{17}{36} + \frac{2}{36} + p(C) = 1$$

$$p(C) = 1 - \frac{17}{36} - \frac{2}{36}$$

$$p(C) = \frac{17}{36}$$

95. تمرين رقم 23

اليوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات للثانية ثانوي رقم 1(الاحتمالات تمرين رووعة)

تحتوي علبة على 4 كريات متماثلة منها كريتين بيضاوتين "B" وكرة حمراء واحدة "R" وكرة خضراء واحدة "V".

نسحب كريتين على التوالي دون إرجاع

1- أنجز جدول يوضح التجربة

2- احسب احتمال الحوادث التالية.

A : " الحصول على كريتين بيضاويتين"

B: "الحصول على كرة بيضاء"

3- نعتبر اللعبة التالية: يربح اللاعب $20\ DA$ عند الحصول على كرة حمراء ويربح $10\ DA$ عند الحصول على كرة خضراء ويخسر $10\ DA$ عند الحصول على كرة بيضاء.

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إمكانية الربح أو الخسارة المناسبة لها.

أ- عين قيم X الممكنة ثم عين قانون الاحتمال لـ X

ب- هل اللعبة في صالح اللاعب؟ علل

جـ- استنتج $p(X<10)$ و $p(X\geq 30)$.

الحل

1- جدول يوضح التجربة

السحبة 1 / السحبة 2	B_1	B_2	R	V
B_1		$(B_1;B_2)$	$(B_1;R)$	$(B_1;V)$
B_2	$(B_2;B_1)$		$(B_2;R)$	$(B_2;V)$
R	$(R;B_1)$	$(R;B_2)$		$(R;V)$
V	$(V;B_1)$	$(V;B_2)$	$(V;R)$	

2- حساب احتمالات الحوادث

$$p(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$$p(B)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

3-

أ- قيم المتغير العشوائي X الممكنة

$$X=\{-20;0;10;30\}$$

- قانون الاحتمال:

نلخص ذلك في الجدول التالي:

X	-20	0	10	30
$p(x=x_i)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$

ب- معرفة ما اذا كانت اللعبة في صالح اللاعب ام لا

حساب الأمل الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4}x_i.p_i$$

$$=-20\left(\frac{2}{12}\right)+0\left(\frac{4}{12}\right)+10\left(\frac{4}{12}\right)+30\left(\frac{2}{12}\right)$$

$$=\frac{60}{12}=5$$

بما أن $E(x)=5>0$ فإن اللعبة في صالح اللاعب

جـ- استنتاج $p(X<10)$ و $p(X\geq 30)$

$$p(X<10)=p(X=0)+p(X=-20)$$

$$=\frac{2}{12}+\frac{4}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$p(X\geq 30)=p(X=30)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

96. تمرين رقم 24

اليوتيوب: اقوى مراجعة شاملة في الاحتمالات للثانية ثانوي (تمرين فيه كل الافكار)

كيس يحتوي على 9 كرات منها 5 حمراء مرقمة كما يلي 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 وأربع كرات سوداء مرقمة 2 ، 2 ، 3 ، 3

نسحب عشوائيا على التوالي وبدون إرجاع كرتين من الكيس

1- شكّل شجرة الاحتمال التي تنمذج هذه العملية في حالة الألوان ثم في حالة الأرقام

2- احسب احتمال الحوادث التالية:

A: " الحصول على كرتين من نفس اللون"

B: " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون"

C: "عدم الحصول على أي كرة حمراء"

D : "الحصول على كرة حمراء على الأقل"

E: " الحصول على كرتين كلاهما يحمل رقما فرديا"

F: " الحصول على كرتين جداء رقميهما فردي"

