BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

kimou.

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

3e Année Secondaire : Mathématiques

الجزء 2

سلسلة هبـــاج

الرياضيـــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمـــاذج للبكالوريا

الجزء الثاني

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي ـ رياضيات ـ علوم تجريبية

الإشتقاقيـــة

العدد المشتق و الدالة المشتقة :

تعريف : f دالة معرفة على مجال I جزئي من IR . يشمل العددان a و $a+h$ حيث $h \in R$

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a إذا و فقط إذا كانت للنسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ عندما يؤول h إلى 0 نهاية محدودة .

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بـــ $f'(a)$

ملاحظة (1) يمكن كتابة النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ بوضع $x = a+h$ فإن $h = x-a$

إذن : $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ملاحظة (2) : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و دالتها المشتقة الأولى . f' معرفة بـــ : $f' : x \longmapsto f'(x)$

مثـــال : $f(x) = x^2 + 1$

ليكن a عدد حقيقي كيفي . هل f قابلة للاشتقاق عند a ؟

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{x^2+1-a^2-1}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} (x+a)$$
$$= \lim_{x \to a} a+a$$
$$= 2a$$

بما أن $2a \in IR$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و $f'(a) = 2a$

نتيجة : الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة $f' : a \longmapsto 2a$ و خاصة $f' : x \longmapsto 2x$

إذن : $f'(x) = 2x$

التفسير الهندسي للعدد المشتق

f دالة معرفة على مجال I . (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 حيث $x_0 \in I$ فإن المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(x_0 ; f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته $y = f'(x_0)[x - x_0] + f(x_0)$

المشتقات من الدرجة n ($n \in IN^*$)

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة الأولى . إذا قبلت الدالة f' بدورها الاشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة الأولى تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بـــ f''

إذن بهذه الطريقة يمكن تعريف دوال مشتقة من الدرجة 3 ؛ 4 ؛ 5 .... و نرمز لها بـــ f''' ؛ f'''' و عامة $f^{(n)}$

مثال : $f(x) = x^4$ إذن : $f'(x) = 4x^3$

و $f''(x) = 12x^2$

و $f'''(x) = 24x$

و $f^{(4)}(x) = 24$

نشاط (1)

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة f' معرفة بـــ $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

نعرف الدالة h على IR بـــ $h(x) = f(2x - 1)$

أحسب $h'(x)$ دون تعيين $h(x)$

الحـــل :

لنعرف الدالة u كمايلي : $u : x \longmapsto 2x - 1$ منه $u' : x \longmapsto 2$

إذن : $h(x) = f(2x - 1) = f(u(x)) = f \circ u(x)$

منه : $h'(x) = u'(x) \times (f'(u(x)))$

$$= 2 \times f'(2x - 1)$$

$$= 2 \times \frac{1}{(2x - 1)^2 + (2x - 1) + 1}$$

$$= \frac{2}{4x^2 - 4x + 1 + 2x - 1 + 1}$$

$$= \frac{2}{4x^2 - 2x + 1}$$

إتجاه تغير دالة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

إذا كان $f'(x) > 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f متزايدة تماما على I

إذا كان $f'(x) < 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على I

إذا كان $f'(x) = 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f ثابتة على I

القيم الحدية المحلية لدالة على مجال

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0

إذا كان من أجل كل x من المجال I : $f(x) \leq f(x_0)$ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى محلية على المجال I للدالة f

إذا كان من أجل كل x من المجال I : $f(x) \geq f(x_0)$ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى محلية على المجال I للدالة f

مبرهنة :

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل العدد x_0

إذا كان $f'(x_0) = 0$ و f' تغير إشارتها حول x_0 فإن $f(x_0)$ هي قيمة حدية محلية للدالة f على المجال I

تفسير :

$f'(x_0) = 0$ و f' تغير إشارتها إذن لدينا الحالتين التاليتين :

$x \in I$		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

f' تغير إشارتها من - إلى +

أو

$x \in I$		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

f' تغير إشارتها من + إلى -

إذن : جدول التغيرات يكون كالتالي :

$x \in I$		x_0	
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

قيمة حدية صغرى

أو

$x \in I$		x_0	
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

قيمة حدية عظمى

مشتقات بعض الدوال المركبة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

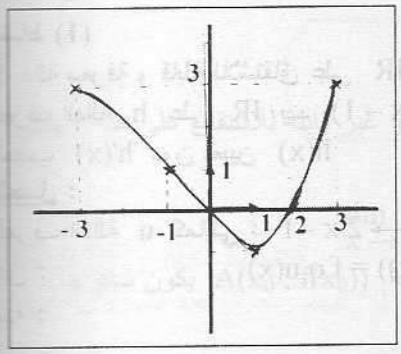
مشتقة الدالة $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ هي $x \longmapsto u'(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$ حيث $u(x) > 0$

مشتقة الدالة $x \longmapsto [u(x)]^n$ هي $n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$: n عدد طبيعي أكبر من 1

مشتقة الدالة $x \longmapsto \sin(u(x))$ هي $u'(x) \times \cos(u(x))$

مشتقة الدالة $x \longmapsto \cos(u(x))$ هي $-u'(x) \times \sin(u(x))$

نشاط :



إليك التمثيل البياني لدالة g قابلة للاشتقاق على المجال [3 ; 1-]

1 ــ أرسم جدول تغيرات الدالة g على المجال [3 ; 1-] ثم إستنتج إشارة g(x) على المجال [3 ; 1-]

2 ــ لنعتبر دالة عددية f على المجال [3 ; 1-] معرفة بـــ $f(x) = [g(x)]^2$

أحسب f'(x) بدلالة g(x) و g'(x) ثم إستنتج إشارة f'(x)

الحـــل :

1 ــ جدول تغيرات الدالة g على [3 ; 1-]

من منحنى الدالة g نلاحظ أن : g متناقصة على المجال [1 ; 1-] و متزايدة على المجال [3 ; 1] و $g(-1) = 1$ ؛ $g(1) = -1$ ؛ $g(3) = 3$ ؛ $g(0) = 0$ و $g(2) = 0$

منه : جدول التغيرات التالي :

x	-1		0		1		2		3
g'(x)		−	0	+					
g(x)	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	3

نتيجة : جدول إشارة g'(x) :

x	-1		1		3
g'(x)		−	0	+	

جدول إشارة g(x) :

x	-1		0		2		3
g(x)		+	0	−	0	+	

2 ــ لدينا : $f(x) = [g(x)]^2$

إذن : $f'(x) = 2 \times g'(x) \times g(x)$

إذن : إشارة f'(x) هي إشارة $g'(x) \times g(x)$ كمايلي :

x	-1		0		1		2		3
g'(x)		−		−	0	+		+	
g(x)		+	0	−		−	0	+	
$g'(x) \times g(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

خلاصة : جدول إشارة f'(x) على المجال [3 ; 1-] :

x	-1		0		1		2		3
f'(x)		−	0	+	0	−	0	+	

التقريب التآلفي لدالة :

f دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل العدد x

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x فإن يوجد دالة عددية ε حيث من أجل كل عدد حقيقي h يحقق أن $(x + h) \in I$ لدينا :

$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + h \varepsilon(h)$ مع $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ أي من أجل h قريب من الصفر فإن :

$f(x + h) = f(x) + h f'(x)$ لأن $h \times \varepsilon(h) = 0$

في هذه الحالة العدد $f(x) + h f'(x)$ يسمى التقريب التآلفي لـــ $f(x + h)$ من أجل h يقترب من 0 مرفق بالدالة f

ملاحظة : إذا وضعنا $\Delta_x = (x + h) - x$ و $\Delta_y = f(x + h) - f(x)$ فإن المساواة $f(x + h) = f(x) + h f'(x) + h \varepsilon(h)$ تصبح $f(x + h) - f(x) = h f'(x) + h \varepsilon(h)$

أي : $\Delta_y = f'(x) \Delta_x + \varepsilon(\Delta_x) . \Delta_x$ لأن $\left.\begin{matrix} \Delta_y = f(x + h) - f(x) \\ \Delta_x = (x + h) - x = h \end{matrix}\right\}$

إذن : $\Delta y = f'(x) \Delta_x$ لما Δ_x يقترب من 0

نضع إصطلاحا الصياغة التفاضلية التالية : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أي $dy = f'(x)\, dx$

إذن تصفة عامة الرمز $\frac{df}{dx}$ يستعمل بدلا من $f'(x)$

مثلا : $\frac{d^2 f}{dx^2}$ بدلا من $f''(x)$ و $\frac{d^n f}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}(x)$

طريقة أولر لتقريب دالة

الهدف من طريقة أولر هو البحث عن صور أعداد حقيقية متتابعة حيث يكون الفرق بينها عدد حقيقي h يؤول إلى 0 و ذلك بتطبيق التقريب التألفي لدالة f كمايلي :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتول I يشمل العدد x_0 و h عدد حقيقي يؤول إلى 0

نضع : $x_1 = x_0 + h$ ؛ $x_2 = x_1 + h$ ؛ $x_3 = x_2 + h$ ؛ ..... $x_n = x_{n-1} + h$

حيث كل الأعداد x_1 ؛ x_2 ؛ x_3 ؛ ..... x_n تنتمي إلى المجال I

إذن : بتطبيق التقريب التالفي للدالة f على المجال I نحصل على :

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + h\, f'(x_0)$$
$$f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1) + h\, f'(x_1)$$
$$f(x_3) = f(x_2 + h) = f(x_2) + h\, f'(x_2)$$
$$\vdots$$
$$f(x_n) = f(x_{n-1} + h) = f(x_{n-1}) + h\, f'(x_{n-1})$$

بهذه الطريقة يمكن تعيين النقط $A_0(x_0 ; f(x_0))$ ؛ $A_1(x_1 ; f(x_1))$ ؛ $A_2(x_2 ; f(x_2))$ ؛ ..... $A_n(x_n ; f(x_n))$ و عند الربط بين هذه النقط نحصل على تمثيل بياني تقريبي لمنحنى الدالة f على المجال I كلما إقترب h من 0

ملاحظة : العدد h يسمى الخطوة

نشاط :

f دالة تحقق $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

باستعمال طريقة أولر من أجل الخطوة $h = 0,5$ أحسب $f(0,5)$ ؛ $f(1)$ ؛ $f(1,5)$

الحـــل :

التقريب التألفي للدالة f هو من الشكل : $f(x + h) = f(x) + h\, f'(x)$

و من أجل $h = 0,5$ نحصل على : $f(x + 0,5) = f(x) + h\, f'(x)$

بما أن $f'(x) = \sqrt{x}$ نعتبر المجال $[0 ; 2]$

من أجل $x = 0$ نحصل على : $f(0 + 0,5) = f(0) + 0,5\sqrt{0}$

أي : $f(0,5) = 1 + 0 = 1$

من أجل $x = 0,5$ نحصل على : $f(0,5 + 0,5) = f(0,5) + 0,5\sqrt{0,5}$

أي : $f(1) = 1 + 0,5\sqrt{0,5} \approx 1,35$

من أجل $x = 1$ نحصل : $f(1 + 0,5) = f(1) + 0,5\sqrt{1}$

أي : $f(1,5) = 1,35 + 0,5 = 1,85$

إذن النقط $(1 ; 0)$ ؛ $(0,5 ; 1)$ ؛ $(1 ; 1,35)$ ؛ $(1,5 ; 1,85)$ هي نقط تقريبية من منحنى الدالة f

الدالة sin

الدالة $x \longmapsto \sin x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة $x \longmapsto \cos x$ و من خواصها الأساسية مايلي :

من أجل كل x من IR فإن $(x + 2\pi) \in IR$ و $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

إذن : الدالة sin دورية و دورها 2π إذن يكفي دراستها على المجال $]-\pi ; \pi]$

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $\sin(-x) = -\sin x$

إذن الدالة sin فردية أي منحناها يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر

جدول التغيرات على المجال $]-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

الدالة cos

الدالة $x \longmapsto \cos x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة $x \longmapsto -\sin x$

و من خواصها الأساسية :

من أجل كل x من IR فإن $(x + 2\pi) \in IR$ و $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

إذن الدالة cos دورية و دورها 2π إذن يكفي دراستها على المجال $]-\pi ; \pi[$

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $\cos(-x) = \cos x$

إذن الدالة cos زوجية أي منحناها يقبل حامل محور التراتيب كمحور تناظر

جدول التغيرات على المجال $]-\pi ; \pi[$

x	$-\pi$		0		π
$-\sin x$		+	0	−	
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

الدالة tan

الدالة $x \longmapsto \tan x$ معرفة من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ حيث k عدد صحيح لأن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

إذن معرفة من أجل $\cos x \neq 0$

و من خواصها الأساسية :

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن $\tan(x + \pi) = \tan x$

إذن الدالة tan دورية و دورها π إذن يكفي دراستها على المجال $]-\pi ; 0[$

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن $\tan(-x) = -\tan x$

إذن الدالة tan فردية منه منحناها يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن الدالة tan قابلة للاشتقاق عند x و دالتها المشتقة $x \longmapsto 1 + \tan^2 x$ إذن موجبة تماما .

جدول التغيرات على المجال $]-\pi ; \pi[$

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$1 + \tan^2 x$		+	‖	+	‖	+	
$\tan x$	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0

$$\tan(-\pi) = \frac{\sin(-\pi)}{\cos(-\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan(\pi) = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -\pi/2} \cos x = 0^-$ لأن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -\pi/2} \tan x = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin(-\pi/2)}{y} = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\pi/2} \tan x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin(-\pi/2)}{y} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \tan x = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin(\pi/2)}{y} = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \pi/2} \tan x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{\sin(\pi/2)}{y} = -\infty$

نشاط :

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin^2 x$ و (C) منحناها في معلم متعامد $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ــ بين أن الدالة f دورية و دورها π

2 ــ بين أن حامل محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C)

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi/2]$

4 ــ أرسم المنحنى (C) على $[0 ; \pi/2]$ ثم على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$

الحـــل :

1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(x + \pi) \in IR$ و $\sin^2(x + \pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$

إذن : $f(x + \pi) = f(x)$ منه f دورية و دورها π

2 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$

إذن : $f(-x) = f(x)$ منه f دالة زوجية إذن : محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C)

3 ــ f معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0 ; \pi/2]$ و دالتها المشتقة $f'(x) = 2 \cos x \sin x$

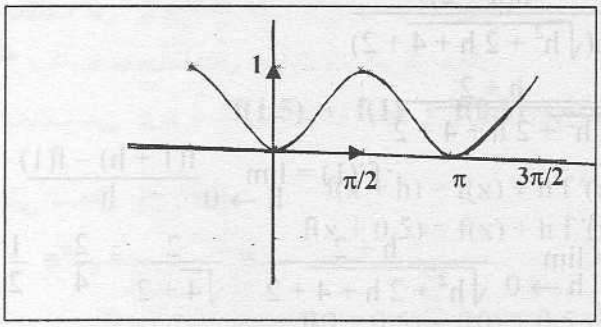
إذن : $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]0 ; \pi/2[$ لأن $\cos x > 0$ و $\sin x > 0$

منه جدول التغيرات :

x	0		$\pi/2$
f'(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	1

4 ــ طريقة الرسم :

- ✓ نرسم جزء المنحنى (C) على المجال $[0 ; \pi/2]$
- ✓ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب (دالة زوجية) نرسم المنحنى على $[-\pi/2 ; 0]$
- ✓ بإجراء سحب المنحنى على المجال $[-\pi/2 ; \pi/2]$ بخطوة قدرها π (الدالة دورية و دورها π) نحصل على المنحنى (C) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$



تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

1 ــ تحقق أن من أجل كل h غير معدوم يكون : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$

2 ــ إستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 ثم عين f '(1)

الحـــل ــ 1

1 ــ من أجل كل h غير معدوم فإن :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{(1+h)^2+3}-\sqrt{(1)^2+3}}{h}$$

$$=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}$$

$$=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}\times\frac{\sqrt{h^2+2h+4}+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$=\frac{h^2+2h+4-4}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$

$$=\frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$

$$=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

2 ــ نعلم أن : $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

إذن : $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\frac{2}{\sqrt{4}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

تحقيق : $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

إذن : $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}$

التمرين ــ 2

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x)=|x|$. أثبت أن f لا تقبل الاشتقاق عند 0

الحـــل ــ 2

ليكن $h\in IR$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

نميز حالتين كمايلي :

الأولى : $\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\frac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\frac{h}{h}=1$ لأن $\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}|h|=h$

الثانية : $\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}\frac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}\frac{-h}{h}=-1$ لأن $\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}|h|=-h$

نتيجة : النسبة $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ لا تقبل نهاية لما يؤول h إلى 0

إذن : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0

التمرين ــ 3

f دالة قابلة للاشتقاق عند (-1) حيث $f'(-1) = 2$

علما أن المنحنى الممثل للدالة f في معلم يمر بالنقطة A(-1 ; -3) ، أكتب معادلة لمماس هذا المنحنى عند النقطة A

الحـل ــ 3

النقطة $A(-1 ; -3)$ تنتمي إلى منحنى الدالة f إذن : $f(-1) = -3$

نعلم أن معادلة مماس المنحنى عند نقطة ذات الفاصلة (-1) تكتب من الشكل :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

أي : $y = 2(x + 1) + (-3)$

أي : $y = 2x - 1$ و هي معادلة المماس المطلوبة .

التمرين ــ 4

(C) منحنى بياني لدالة f معرفة على IR و قابلة للإشتقاق عند 0

المستقيم (T) ذو المعادلة $y = 2 - 3x$ هو مماس للمنحنى (C) عند النقطة A(0 ; 2)

1 ــ حدد f(0) ؛ f'(0)

2 ــ فسر هندسيا النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ ثم برر وجودها و عين قيمتها

الحـل ــ 4

1 ــ النقطة $A(0 ; 2)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذن : $f(0) = 2$

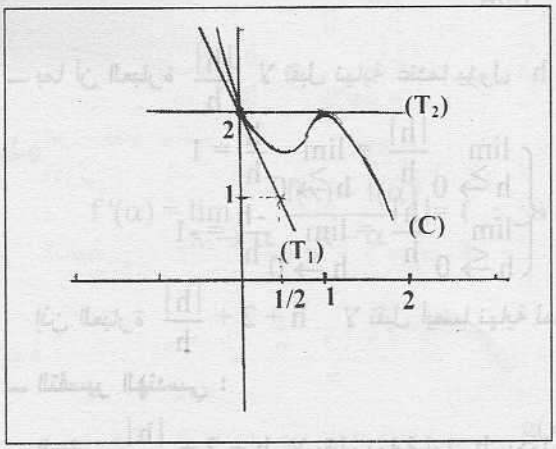
مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 له المعادلة $y = 2 - 3x$ أي ميله هو -3 منه $f'(0) = -3$

2 ــ النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ تمثل ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 لأنها تكتب من الشكل

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (حيث $f(0) = 2$)

إذن : هذه النهاية موجودة لأن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و قيمتها $f'(0) = -3$ $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x} = f'(0) = -3$

التمرين ــ 5



إليك التمثيل البياني لدالة f و المستقيمات (T_1) و (T_2) مماسات له

1 ــ حدد القيم التالية : f(0) ؛ f(1) ؛ f'(0) ؛ f'(1)

2 ــ أكتب معادلة لكل من المستقيمين (T_1) و (T_2)

الحـل ــ 5

1 ــ من منحنى الدالة f نلاحظ أن النقط $A(0 ; 2)$ و $B(1 ; 2)$ تنتمي إلى المنحنى (C) للدالة f إذن : $f(0) = 2$ و $f(1) = 2$

نلاحظ أيضا أن مماس المنحنى عند النقطة $B(1 ; 2)$ يوازي محور الفواصل إذن ميله معدوم أي $f'(1) = 0$

نلاحظ أيضا أن مماس المنحنى عند النقطة $A(0 ; 2)$ مائل بزاوية θ

حيث $\tan \theta = \frac{-1}{1/2} = -2$

منه ميل المماس هو $f'(0) = -2$

نتيجة : $f'(1) = 0$ و $f'(0) = -2$

2 ــ (T_1) مماس لمنحنى الدالة f عند $A(0 ; 2)$ إذن معادلته :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = -2x + 2$

(T_2) مماس لمنحنى الدالة f عند $B(1 ; 2)$ إذن معادلته $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ أي $y = 2$ لأن $f'(1) = 0$

التمرين ــ 6

(C) تمثيل بياني لدالة f يشمل النقطة A(-2 ; 3)

(T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A يوازي المستقيم ذو المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$

أكتب معادلة المستقيم (T)

الحـل ــ 6

المماس (T) يوازي المستقيم ذو المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$ إذن لهما نفس معامل التوجيه الذي يساوي 3/2 (a/b - من أجل معادلة مستقيم من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $b \neq 0$)

إذن : $f'(-2) = 3/2$

من جهة أخرى النقطة $A(-2 ; 3)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذن : $f(-2) = 3$

منه معادلة المماس (T) هي : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

أي : $y = \frac{3}{2}(x+2) + 3$

أي : $y = \frac{3}{2}x + 6$

تحقيق : هل $A(-2\,;\,3)$ تنتمي إلى (T) ؟

$\frac{3}{2}(-2) + 6 = -3 + 6 = 3$ محقق .