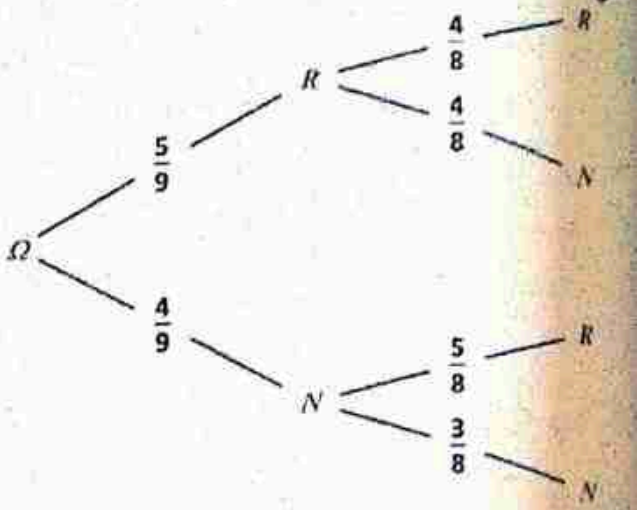
G : "الحصول على كرة تحمل رقم 2 على الأقل"

3- ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المتحصل عليها
أ- أعط قيم X الممكنة.
ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأمله الرياضياتي ثم التباين والانحراف المعياري.

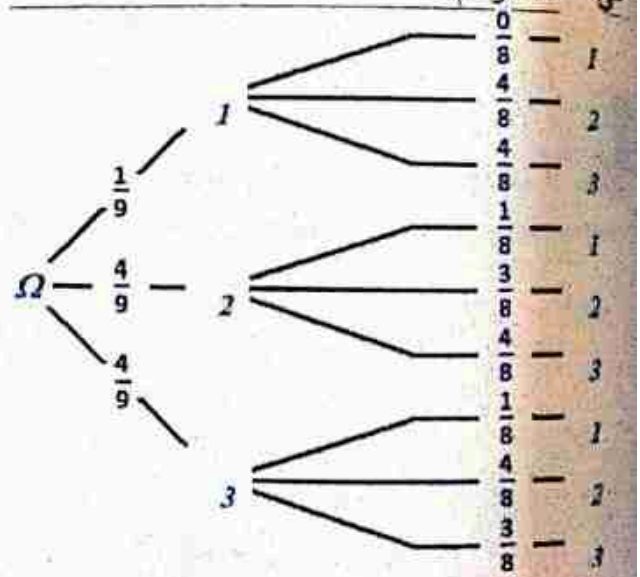
الحل

1- شجرة الاحتمالات

في حالة الألوان:



في حالة الأرقام:



2- حساب احتمال الحوادث

$$p(A) = p(R \cap R) + p(N \cap N)$$
$$= \frac{20}{72} + \frac{12}{72} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

$$p(B) = p(R \cap N) + p(N \cap R)$$
$$= \frac{20}{72} + \frac{20}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

$$p(C) = p(N \cap N)$$
$$= \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

ط1:

$$p(D) = p(R \cap N) + p(N \cap R) + p(R \cap R)$$
$$= \frac{20}{72} + \frac{20}{72} + \frac{20}{72} = \frac{60}{72}$$
$$= \frac{5}{6}$$

ط2:

بما أن $p(C)$ و $p(D)$ حادثتين متعاكستين

$$P(D) = 1 - p(C) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$p(E) = \left(\frac{1}{9} \times \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{3}{8}\right) = \frac{20}{72}$$

$$p(F) = \frac{4}{72} + \frac{4}{72} + \frac{12}{72} = \frac{20}{72}$$

$$p(G) = 1 - p(\bar{2})$$
$$p(2) + p(\bar{2}) = 1$$

$p(\bar{2})$: احتمال عدم الحصول على أي كرة تحمل الرقم 2

$p(2)$: احتمال الحصول على كريتين تحملان الرقم 2 او كرة واحدة

$$p(G) = 1 - p(2) = 1 - \frac{12}{72}$$

3-

أ- قيم X المتغير العشوائي

$$x \in \{0; 1; 2\}$$

ب- قانون الاحتمال

$$p(x=0)=\frac{12}{72}$$
$$p(x=1)=\frac{20}{72}+\frac{20}{72}=\frac{40}{72}$$
$$p(x=2)=\frac{20}{72}$$

نلخص ذلك في الجدول التالي

x_i	0	1	2
$p(x=x_i)$	$\frac{12}{72}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{20}{72}$

الأمل الرياضياتي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i.p_i$$
$$=0\left(\frac{12}{72}\right)+\left(\frac{40}{72}\right)+2\left(\frac{20}{72}\right)$$
$$=\frac{80}{72}=\frac{10}{9}$$

التباين

$$V(x)=\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i-E(x)\right)^2.p_i$$
$$=\left(0-\frac{10}{9}\right)^2\left(\frac{12}{72}\right)+\left(1-\frac{10}{9}\right)^2\left(\frac{40}{72}\right)+\left(2-\frac{10}{9}\right)^2\left(\frac{20}{72}\right)$$
$$=\frac{35}{81}$$
$$=0.432$$

الانحراف المعياري

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{35}{81}}=0.657$$

97. تمرين رقم 25

اليوتيوب: اقوى مراجعة في الاحتمالات للثانية ثانوي بشرح جميع الاسئلة المتوقعة في الاختبار ان شاء الله

I- يحتوي كيس على خمس كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ومرقمة من 1 إلى 5 نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين على التوالي دون إرجاع

1- شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة، أعط عدد الإمكانيات

2- لتكن الحوادث التالية:

A: " سحب كريتين تحملان رقمان فرديان"

B: " سحب كريتين مجموع رقميهما اكبر تماما من 5 "

C: "سحب كريتين مجموع مربعيهما يساوي 41"

D : "سحب كريتين إحداهما تحمل رقما فرديا والأخرى رقم زوجيا"

- احسب ما يلي: $p(A)$ ، $p(\bar{A})$ ، $p(B)$ ، $p(\bar{B})$ ، $p(C)$ ، $p(D)$ ، $p(A\cap B)$ ، $p(A\cup B)$ ، $p(C\cap D)$

3- X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد مرات ظهور رقم فردي

أ- حدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

ب- أوجد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي

جـ استنتج $p(x^2-3x+2=0)$ ، $p(x^2+x+1=0)$

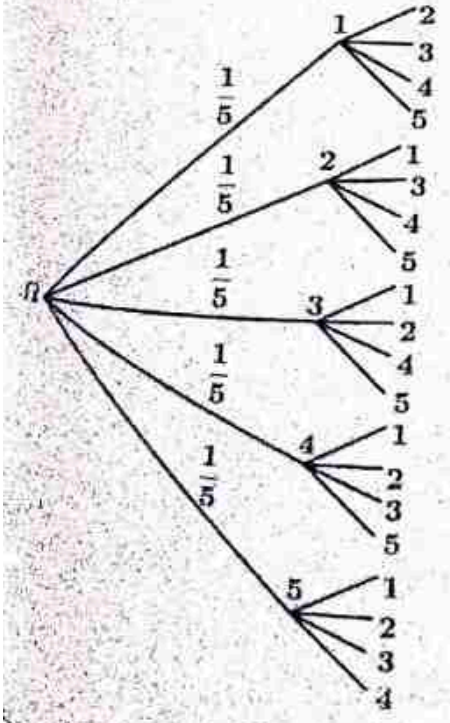
II- نقترح لعبة للمشاركة يدفع اللاعب $100\ DA$ فإذا سحب كريتين تحملان رقمان زوجيان يكسب $200\ DA$ وإذا سحب كريتين تحملان رقمان احدهما فردي والأخر زوجي يكسب $150\ DA$ وإذا سحب كريتين تحملان رقمان فرديان يكسب $50\ DA$

- عين قيم الربح.