التمرين ــ 7

(C) منحنى الدالة f المعرفة على R بـ $f(x) = x^2 + |x-1|$

1 ــ أثبت أن من أجل $h \neq 0$ فإن $\frac{f(1+h)-1}{h} = h + 2 + \frac{|h|}{h}$

2 ــ هل العبارة $\frac{f(1+h)-1}{h}$ تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 ؟

3 ــ أعط تفسيرا هندسيا للجواب عن السؤال (2) ثم أكتب معادلتي نصفي المماسين للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1

الحـل ــ 7

1 ــ من أجل $h \neq 0$ لدينا :

$$\frac{f(1+h)-1}{h} = \frac{(1+h)^2 + |1+h-1| - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + 1 + |h| - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + |h|}{h}$$

$$= \frac{h^2}{h} + \frac{2h}{h} + \frac{|h|}{h}$$

$$= h + 2 + \frac{|h|}{h}$$

2 ــ بما أن العبارة $\frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 لأن :

النهايتين مختلفتين $\begin{cases} \lim\limits_{h \geq 0} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \geq 0} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h \leq 0} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \leq 0} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$

إذن العبارة $h + 2 + \frac{|h|}{h}$ لا تقبل أيضا نهاية لما يؤول h إلى 0 .

3 ــ التفسير الهندسي :

العبارة $h + 2 + \frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية لما h يؤول إلى 0 هذا يعني أن العبارة $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ لا تقبل نهاية لما h يؤول إلى 0

أي الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1

و لكن : $\lim\limits_{h \geq 0} h + 2 + \frac{|h|}{h} = 3$ لأن $\lim\limits_{h \geq 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$

و $\lim\limits_{h \leq 0} h + 2 + \frac{|h|}{h} = 1$ لأن $\lim\limits_{h \leq 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -1$

أي الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين 1 و عددها المشتق هو 3

و تقبل الاشتقاق على يسار 1 و عددها المشتق هو 1

إذن المنحنى (C) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 أحدهما على اليمين و ميله 3 و الآخر على اليسار و ميله 1 معادلاتهما على الترتيب :

على اليمين : $y = 3(x-1) + f(1)$ أي $y = 3(x-1) + 1$ أي $y = 3x - 2$

على اليسار : $y = l(x - 1) + f(1)$ أي $y = x - 1 + 1$ أي $y = x$

التمرين ــ 8

f دالة معرفة على $]-2 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \sqrt{x+2}$

1 ــ أحسب $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h)}{h}$

2 ــ هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين (2 -) ؟ فسر هندسيا

الحـــل ــ 8

1 ــ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{-2+h+2}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}}$$
$$= +\infty$$

2 ــ بما أن : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = +\infty$ (حسب السؤال الأول) لأن $f(-2) = 0$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 2 -

هندسيا : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين 2 - يوازي حامل محور التراتيب

التمرين ــ 9

I مجال جزئي من R يشمل العدد α . f دالة معرفة على I و قابلة للاشتقاق عند α حيث $f'(\alpha) = \ell$ مع $\ell \in R$

نعتبر الدالة g معرفة على المجال I بـــ

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} & : x \neq \alpha \\ \ell & : x = \alpha \end{cases}$$

1 ــ أثبت أن g مستمرة عند α

2 ــ من أجل $x \in I - \{\alpha\}$ أكتب f(x) بدلالة x و g(x)

3 ــ أحسب $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

الحـــل ــ 9

1 ــ الدالة f قابلة للاشتقاق عند α و $f'(\alpha) = \ell$ إذن حسب التعريف فإن : $f'(\alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \ell$

لكن $g(x) = \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ إذن : $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell = g(\alpha)$ إذن : الدالة g مستمرة عند α

2 ــ من أجل $x \in I - \{\alpha\}$ لدينا : $g(x) = \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

أي : $(x - \alpha)\, g(x) = f(x) - f(\alpha)$

أي : $f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)\, g(x)$

3 ــ حسب السؤال (2) فإن : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} f(\alpha) + (x - \alpha)\, g(x)$

$= \lim\limits_{x \to \alpha} f(\alpha) + (x - \alpha)\, \ell$ لأن $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$

$= f(\alpha)$ لأن $\lim\limits_{x \to \alpha} (x - \alpha)\, \ell = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$ إذن : f دالة مستمرة عند α

التمرين ــ 10

لتكن f دالة معرفة على R بـــ $f(x) = 3x + |x^2 - 4|$

1 ــ تحقق أن f مستمرة عند 2 -

2 ــ برهن أن من أجل $h \in]-1/2 ; 0[\cup]0 ; 1/2[$ فإن $\dfrac{f(-2+h) + 6}{h} = 3 + \dfrac{|h|}{h}(4 - h)$

3 ــ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 - ؟

الحـــل ــ 10

1 ــ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} 3x + |x^2 - 4| = -6$

$f(-2) = 3(-2) + |(-2)^2 - 4| = -6$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$ إذن f مستمرة عند 2 –

2 ــ ليكن $h \in]-1/2 ; 0[\cup]0 ; 1/2[$

$$\frac{f(-2+h)+6}{h} = \frac{3(-2+h)+|(-2+h)^2-4|+6}{h}$$

$$= \frac{-6+3h+|4-4h+h^2-4|+6}{h}$$

$$= \frac{3h+|h^2-4h|}{h}$$

$$= \frac{3h+|h|\times|h-4|}{h}$$

$$= 3 + \frac{|h|}{h} \times |h-4|$$

بما أن $h \in]-1/2 ; 0[\cup]0 ; 1/2[$ فإن $h - 4 < 0$ أي : $|h-4| = 4 - h$

منه : $\frac{f(-2+h)+6}{h} = 3 + \frac{|h|}{h}(4-h)$ و هو المطلوب

3 ــ لدينا : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-2+h)+6}{h}$ لأن $f(-2) = -6$

$= \lim\limits_{h \to 0} 3 + \frac{|h|}{h}(4-h)$ حسب السؤال (2)

إذن : نميز حالتين :

الأولى : $\lim\limits_{h \leq 0} 3 + \frac{|h|}{h}(4-h) = 3 - 1(4-0) = -1$ لأن $|h| = -h$

الثانية : $\lim\limits_{h \geq 0} 3 + \frac{|h|}{h}(4-h) = 3 + 1(4-0) = 7$ لأن $|h| = h$

نتيجة : $\lim\limits_{h \leq 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \neq \lim\limits_{h \geq 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

إذن : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 -

التمرين ــ 11

في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة التعريف للدالة ثم أحسب مشتقتها

1 ــ $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ 3 ــ $h(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

2 ــ $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ 4 ــ $\ell(x) = \sqrt{x^2+4}$

الحـــل ــ 11

1 ــ f معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

2 ــ g معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{2x - (x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

3 ــ h معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = \left(1 + \frac{0-1}{x^2}\right) \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x}\left(3 - \frac{1}{x^2}\right)$$

4 ــ ℓ معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$\ell'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

التمرين ــ 12

عين في كل حالة من الحالات التالية مشتقة الدالة f على المجال D

$f(x) = x + x\cos x$	$D = R$	ــ 1
$f(x) = \cos x \sin x$	$D = R$	ــ 2
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	$D = R^*$	ــ 3
$f(x) = \frac{1}{\sin x}$	$D =]0 ; \pi[$	ــ 4
$f(x) = \frac{\cos x}{-\cdot + \sin x}$	$D = [0 ; \pi/2[$	ــ 5
$f(x) = \cos\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right)$	$D = R$	ــ 6
$f(x) = 3x \sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right)$	$D = R$	ــ 7
$f(x) = (2x+4)^5$	$D = R$	ــ 8
$f(x) = \sqrt{x-4}$	$D =]4 ; +\infty[$	ــ 9
$f(x) = \sqrt{-2x+4}$	$D =]-\infty ; 2[$	ــ 10

الحـــل ــ 12

1 ــ $f(x) = x + x\cos x$ إذن :

$$f'(x) = 1 + 1 \times \cos x - x \sin x$$
$$= 1 + \cos x - x \sin x$$

2 ــ $f(x) = \cos x \sin x$ إذن :

$$f'(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x \times \cos x$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos 2x$$

3 ـ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ إذن : $f'(x) = \frac{(\cos x) \times x - 1 \times \sin x}{x^2}$

$= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

4 ـ $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ إذن : $f'(x) = \frac{0(\sin x) - \cos x}{\sin^2 x}$

$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

5 ـ $f(x) = \frac{\cos x}{-1 + \sin x}$ إذن : $f'(x) = \frac{-\sin x(-1 + \sin x) - (0 + \cos x)\cos x}{(-1 + \sin x)^2}$

$= \frac{\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(-1 + \sin x)^2}$

$= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(-1 + \sin x)^2}$

$= \frac{-1 + \sin x}{(-1 + \sin x)^2}$

6 ـ $f(x) = \cos\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right)$ إذن : $f'(x) = -3\left(-\sin\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right)\right)$

$= 3\sin\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right)$

7 ـ $f(x) = 3x \sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right)$ إذن : $f'(x) = 3 \times \sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right) + 3x \times \left(-\cos\left(-x + \frac{5}{\pi}\right)\right)$

$= 3\sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right) - 3x\cos\left(-x + \frac{5}{\pi}\right)$

8 ـ $f(x) = (2x + 4)^5$ إذن : $f'(x) = 2(2x + 4)^4 \times 5 = 10(2x + 4)^4$

9 ـ $f(x) = \sqrt{x - 4}$ إذن : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 4}}$

10 ـ $f(x) = \sqrt{-2x + 4}$ إذن : $f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{-2x + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{-2x + 4}}$

التمرين ـ 13

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \cos x$

1 ـ عين $f'(x)$ ؛ $f''(x)$ ؛ $f^{(3)}(x)$ ؛ $f^{(4)}(x)$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f

2 ـ إستنتج حسب قيم العدد الطبيعي n غير المعدوم عبارة $f^{(n)}(x)$

الحـل ـ 13

1 ـ
$f'(x) = -\sin x$
$f''(x) = -\cos x$
$f^{(3)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$
$f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$

2 ـ لاحظ أن من أجل $n = 5$ فإن $f^{(5)}(x) = f'(x)$ لأن $f^{(4)}(x) = f(x)$

إذن :
$f^{(6)}(x) = f''(x)$
$f^{(7)}(x) = f^{(3)}(x)$
$f^{(8)}(x) = f^{(4)}(x) = f(x)$

و منه النتيجة التالية :

- ✓ إذا كان $n = 4k$ فإن $f^{(n)}(x) = \cos x$ مع $k \in IN^*$
- ✓ إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $f^{(n)}(x) = -\sin x$ مع $k \in IN$
- ✓ إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $f^{(n)}(x) = -\cos x$ مع $k \in IN$
- ✓ إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $f^{(n)}(x) = \sin x$ مع $k \in IN$

التمرين ــ 14

من أجل كل $x \in IR^*$ نعرف الدالتين f و g كمايلي : $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

نسمي $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ المشتقتان ذات الرتبة n للدالتين f و g على الترتيب حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n يكون من أجله $f^{(n)} = g^{(n)}$

الحـــل ــ 14

لاحظ أن من أجل كل $x \in IR^*$ فإن : $g(x) = f(x) + x^2$

لنعرف الدالة h على IR^* بـــ $h(x) = x^2$

إذن : من أجل كل x من IR^* فإن $g(x) = f(x) + h(x)$

منه : من أجل كل x من IR^* فإن $g^{(n)}(x) = f^n(x) + h^{(n)}(x)$

إذن : يكون $g^{(n)} = f^{(n)}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل $x \in IR^*$: $h^{(n)}(x) = 0$

لدينا : $h'(x) = 2x$ و $h''(x) = 2$ و $h^{(3)}(x) = 0$

إذن : أصغر عدد طبيعي n يحقق $g^{(n)} = f^{(n)}$ هو $n = 3$

التمرين ــ 15

لتكن f و g دالتين معرفتين على IR بـــ $f(x) = \sin \theta x$ و $g(x) = \cos \theta x$ حيث θ عدد حقيقي غير معدوم

1 ــ بين أن $f''(x) = -\theta^2 f(x)$

2 ــ بين أن $g''(x) = -\theta^2 g(x)$

من أجل كل عددين حقيقيين a و b نضع $h(x) = a f(x) + b g(x)$

3 ــ بين أن $h''(x) = -\theta^2 h(x)$

الحـــل ــ 15

1 ــ $f(x) = \sin \theta x$ إذن : $f'(x) = \theta \cos \theta x$

منه : $f''(x) = \theta(-\theta \sin \theta x)$

أي : $f''(x) = -\theta^2 \sin \theta x$

أي : $f''(x) = -\theta^2 f(x)$ و هو المطلوب

$g(x) = \cos \theta x$ إذن : $g'(x) = -\theta \sin \theta x$

منه : $g''(x) = -\theta(\theta \cos \theta x)$

أي : $g''(x) = -\theta^2 g(x)$ و هو المطلوب

2 ــ $h(x) = a f(x) + b g(x)$ إذن : $h''(x) = a f''(x) + b g''(x)$

أي : $h''(x) = a(-\theta^2 f(x)) + b(-\theta^2 g(x))$

أي : $h''(x) = -\theta^2(a f(x) + b g(x))$

أي : $h''(x) = -\theta^2 . h(x)$ و هو المطلوب

التمرين ــ 16

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$

1 ــ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\sqrt{1 + x^2} \times f'(x) = f(x)$

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x : $(1 + x^2) f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$

الحـــل ــ 16

1 ــ من أجل كل x من IR لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}$

أي : $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

أي : $f'(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}$

أي : $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$

منه : $\sqrt{1 + x^2} \times f'(x) = f(x)$ و هو المطلوب

2 ــ لدينا من أجل كل x من IR : $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \times f'(x)$

ليكن $g(\alpha) = 0$

إذن : لما $x \in]-\infty ; \alpha[$ فإن $g(x) < 0$

لما $x = \alpha$ فإن $g(x) = 0$

لما $x \in]\alpha ; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$

منه جدول إشارة $f'(x)$ حيث $f'(x) = g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3 ــ جدول تغيرات الدالة f على IR

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين ــ 19

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ هل f تقبل قيم حدية محلية ؟

3 ــ هل f محدودة على IR ؟

الحـــل ــ 19

1 ــ التغيرات : f معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = 6x^2 + 24x = 6x(x + 4)$ و اشارتها :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$6x(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	65	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-4) = 2(-64) + 12(16) + 1 = 65$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن :

f تقبل قيمة حدية محلية عظمى عند -4 و قيمتها 65

f تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند 0 و قيمتها 1

3 ــ الدالة f ليست محدودة على IR لأن إحدى نهايتها غير منتهية

التمرين ــ 20

n عدد طبيعي غير معدوم و f دالة عددية معرفة بـــ $f(x) = x^n$

1 ــ أدرس حسب قيم n تغيرات الدالة f

2 ــ ناقش حسب قيم n و a عدد حلول المعادلة $x^n = a$ حيث a ثابت حقيقي

الحـــل ــ 20

1 ــ f وحيد حد من الدرجة n إذن معرف و قابل للاشتقاق على IR و مشتقة $f'(x) = n x^{n-1}$

إذن : f' من إشارة x^{n-1} لأن $n > 0$

نميز الحالتين التاليتين :

4 ــ $f'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2}$

لاحظ أن $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $R - \{-1\}$

إذن :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إتجاه تغير f	f متزايدة		‖		f متزايدة

5 ــ $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

$= \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{x^2}\left(-1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)$ لأن $x \in]0 ; +\infty[$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ لأن $\dfrac{1}{x^2} > 0$

لدينا : $-1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x} \geq 0$ يكافئ $\dfrac{1}{2}\sqrt{x} \geq 1$

يكافئ $\dfrac{1}{4}x \geq 1$ لأن الطرفين موجبين

يكافئ $x \geq 4$

منه جدول الاشارة التالي :

x	0		4		$+\infty$
$-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$	‖	−	0	+	
إتجاه تغير f	f متناقصة		f متزايدة		

التمرين ــ 18

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2 ــ إستنتج إشارة $f'(x)$ على IR

3 ــ أنجز جدول تغيرات الدالة f

الحـل ــ 18

1 ــ $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{12}x^3 + 3 \times \dfrac{1}{6}x^2 + 2 \times \dfrac{1}{2}x + 1$

$= \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

$f''(x) = 3 \times \dfrac{1}{3}x^2 + 2 \times \dfrac{1}{2}x + 1$

$= x^2 + x + 1$

2 ــ لندرس تغيرات الدالة $g : x \longmapsto \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$ $(g(x) = f'(x))$

لدينا : g معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$g'(x) = x^2 + x + 1$ و إشارتها :

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ إذن : لا تتعدم و تاخذ إشارة موجبة .

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$			+		
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

لدينا :

$$(f^{n+1})' = [f(x) \times f^n(x)]'$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + [f^n(x)]' \times f(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + [n f'(x) \times f^{n-1}(x)] \times f(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + n f'(x) \times f^n(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x)[1+n]$$
$$= (n+1) f'(x) \times f^n(x)$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$

حذار! $f^n(x) = [f(x)]^n$ لكن $f^{(n)}$ هي المشتقة ذات الرتبة n للدالة f

2 ــ ليكن $z \in Z - \{-1 ; 0 ; 1\}$

إذا كان $z \in IN$ فإن الخاصية محققة حسب السؤال الأول

إذا كان $z \notin IN$ نضع $z = -n$ حيث $n \in IN$

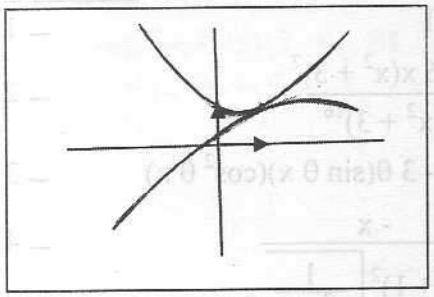
من أجل $f(x) \neq 0$ فإن : $[f^z(x)]' = [f^{-n}(x)]'$

$$= \left[\frac{1}{f^n(x)}\right]'$$
$$= \frac{0 - n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{[f^n(x)]^2}$$
$$= \frac{-n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{f^{2n}(x)}$$
$$= -n f'(x) \times f^{n-1-2n}(x)$$
$$= -n f'(x) \times f^{-n-1}$$
$$= z f'(x) \times f^{z-1}$$ لأن $z = -n$

إذن : الخاصية تبقى صحيحة من أجل $z \in Z - \{-1 ; 0 ; 1\}$

التمرين ــ 23

باستعمال حاسبة بيانية مثلنا المنحنيين اللذين معادلتيهما $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ و $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ كما يلي :



1 ــ ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

2 ــ نعرف على IR الدالتين f و g كمايلي : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

برهن أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق على IR

3 ــ أحسب f(1) ؛ f'(1) ؛ g(1) ؛ g'(1)

4 ــ تحقق من الملاحظة المصروحة في السؤال (1) ثم أكتب معادلة المماس

الحـل ــ 23

1 ــ نلاحظ أن المنحنيين يتماسان في النقطة ذات الفاصلة 1 (لهما نفس المماس عند هذه النقطة)

2 ــ بما أن الدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من IR

$x^2 - x + 1 > 0$ فإن الدالة $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ قابلة للاشتقاق على IR

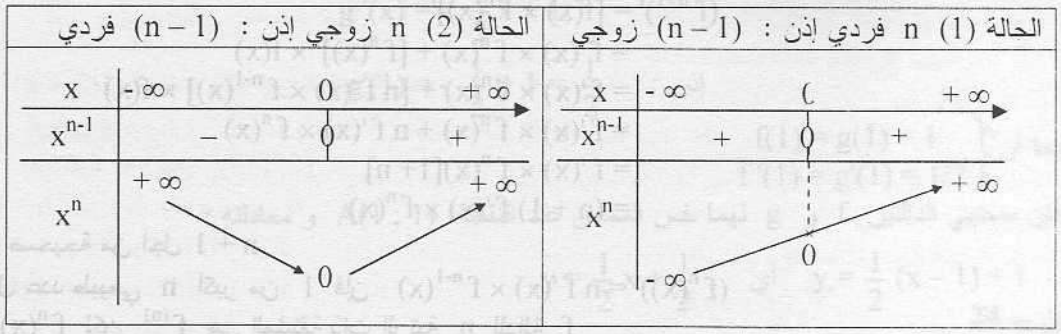
بما أن g دالة كثير حدود فإنها قابلة للاشتقاق على IR

3 ــ $f(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

إذن : $f'(1) = \frac{2 - 1}{2\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{1}{2}$

$$g(1) = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1$$



2 ــ لتكن المعادلة $x^n = a$ حيث $a \in IR$

نميز حالتين :

الحالة (1) n فردي :

من أجل كل $a \in IR$ فإن المعادلة $x^n = a$ تقبل حلا وحيدا على IR

الحالة (2) n زوجي :