- هل اللعبة في صالح اللاعب؟ علل إجابتك

الحل

1- شجرة الاحتمالات



عدد الإمكانيات: 20

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$$

$$p(x^2 - 3x + 2) = p(x=1) + p(x=2)$$
$$= \frac{12}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20}$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3$$
$$\Delta < 0$$

لا يوجد حلول للمعادلة

$$p(x^2 + x + 1 = 0) = 0$$

-II

- تعيين قيم الربح

الربح يساوي الكسب ناقص الدفع

$200 - 100 = 100$ الكرتان تحملان رقمين زوجيين

$150 - 100 = 50$ احدى الكريتين تحمل رقما فرديا والأخرى رقما زوجيا

$50 - 100 = -50$ تحملان رقمان فرديان

إذن قيم الربح هي: $\{-50; 50; 100\}$

ليكن y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل علبة سحب ربح اللاعب

y_i	-50	50	100
$p(y=y_i)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i . p(y=y_i)$$
$$= -50\left(\frac{6}{20}\right) + 50\left(\frac{12}{20}\right) + 100\left(\frac{2}{20}\right)$$
$$= \frac{-300+600+200}{20}$$
$$= \frac{500}{20} = 25$$

بما أن $E(Y) > 0$

فإن اللعبة في صالح اللاعب

2

$$p(A) = \frac{6}{20}$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{6}{20} = \frac{14}{20}$$

$$p(B) = \frac{12}{20}$$

$$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{12}{20} = \frac{8}{20}$$

$$p(C) = \frac{2}{20}$$

$$p(D) = \frac{12}{20}$$

$$p(A \cap B) = \frac{4}{20}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$= \frac{6}{20} + \frac{12}{20} - \frac{4}{20} = \frac{14}{20}$$

$$p(C \cap D) = \frac{2}{20}$$

-3

أ. قيم المتغير العشوائي الممكنة

$$x \in \{0; 1; 2\}$$

ب. قانون الاحتمال

x	0	1	2
$p(x=x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$

- حساب $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i . p_i$$
$$= 0\left(\frac{2}{20}\right) + \left(\frac{12}{20}\right) + 2\left(\frac{6}{20}\right) = \frac{24}{20}$$
$$E(X) = \frac{6}{5}$$

- الاستنتاج

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$\Delta = 9 - 4(1)(2) = 1$$
$$\sqrt{\Delta} = 1$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$

98. تمرين رقم 26

اليوتيوب: درس شجرة الاحتمالات للثانية و الثالثة بشرح مفصل و دقيق (نسخة 2022 روووعة)

يحتوي كيس على 9 كريات منها كريتين سوداوتين و 3 كريات بيضاء و4 حمراء (الكريات متماثلة) نسحب كريتين على التوالي أ- بإرجاع ، ب- دون إرجاع

1- شكل شجرة الاحتمالات في كل نوع من السحب

2- احسب احتمال الحوادث A ، C ، D

A: " سحب كريتين من نفس اللون "

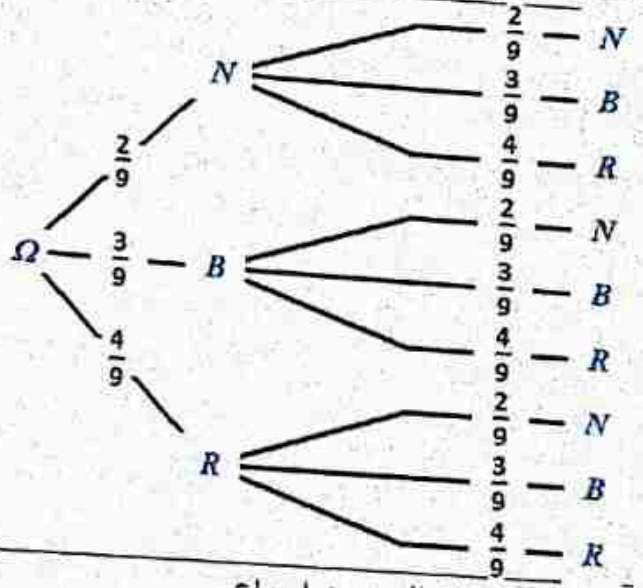
C: "سحب كريتين مختلفتين في اللون "