من أجل $a < 0$ المعادلة $x^n = a$ لا تقبل أي حل في IR

من أجل $a = 0$ المعادلة $x^n = a$ تقبل حلا واحدا و هو 0

من أجل $a > 0$ المعادلة $x^n = a$ تقبل حلين مختلفين في IR

التمرين ــ 21

عين مشتقات الدوال التالية على IR :

1 ــ $f(x) = (x^3 - x + 1)^5$

2 ــ $g(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 3)^8}$

3 ــ $h(x) = \cos^{\theta} x$ **حيث** θ **عدد حقيقي غير معدوم**

4 ــ $k(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$

الحـل ــ 21

1 ــ $f'(x) = 5(3x^2 - 1)(x^3 - x + 1)^4$

2 ــ $g'(x) = \dfrac{0 - 8(2x)(x^2 + 3)^7 \times 1}{(x^2 + 3)^{16}} = \dfrac{-16x(x^2 + 3)^7}{(x^2 + 3)^{16}}$

3 ــ $h'(x) = 3 \times (-\theta \sin \theta x) \times \cos^2 \theta x = -3\theta(\sin \theta x)(\cos^2 \theta x)$

4 ــ $k'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}} = \dfrac{-x}{(x^2 + 1)^2\sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}}$

التمرين ــ 22

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f ' دالتها المشتقة الأولى

1 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$

2 ــ برهن أنه يمكن تمديد هذه الخاصية إلى كل عدد صحيح غير معدوم z

الحـل ــ 22

1 ــ لنبرهن صحة هذه الخاصية بالتراجع على n كمايلي :

من أجل $n = 2$ لدينا : $(f^2(x))' = [f(x) \times f(x)]'$

حسب الخواص $= f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x)$

$= 2 \times f'(x) \times f(x)$

$= 2 \times f'(x) \times f^{2-1}(x)$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

لنفرض أن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$ من أجل $n > 2$

هل $(f^{n+1}(x))' = (n + 1) f'(x) \times f^n(x)$ ؟

لدينا :

$$\begin{aligned}(f^{n+1})' &= [f(x) \times f^n(x)]' \\ &= f'(x) \times f^n(x) + [f^n(x)]' \times f(x) \\ &= f'(x) \times f^n(x) + [n f'(x) \times f^{n-1}(x)] \times f(x) \\ &= f'(x) \times f^n(x) + n f'(x) \times f^n(x) \\ &= f'(x) \times f^n(x)[1+n] \\ &= (n+1) f'(x) \times f^n(x)\end{aligned}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$

حذار ! $f^n(x) = [f(x)]^n$ لكن $f^{(n)}$ هي المشتقة ذات الرتبة n للدالة f

2 ــ ليكن $z \in Z - \{-1 ; 0 ; 1\}$

إذا كان $z \in IN$ فإن الخاصية محققة حسب السؤال الأول

إذا كان $z \notin IN$ نضع $z = -n$ حيث $n \in IN$

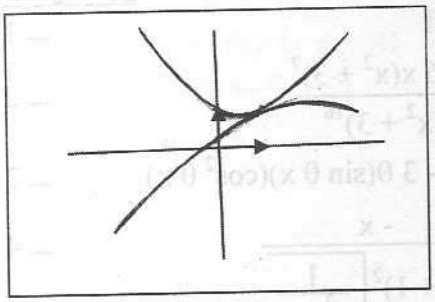
من أجل $f(x) \neq 0$ فإن :

$$\begin{aligned}[f^z(x)]' &= [f^{-n}(x)]' \\ &= \left[\frac{1}{f^n(x)}\right]' \\ &= \frac{0 - n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{[f^n(x)]^2} \\ &= \frac{-n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{f^{2n}(x)} \\ &= -n f'(x) \times f^{n-1-2n}(x) \\ &= -n f'(x) \times f^{-n-1} \\ &= z f'(x) \times f^{z-1} \quad \text{لأن } z = -n\end{aligned}$$

إذن : الخاصية تبقى صحيحة من أجل $z \in Z - \{-1 ; 0 ; 1\}$

التمرين ــ 23

باستعمال حاسبة بيانية مثلنا المنحنيين اللذين معادلتيهما $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ و $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ كما يلي :



1 ــ ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

2 ــ نعرف على IR الدالتين f و g كمايلي : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$

برهن أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق على IR

3 ــ أحسب f(1) ؛ f'(1) ؛ g(1) ؛ g'(1)

4 ــ تحقق من الملاحظة المصروحة في السؤال (1) ثم أكتب معادلة المماس

الحـل ــ 23

1 ــ نلاحظ أن المنحنيين يتماسان في النقطة ذات الفاصلة 1 (لهما نفس المماس عند هذه النقطة)

2 ــ بما أن الدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من IR

$x^2 - x + 1 > 0$ فإن الدالة $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ قابلة للاشتقاق على IR

بما أن g دالة كثير حدود فإنها قابلة للاشتقاق على IR

3 ــ

$$f(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

إذن :

$$f'(1) = \frac{2 - 1}{2\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

إذن : $g'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

4 ــ بما أن $\left.\begin{matrix} f(1) = g(1) = 1 \\ f'(1) = g'(1) = 1/2 \end{matrix}\right\}$

فإن منحنيي الدالتين f و g لهما نفس المماس عند النقطة A(1 ; 1) و معادلته :

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 \quad \text{أي} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

التمرين ــ 24

برر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

1 ــ $(1+x)^3 \approx 1 + 3x$

2 ــ $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

3 ــ $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

4 ــ $\sin x \approx x$

الحـل ــ 24

1 ــ لتكن f دالة معرفة بـــ $f(x) = (1+x)^3$

إذن : f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = 3(1+x)^2$

منه : $f'(0) = 3$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة f هو : $x \longmapsto f'(0)(x-0) + f(0)$

أي : $x \longmapsto 3x + 1$

2 ــ لتكن g دالة معرفة بـــ $g(x) = \frac{1}{1+x}$

g قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : $g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

منه : $g'(0) = -1$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة g هو : $x \longmapsto g'(0)(x-0) + g(0)$

أي : $x \longmapsto -x + 1$

3 ــ لتكن h دالة معرفة بـــ $h(x) = \sqrt{1+x}$

h قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

إذن : $h'(0) = \frac{1}{2}$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة h هو : $x \longmapsto h'(0)(x-0) + h(0)$

أي : $x \longmapsto \frac{1}{2}x + 1$

4 ــ لتكن ℓ دالة معرفة بـــ $\ell(x) = \sin x$

ℓ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : $\ell'(x) = \cos x$

إذن : $\ell'(0) = \cos(0) = 1$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة ℓ هو : $x \longmapsto 1(x-0) + \ell(0)$

أي : $x \longmapsto x$

التمرين ــ 25

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = x^2$

1 ــ عين التقريب التآلفي لعبارة $f(2+h)$ من أجل h قريب من 0

2 ــ أحسب بهذا التقريب قيمة مقربة لـــ $(2{,}029)^2$

الحـل ــ 25

1 ــ f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 2 و دالتها المشتقة $f'(x) = 2x$

إذن : $f'(2) = 2(2) = 4$

منه : التقريب التآلفي المحلي عند 2 للدالة f هو : $x \longmapsto 4(x-2) + f(2)$

أي : $x \longmapsto 4x - 8 + 4$

أي : $x \longmapsto 4x - 4$

نتيجة : $f(x) \approx 4x - 4$ يقارب

إذن : $f(2+h) \approx 4(2+h) - 4$ من أجل h يقترب من 0

أي : $f(2+h) \approx 4h + 4$ من أجل h يقترب من 0

2 ــ لاحظ أن : $(2,029)^2 = f(2+0,029)$

نضع $h = 0,029$ إذن h يقترب من 0

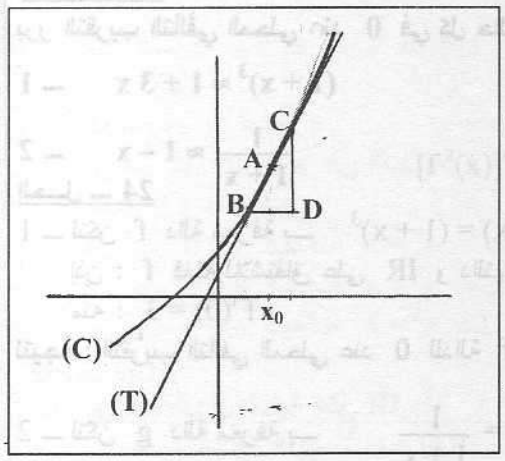
منه $f(2+0,029) \approx 4h + 4$

أي $f(2+0,029) \approx 4(0,029) + 4$

أي $f(2,029) \approx 4,116$

التمرين ــ 26

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر (C) منحنى دالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فاصلة النقطة A و ليكن (T) مماس للمنحنى(C) عند النقطة A . B و C نقطتان من (C) فاصلتهما على الترتيب $x_0 - h$ و $x_0 + h$ حيث $h > 0$ و h يقترب من 0 ،
D نقطة من المستوي حيث (AD) يعامد (CD) (أنظر الشكل) .



1 ــ أعط قيمة مقربة لمساحة الشكل الهندسي BCD باعتباره مثلث قائم في D بدلالة $f'(x_0)$ و h .

2 ــ أحسب قيمة هذه المساحة من أجل $h = 0,03$ و معامل توجيه المستقيم (T) يساوي 9 .

الحـــل ــ 26

1 ــ f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 إذن تقبل تقريب تآلفي من أجل x يقترب من x_0 من الشكل :

$x \longmapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

بما أن h يقترب من 0 فإن $(x_0 + h)$ و $(x_0 - h)$ يقتربان من x_0 و عليه فإن حسب التقريب التآلفي للدالة f في جوار x_0 لدينا :

$f(x_0 + h) = f'(x_0)(x_0 + h - x_0) + f(x_0) = h f'(x_0) + f(x_0)$ ..... (1)

و $f(x_0 - h) = f'(x_0)(x_0 - h - x_0) + f(x_0) = -h f'(x_0) + f(x_0)$ ..... (2)

حسب الشكل فإن مساحة المثلث القائم BCD هي : $S = \frac{1}{2} BD \times DC$ حيث [BD] هي القاعدة و [DC] هو الإرتفاع

لدينا احداثيات النقط B ; C ; D كمايلي : $B(x_0 - h ; f(x_0 - h))$ ؛ $C(x_0 + h ; f(x_0 + h))$

$D(x_0 + h ; f(x_0 - h))$ لأن D على نفس الإستقامة مع B

منه : $DB = (x_0 + h) - (x_0 - h) = 2h$

و $DC = f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = [h f'(x_0) + f(x_0)] - [-h f'(x_0) + f(x_0)]$ حسب العلاقتين (1) و (2)

$= 2h f'(x_0)$

نتيجة : $S = \frac{1}{2} BD \times DC$ أي $S = \frac{1}{2} 2h \times 2h f'(x_0)$

أي : $S = 2h^2 f'(x_0)$ و هو المطلوب

2 ــ معامل توجيه (T) هو 9 أي $f'(x_0) = 9$

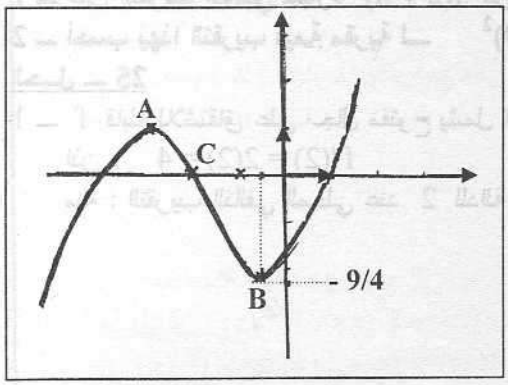
منه : $S = 2(0,03)^2 \times 9$

أي : $S = 18(0,0009)$

أي : $S = 0,0162$ مقدر بوحدة قياس المساحة .

التمرين ــ 27

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها



1 ــ عين العدد المشتق للدالة f عند كل من 1/2 - ؛ 3 - علما أن ترتيب النقطة B هو 9/4 -

2 ــ إستنتج معادلات المماسات للمنحنى (C) عند النقط A ; B

3 ــ هل توجد مماسات أخرى للمنحنى(C) موازية للمماس عند النقطة(A)

الحـــل ــ 27

1 ــ حسب منحنى الدالة f فإن كل من النقط A و B هي ذروات محلية للمنحنى (C) .
إذن : تراتيبها هي قيم حدية محلية للدالة f و عليه فالمشتقة تنعدم عند
فواصل هذه النقط أي : $f'(-3) = 0$ $f'(-1/2) = 0$
2 ــ معادلات المماسات عند A و B هما على الترتيب $y = 1$ و $y = -9/4$ لأنهما يوازيان حامل محور الفواصل .
3 ــ حسب المنحنى لا يوجد اي مماس آخر للمنحنى (C) يوازي المماس عند A أو B

التمرين ــ 28

هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند 0 :

1 ــ $f(x) = x\sqrt{x}$

2 ــ $g(x) = x|x|$

3 ــ $h(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)$

الحـل ــ 28

1 ــ f ليست معرفة على يسار 0 إذن لا تقبل الاشتقاق عند 0
فهل هي قابلة للاشتقاق على يمين 0 ؟

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$$

إذن : f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و عددها المشتق $f'(0) = 0$

2 ــ $$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

إذن : g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(0) = 0$

3 ــ $$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin \pi$$

$$= 0$$

إذن : h قابلة للاشتقاق عند 0 و $h'(0) = 0$

التمرين ــ 29

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ x^2 \cos(1/x) : x \neq 0 \end{cases}$

1 ــ هل f قابلة للاشتقاق عند 0 (باستعمال التعريف)

2 ــ أحسب $f'(x)$ من أجل $x \neq 0$

الحـل ــ 29

1 ــ $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(1/x) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \cos(1/x)$$

$= 0$ لأن $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$

منه : f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = 0$

2 ــ من أجل $x \neq 0$: $f(x) = x^2 \cos(1/x)$

إذن : $f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left[-\frac{1}{x^2}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$

$$= 2x \cos(1/x) + \sin(1/x)$$

التمرين ــ 30

(C) منحنى الدالة f المعرفة بـــ $f(x) = |x^2 - 1|$

1 ــ بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين 1 - ثم عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 - على اليمين

2 ــ بين أن f قابلة للاشتقاق على يسار 1 - ثم عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 - على اليسار

3 ــ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 - ؟

4 ــ أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم المنحنى (C)

الحـــل ــ 30

1 ــ

$$\lim_{x \geq -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \geq -1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \geq -1} \frac{1 - x^2}{x + 1}$$

لأن :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2 - 1 \rvert$		$x^2 - 1$	0	$1 - x^2$	0	$x^2 - 1$	

إذن :

$$\lim_{x \geq -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \geq -1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \geq -1} 1 - x$$

$$= 2$$

منه : f قابلة للاشتقاق على يمين 1 - و عددها المشتق على اليمين هو 2

2 ــ

$$\lim_{x \leq -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \leq -1} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \leq -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \leq -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \leq -1} x - 1$$

$$= -2$$

منه : f قابلة للاشتقاق على يسار 1 - و عددها المشتق على اليسار هو 2 -

3 ــ بما أن العدد المشتق على يمين 1 - يختلف عن العدد المشتق على اليسار فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 -

معادلات المماسات عند النقطة ذات الفاصلة 1 -

على اليمين : $y = 2(x + 1) + 0$ أي $y = 2x + 2$

على اليسار : $y = -2(x + 1) + 0$ أي $y = -2x - 2$

4 ــ **التغيرات :** f معرفة على R

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 : x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[\\ 1 - x^2 : x \in]-1 ; 1[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x : x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\\ -2x : x \in]-1 ; 1[\end{cases}$$

لاحظ أن f لا تقبل الاشتقاق عند كل من 1 - و 1

إشارة المشتقة :

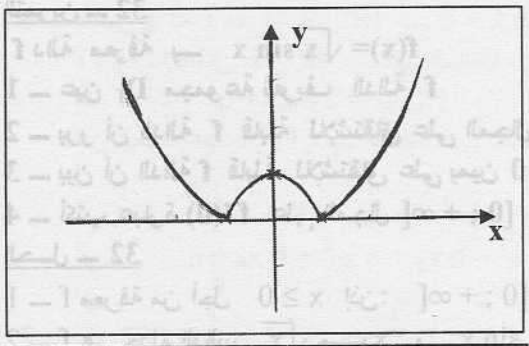
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
2 x		−						+	
- 2 x				+	0	−			
f '(x)		−		+	0	−		+	

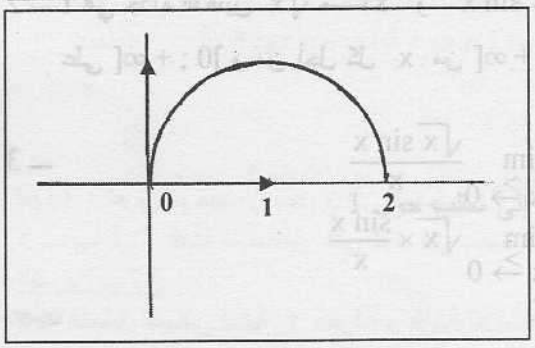
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f '(x)		−	‖	+	0	−	‖	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

المنحنى :

حذار ! النقط ذات الإحداثيات (0 ; 1 -) و (0 ; 1) ليست ذروات للمنحنى لأن الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 1 - و 1





التمرين ــ 31

f دالة معرفة على المجال [2 ; 0] و تمثيلها البياني (C) عبارة عن نصف دائرة كما هو مبين في الشكل التالي :

1 ــ برر أن f لا تقبل الإشتقاق عند 0 .

2 ــ برر أن تكون النقطة M(x ; y) تنتمي إلى (C) إذا وفقط إذا كان :

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{و} \quad y \geq 0$$

3 ــ أكتب عبارة f(x) من أجل $x \in [0 ; 2]$

4 ــ أوجد بالحساب النتيجة المحصل عليها في السؤال 1 .

الحـــل ــ 31

1 ــ من منحنى الدالة f نلاحظ أن المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 يوازي حامل محور التراتيب أي ميله غير منته منه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0

2 ــ لاحظ أن المنحنى (C) جزء من الدائرة ذات المركز (0 ; 1) و نصف القطر 1

إذن معادلتها : $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$

أي : $(x-1)^2 + y^2 = 1$

بما أن الجزء واقع فوق محور الفواصل فإن $y \geq 0$ أي :

معادلة المنحنى (C) هي $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $y \geq 0$ و هو المطلوب .

3 ــ من السؤال (2) : $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $y \geq 0$

أي $y^2 = 1 - (x-1)^2$ و $y \geq 0$

أي : $y^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1)$ و $y \geq 0$

أي : $y^2 = 2x - x^2$ و $y \geq 0$

أي : $y = \sqrt{2x - x^2}$ و $x \in [0 ; 2]$

منه : $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ و $x \in [0 ; 2]$ و هي عبارة f(x)

4 ــ

$$\lim_{x \geq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \geq 0} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \geq 0} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x} - 1\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\sqrt{\frac{2}{x} - 1}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\frac{2}{x} - 1}$$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{x} = +\infty$ لأن $= +\infty$

إذن : f غير قابلة للإشتقاق على يمين 0 و مماس المنحنى له ميل غير منته أي يوازي محور التراتيب

لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

التمرين ــ 32

f دالة معرفة بـــ $f(x) = \sqrt{x}\sin x$

1 ــ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

2 ــ برر أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على هذا المجال .

3 ــ بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين 0 ثم أحسب $f_d'(0)$ حيث $f_d'(0)$ هو العدد المشتق على يمين 0

4 ــ أكتب عبارة $f'(0)$ على المجال $]0 ; +\infty[$

الحـــل ــ 32

1 ــ f معرفة من أجل $x \geq 0$ إذن: $D_f = [0 ; +\infty[$

2 ــ f هي جداء الدالتين $x \longmapsto \sqrt{x}$ و $x \longmapsto \sin x$ القابلتين للإشتقاق على $]0 ; +\infty[$ إذن : f قابلة للإشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$

3 ــ

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ لأن $= 0$

نتيجة : f قابلة للإشتقاق على يمين 0 و $f_d'(0) = 0$

4 ــ $f'(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$ و هو المطلوب

التمرين ــ 33

a و b عددان حقيقيان . f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

هل يوجد عددان a و b حيث يكون لمماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلة من الشكل $y = 4x + 3$ ؟

الحـــل ــ 33

f دالة ناطقة معرفة على IR إذن قابلة للإشتقاق على IR و خاصة عند العدد 0 وعليه فإن منحناها يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 و معادلته $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

أي : $y = f'(0)x + f(0)$

بالمطابقة مع المعادلة $y = 4x + 3$ نحصل على الشروط التالية :

$$\begin{cases} f'(0) = 4 \ldots\ldots (1) \\ f(0) = 3 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

لدينا : $f'(x) = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2}$

منه : $f'(0) = a/1 = a$

إذن : الشرط (1) يصبح $a = 4$

من جهة أخرى : $f(0) = b/1 = b$

إذن : الشرط (2) يصبح $b = 3$

خلاصة : يوجد عددان حقيقيان و حيدان هما $a = 4$ و $b = 3$ يحققان أن معادلة مماس الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y = 4x + 3$

التمرين ــ 34

a عدد حقيقي . نعتبر الدالة f معرفة على IR بـــ $f(x) = a x^3 + 3x^2 + 3x$

هل يوجد قيمة لـــ a حيث تقبل الدالة f قيمة حدية عند $x = 1$ ؟

الحـــل ــ 34

f دالة كثير حدود إذن قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = 3(a x^2 + 2x + 1)$ أي $f'(x) = 3a x^2 + 6x + 3$

تكون لـــ f قيمة حدية محلية عند $x = 1$ إذا وفقط إذا إنعدمت $f'(x)$ من أجل $x = 1$ مغيرة إشارتها

أي : $f'(1) = 0$

أي : $a(1)^2 + 2(1) + 1 = 0$

أي : $a = -3$

منه : $f'(x) = 3(-3x^2 + 2x + 1)$

لندرس الأن إشارة $f'(x)$ أي إشارة $-3x^2 + 2x + 1$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{-6} = \dfrac{2}{-6} = -1/3 \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{-6} = 1 \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

نتيجة : من أجل $a = -3$ فإن $f'(1) = 0$ و f' تغير إشارتها من موجب إلى سالب حول 1

إذن : f تقبل قيمة حدية محلية عند $x = 1$

التمرين ــ 35

ليكن (C) منحنى ذو المعادلة : $xy + 4x + 3y + 7 = 0$

برهن أن النقطة $A(-2 ; 1)$ تنتمي إلى (C) و أن (C) يقبل مماس عند A يطلب تعيين معادلته .

الحـــل ــ 35

لنعوض إحداثيات النقطة A في معادلة المنحنى (C) حيث : $x = -2$ و $y = 1$

إذن : $xy + 4x + 3y + 7 = -2(1) + 4(-2) + 3(1) + 7$

$= -10 + 10$

$= 0$ إذن : A تنتمي إلى (C)

لنبحث عن عبارة y بدلالة x :

$xy + 4x + 3y + 7 = 0 \Rightarrow xy + 3y = -7 - 4x$

$\Rightarrow y(x + 3) = -7 - 4x$

$$x \neq -3 \text{ حيث } \Rightarrow y = \frac{-7 - 4x}{x + 3}$$

لنعتبر الدالة f معرفة على $IR - \{-3\}$ بـــ $f(x) = \dfrac{-7 - 4x}{x + 3}$

إذن : المنحنى (C) ذو المعادلة $xy + 4x + 3y + 7 = 0$ هو منحنى الدالة f .

بما أن f دالة ناطقة فهي قابلة للإشتقاق على $IR - \{-3\}$ و خاصة عند -2 و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-4(x + 3) - (-7 - 4x)}{(x + 3)^2}$$

منه : $$f'(-2) = \frac{-4(-2 + 3) - [-7 - 4(-2)]}{(-2 + 3)^2} = \frac{-4 - 1}{1} = -5$$

إذن : معادلة المماس عند النقطة A من الشكل : $y = -5(x + 2) + f(-2)$

أي : $y = -5(x + 2) + 1$

أي : $y = -5x - 9$

التمرين ــ 36

a ; b ; c أعداد حقيقية حيث $a > 0$

(P) قطع مكافئ معادلته $y = ax^2 + bx + c$

ليكن x_0 عدد حقيقي و M_0 نقطة من (P) فاصلتها x_0 .

1 ــ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (P) عند النقطة M_0 .

2 ــ برهن أن (P) يقع فوق كل مماساته .

3 ــ عين مجموعة النقط M ذات الإحداثيات (x ; y) حيث يوجد مماس للمنحنى (P) عند النقطة M .

الحـــل ــ 36

1 ــ لنعتبر الدالة f معرفة على IR بـــ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a > 0$

f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة $f'(x) = 2ax + b$

منه : $f'(x_0) = 2ax_0 + b$

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

أي : $y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + (ax_0^2 + bx_0 + c)$

أي : $y = (2ax_0 + b)x - 2ax_0^2 - bx_0 + ax_0^2 + bx_0 + c$

أي : $y = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$ و هي معادلة المماس (T)

2 ــ ليكن (T) مماس لـــ (P) عند نقطة كيفية ذات الفاصلة x_0 .

لدينا : $f(x) - [(2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c] = ax^2 + bx + c - [(2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c]$

$= ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2$

$= a(x^2 - 2x_0x + x_0^2)$

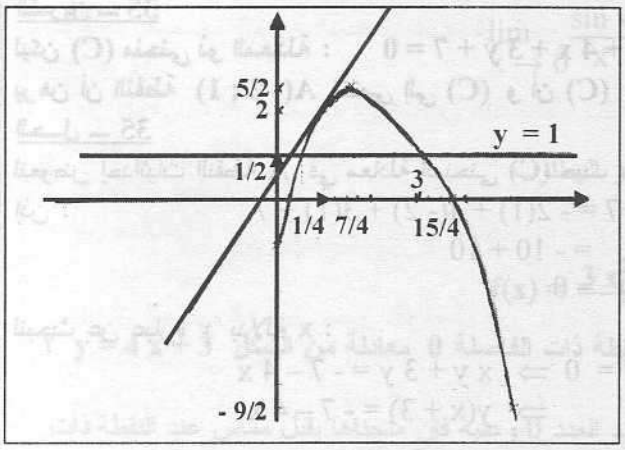
$= a(x - x_0)^2$ موجب لأن $a > 0$

نتيجة : الفرق موجب أو معدوم إذن المنحنى (P) يقع دائما فوق المماس (T) من أجل أي قيمة لـــ x_0 (أي فوق كل المماسات)

3 ــ بما أن f قابلة للإشتقاق على IR فإن مجموعة النقط M المطلوبة هي $M(x ; ax^2 + bx + c)$ أي كل نقط القطع (P)

التمرين ــ 37

إليك التمثيل البياني لدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0 ; 5[$.المستقيم المرسوم على الشكل هو مماس المنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 1 .



1 ــ بقراءة بيانية عين كل من $f(1)$ و $f'(1)$

2 ــ حل بيانيا في المجال $]0 ; 5[$ المتراجحات التالية :

أ) $f(x) \geq 0$ ب) $f'(x) \geq 0$ ج) $f(x) \leq 1$

الحـــل ــ37

1 ــ من البيان نلاحظ ما يلي : $f(1) = 2$ (بالإسقاط على محور التراتيب) . ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو :

$$\tan\theta = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{2}$$

إذن : $f'(1) = 3/2$

2 ــ حسب المنحنى فإن :

$f(x) \geq 0$ تكافئ $x \in [1/4 ; 15/4]$ لأن المنحنى فوق محور الفواصل

$f'(x) \geq 0$ تكافئ $x \in]0 ; 7/4]$ لأن المنحنى متصاعد (الدالة متزايدة)

$f(x) \leq 1$ تكافئ $x \in]0 ; 1/2] \cup [3 ; 5[$ لأن المنحنى يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

التمرين ــ 38

n عدد طبيعي غير معدوم ، x عدد حقيقي يختلف عن 1

1 ــ بسط المجموع $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n$

2 ــ إستنتج تبسيط للعبارة $1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1}$

الحـــل ــ38

1 ــ لاحظ أن $f_n(x)$ عبارة عن مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها x

إذن : $f_n(x) = 1 \times \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ حيث $x \neq 1$

أي : $f_n(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

2 ــ العبارة $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n x^{n-1}$ هي مشتقة $f_n(x)$ (لأن مشتقة مجموع هي مجموع المشتقات حسب الخواص)

منه : $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n x^{n-1} = f_n'(x)$

أي :

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n x^{n-1} = \frac{(n+1)x^n (x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(n x^n + x^n)(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{n x^{n+1} - n x^n + x^{n+1} - x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(x-1)^2}$$ و هو المطلوب .

مثال : $x = 2$ ؛ $n = 3$

لدينا : $1 + 2x + 3x^2 = 1 + 2(2) + 3(2)^2 = 1 + 4 + 12 = 17$

و بتطبيق العبارة المبسطة : $1 + 2x + 3x^2 = \frac{3(2)^4 - 4(2)^3 + 1}{(2-1)^2} = \frac{48 - 32 + 1}{1} = 17$

التمرين ــ 39

من أجل كل x من IR^* نضع $f(x) = 1/x$ و $f^{(n)}$ المشتقة ذات الرتبة n حيث $n \in IN^*$ للدالة f

برهن باستعمال الإستدلال بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$$

الحـــل ــ39

من أجل $n = 1$: $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

و $\frac{(-1)^1 \times 1!}{x^{1+1}} = \frac{-1}{x^2}$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n > 1$

هل $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{x^{n+1+1}}$ ؟

لدينا : $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$

و حسب فرضية التراجع $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$

أي : $f^{n+1}(x) = \left[\frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}\right]'$ (نقبل أن α' هو مشتق α)

$= (-1)^n \times n! \times \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)'$ لأن العدد $(-1)^n \times n!$ ثابت لا تعلق بالمجهول x

$= (-1)^n \times n! \times \left(\frac{-(n+1)x^n}{x^{2n+2}}\right)$

$= (-1)^n \times n! \times \frac{(-1) \times (n+1) \times x^n}{x^n \times x^{n+2}}$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \times n\,!\,(n+1)}{x^{n+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{x^{n+1+1}}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل $n \in N^*$: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n\,!}{x^{n+1}}$

التمرين ــ 40

f دالة معرفة على IR و قابلة للإشتقاق مرتين و تحقق الشروط التالية :

❖ $f(0) = 0$ ؛ $f'(0) = 1$

❖ **f' متزايدة على $[0 ; +\infty[$ و متناقصة على $]-\infty ; 0[$**

أرسم جدول تغيرات الدالة f على IR

الحـــل ــ40

لدينا $f'(0) = 1$ و f' متزايدة على $[0 ; +\infty[$ إذن :

من أجل $x > 0$ فإن $f'(x) > f'(0)$

أي : $f'(x) > 1$

و خاصة $f'(x) > 0$ أي الدالة f متزايدة على المجال $[0 ; +\infty[$

و لدينا $f'(0) = 1$ و f' متناقصة على $]-\infty ; 0]$ إذن :

من أجل $x < 0$ فإن $f'(x) > f'(0)$

أي : $f'(x) > 1$

و خاصة $f'(x) > 0$ أي الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty ; 0]$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)		↗	0	↗	

التمرين ــ 40

f دالة معرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]1 ; 2[$

الحـــل ــ40

1 ــ **التغيرات :**

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} - \sqrt{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{x} = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

f مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]1 ; +\infty[$

إذن : f قابلة للإشتقاق على $]1 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -1 \times \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

إذن : من أجل كل x من $]1 ; +\infty[$: $f'(x) < 0$

منه : f متناقصة على المجال $]1 ; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	1		α		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

2 ــ $f(2) = \frac{1}{2-1} - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$

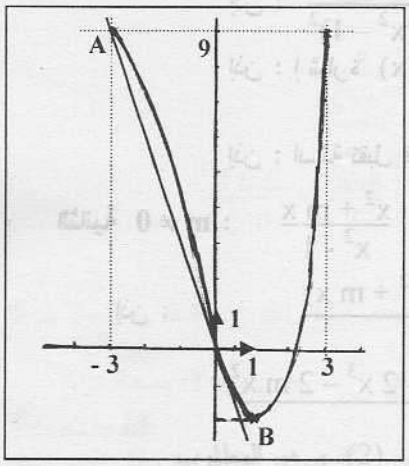
نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } [2 ; 1[\\ f \text{ متناقصة تماما على } [2 ; 1[\\ f \text{ تأخذ قيم موجبة ثم سالبة على المجال } [2 ; 1[\end{array}\right.$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[2 ; 1[$ يحقق $f(\alpha) = 0$

ملاحظة : يمكن البحث عن قيمة تقريبية لـــ α بالتنصيف .

التمرين ــ 41

إليك الشكل الموالي يمثل منحنى (C) لدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على [3 ; 3 -] في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$



المنحنى يحقق الشروط التالية :

- ✓ **يمر بمبدأ المعلم**
- ✓ **يشمل النقطة (9 ; 3 -)**
- ✓ **يقبل في النقطة B ذات الفاصلة 1 مماسا أفقيا .**
- ✓ **يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O**

1 ــ ماهو معامل توجيه المستقيم (OA)

نفرض أن f معرفة على [3 ; 3 -] بـــ $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

حيث a ، b ، c ، d أعداد حقيقية .

2 ــ بين بإستعمال الشروط السابقة أن $a = 1/3$ ؛ $b = 1$ ؛ $c = - 3$ ؛ $d = 0$

3 ــ حلل $f'(x)$ ثم أستنتج إتجاه تغير الدالة f .

الحـــل ــ 41

1 ــ معامل توجيه المستقيم (OA) هو ميل هذا المستقيم أي ظل الزاوية التي يصنعها مع الأفق أي : $\tan \theta = - 9/3 = - 3$

2 ــ لتكن $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

إذن : $f'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c$

لدينا ثلاث شروط : $\left\{\begin{array}{l} \text{المنحنى يمر بالمبدأ إذن : } f(0) = 0 \quad \ldots\ldots(1) \\ \text{المنحنى يشمل النقطة } A(- 3 ; 9) \text{ إذن : } f(- 3) = 9 \quad \ldots\ldots(2) \\ \text{ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 هو 3 - إذن : } f'(0) = - 3 \quad \ldots\ldots(3) \end{array}\right.$

الشرط (1) $f(0) = 0$ أي $a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 0$ منه $d = 0$

الشرط (2) $f(- 3) = 9$ أي $a(- 3)^3 + b(- 3)^2 + c(- 3) + 0 = 9$ منه $- 27 a + 9 b - 3 c = 9$

الشرط (3) $f'(0) = - 3$ أي $3 a(0)^2 + 2 b(0) + c = - 3$ منه $c = - 3$

نتيجة : $c = - 3$; $d = 0$

إذن : الشرط (2) يصبح $- 27 a + 9 b + 9 = 9$ أي : $9 b = 27 a$ أي : $b = 3 a$

من جهة أخرى المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 أفقي أي $f'(1) = 0$

أي : $3 a(1)^2 + 2 b(1) + c = 0$

أي : $3 a + 6 a - 3 = 0$ (لأن $b = 3 a$ و $c = - 3$)

أي : $9 a = 3$

أي : $a = 1/3$ منه $b = 3(1/3) = 1$

خلاصة : $a = 1/3$ ؛ $b = 1$ ؛ $c = - 3$ ؛ $d = 0$ و هو المطلوب

3 ــ $f'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c$ أي $f'(x) = x^2 + 2 x - 3$

$= (x - 1)(x + 3)$

إشارة $f'(x)$

x	$- \infty$	-3		1		$+ \infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	

إتجاه تغير الدالة f على المجال $]3 ; 3 - [$:

x	-3		1		3
f(x)	f(- 3)	↘	f(1)	↗	f(3)

التمرين ــ 42

f_m دالة معرفة على $IR - \{1 ; -1\}$ بـــ $f_m(x) = \dfrac{x^2 + m\,x}{x^2 - 1}$ مع m وسيط حقيقي .

1 ــ من أجل أي قيم لـــ m تكون الدالة f_m لا تقبل قيم حدية محلية ؟

2 ــ من أجل أي قيم لـــ m تكون الدالة f_m تقبل قيمتين حديتين محليتين أحدهما صغرى و الأخرى عظمى ؟

الحـــل ــ42

1 ــ نميز حالتين :

الأولى $m = 0$: $f_0(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

إذن : $f_0'(x) = \dfrac{2\,x(x^2 - 1) - 2\,x(x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2\,x}{(x^2 - 1)^2}$

إذن : إ شارة $f'(x)$ من إشارة $-2\,x$

x		-1		0		1	
f'(x)	+	‖	+	0	−	‖	−

إذن : الدالة تقبل قيمة حدية محلية عند $x = 0$

الثانية $m \neq 0$: $f_m(x) = \dfrac{x^2 + m\,x}{x^2 - 1}$ مع $m \neq 0$

إذن :

$$f_m'(x) = \frac{(2\,x + m)(x^2 - 1) - 2\,x(x^2 + m\,x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2\,x^3 - 2\,x + m\,x^2 - m - 2\,x^3 - 2\,m\,x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{-m\,x^2 - 2\,x - m}{(x^2 - 1)^2}$$

إذن : إ شارة $f_m'(x)$ هي إشارة كثير الحدود $-m\,x^2 - 2\,x - m$ كما لي :

$$\Delta = 4 - 4m^2 = 4(1 - m^2)$$

نتيجة : تكون الدالة f لا تقبل قيمة حدية محلية إذا وفقط إذا كانت مشتقتها لا تغير إ شارتها أي $f'(x) \geq 0$ أو $f'(x) \leq 0$ على طول مجال تعريفها و في هذه الحالة (إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية) يكون هذا محقق إذا وفقط إذا كان $\Delta \leq 0$ كما يلي :

m		-1		0		1	
$\Delta = 4(1 - m^2)$	−	0	+	‖	+	0	−

إذن $m \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

خلاصة : f_m لا تقبل قيم حدية محلية من أجل $m \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

2 ــ نميز حالتين :

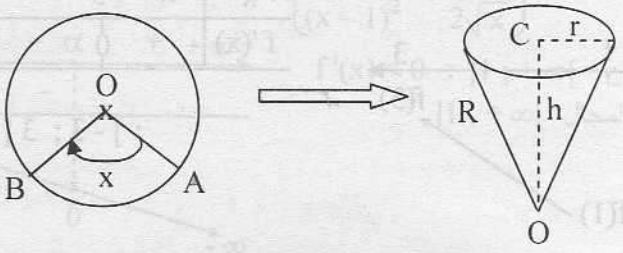
- ✓ $m = 0$ غير محقق حسب السؤال (1) .
- ✓ $m \neq 0$ حتى تكون الدالة تقبل قيمتين حديتين محليتين يجب أن يتحقق أن دالتها المشتقة تنعدم مرتين مغيرة إشارتها بالتناوب أي موجب سالب موجب أو سالب موجب سالب . وفي هذه الحالة لدينا إ شارة $f'(x)$ هي إشارة كثير حدود $-m\,x^2 - 2\,x - m$ حيث $m \neq 0$ إذن يكفي أن يكون $\Delta > 0$

أي $4(1 - m^2) > 0$

منه : $m \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$

التمرين ــ 43

نعتبر قرص مركزه O و نصف قطره R نقطع منه قطاعا زاويا $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$ قياسه x راديان كماهو موضح على الشكل ثم نلصق القطعتين [OA] و [OB] فنحصل على مخروط دوراني نصف قطر قاعدته r و إرتفاعه h



1 ــ عبر عن r و h بدلالة x و R.

2 ــ برهن أن حجم المخروط الدوراني الناتج معرف بالعلاقة $V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$

3 ــ أدرس تغيرات الدالة V على المجال $]0 ; 2\pi[$

4 ــ من أجل أي قيمة للعدد x يكون حجم المخروط الناتج أكبر مايمكن ؟ أحسب هذا الحجم بدلالة R .

الحـــل ــ43

1 ــ لدينا طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ هو $x\,R$

إذن : محيط قاعدة المخروط الدوراني الناتج هو $p = x\,R$

من جهة أخرى : $p = 2\pi r$ إذن : $2\pi r = x\,R$

منه : $r = \frac{x\,R}{2\pi}$ .....(1) و هو المطلوب .

بتطبيق نظرية فيتاغورت على المثلث OAC القائم في C حيث C هو مركز قاعدة المخروط الناتج نحصل على : $r^2 + h^2 = R^2$

أي : $h = \sqrt{R^2 - r^2}$

أي : $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x\,R}{2\pi}\right)^2}$

أي : $h = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^2 - x^2 R^2}{4\pi^2}}$

أي : $h = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ .....(2) و هو المطلوب

2 ــ حجم المخروط الدوراني الناتج هو : $V(x) = \frac{1}{3} S \cdot h$ حيث : S هي مساحة قاعدة المحروط و h هو إرتفاعه .

لدينا : $S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{x\,R}{2\pi}\right)^2 = \frac{R^2 x^2}{4\pi}$

منه $V(x) = \frac{1}{3} \times \frac{R^2 x^2}{4\pi} \times \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

منه : $V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ و هو المطلوب

3 ــ تغيرات الدالة V على $]0 ; 2\pi[$: $V(0) = 0$ ؛ $v(2\pi) = 0$

الدالة V قابلة للإشتقاق على $]0 ; 2\pi[$ و دالتها المشتقة :

$$V'(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\left(\frac{4x(4\pi^2 - x^2) - 2x^3}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\left(\frac{16x\pi^2 - 6x^3}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$$

إذن : إشارة $v'(x)$ هي إشارة $16x\pi^2 - 6x^3$ لأن $\frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$ موجب .