D: "سحب كرة حمراء على الأكثر"

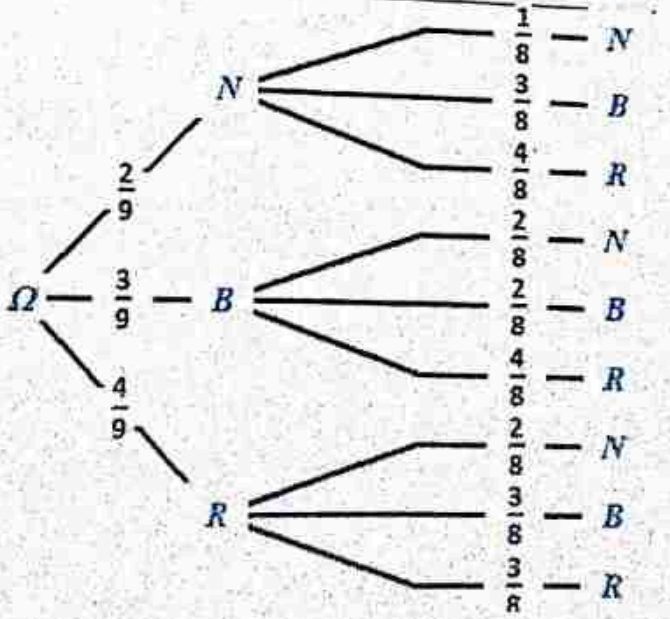
1- تشكيل شجرة الاحتمالات

الحل

السحب على التوالي بإرجاع



السحب على التوالي دون إرجاع



2- حساب الاحتمالات

أ- في حالة السحب على التوالي بإرجاع

$$p(A) = p(N \cap N) + p(B \cap B) + p(R \cap R)$$
$$= \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$$
$$= \frac{29}{81}$$
$$p(A) + p(C) = 1$$
$$p(C) = 1 - p(A)$$
$$= \frac{52}{81}$$
$$p(D) = 1 - p(R \cap R)$$
$$p(D) = 1 - \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{65}{81}$$

ب- في حالة السحب على التوالي دون إرجاع

$$p(A) = p(N \cap N) + p(B \cap B) + p(R \cap R)$$
$$p(A) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8}$$
$$p(A) = \frac{20}{72}$$
$$p(A) + p(C) = 1$$
$$p(C) = 1 - p(A)$$
$$= \frac{52}{72}$$
$$p(D) = 1 - p(R \cap R)$$
$$p(D) = 1 - \frac{4}{9} \times \frac{3}{8}$$
$$= \frac{60}{72}$$

99. تمرين رقم 27

اليوتيوب: شجرة الامكانيات في الاحتمالات للثانية ثانوي بشرح مفصل مع كل الأ المتعلقة بها

يحتوي كيس على خمس كريات منها ثلاث كريات بيضاء (B) وكريتين سوداوتين (N) كلها متماثلة نسحب كريتين على التوالي دون إرجاع

1- شكّل شجرة الإمكانيات

2- ما هو عدد إمكانيات السحب؟

3- احسب احتمال الحوادث التالية:

A: " سحب كريتين من نفس اللون "

B : "سحب كرة بيضاء وكرة سوداء"

C: "سحب كرة بيضاء ثم كرة سوداء"

D: "سحب كرة سوداء على الأكثر"

E: "سحب كرة سوداء على الأقل"

B:" ظهور رقمين مجموعهما أكبر تماما من 7"
C:" ظهور رقمين اولين"
D:" ظهور رقمين أحدهما فردي والآخر زوجي"
احسب مايلي:
$p(A)$ ، $p(\overline{A})$ ، $p(B)$ ، $p(\overline{B})$ ، $p(C)$ ،
$p(D)$ ، $p(\overline{D})$ ، $p(A \cap B)$ ، $p(A \cup B)$ ،
$p(A \cap C)$ ، $p(\overline{B} \cap \overline{D})$