$16x\pi^2 - 6x^3 = 2x(8\pi^2 - 3x^2)$

x	$-\infty$	$-\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$		0		$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$		2π	$+\infty$
$2x$		−		0		+			
$8\pi^2 - 3x^2$	−	0		+		0	−		
$v'(x)$	+	0	−	0	+	0	−		

x	0	$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	2π
V'(x)	+	0	−

منه : إ شارة V'(x) على المجال $]0 ; 2\pi[$

إذن : جدول تغيرات الدالة V على المجال $]0 ; 2\pi[$

x	0	$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	2π
V'(x)	+	0	−
V(x)	0 ↗	$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$	↘ 0

$$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{R^3}{24\pi^2} \times \left(\frac{8}{3}\pi^2\right)\sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} = \frac{R^3}{9}\sqrt{\frac{4\pi^2}{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$

4 ــ لاحظ أن الدالة V تقبل قيمة حدية محلية عظمى على المجال $]0 ; 2\pi[$ من أجل $x = \pi\sqrt{\frac{8}{3}}$

إذن: الحجم الأعظمي هو $V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$

التمرين ــ 44

إليك جدول تغيرات الدالة u معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $D_u = [-2 ; 3]$

x	-2	-1	0	1	2	3
u'(x)	+	0	−	−	0	+
u(x)	2 ↗	3	↘ 0	↘ -1	↗ 0	↗ 2

1 ــ عين إشارة u(x) على $[-2 ; 3]$

نعتبر الدوال f ; g ; h ; k معرفة على $[-2 ; 3]$ كمايلي : $f = u^2$; $g = u^3$; $h = 1/u$; $k = \sqrt{u}$

2 ــ عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال f ; g ; h ; k

3 ــ عبر عن كل من f'(x) ; g'(x) ; h'(x) و k'(x) بدلالة u'(x) و u(x)

4 ــ إستنتج جدول تغيرات كل دالة من الدوال f ; g ; h ; k على مجموعة تعريفها

الحـل ــ44

1 ــ من جدول تغيرات الدالة u نستنتج مايلي :

x	-2	0	2	3
u(x)	+	0	− 0	+

2 ــ $f(x) = [u(x)]^2$ إذن f معرفة على $[-2 ; 3]$

$g(x) = [u(x)]^3$ إذن g معرفة على $[-2 ; 3]$

$h(x) = \frac{1}{u(x)}$ إذن h معرفة من أجل $u(x) \neq 0$ أي على المجال $[-2 ; 0[\cup]0 ; 2[\cup]2 ; 3]$

$k(x) = \sqrt{u(x)}$ إذن k معرفة من أجل $u(x) \geq 0$ أي على المجال $[-2 ; 0] \cup [2 ; 3]$

3 ــ $f'(x) = 2\,u'(x) \times u(x)$

$g'(x) = 3\,u'(x) \times [u(x)]^2$

$h'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$ على المجال $[-2 ; 0[\cup]0 ; 2[\cup]2 ; 3]$

$k'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ على المجال $[-2\,;\,0[\ \cup\ ]2\,;\,3]$

4 ــ لندرس في كل مرة إشارة الدالة المشتقة ثم نرسم جدول التغيرات :

الدالة f : $f'(x) = 2\,u'(x)\,u(x)$

x	- 2	-1	0	1	2	3
u'(x)	+	0	−	0	+	
u(x)	+	0	−	0	+	
الجداء	+	0	−	0	+	0	−	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	- 2	-1	0	1	2	3
f'(x)	+	0	−	0	+	0	−	0	+
f(x)	4 ↗	9	↘ 0	↗ 1	↘ 0	↗ 4			

$f(-2) = [u(-2)]^2 = (2)^2 = 4$
$f(-1) = [u(-1)]^2 = (3)^2 = 9$
$f(0) = [u(0)]^2 = (0)^2 = 0$
$f(1) = [u(1)]^2 = (-1)^2 = 1$

$f(2) = [u(2)]^2 = (0)^2 = 0$
$f(3) = [u(3)]^2 = (2)^2 = 4$

الدالة g : $g'(x) = 3\,u'(x) \times [u(x)]^2$

x	- 2	-1	0	1	2	3
u'(x)	+	0	−	0	+	
$[u(x)]^2$	+	0	+	0	+	
الجداء	+	0	−	0	−	0	+	0	+

منه جدول تغيرات الدالة g :

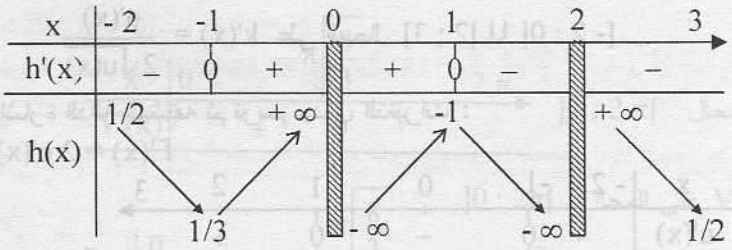
x	-2	-1	0	1	2	3
g'(x)	+	0	−	0	−	0	+	0	+
g(x)	8 ↗	27	↘ 0		↘ -1	↗ 0	↗ 8		

$g(-2) = [u(-2)]^3 = (2)^3 = 8$
$g(-1) = [u(-1)]^3 = (3)^3 = 27$
$g(1) = [u(1)]^3 = (-1)^3 = -1$
$g(3) = [u(3)]^3 = (2)^3 = 8$

الدالة h : $h'(x) = \dfrac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$ من إشارة $-u'(x)$ على المجال $[-2\,;\,0[\ \cup\ ]0\,;\,2[\ \cup\ ]2\,;\,3]$

x	- 2	-1	0	1	2	3
u'(x)	+	0	−	−	0	+	+
- u'(x)	−	0	+	+	0	−	−

منه جدول تغيرات الدالة h :



$$h(-2) = \frac{1}{u(-2)} = 1/2$$

$$h(-1) = \frac{1}{u(-1)} = 1/3$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$ (لأن u(x) موجبة على يسار 0)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} = -\infty$$

$$h(1) = \frac{1}{u(1)} = -1/1 = -1$$

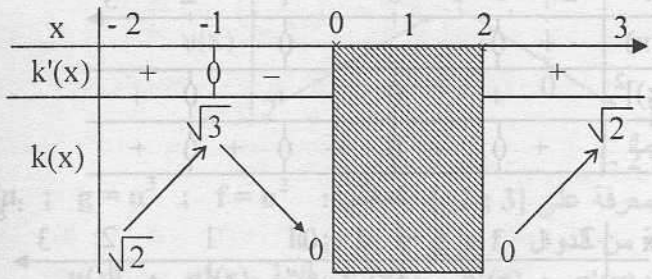
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} = -\infty$$ (لأن u(x) سالبة على يسار 2)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$h(1) = \frac{1}{u(3)} = 1/2$$

الدالة k : $k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ من إشارة u'(x) على المجال $[-2\,;\,0[\cup]2\,;\,3]$

منه جدول تغيرات :



$$k(-2) = \sqrt{u(-2)} = \sqrt{2}$$

$$k(-1) = \sqrt{u(-1)} = \sqrt{3}$$

$$k(0) = \sqrt{u(0)} = 0$$

$$k(2) = \sqrt{u(2)} = 0$$

$$k(3) = \sqrt{u(3)} = \sqrt{2}$$

التمرين ــ 45

1 ــ أحسب الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على IR - {1} بـ $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

2 ــ إستنتج الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية :

$$k : x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} \qquad g : x \longmapsto \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\ell : x \longmapsto \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1} \qquad h : x \longmapsto \frac{x^4+1}{x^2-1}$$

الحـل ــ 45

ــ 1

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

لاحظ أن إذا إعتبرنا الدالة $u : x \longmapsto x$ فإن $f(x) = \frac{[u(x)]^2 + 1}{u(x) - 1}$ مع $u(x) - 1 \neq 0$

منه : $f'(x) = \frac{2\,u'(x)\,u(x)\,(u(x)-1) - u'(x)\,([u(x)]^2 + 1)}{(u(x)-1)^2}$

$$= \frac{u'(x)\,[u(x)]^2 - 2\,u'(x)\,u(x) - u'(x)}{(u(x)-1)^2}$$

2 ــ لتكن $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ إذن : $g(x) = f(\sqrt{x})$ أي $u(x) = \sqrt{x}$ و $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

منه : $g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x})^2 - 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

✓ $h(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1}$ إذن : $h(x) = f(x^2)$ أي $u(x) = x^2$ و $u'(x) = 2x$

منه : $h'(x) = \frac{2x(x^2)^2 - 2 \times 2x \times x^2 - 2x}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{2x^5 - 4x^3 - 2x}{(x^2-1)^2}$$

✓ $k(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$ إذن : $k(x) = \sqrt{f(x)}$ مع $x > 0$

منه : $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

أي : $k'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}$

أي : $k'(x) = \frac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}$

✓ $\ell(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$ إذن : $\ell(x) = f(\sin x)$ أي $u(x) = \sin x$ و $u'(x) = \cos x$ مع $\sin x - 1 \neq 0$

منه : $\ell'(x) = \frac{\cos x \,.\, \sin^2 x - 2\cos x \sin x - \cos x}{(\sin x - 1)^2}$

$$= \frac{\cos x(\sin^2 x - 2\sin x - 1)}{(\sin x - 1)^2}$$

التمرين ــ 46

من أجل كل عدد طبيعي أكبر تماما من 1 نعرف الدالة f_n على IR بـــ $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$

1 ــ أحسب نهايتي f_n عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f_n (ميز بين n زوجي و n فردي) .

ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد و متجانس .

3 ــ تحقق أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى (C_n) .

4 ــ برر أن (C_n) يمر بأربع نقط ثابتة يطلب تعيينها .

5 ــ أرسم (C_1) (أي $n = 1$)

الحـــل ــ 46

1 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2)^n = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2)^n = +\infty$

2 ــ **التغيرات :** f_n قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f_n'(x) = n(2x - 2)(x^2 - 2x)^{n-1}$$
$$= 2n\, x^{n-1}(x - 1)(x - 2)^{n-1}$$

إذن: إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $x^{n-1}(x - 1)(x - 2)^{n-1}$ لأن $2n$ موجب تماما لذلك نميز حالتين :

الحالة الأولى : n زوجي إذن $(n - 1)$ فردي

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$					
$x - 1$				$-$	0	$+$			
$(x - 2)^{n-1}$						$-$	0	$+$	
الجداء		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

الحالة الثانية : n فردي إذن $(n - 1)$ زوجي

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$					
$x - 1$				$-$	0	$+$			
$(x - 2)^{n-1}$						$+$	0	$+$	
الجداء		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

3 ــ من أجل كل x من IR فإن $(2 - x) \in IR$ و $f_n(2 - x) = [(2 - x)^2 - 2(2 - x)]^n$

$= [\, 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x \,]^n$

$= (x^2 - 2x)^n$

$= f_n(x)$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_n)

4 ــ من أجل $x^2 - 2x = 0$ فإن $f_n(x) = 0$ مهما يكون n من IN*

من أجل $x^2 - 2x = 1$ فإن $f_n(x) = 1$ مهما يكون n من IN*

لنحل إذن المعادلتين : $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

$x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

نتيجة : من أجل أي قيمة للعدد الطبيعي غير المعدوم n فإن النقط $A(0 ; 0)$ ، $B(2 ; 0)$ ، $C(1 - \sqrt{2} ; 1)$ ، $D(1 + \sqrt{2} ; 1)$ ثابتة من المنحنى (C_n) .

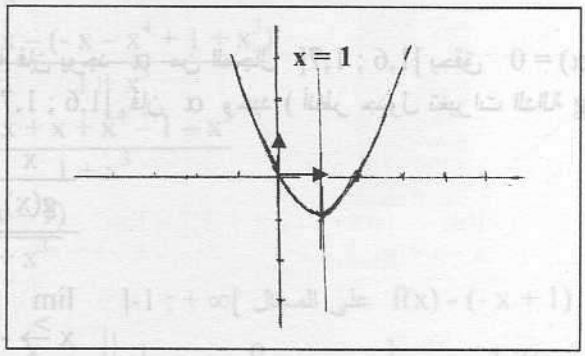
5 ــ إنشاء (C_1) :

$f_1(x) = x^2 - 2x$

$f_1'(x) = 2x - 2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

المنحنى :



التمرين ــ 47

الجزء I :

g دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـــ $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g .

2 ــ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1,6 و 1,7

3 ــ إستنتج إشارة $g(x)$ على $]-1 ; +\infty[$

الجزء II :

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x^3}$. نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ــ بين أن $f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \geq -1} f(x)$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين .

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f على $]-1 ; +\infty[$.

3 ــ عين معادلة لـــ (Δ) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4 ــ تحقق أن من أجل كل x من $]-1 ; 1[$: $f(x) - (-x + 1) = \dfrac{x^3(x - 1)}{x^3 + 1}$

5 ــ أستنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (Δ)

6 ــ أرسم كل من (C) و (Δ)

الحـــل ــ 47

الجزء I :

1 ــ **تغيرات الدالة g :**

g معرفة و قابلة للإشتقاق على IR و خاصة على $]-1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة g على $]-1 ; +\infty[$

x	-1		0		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	0	+	
g(x)	-6	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \geq -1} g(x) = g(-1) = -2 - 3 - 1 = -6$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

2 ــ $g(1,6) = 2(4,096) - 3(2,56) - 1 = -0,488$

$g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$

لدينا الشروط التالية : { g مستمرة على $[1,6 ; 1,7]$ ، $g(1,6) \times g(1,7) < 0$ }

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد α من المجال $]1,6 ; 1,7[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

و بما أن g متزايدة تماما على $]1,6 ; 1,7[$ فإن α وحيد (أنظر جدول تغيرات الدالة g)

3 ــ **إشارة g(x) :**

x	-1		1,6		α		1,7		$+\infty$
g(x)	‖	−	0	−	0	+	‖	+	

الجزء II :

1 ــ

$$\lim_{x \geq -1} f(x) = \lim_{x \geq -1} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{x \geq -1} \frac{1-(-1)}{1+x^3}$$

لأن لما $x \geq -1$ فإن $1 + x^3 \geq 0$

$$= \lim_{y \geq 0} \frac{2}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^3} = 0$$

التفسير الهندسي :

$\lim_{x \geq -1} f(x) = +\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي على يمين 1 - معادلته $x = -1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$ معادلته $y = 0$ (محور الفواصل)

2 ــ **التغيرات :**

f دالة ناطقة إذن قابلة للإشتقاق على مجال تعريفها و خاصة على $]-1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2}$$

حيث g هي الدالة المدروسة في الجزء I . $= \dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

منه إ شارة $f'(x)$ هي إ شارة $g(x)$ لأن $(1+x^3)^2$ موجب كما يلي :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f على $]-1 ; +\infty[$

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0

3 ــ معادلة (Δ) : مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\left.\begin{matrix} f'(0) = -1/1 = -1 \\ f(0) = 1/1 = 1 \end{matrix}\right\} : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

منه معادلة (Δ) : $y = -x + 1$

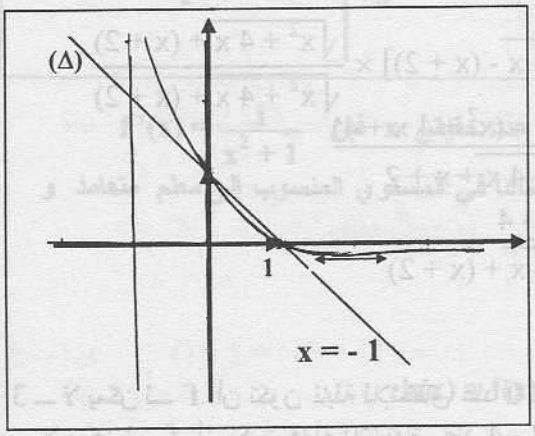
4 ــ من أجل كل x من $]-1 ; +\infty[$ فإن $f(x) - (-x+1) = \dfrac{1-x}{1+x^3} - (-x+1)$

$$= \frac{1 - x - (-x - x^4 + 1 + x^3)}{1+x^3}$$

$$= \frac{1 - x + x + x^4 - 1 - x^3}{1+x^3}$$

$$= \frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$$ و هو المطلوب

5 ــ إ شارة $f(x) - (-x+1)$ على المجال $]-1 ; +\infty[$



x	-1		0		1		$+\infty$
x^3	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$1+x^3$	‖	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^3(x-1)}{1+x^3}$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

خلاصة : لما $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$: (C) يقع فوق (Δ)

لما $x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$: (C) يقع تحت (Δ)

لما $x \in \{0 ; 1\}$: (C) يقطع (Δ)

التمرين ــ 48

f دالة معرفة على المجموعة D_f بـــ $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$ مع $D_f =]-\infty ; -4] \cup [0 ; +\infty[$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ــ أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

2 ــ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3 ــ هل f قابلة للإشتقاق عند 0 ؟ عند 4 - ؟

4 ــ أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in D_f - \{0 ; -4\}$

5 ــ أنشئ جدول تغيرات الـدالة f ثم المنحنى (C)

الحـــل ــ 48

1 ــ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}) \times \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x + 1}{x + 1 - |x|\sqrt{1 + \frac{4}{x}}} \quad \text{لأن } \sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x\left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x + 1 + x\sqrt{1 + \frac{4}{x}}} \quad \text{لأن } |x| = -x \text{ لما } x \to -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x\left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\right)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن } = \frac{-2}{1 + 1}$$

$$= -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

$$= +\infty$$

2 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - 2x - 3$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$= 0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3 ــ لا يمكن لـــ f أن تكون نابلة للإشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0

لا يمكن لـــ f أن تكون قابلة للإشتقاق عند 4 - لأنها ليست معرفة على يمين 4 -

4 ــ من أجل $x \in D_f - \{0 ; -4\}$ فإن

$$f'(x) = 1 + \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= 1 + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

5 ــ إشارة $f'(x)$:

أ . على المجال $]0 ; +\infty[$ لدينا $\left\{\begin{array}{l} x+2>0 \\ \sqrt{x^2+4x}>0 \end{array}\right.$

إذن : $1+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}>0$ أي $f'(x)>0$

ب . على المجال $]-\infty ; -4[$ لدينا : $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\geq 0$

$\Leftrightarrow 1\geq -\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)$

$\Leftrightarrow 1\geq \left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)^2$ لأن الطرفين موجبين لما $x\in]-\infty ; -4[$

$\Leftrightarrow 1\geq \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x}$

$\Leftrightarrow x^2+4x\geq x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow 0\geq 4$ مستحيل.

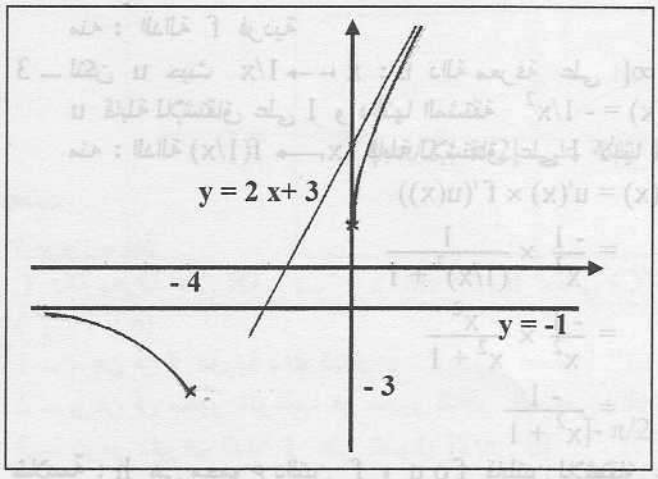
إذن على المجال $]-\infty ; -4[$ لا يمكن أن يكون $f'(x)\geq 0$ أي $f'(x)<0$

خلاصة : إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↘	-3	↗	$+\infty$



الإنشاء :

التمرين ــ 49

f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على IR حيث $f(0)=0$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

نقبل أن الدالة f موجودة و لا نريد إيجاد عبارتها $f(x)$ و نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

g دالة معرفة على IR بـــ $g(x)=f(x)+f(-x)$

1 ــ برر أن g قابلة للإشتقاق على IR ثم عين $g'(x)$

2 ــ أحسب $g(0)$. ثم إستنتج أن الدالة f فردية

لتكن h دالة معرفة على المجال I حيث $I=]0 ; +\infty[$ بـــ $h(x)=f(x)+f(1/x)$

3 ــ برر أن h قابلة للإشتقاق على I ثم أحسب $h'(x)$

4 ــ برهن ان من أجل كل x من I فإن : $h(x)=2f(1)$

5 ــ إستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2f(1)$. فسر النتيجة هندسيا .

k دالة معرفة على $]-\pi/2 ; \pi/2[$ بـــ $k(x)=f(\tan x)-x$

6 ــ أحسب $k'(x)$ ماذا ينتج عن الدالة k ؟

7 ــ أحسب f(1)

8 ــ أنجز جدول تغيرات الدالة f على IR

9 ــ أرسم المنحنى (C) و اكتب معادلات مماساته عند النقط التي فواصلها 0 ; 1 - ; 1

الحـــل ــ 49

1 ــ لتكن u دالة حيث $u : x \longmapsto -x$ منه u قابلة للإشتقاق على IR و $u'(x) = -1$

إذن : $f(-x) = f(u(x)) = f \circ u(x)$

منه : الدالة $x \longmapsto f(-x)$ هي مركب الدالتين u و f إذن هي دالة قابلة للإشتقاق على IR

و دالتها المشتقة هي : $x \longmapsto u'(x) \times f'(u(x))$

أي : $x \longmapsto -1\, f'(-x)$

أي : $x \longmapsto \dfrac{-1}{(-x)^2+1} = \dfrac{-1}{x^2+1}$

خلاصة : g هي مجموع دالتين f و $f \circ u$ قابلتين للإشتقاق على IR إذن : g قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة هي : $g'(x) = f'(x) + (-1) f'(x)$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$= 0$ إذن الدالة g ثابتة على IR

2 ــ $g(0) = f(0) + f(-0) = 2 f(0) = 0$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $g(x) = g(0) = 0$ لأن g ثابتة .

أي : من أجل كل x من IR فإن $f(x) + f(-x) = 0$

أي : من أجل كل x من IR فإن $f(-x) = -f(x)$

منه : الدالة f فردية

3 ــ لتكن u حيث $u : x \longmapsto 1/x$ دالة معرفة على $I =]0 ; +\infty[$

u قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة $u'(x) = -1/x^2$

منه : الدالة $x \longmapsto f(1/x)$ قابلة للإشتقاق على I لأنها مركب الدالتين f و u و دالتها المشتقة كمايلي :

$$(fou)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{(1/x)^2+1}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$= \frac{-1}{x^2+1}$$

خلاصة : h هي مجموع دالتين f و $f \circ u$ قابلتين للإشتقاق على I

إذن : h قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة هي :

$$h'(x) = f'(x) + \left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$= 0$ إذن الدالة h ثابتة

4 ــ لدينا $h(1) = f(1) + f(1/1) = f(1) + f(1) = 2 f(1)$

لكن h دالة ثابتة إذن : من أجل كل x من I فإن $h(x) = h(1)$

أي : من أجل كل x من I فإن $h(x) = 2 f(1)$

5 ــ لدينا من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $h(x) = f(x) + f(1/x)$

أي : $2 f(1) = f(x) + f(1/x)$

أي : $f(x) = 2 f(1) - f(1/x)$

منه : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [2 f(1) - f(1/x)]$

$$= 2\,f(1) - \lim_{x \to +\infty} f(1/x)$$

$$= 2\,f(1) - \lim_{y \to 0} f(y) \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2\,f(1) - 0$ لأن $\lim_{y \to +\infty} f(y) = f(0) = 0$ (f قابلة للإشتقاق عند 0 إذن فهي مستمرة عند 0)

أي : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2\,f(1)$

تفسير هندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2\,f(1)$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

6 ــ $k(x) = f(\tan x) - x$

نعرف الدالة $u : x \longmapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ على $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$

إذن : $u'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

منه : $k'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \times f'(\tan x) - 1$ لأن $k'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) - 1$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\tan^2 x + 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} - 1$$

$$= 1 - 1$$

$= 0$ إذن الدالة k ثابتة على $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$

بما أن :

$$k(0) = f[\tan(0)] - 0$$
$$= f(0) - 0$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

فإن الدالة k معدومة على $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ أي :

من أجل كل x من $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ فإن $k(x) = 0$

أي : $f(\tan x) - x = 0$ و هذا من أجل كل x من $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$

من أجل $x = \pi/4$ نحصل على : $f\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\pi}{4} = 0$

أي : $f\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

أي : $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ لأن $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

نتيجة : $f(1) = \pi/4$

8 ــ **جدول تغيرات الدالة f على IR**

حسب الأسئلة السابقة تحصلنا على:

f فردية
$f(1) = \pi/4$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2\,f(1) = \pi/2$

بما أن f فردية فإن يمكن إستنتاج مايلي :

$f(-1) = -\pi/4$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi/2$

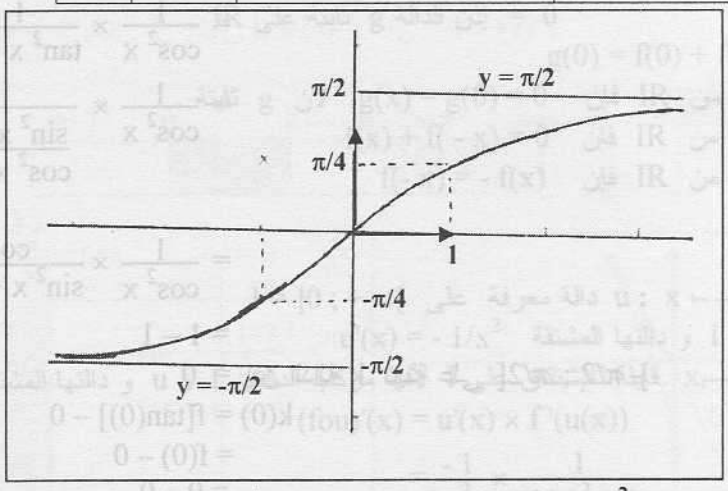
منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$

9 ــ معادلات المماسات عند النقط ذات الفواصل -1 ; 0 ; 1 :

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	معادلة المماس
0	0	$\frac{1}{0+1} = 1$	$y = x$
-1	$-\pi/4$	$\frac{1}{(-\pi/4)^2+1} = \frac{16}{16+\pi^2}$	$y = \frac{16}{16+\pi^2}(x+1) - \frac{\pi}{4}$
1	$\pi/4$	$\frac{1}{(+\pi/4)^2+1} = \frac{16}{16+\pi^2}$	$y = \frac{16}{16+\pi^2}(x-1) + \frac{\pi}{4}$

المنحنى :



التمرين ــ 50

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin^2 x$ نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ــ برهن أن f دورية ذات الدور π

2 ــ برهن أن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C) .

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi/2]$

4 ــ أرسم المنحنى (C) على المجال $\left[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$

الحـل ــ 50

1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(x + \pi) \in IR$ و لدينا :

$$f(x+\pi) = \sin^2(x+\pi)$$
$$= [\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi]^2$$
$$= (-\sin x + 0)^2$$
$$= \sin^2 x$$
$$= f(x)$$

إذن : f دورية و دورها π

نتيجة : يكفي دراسة الدالة f على مجال طوله π

2 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و لدينا :

$$f(-x) = \sin^2(-x)$$
$$= (-\sin x)^2$$
$$= \sin^2 x$$
$$= f(x)$$

إذن : f دالة زوجية منه المنحنى (C) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر

3 ــ **تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi/2[$**

f قابلة للإشتقاق على IR و خاصة على $[0 ; \pi/2]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x$$

إشارة $f'(x)$:

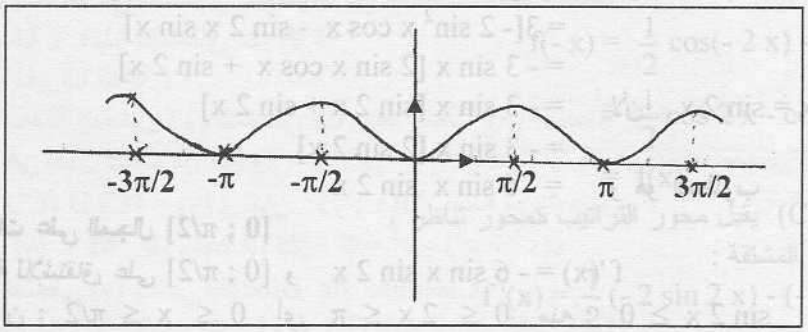
x	0		$\pi/2$
cos x	+		0
sin x	0	+	
f'(x)	0	+	0

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi/2]$

x	0		$\pi/2$
f'(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	1

4 ــ لرسم المنحنى على $\left[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ نتبع الخطوات التالية :

- ✓ نرسم جزء المنحنى على المجال $[0 ; \pi/2]$ حسب جدول التغيرات .
- ✓ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نرسم الجزء من المنحنى على المجال $[-\pi/2 ; 0]$
- ✓ بإجراء إنسحاب للمنحنى على المجال $[-\pi/2 ; \pi/2]$ نرسم الأجزاء من المنحنى على المجالين $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} + \pi\right]$ أي $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ و $\left[-\frac{\pi}{2} - \pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$ أي $\left[-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}\right]$ هكذا نتحصل على المنحنى (C) على المجال $\left[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ كما يلي :



التمرين ــ 51

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$

1 ــ قارن بين $f(x)$ و كل من $f(x + 2\pi)$; $f(-x)$; $f(\pi - x)$

2 ــ برهن أنه يكفي دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi/2[$

3 ــ برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -6 \sin x \sin 2x$

4 ــ أدرس تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi/2[$

5 ــ أرسم منحنى الدالة f على $[-\pi ; \pi]$

الحـل ــ 51

1 ــ من أجل كل x من IR لدينا $(x + 2\pi) \in IR$ و $(-x) \in IR$ و $(\pi - x) \in IR$ حيث :

$$f(x + 2\pi) = \sin 3(x + 2\pi) - 3 \sin(x + 2\pi)$$
$$= \sin(3x + 6\pi) - 3 \sin(x + 2\pi)$$
$$= \sin 3x - 3 \sin x$$
$$= f(x)$$ و هو المطلوب (1)

$$f(-x) = \sin(-3x) - 3 \sin(-x)$$
$$= -\sin 3x + 3 \sin x$$
$$= -(\sin 3x - 3 \sin x)$$
$$= -f(x)$$ و هو المطلوب (2)

$$f(\pi - x) = \sin 3(\pi - x) - 3 \sin(\pi - x)$$
$$= \sin(3\pi - 3x) - 3 \sin x$$

$= \sin 3x - 3 \sin x$

$= f(x)$ و هو المطلوب (3)

2 ــ **خلاصة** : حسب السؤال (1) لدينا

✓ $f(x + 2\pi) = f(x)$ إذن : 2π هو دور الدالة f

منه : يكفي دراستها على مجال طوله 2π و ليكن $[-\pi ; \pi]$

✓ $f(-x) = -f(x)$ إذن : f فردية أي المبدأ $(0 ; 0)$ هو مركز تناظر للمنحنى .

منه : يكفي دراسة الدالة f على المجال $[0 ; \pi]$

✓ ندرس الدالة f على $[0 ; \pi/2]$ ثم باستعمال العلاقة $f(\pi - x) = f(x)$ نحصل على المنحنى على المجال $[\pi/2 ; \pi]$

لأن : $0 \leq x \leq \pi/2$

أي : $-\pi/2 \leq -x \leq 0$

أي : $\pi - \pi/2 \leq \pi - x \leq \pi$

أي : $\pi/2 \leq \pi - x \leq \pi$

✓ بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ نحصل على المنحنى على الجزء $[-\pi ; -\pi/2]$

نتيجة يكفي دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi/2]$

3 ــ f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = 3\cos 3x - 3\cos x$

$= 3[\cos 3x - \cos x]$

$= 3[\cos(2x + x) - \cos x]$

$= 3[\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - \cos x]$

$= 3[\cos x(\cos 2x - 1) - \sin 2x \sin x]$

$= 3[\cos x(-2\sin^2 x) - \sin 2x \sin x]$ لأن $\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$

$= 3[-2\sin^2 x \cos x - \sin 2x \sin x]$

$= -3\sin x [2\sin x \cos x + \sin 2x]$

$= -3\sin x [\sin 2x + \sin 2x]$ لأن $2\sin x \cos x = \sin 2x$

$= -3\sin x [2\sin 2x]$

$= -6\sin x \sin 2x$ و هو المطلوب

4 ــ **التغيرات على المجال $[0 ; \pi/2]$**

f قابلة للإشتقاق على $[0 ; \pi/2]$ و $f'(x) = -6\sin x \sin 2x$

لاحظ أن : $0 \leq x \leq \pi/2$ أي $0 \leq 2x \leq \pi$ منه : $\sin 2x \geq 0$

إذن : من أجل كل x من $[0 ; \pi/2]$ فإن $f'(x) \leq 0$ لأن $-6 < 0$ و $\sin x \geq 0$ و $\sin 2x \geq 0$

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi/2]$

x	0		$\pi/2$
f'(x)	0	−	0
f(x)	0	↘	-4

$f(0) = \sin 0 - 3\sin 0 = 0$

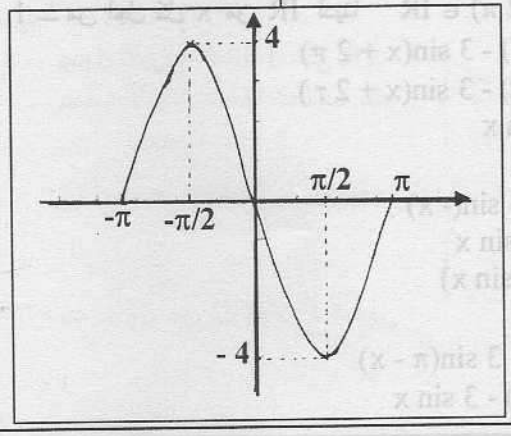
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - 3\sin\frac{\pi}{2} = -1 - 3 = -4$

5 ــ **رسم المنحنى على $[-2\pi ; 2\pi]$**

بإستعمال الخواص المطلوبة في السؤال (1) نحصل على جدول التغيرات التالي :

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
f'(x)	0	+	0	−	0	−	0	+	0
f(x)	0	↗	4	↘	0	↘	-4	↗	0

منه المنحنى التالي :



التمرين ــ 52

f دالة معرفة على IR بـ : $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ــ برهن أن الدالة f دورية و دورها 2π

2 ــ برهن أن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C) .

3 ــ أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \sin x\,[1 - 2\cos x]$

4 ــ أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $[0 ; \pi]$

5 ــ أرسم جزء المنحنى (C) على المجال $[-\pi ; \pi]$

6 ــ كيف يمكن إستنتاج المنحنى (C) على IR ؟

الحـــل ــ 52

1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(x + 2\pi) \in IR$ و

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2}\cos 2(x + 2\pi) - \cos(x + 2\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2x + 4\pi) - \cos x$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$$

$$= f(x)$$

إذن : f دورية و دورها 2π

2 ــ من أجل كل x من IR لدينا $(-x) \in IR$ و :

$$f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) - \cos(-x)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$$

$$= f(x)$$

إذن : f دالة زوجية أي منحناها (C) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر .

3 ــ f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-2\sin 2x) - (-\sin x)$$

$$= -\sin 2x + \sin x$$

$$= -(2\sin x \cos x) + \sin x \quad \text{لأن } \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$= \sin x(1 - 2\cos x) \quad \text{و هو المطلوب}$$

4 ــ $f'(x) = \sin x(1 - 2\cos x)$

على المجال $[0 ; \pi]$ لدينا : $1 - 2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq 1/2$$

$$\Leftrightarrow x \in [\pi/3 ; \pi]$$

منه جدول إشارة $f'(x)$ كمايلي :

x	0		$\pi/3$		π
$\sin x$	0	+		+	0
$1 - 2\cos x$		−	0	+	
$f'(x)$	0	−	0	+	0

5 ــ جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi]$

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$	0	−	0	+	0
$f(x)$	$\frac{-1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$

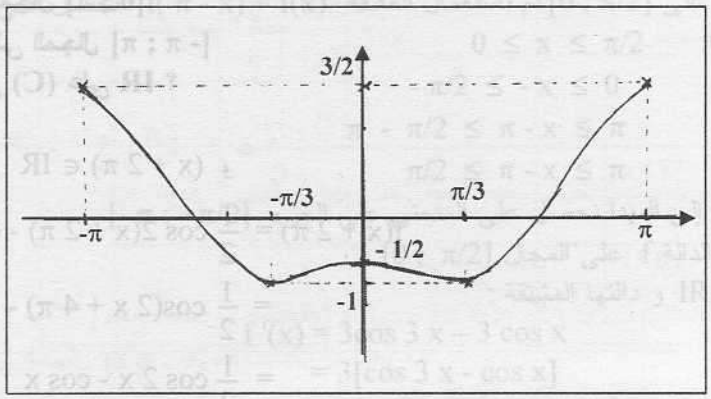
$$f(0) = \frac{1}{2}\cos 0 - \cos 0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos 2\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2}\cos 2\pi - \cos\pi = \frac{1}{2}(1) - (-1) = \frac{3}{2}$$

إنشاء المنحنى على $[-\pi\ ;\ \pi]$ (بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نرسم الجزء على $[0\ ;\ -\pi]$ كما في الشكل :

6 ــ الانشاء على IR : باجراء انسحاب للمنحنى (C) على مجالات طولها 2π نحصل على المنحنى على IR



التمرين ــ 53

f دالة معرفة على $[0\ ;\ 1[$ بـــ $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

1 ــ هل الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 ؟

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f

3 ــ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1/2

4 ــ أرسم في نفس المعلم كل من (T) و (C) و (C') حيث (C') هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل .

5 ــ نضع $(\gamma) = (C) \cup (C')$ و لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي .

برهن أن : $M \in (\gamma)$ إذا وفقط إذا كان $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$

ملاحظة : المنحنى (γ) يسمى Cissoïde de Dioclès

6 ــ I نقطة ذات الإحداثيات (0 ; 1) و (E) الدائرة ذات القطر (OI)

(Δ) مماس الدائرة (E) عند النقطة I

(d) المستقيم الذي يشمل O و معامل توجيهه العدد الحقيقي t حيث $t \neq 0$.

عين إحداثيات النقطة M نقطة تقاطع الدائرة (E) و المستقيم (d) حيث M تختلف عن O .

7 ــ عين إحداثيات M' نقطة تقاطع (γ) و المستقيم (d) حيث M' تختلف عن O .

الحـــل ــ 53

1 ــ الدالة f ليست معرفة على يسار 0 إذن : f ليست قابلة للإشتقاق عند 0

و لدينا

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}$$

لما $x > 0$ لأن $\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$= 0$$

إذن : f قابلة للإشتقاق على يمين 0 و عددها المشتق هو 0

2 ــ **التغيرات :** f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]1\ ;\ 0[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$= \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1-x}{x}} \quad \text{لأن } x>0 \text{ اذن } \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$$

$$= \frac{x^2(3-2x)}{2x(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$= \frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

إذن إشارة $f'(x)$ على $]0\,;\,1[$ هي إشارة $3-2x$ فقط لأن $\begin{cases} x>0 \\ (1-x)^2>0 \\ \sqrt{\frac{1-x}{x}}>0 \end{cases}$

منه جدول إشارة $f'(x)$

x	0		1		$3/2$		$+\infty$
$3-2x$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0\,;\,1[$:

x	0	$\rightarrow$	1
$f'(x)$	$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \sqrt{1/y} = +\infty$$

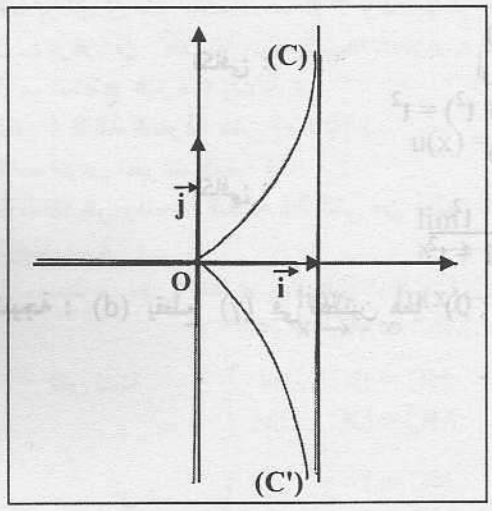
3 ــ معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $1/2$ تكتب من الشكل

$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1/2}} = \frac{1}{2(1/4)}\sqrt{1} = 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1/8}{1/2}} = \sqrt{1/4} = 1/2 \end{cases}$$

منه معادلة (T) : $\quad y = 2\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$

أي : $\quad y = 2x - \frac{1}{2}$



4 ــ **الإنشاء :**

5 ــ لدينا معادلة المنحنى (C') هي : $y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

حيث $x \in [0\,;\,1[$

إذن تكون $M(x\,;\,y)$ تنتمي إلى $(C) \cup (C')$ إذا وفقط إذا كان $M \in (C)$ أو $M \in (C')$

أي تكون $M(x\,;\,y)$ تنتمي إلى (γ) إذا وفقط إذا كان

$y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ أو $y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

أي : $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$

أي : $y^2(1 - x) = x^3$

أي : $y^2 - x\,y^2 = x^3$

أي : $y^2 = x^3 + x\,y^2$

أي : $y^2 = x(x^2 + y^2)$

أي : $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$ و هو المطلوب .