الحل

1- تعيين مجموعة الامكانيات

النرد 1 / النرد 2	1	2	3	4	5	6
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

عدد الإمكانيات: 36

2- حساب احتمالات الحوادث

$$p(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

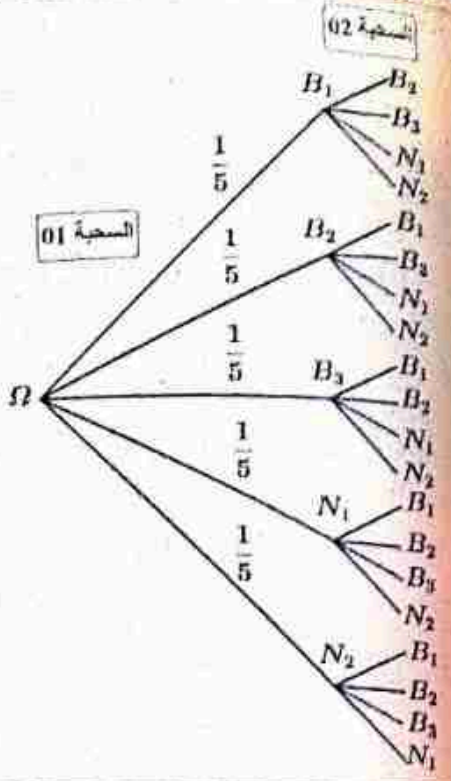
$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$
$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{9}{36}$$
$$p(\overline{A}) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$p(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$
$$p(\overline{B}) = 1 - p(B)$$
$$= 1 - \frac{15}{36}$$
$$p(\overline{B}) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$p(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

الحل

1- تشكيل شجرة الاحتمالات



2- حساب عدد امكانيات السحب

$$5 \times 4 = 20$$

3- حساب احتمالات الحوادث

$$p(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$
$$p(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$
$$p(C) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$
$$p(D) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$
$$p(E) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

100. تمرين رقم 28

الموضوع: مراجعة شاملة الاحتمالات للثانية ثانوي تحضيرا للفروض و الاختبارات(تمرين فيه افكار خرافية)

زهرتي نرد غير مزيفتين لونهما مختلفان وأوجه كل منهما من 1 إلى 6 نرمي هذين النردين ونسجل الرقمين الذين يظهران على الوجهين العلويين.
1- عين على شكل جدول مجموعة الإمكانيات
2- لتكن الحوادث التالية:
A:" ظهور رقمين فرديين "

$$p(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$p(D) + p(\overline{D}) = 1$$

$$p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - \frac{18}{36}$$

$$p(\overline{D}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$p(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{9}{36} + \frac{15}{36} - \frac{3}{36}$$

$$p(A \cup B) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$p(A \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$p(\overline{B} \cap \overline{D}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

101. تمرين رقم 29

الموضوع: مراجعة شاملة في الاحتمالات للسنة الثانية ثانوي (تمرين رقم 29 من 101 تمرين وعلمك مكلش بروفيسور شوقي)

كيس يحتوي على كرتين حمراوين، كرة بيضاء وثلاث كرات سوداء

تسحب كرتين من الكيس كما يلي:

أ- كرتين على التوالي بإرجاع.

ب- كرتين على التوالي بدون إرجاع.

جـ- كرتين في آن واحد (دفعة واحدة)

1- مثل النتائج باستعمال جدول.

2- ما هي عدد الحالات الممكنة لكل سحب (سحب الإمكانيات)؟

3-ما احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون

4- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة.

أ- عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X في كل نوع من السحب

ب- احسب أمله الرياضياتي والتباين في كل حالة والانحراف المعياري.