6 ــ $I(1 ; 0)$ إذن $OI = 1$ منه نصف قطر الدائرة (E) هو $1/2$ و مركزها $w(1/2 ; 0)$ إذن معادلتها

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

أي : $x^2 + y^2 - x = 0$ معادلة (E)

لاحظ أن مماس الدائرة (E) عند النقطة I هو المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = 1$ (مقارب للمنحنى (C))

(d) يشمل المبدأ و معامل توجيهه t إذن معادلته تكتب من الشكل $y = t\,x$

لتكن $M(x ; y)$ نقطة من (d) أي $M(x ; t\,x)$

تكون M نقطة من (E) إذا وفقط إذا كان : $x^2 + (t\,x)^2 - x = 0$

أي : $x^2 + t^2\,x^2 - x = 0$

أي : $x^2(1 + t^2) - x = 0$

أي : $x\,[(1 + t^2)\,x - 1] = 0$

أي : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$

منه (d) يقطع (E) في نقطتين هما $O(0 ; 0)$ و $M\left(\frac{1}{1+t^2} ; \frac{t}{1+t^2}\right)$

7 ــ لتكن $M'(x ; y)$ نقطة من (d) إذن $M'(x ; t\,x)$

تكون M' نقطة من (γ) إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x \in [0 ; 1[\\ (1) \ldots\ldots x(x^2 + t^2\,x^2) - t^2\,x^2 = 0 \end{cases}$

المعادلة (1) تكافئ : $x^3 + t^2\,x^3 - t^2\,x^2 = 0$

تكافئ : $x^2(x + t^2\,x - t^2) = 0$

تكافئ : $\begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{أو} \\ x + t^2\,x - t^2 = 0 \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x(1 + t^2) = t^2 \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ الحلين مقبولين لأنهما ينتميان إلى المجال $[0 ; 1[$

نتيجة : (d) يقطع (γ) في نقطتين هما $O(0 ; 0)$ و $M'\left(\frac{t^2}{1+t^2} ; \frac{t^3}{1+t^2}\right)$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

$(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي .

نعتبر الدالة u المعرفة على IR بـــ $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ و (C) منحناها البياني في المعلم $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ عين نهاية الدالة u عند $-\infty$

2 ــ بين أن من أجل كل x من IR لدينا : $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

3 ــ استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$

4 ــ بين أن $[u(x) + 2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$ ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة .

5 ــ بين أن من أجل كل x من IR : $u(x) > 0$

6 ــ استنتج اشارة $[u(x) + 2x]$ ثم فسر النتائج هندسيا .

7 ــ نقبل أن الدالة u متناقصة تماما على IR . أرسم المنحنى (C) ومستقيمه المقارب المائل .

الحـــل ــ 1

1 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$

2 ــ من أجل كل x من IR لدينا $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$$= (\sqrt{x^2+1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ و هو المطلوب .

3 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} + x = +\infty$

4 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} [u(x) + 2x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x + 2x$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{u(x)}$$ لأن $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$ لأن $= 0$

التفسير الهندسي : $\lim\limits_{x \to -\infty} [u(x) + 2x] = 0$ أي $\lim\limits_{x \to -\infty} [u(x) - (-2x)] = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

5 ــ لندرس إشارة $u(x)$ على IR كما يلي :

$$u(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x \quad .....(1)$$

نميز حالتين :

الأولى : $x < 0$ في هذه الحالة المتراجحة (1) دائما محققة .

الثانية : $x \geq 0$ في هذه الحالة المتراجحة (1) تكافئ $x^2 + 1 > x^2$

تكافئ $1 > 0$ و هذا محقق دائما .

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي x فإن $u(x) > 0$

6 ــ لدينا : $u(x) + 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x + 2x$

$= \sqrt{x^2 + 1} + x$

لأن $\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ $u(x) =$

إذن : إشارة $u(x) + 2x$ هي إشارة $\frac{1}{u(x)}$ أي موجب تماما لأن $u(x) > 0$

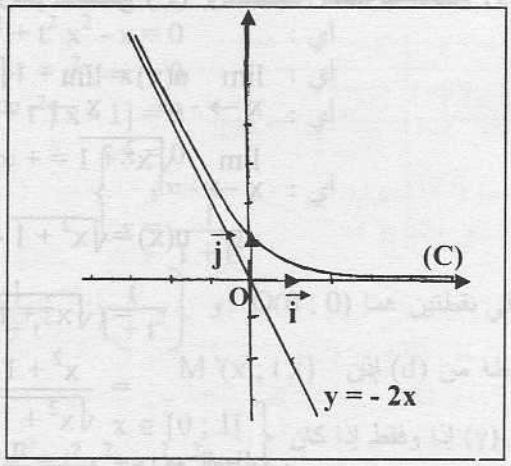
x	$-\infty$		0		$+\infty$
u(x)		$+\infty$		1	0

التفسير الهندسي : $[u(x) + 2x] > 0$ تكافئ $u(x) - (-2x) > 0$

أي المنحنى (C) يقع فوق المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = -2x$

7 ــ الانشاء : علما أن الدالة u متناقصة على IR نحصل على جدول التغيرات التالي :

منه المنحنى التالي :

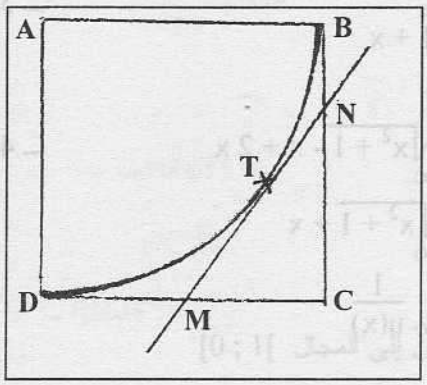


التمرين ــ 2

ABCD مربع ضلعه 1 .

(C) هو ربع الدائرة ذات المركز A و نصف القطر [AB] المرسوم داخل المربع .

T نقطة من (C) تختلف عن B و D مماس الدائرة (C) عند النقطة T يقطع [DC] في النقطة M و يقطع [BC] في النقطة N .



نضع $DM = x$ و $BN = y$

1ــ برهن أن ..... $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

2 ــ برهن أن .... $MN = x + y$

3 ــ استنتج عبارة y بدلالة x

لتكن f الدالة المعرفة على $]1 ; 0[$ **بـــ** $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

4 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

5 ــ ما هي وضعية النقطة M التي من أجلها تكون المسافة MN أصغر ما يمكن ؟

الحـــل ــ 2

1 ــ بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث MNC القائم في C نحصل على :

$MN^2 = MC^2 + NC^2$ ..... (1)

لكن لدينا : $\left.\begin{matrix} NC = BC - BN \\ MC = DC - DM \end{matrix}\right\}$

أي : $\left.\begin{matrix} NC = 1 - y \\ MC = 1 - x \end{matrix}\right\}$ لأن $\left.\begin{matrix} BC = DC = 1 \\ BN = y \text{ و } DM = x \end{matrix}\right\}$

إذن المساواة (1) تصبح : $MN^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2$

أي : $MN^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2$

أي : $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ و هو المطلوب .

2 ــ حسب الشكل لدينا : $MN = MT + TN$ ..... (2) و المماس (MN) عمودي على (AT)

لنبحث عن كل من MT و TN :

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ATN القائم في T نحصل على :

$AN^2 = AT^2 + TN^2$ أي : $AN^2 = 1 + TN^2$ ..... (α)

لأن : AT هو نصف قطر الدائرة (C) أي $AT = 1$

من جهة أخرى بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ABN القائم في B فإن :

$AN^2 = AB^2 + BN^2$ أي : $AN^2 = 1 + y^2$ ..... (β)

بمقارنة العلاقتين (α) و (β) نحصل على : $1 + TN^2 = 1 + y^2$

أي : $TN^2 = y^2$

منه : $TN = y$ .....(3)

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ATM القائم في T نحصل على :

$AM^2 = AT^2 + MT^2$ أي $AM^2 = 1 + MT^2$ ..... (γ)

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث AMD القائم في D نحصل على :

$AM^2 = AD^2 + DM^2$ أي : $AM^2 = 1 + x^2$ ..... (λ)

بمقارنة العلاقتين (γ) و (λ) نحصل على : $1 + MT^2 = 1 + x^2$

أي : $MT^2 = x^2$

أي : $MT = x$ .....(4)

بتعويض كل من MT و TN في العلاقة (2) نحصل على :

$MN = x + y$ و هو المطلوب .

3 ــ لدينا : $\left.\begin{array}{l} MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \\ MN = x + y \end{array}\right\}$

أي : $(x + y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

أي : $x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

أي : $2xy = -2x - 2y + 2$

أي : $2xy + 2y = 2 - 2x$

أي : $2y(x + 1) = 2(1 - x)$

أي : $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ حيث $1 + x \neq 0$ لأن $0 < x < 1$.

وهي عبارة y بدلالة x.

4 ــ تغيرات الدالة f على الـه جال$]1 ; 0[$

f دالة ناطقة إذن معرفة و قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها $IR - \{-1\}$ و خاصة على المجال $]1 ; 0[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2x(1 + x) - (1 + x^2)}{(1 + x)^2}$$

$$= \frac{2x + 2x^2 - 1 - x^2}{(1 + x)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(1 + x)^2}$$ من إشارة $x^2 + 2x - 1$ لأن المقام موجب

إشارة $x^2 + 2x - 1$:

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	

إذن : إشارة $f''(x)$ على المجال $]0\,;1[$ كما يلي :

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0\,;1[$:

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$2\sqrt{2}-2$	↗	1

$f(0)=1$

$f(1)=\dfrac{1+1}{1+1}=1$

$f(\sqrt{2}-1)=\dfrac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}-1+1}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$

5 ــ لدينا : $MN=x+y$ و $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

أي : $MN=x+\dfrac{1-x}{1+x}$

أي : $MN=\dfrac{x+x^2+1-x}{1+x}$

أي : $MN=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

أي : $MN=f(x)$

نتيجة : تكون المسافة MN أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كانت $f(x)$ قيمة حدية صغرى على المجال $]0\,;1[$ و حسب جدول التغيرات فإن هذا محقق من أجل $x=\sqrt{2}-1$

وعليه تكون المسافة MN أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كانت المسافة بين النقطة D و النقطة M هي $\sqrt{2}-1$ أي $x=\sqrt{2}-1$

التمرين ــ 3

لتكن f_m دالة معرفة بـــ $f_m(x)=\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$

حيث m وسيط حقيقي غير معدوم.

1 ــ ادرس تغيرات الدالة f_m .

2 ــ استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_m) الممثل للدالة f_m .

3 ــ بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) .

4 ــ ما هو المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيات (1 ; 4) .

الحـــل ــ 3

1 ــ دراسة تغيرات الدالة f_m :

f_m معرفة من أجل : $x^2-mx-3\neq 0$

$\Delta=m^2+12>0$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2+12}}{2} \\ x_2=\dfrac{m+\sqrt{m^2+12}}{2} \end{cases}$$

لاحظ أن من أجل كل n من IR فإن $x_1<x_2$ لأن $x_1-x_2=\dfrac{-2\sqrt{m^2+12}}{2}<0$

إذن : f_m معرفة على $]-\infty ; x_1[\cup]x_1 ; x_2[\cup]x_2 ; +\infty[$

لاحظ أن : $f_m(x) = \dfrac{x^2 - m\,x - 3 - 12}{x^2 - m\,x - 3} = 1 - \dfrac{12}{x^2 - m\,x - 3}$

إذن :

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = 1$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_1} f_m(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 1 - \frac{12}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_1} f_m(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} 1 - \frac{12}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_2} f_m(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} 1 - \frac{12}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_2} f_m(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 1 - \frac{12}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = 1$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - m\,x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$		

f_m دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f_m'(x) = \frac{(2x - m)(x^2 - m\,x - 3) - (2x - m)(x^2 - m\,x - 15)}{(x^2 - m\,x - 3)^2}$$

$$= \frac{2x - m}{(x^2 - m\,x - 3)^2} \times (x^2 - m\,x - 3 - x^2 + m\,x + 15)$$

$$= \frac{12(2x - m)}{(x^2 - m\,x - 3)^2}$$

إذن : إشارة $f_m'(x)$ هي إشارة $2x - m$ لأن المقام موجب .

x	$-\infty$		x_1		$m/2$		x_2		$+\infty$
$2x - m$		$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f_m :

x	$-\infty$		$\frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$		$\frac{m}{2}$		$\frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$f_m(m/2)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1

$$f_m\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{\frac{m^2}{4} - m\left(\frac{m}{2}\right) - 15}{\frac{m^2}{4} - m\left(\frac{m}{2}\right) - 3} = \frac{\frac{m^2 - 2\,m^2 - 60}{4}}{\frac{m^2 - 2\,m^2 - 12}{4}} = \frac{m^2 - 2\,m^2 - 60}{m^2 - 2\,m^2 - 12}$$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة f_m نستنتج معادلات المستقيمات المقاربة كما يلي :

المستقيم ذو المعادلة $x = \dfrac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ مقارب عمودي .

المستقيم ذو المعادلة $x = \dfrac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ مقارب عمودي .

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

3 ــ لتكن $M(\alpha ; \beta)$ نقطة من المستوي .

تكون M تنتمي إلى كل لمنحنيات (C_m) إذا و فقط إذا تحقق أن :

من أجل كل m من IR فإن : $f_m(\alpha) = \beta$

أي من أجل كل m من IR : $\dfrac{\alpha^2 - m\,\alpha - 15}{\alpha^2 - m\,\alpha - 3} = \beta$

أي من أجل كل m من IR : $\alpha^2 - m\alpha - 15 = \beta(\alpha^2 - m\alpha - 3)$

أي من أجل كل m من IR : $\alpha^2 - \beta\alpha^2 - 15 + 3\beta + m(\alpha\beta - \alpha) = 0$

أي بالمطابقة : $\begin{cases} \alpha^2 - \beta\alpha^2 - 15 + 3\beta = 0 \quad \ldots\ldots(1) \\ \alpha\beta - \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$

المعادلة (2) تكافئ $\alpha(\beta - 1) = 0$ أي ($\alpha = 0$ أو $\beta = 1$)

✓ من أجل $\alpha = 0$ المعادلة (1) تصبح : $-15 + 3\beta = 0$ أي $\beta = 5$

✓ من أجل $\beta = 1$ المعادلة (1) تصبح $-15 + 3 = 0$ مستحيل .

نتيجة : $\alpha = 0$ و $\beta = 5$

خلاصة : توجد نقطة وحيدة M احداثياتها $M(0 ; 5)$ تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) . (من أجل أي قيمة لـــ m) .

4 ــ تكون النقطة ذات الإحداثيات (1 ;4) تنتمي إلى المنحنى (C_m) إذا و فقط إذا كان $f_m(4) = 1$

أي : $\frac{16 - 4m - 15}{16 - 4m - 3} = 1 \Leftrightarrow 16 - 4m - 15 = 16 - 4m - 3$

$\Leftrightarrow -15 = -3$ مستحيل

إذن : لا يوجد أي منحنى يشمل النقطة ذات الإحداثيات (1 ;4)

ملاحظة : يمكن الاجابة على هذا السؤال بملاحظة جدول تغيرات الدالة f_m

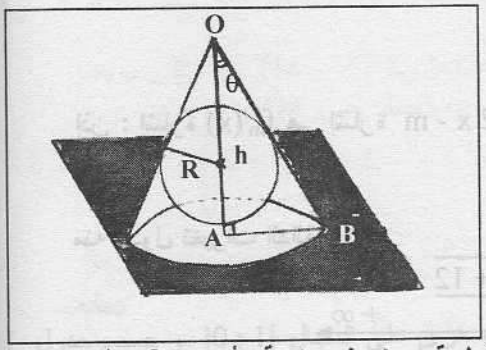
حيث $f_m(x)$ لا يأخذ أبدا القيمة 1 مهما كان العدد الحقيقي m .

التمرين ــ 3

نضع كرة ذات نصف القطر R داخل مخروط دوراني قياس نصف زاوية رأسه هي θ حيث $0 < \theta < \pi/2$

نفرض أن الكرة و المخروط الدوراني متماسان و نقبل أن حجمه ν يحقق العلاقة :

$$\nu = \frac{\pi R^3 (1 + \sin\theta)^2}{3\sin\theta(1 - \sin\theta)}$$



1 ــ برهن أن الارتفاع h و الحجم ν للمخروط الدوراني يحققان العلاقة :

$$\nu = \frac{\pi h^3}{3}\tan^2\theta$$

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على]0 ; 1[بـــ $f(x) = \frac{(1 + x)^2}{x(1 - x)}$

3 ــ استنتج أنه يوجد مخروط دوراني له أصغر حجم ممكن نرمز له بـــ ν_0 من أجل قيس نصف زاوية رأسه θ_0 يطلب تعيين كل من θ_0 و ν_0 .

4 ــ أحسب الارتفاع h_0 للمخروط الدوراني الذي له أصغر حجم .

الحـــل ــ 3

1 ــ لدين $\nu = \frac{1}{3}Sh$ حيث $\begin{cases} S : \text{مساحة قاعدة المخروط الدوراني .} \\ h : \text{ارتفاع المخروط الدوراني .} \end{cases}$

و حسب الشكل فإن : $S = \pi AB^2$ حيث [AB] هو نصف قطر قاعدة المخروط .

من جهة أخرى لدينا : $\tan\theta = \frac{AB}{h}$ لأن المثلث OAB قائم في A .

أي : $AB = h\tan\theta$

منه : $S = \pi(h\tan\theta)^2$ أي $S = \pi h^2\tan^2\theta$

إذن : $\nu = \frac{1}{3}(\pi h^2\tan^2\theta) \times h$

أي : $\nu = \frac{\pi h^3}{3}\tan^2\theta$ و هو المطلوب .

2 ــ تغيرات الدالة f على المجال]0 ; 1[

f دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و خاصة على]0 ; 1[و دالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2(1 + x)x(1 - x) - (1 - 2x)(1 + x)^2}{[x(1 - x)]^2}$$

$$= (1+x) \times \frac{2x - 2x^2 - (1 + x - 2x - 2x^2)}{[x(1-x)]^2}$$

$$= (1+x) \times \frac{3x - 1}{[x(1-x)]^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1+x)(3x-1)$ لأن المقام موجب

x	$-\infty$		-1		$1/3$		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$			
$3x-1$				$-$	0	$+$	
$(1+x)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0\,;\,1[$

x	0		$1/3$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

3 ــ لاحظ أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى محلية على المجال $]0\,;\,1[$ و هي 8 من أجل $x = 1/3$

إذا وضعنا $x = \sin\theta$ نحصل على $v = \frac{\pi R^3}{3} \times \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$ حيث $0 < x < 1$ لأن $0 < \theta < \pi/2$

$$v = \frac{\pi R^3}{3} \quad f(x) \qquad \text{أي}$$

منه : يكون v أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $f(x)$ أصغر ما يمكن

و حسب تغيرات الدالة f فإن هذا محقق من أجل $x = 1/3$

أي : $\sin\theta = 1/3$ إذن θ_0 هي الزاوية التي تحقق $\left.\begin{array}{l} 0 < \theta_0 < \pi/2 \\ \sin\theta_0 = 1/3 \end{array}\right\}$

و في هذه الحالة لدينا $v_0 = \frac{\pi R^3}{3} f(1/3)$ أي $v_0 = \frac{8}{3}\pi R^3$

4 ــ حسب العلاقة $v = \frac{\pi h^3}{3}\tan^2\theta$ فإن : $v_0 = \frac{\pi h^3}{3}\tan^2\theta_0$

أي : $\frac{8\pi R^3}{3} = \frac{\pi h_0^3}{3}\tan^2\theta_0$

أي : $8R^3 = h_0^3 \tan^2\theta_0$

أي : $h_0^3 = \frac{8R^3}{\tan^2\theta_0}$ ..... (1)

لكن $\sin\theta_0 = 1/3$ إذن : $\sin^2\theta_0 = 1/9$

و لدينا : $\cos^2\theta_0 = 1 - \sin^2\theta_0$ أي $\cos^2\theta_0 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

إذن : $\tan^2\theta_0 = \frac{\sin^2\theta_0}{\cos^2\theta_0}$ أي $\tan^2\theta_0 = \frac{1/9}{8/9} = \frac{1}{8}$

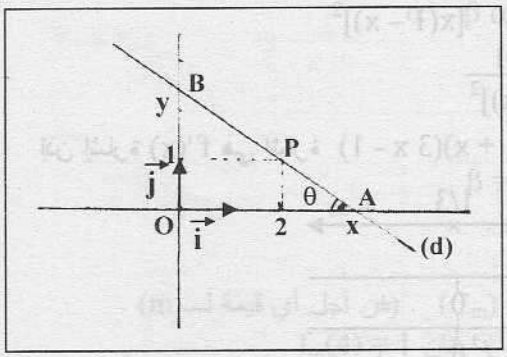
منه العلاقة (1) تصبح : $h_0^3 = \frac{8R^3}{1/8}$

أي : $h_0^3 = 64R^3$

أي : $h_0^3 = (4R)^3$

منه : $h_0 = 4R$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 5



المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

نعتبر النقطة p ذات الاحداثيات (1 ; 2)

(d) مستقيم يشمل p ويقطع كل من (ox) و (oy) في النقطتين A و B على الترتيب حيث ترتيب النقطة B يكون أكبر من 1

نضع θ القيس بالراديان للزاوية $\widehat{OAB}$ حيث $0 < \theta < \pi/2$

1 ــ أحسب بدلالة $\tan\theta$ كل من فاصلة النقطة A و ترتيب النقطة B

2 ــ استنتج عبارة مساحة المثلث OAB بدلالة $\tan\theta$

لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x)$

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f

4 ــ استنتج أصغر مساحة ممكنة للمثلث OAB

الحـــل ــ 5

1 ــ لتكن x فاصلة النقطة A و y ترتيب النقطة B .