الحل

1- جدول يمثل النتائج

السحبة 1 / السحبة 2	R_1	R_2	B	N_1	N_2	N_3
R_1	$(R_1;R_1)$	$(R_2;R_1)$	$(B;R_1)$	$(N_1;R_1)$	$(N_2;R_1)$	$(N_3;R_1)$
R_2	$(R_1;R_2)$	$(R_2;R_2)$	$(B;R_2)$	$(N_1;R_2)$	$(N_2;R_2)$	$(N_3;R_2)$
B	$(R_1;B)$	$(R_2;B)$	$(B;B)$	$(N_1;B)$	$(N_2;B)$	$(N_3;B)$
N_1	$(R_1;N_1)$	$(R_2;N_1)$	$(B;N_1)$	$(N_1;N_1)$	$(N_2;N_1)$	$(N_3;N_1)$
N_2	$(R_1;N_2)$	$(R_2;N_2)$	$(B;N_2)$	$(N_1;N_2)$	$(N_2;N_2)$	$(N_3;N_2)$
N_3	$(R_1;N_3)$	$(R_2;N_3)$	$(B;N_3)$	$(N_1;N_3)$	$(N_2;N_3)$	$(N_3;N_3)$

2- عدد الحالات الممكنة

عدد الإمكانيات للسحب على التوالي بإرجاع 36

عدد الإمكانيات للسحب على التوالي دون إرجاع30

عدد الإمكانيات للسحب في آن واحد 15

3- احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون

- الحادثة "A" سحب كرتين من نفس اللون على التوالي بإرجاع $p(A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

- الحادثة "B" سحب كرتين من نفس اللون على التوالي دون إرجاع $p(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

- الحادثة "C" سحب كرتين من نفس اللون في آن واحد $p(C) = \frac{4}{15}$

4-أ- قانون الاحتمال

قيم المتغير العشوائي الممكنة $x \in \{0;1;2\}$

السحب على التوالي بإرجاع

x_i	0	1	2
$p(x=x_i)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$

السحب على التوالي دون إرجاع

x_i	0	1	2
$p(x=x_i)$	$\frac{6}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{6}{30}$

السحب على التوالي في آن واحد

x_i	0	1	2
$p(x=x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$

حساب الأمل الرياضياتي والتباين والانحراف

كيفية السحب بارجاع

حساب الأمل الرياضياتي

$$E(x)=\sum_{i=1}^{3}x_i.p_i=0\left(\frac{9}{36}\right)+1\left(\frac{18}{36}\right)+2\left(\frac{9}{36}\right)$$
$$=1$$

حساب التباين

$$V(x)=\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-E(x)\right)^2.p_i$$
$$=(0-1)^2\left(\frac{9}{36}\right)+(1-1)^2\left(\frac{18}{36}\right)+(2-1)^2\left(\frac{9}{36}\right)$$
$$V(x)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

حساب الانحراف

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=0.7$$

حالة السحب دون ارجاع

حساب الأمل الرياضياتي

$$E(x)=\sum_{i=1}^{3}x_i.p_i$$
$$E(x)=0\left(\frac{6}{30}\right)+1\left(\frac{18}{30}\right)+2\left(\frac{6}{30}\right)$$
$$=\frac{18}{30}+\frac{12}{30}$$
$$=1$$

حساب التباين

$$V(x)=\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-E(x)\right)^2.p_i$$
$$=(0-1)^2\left(\frac{6}{30}\right)+(1-1)^2\left(\frac{18}{30}\right)+(2-1)^2\left(\frac{6}{30}\right)$$
$$V(x)=\frac{6}{30}+\frac{6}{30}=\frac{12}{30}=\frac{6}{15}$$

حساب الانحراف

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{6}{15}}=0.63$$

حالة السحب في آن واحد

حساب الأمل الرياضياتي

$$E(x)=\sum_{i=1}^{3}x_i.p_i=\frac{9}{15}+\frac{6}{15}=1$$

حساب التباين

$$V(x)=\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-E(x)\right)^2.p_i$$
$$=(0-1)^2\left(\frac{3}{15}\right)+(1-1)^2\left(\frac{9}{15}\right)+(2-1)^2\left(\frac{3}{15}\right)=\frac{6}{15}$$

حساب الانحراف

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{6}{15}}$$