حسب الشكل لدينا : $\tan\theta = \frac{1}{x-2}$ منه : $(x - 2)\tan\theta = 1$

أي : $x\tan\theta = 1 + 2\tan\theta$

أي : $x = \frac{1}{\tan\theta} + 2$ و هو المطلوب .

حسب الشكل دائما : $\tan\theta = \frac{y-1}{2}$ منه : $2\tan\theta = y - 1$

أي : $y = 1 + 2\tan\theta$ و هو المطلوب .

2 ــ مساحة المثلث OAB هي : $S = \frac{1}{2}xy$ أي $S = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{\tan\theta})(1 + 2\tan\theta)$

3 ــ تغيرات الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و خاصة على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}(1 + 2x) + 2(2 + \frac{1}{x})$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 4 + \frac{2}{x}$$

$$= 4 - \frac{1}{x^2}$$

$= \frac{4x^2 - 1}{x^2}$ من اشارة $4x^2 - 1$ لأن المقام موجب .

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2 - 1$		+	0	−	0	+	

جدول تغيرات الدالة f على $]0 ; +\infty[$:

x	0		$1/2$		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

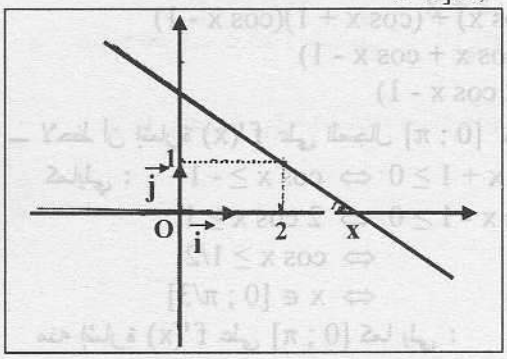
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x) = +\infty$$

$$f(1/2) = (2 + 2)(1 + 1) = 8$$

4 ــ حسب السؤال (2) لدينا مساحة المثلث OAB هي $S = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{\tan\theta})(1 + 2\tan\theta)$

نضع $\tan\theta = x$ حيث $0 < \theta < \pi/2$ إذن : $\tan\theta > 0$ أي : $x \in]0 ; +\infty[$



منه : عبارة المساحة S تصبح : $S = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{x})(1 + 2x)$

حيث $x = \tan\theta$

أي : $S = \frac{1}{2} f(x)$

نتيجة : بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى على المجال $]0 ; +\infty[$ و هي 8 من أجل $x = 1/2$ فإن المساحة S تكون أصغر ما يمكن من أجل $x = 1/2$ و $f(x) = 8$

أي $S = 1/2 \times 8$ أي $S = 4$

و لدينا $x = 1/2$ أي $\tan\theta = 1/2$ و $0 < \theta < \pi/2$

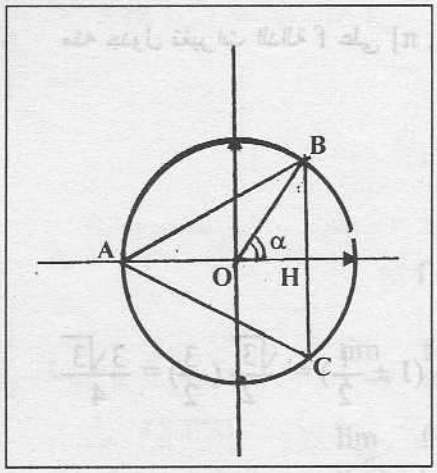
التمرين ــ 6

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A(- 1 ; 0) حيث ترتيب و فاصلة النقطة B موجبين معا و النقط A , B , C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1 .

نسمي H المسقط العمودي للنقطة B على محور الفواصل .

ليكن α قيسا رئيسيا موجبا بالراديان للزاوية $(\vec{I} ; \vec{OB})$



1 ــ عين احداثيات النقطة B .

2 ــ عبر عن المسافتين BH و AH بدلالة α

3 ــ استنتج عبارة مساحة المثلث ABC بدلالة α

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0 ; \pi]$ بـــ $f(x) = \sin x - \cos x$

4 ــ برهن أن من أجل كل x من $[0 ; \pi]$: $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

5 ــ استنتج أن من أجل كل x من $[0 ; \pi]$: $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

6 ــ أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi]$

7 ــ برهن أنه توجد قيمة للعدد α التي من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن المطلوب تحديدها .

الحـــل ــ 6

1 ــ بما أن نصف قطر الدائرة هو 1 فإن يمكن اعتبارها دائرة مثلثية .

و عليه فاصلة النقطة B هو $\cos\alpha$ و ترتيبها هو $\sin\alpha$ لأن النقطة B تنتمي إلى الدائرة المثلثية أي $B(\cos\alpha ; \sin\alpha)$

2 ــ حسب الشكل لدينا $AH = 1 + OH$ منه $AH = 1 + \cos\alpha$

و BH هو ترتيب النقطة B أي $BH = \sin\alpha$

3 ــ لاحظ أن مساحة المثلث ABC هي ضعف مساحة المثلث AHB

مساحة المثلث AHB هي : $\frac{1}{2} AH \times HB$ (قائم الزاوية في H)

أي : مساحة المثلث ABC هي : $S = 2 \times (\frac{1}{2} AH \times HB)$

أي : $S = AH \times HB$

منه : $S = \sin\alpha(1 + \cos\alpha)$ و هو المطلوب

4 ــ الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و خاصة على $[0 ; \pi]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin x \times \sin x$$
$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$
لأن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $$= \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$
$$= \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$
وهو المطلوب $$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

5 ــ لدينا من أجل كل x من $[0 ; \pi]$: $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$ .....(1)

$= (\cos^2 x + \cos x) + (\cos^2 x - 1)$

$= \cos x (1 + \cos x) + (\cos x + 1)(\cos x - 1)$

$= (\cos x + 1)(\cos x + \cos x - 1)$

$= (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$ وهو المطلوب

6 ــ لاحظ أن إشارة $f'(x)$ على المجال $[0 ; \pi]$ هي إشارة $(\cos x + 1)(2\cos x - 1)$

كمايلي : $\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$ و هذا محقق دائما .

$2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos x \geq 1$

$\Leftrightarrow \cos x \geq 1/2$

$\Leftrightarrow x \in [0 ; \pi/3]$

منه إشارة $f'(x)$ على $[0 ; \pi]$ كما يلي :

x	0		$\pi/3$		π
$\cos x + 1$		+		+	0
$2\cos x - 1$	+	0	−		
$f'(x)$	+	0	−		0

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi]$:

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

$f(0) = \sin 0(1 + \cos 0) = 0$

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3}(1 + \cos\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$f(\pi) = \sin\pi(1 + \cos\pi) = 0$

7 ــ حسب السؤال (3) لدينا مساحة المثلث ABC هي : $S = \sin\alpha(1 + \cos\alpha)$

بوضع $x = \alpha$ نحصل على $S = \sin x(1 + \cos x)$ مع $0 < x < \pi$

أي : $S = f(x)$

و حسب السؤال (6) فإن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى محلية على المجال $]0 ; \pi[$ قيمتها $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

و ذلك من أجل $x = \pi/3$:

إذن : مساحة المثلث ABC تكون أكبر ما يمكن من أجل $\alpha = \pi/3$ و تقدر في هذه الحالة بـــ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

التمرين ــ 7

f دالة معرفة على $IR - \{-2\}$ بـــ : $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x + 2)}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$.

1 ــ برهن أن يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل x من $IR - \{-2\}$:

$$f(x) = a(x - 1)^2 + \frac{b}{x + 2}$$

2 ــ أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

3 ــ أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

نسمي (γ) القطع المكافئ ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$ حيث $x \neq -2$

P و M نقطتان من (γ) و (C) على الترتيب لهما نفس الفاصلة x

4 ــ عين مركبتي الشعاع $\overrightarrow{PM}$

5 ــ استنتج أن لما x يؤول إلى $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ فإن المسافة PM تؤول إلى 0 ثم فسر هندسيا هذه النتيجة .

6 ــ أرسم كل من (γ) و (C)

الحـــل ــ 7

1 ــ ليكن $x \in IR - \{-2\}$ أدينا :

$$a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2} = \frac{(a x^2 - 2 a x + a)(x+2) + b}{x+2}$$

$$= \frac{a x^3 + 2 a x^2 - 2 a x^2 - 4 a x + a x + 2 a + b}{x+2}$$

$$= \frac{a x^3 - 3 a x + 2 a + b}{x+2}$$

$$= \frac{2(a x^3 - 3 a x + 2 a + b)}{2(x+2)}$$

$$= \frac{2 a x^3 - 6 a x + 4 a + 2 b}{2(x+2)}$$

نتيجة : يكون $f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$ من أجل كل x من $IR - \{-2\}$

إذا وفقط إذا كان : $\begin{cases} 2a = 1 \\ 6a = 3 \\ 4a + 2b = -6 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a = 1/2 \\ a = 1/2 \\ 2b = -6 - 4a \end{cases}$

أي : $\begin{cases} a = 1/2 \\ 2b = -6 - 2 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -4 \end{cases}$

أخيرا : من أجل كل $x \in IR - \{-2\}$ فإن : $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2}$

2 ــ النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{4}{x+2} = \lim_{y \to 0} \frac{9}{2} - \frac{4}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{4}{x+2} = \lim_{y \to 0} \frac{9}{2} - \frac{4}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} = +\infty$$

3 ــ التغيرات : الدالة f ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(2x + 4) - 2(x^3 - 3x - 6)}{[2(x+2)]^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 12x^2 - 6x - 12 - 2x^3 + 6x + 12}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 12x^2}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x^2(x+3)}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2(x+3)$ لأن المقام موجب كمايلي :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
x^2		+		+	‖	+	0	+	
$x+3$		-	0	+		+		+	
$x^2(x+3)$		-	0	+	‖	+	0	+	

منه إشارة $f'(x)$ على D_f :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-3/2$	↗	$+\infty$

$$f(-3) = \frac{-27+9-6}{-2} = 12$$

$$f(0) = -6/4 = -3/2$$

4 ــ $P \in (C)$ إذن : احداثيات P هي $(x ; f(x))$ أي : $P(x ; \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2})$ حيث $x \neq -2$

$M \in (\gamma)$ إذن : احداثيات M هي $M(x ; \frac{1}{2}(x-1))$ حيث $x \neq -2$

منه

$$\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} x - x \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 - [\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2}] \end{pmatrix}$$

أي : $\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{x+2} \end{pmatrix}$ مع $x \neq -2$

5 ــ لما x يؤول إلى $-\infty$ أو $+\infty$ لدينا $\frac{4}{x+2}$ يؤول إلى 0 منه مركبات الشعاع $\overrightarrow{PM}$ هي $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ حيث α يؤول إلى 0

و عليه $PM = \sqrt{0+\alpha^2}$ أي $PM = \sqrt{\alpha^2}$ مع α يؤول إلى 0

إذن : لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ فإن المسافة PM تؤول إلى 0

أي : كلما اقترب العدد x من $-\infty$ أو $+\infty$ فإن النقطة P تقترب أكثر فأكثر من النقطة M لأن المسافة بينهما تقترب من 0

و هندسيا فإن المنحنى (C) يقترب من المنحنى (γ) لما x يقترب من $+\infty$ أو $-\infty$.

6 ــ **الانشاء :** لانشاء المنحنيين (C) و (γ) ندرس الوضعية النسبية لـــ (C) بالنسبة إلى (γ) كمايلي :

$$f(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{-4}{x+2}$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\frac{-4}{x+2}$		$+$	‖	$-$	

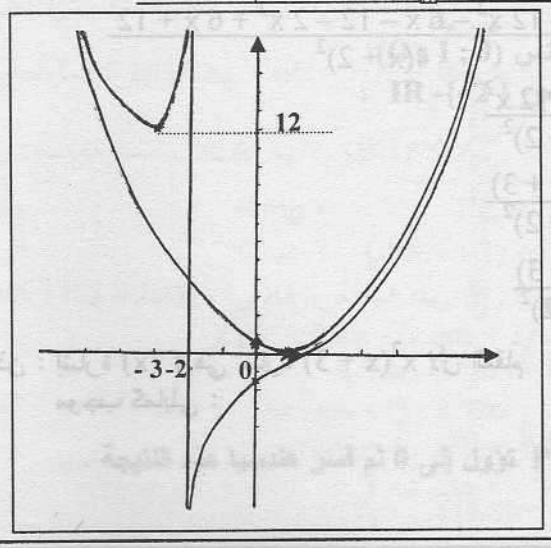
لما $x \in]-\infty ; -2[$ (C) فوق (γ)

لما $x \in]-2 ; +\infty[$ (C) تحت (γ)

لندرس تغيرات الدالة $g : x \longmapsto \frac{1}{2}(x-1)^2$

$g'(x) = x - 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



منه الانشاء كما يلي :

التمرين ــ 8

λ عدد حقيقي موجب تماما . f_λ دالة معرفة على المجال $I =]0 ; +\infty[$ بـ $f_\lambda(x) = x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$

و (C_λ) منحناها في معلم .

1 ــ أدرس نهايتي الدالة f_λ على حدود المجال I .

2 ــ برهن أن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_λ) يطلب معادلته ووضعيته النسبية بالنسبة إلى المنحنى (C_λ) .

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f_λ على المجال I .

4 ــ برهن أن الدالة f_λ تقبل قيمة حدية تبلغها عند عدد حقيقي x_λ .

لتكن P_λ النقطة من (C_λ) التي فاصلتها x_λ .

5 ــ برهن أن مجموعة النقط P_λ محتواة في المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{16}{9}x$

الحـــل ــ 8

1 ــ $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2\lambda}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\lambda}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\lambda^2}{x^3} = 0$

2 ــ لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f_\lambda(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$

$= 0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_λ) في جوار $+\infty$

الوضعية النسبية لـــ (C_λ) و المستقيم المقارب المائل :

$$f_\lambda(x) - x = \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$$

بما أن $\lambda > 0$ و $x \in]0 ; +\infty[$

فإن : $\frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} > 0$

أي : المنحنى (C_λ) يقع دائما فوق المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x$

التغيرات :

f_λ دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها خاصة على المجال $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f_\lambda'(x) = 1 + \frac{-2\lambda}{x^2} + \frac{-3\lambda^2 x^2}{x^6}$$

$$= 1 + \frac{-2\lambda}{x^2} + \frac{-3\lambda^2}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2}{x^4}$$

إذن إشارة $f_\lambda'(x)$ هي إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ لأن المقام موجب لندرس إذن إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ كمايلي :

نضع $\alpha = x^2$ حيث $\alpha \geq 0$

إذن : ندرس إشارة كثير الحدود $\alpha^2 - 2\lambda\alpha - 3\lambda^2$ ذات المجهول α الموجب .

$$\Delta = 4\lambda^2 + 12\lambda^2 = 16\lambda^2 = (4\lambda)^2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\lambda - 4\lambda}{2} = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda \\ \alpha_2 = \frac{2\lambda + 4\lambda}{2} = \frac{6\lambda}{2} = 3\lambda \end{cases}$$

نتيجة : $\alpha^2 - 2\lambda\alpha - 3\lambda^2 = (\alpha + \lambda)(\alpha - 3\lambda)$

منه : $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2 = (x^2 + \lambda)(x^2 - 3\lambda)$

إذن إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ هي إشارة الجداء $(x^2 + \lambda)(x^2 - 3\lambda)$ كمايلي :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3\lambda}$		0		$\sqrt{3\lambda}$		$+\infty$
$\lambda > 0$ مع $x^2 + \lambda$					$+$				
$x^2 - 3\lambda$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
الجداء		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

منه جدول إشارة $f_\lambda'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

x	0		$\sqrt{3\lambda}$		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : جدول تغيرات الدالة f_λ كما يلي :

x	0		$\sqrt{3\lambda}$		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	↘	$f_\lambda(\sqrt{3\lambda})$	↗	$+\infty$

$$f_\lambda(\sqrt{3\lambda}) = \sqrt{3\lambda} + \frac{2\lambda}{\sqrt{3\lambda}} + \frac{\lambda^2}{3\lambda\sqrt{3\lambda}} = \sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}$$

4 ــ حسب جدول التغيرات فإن الدالة f_λ تقبل قيمة حدية صغرى محلية هي $f_\lambda(\sqrt{3\lambda})$ تبلغها عند $x_\lambda = \sqrt{3\lambda}$

5 ــ لتكن (γ) مجموعة النقط P_λ ذات الفاصلة $x_\lambda \neq 0$

أي $P_\lambda\left(\sqrt{3\lambda} ; \sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}\right)$

لاحظ أن من أجل كل λ موجب تماما فإن $\sqrt{3\lambda} \neq 0$ إذن $x_\lambda \neq 0$

منه :

$$\frac{y_\lambda}{x_\lambda} = \frac{\sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}}{\sqrt{3\lambda}}$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{3\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3\lambda}}$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{9 + 6 + 1}{9}$$

$$= \frac{16}{9}$$

نتيجة : $\frac{y_\lambda}{x_\lambda} = \frac{16}{9}$ منه $y_\lambda = \frac{16}{9} x_\lambda$

إذن : مجموعة النقط $P_\lambda(x ; y)$ حيث $x = x_\lambda$ تحقق المعادلة $y = \frac{16}{9}x$ من أجل $x > 0$ لأن $\sqrt{3\lambda} > 0$

إذن : المجموعة (γ) جزء محتواة في المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{16}{9}x$

التمرين ــ 9

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ نسمي (C) منحناها في معلم .

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ عين الدالة المشتقة الثانية للدالة f ثم أدرس إشارتها .

3 ــ أكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

لتكن g الدالة المعرفة بـــ $g(x) = f(x) - x$

4 ــ بين أن يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1 ; 2[$ يحقق $g(\alpha) = 0$ ثم استنتج عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$

5 ــ لتكن (γ) مجموعة النقط $M(y ; x)$ من المستوي حيث $x \in IR$ و $y = f(x)$

أوجد طريقة هندسية لإنشاء مجموعة النقط (γ) باستعمال المنحنى (C)

6 ــ أنشئ كل من (C) و (γ) في نفس المعلم .

الحـــل ــ 9

1 ــ f معرفة على IR لأن من أجل كل x من IR فإن $x^2 + 1 > 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

لأن $x < 0$ إذن $|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

لأن $x > 0$ إذن $|x| = x$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$= 2$$

إذن :
- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $-\infty$
- المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \times x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

إذن : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من IR

منه : جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	2

لدينا : $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$\sqrt{\alpha} = \alpha^{1/2}$ فإن $\alpha > 0$ لأن من أجل $= \frac{1}{(x^2+1)(x^2+1)^{1/2}}$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$= (x^2+1)^{-3/2}$$

منه : $f''(x) = -\frac{3}{2}(2x)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}-1}$

$$= -3x(x^2+1)^{-5/2}$$

$$= \frac{-3x}{(x^2+1)^{5/2}}$$

$$= \frac{-3x}{(x^2+1)^2 \times \sqrt{x^2+1}}$$

منه : إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-3x$ لأن $(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1} > 0$ كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-3x$	+	0	-

نتيجة : إشارة $f''(x)$ على IR :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

3 ــ معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

حيث $\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = \frac{1}{1\sqrt{1}} = 1 \end{array}\right\}$

منه المعادلة هي : $y = x + 1$

4 ــ لتكن g الدالة المعرفة بـــ $g(x) = f(x) - x$

الدالة g هي مجموع الدالتين $x \longmapsto -x$ و $x \longmapsto f(x)$ المستمرتين على IR

إذن : g مستمرة على IR و خاصة على $]1 ; 2[$

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{4+1}} - 2 = -1 + \frac{2}{\sqrt{5}} < 0$$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [1 ; 2] \\ g(1) \times g(2) < 0 \end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α من المجال $]1 ; 2[$ حيث $g(\alpha) = 0$

هل α وحيد ؟

لندرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $]1 ; 2[$

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - 1$$

لاحظ أن : $\left.\begin{array}{l} x^2+1 > 1 \\ \sqrt{x^2+1} > 1 \end{array}\right\}$

إذن : $(x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 1$

أي : $\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 1$

منه : $\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$

أي : $g'(x) < 0$

منه : g متناقصة تماما على IR و خاصة على]1 ; 2[

إذن : العدد α وحيد .

خلاصة : يوجد α وحيد من المجال]1 ; 2[حيث $g(\alpha) = 0$ و عليه فإن المعادلة $f(x) - x = 0$ أي $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

إذن : منحنى الدالة f يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في نقطة وحيدة إحداثياتها $(\alpha ; \alpha)$ حيث $1 < \alpha < 2$

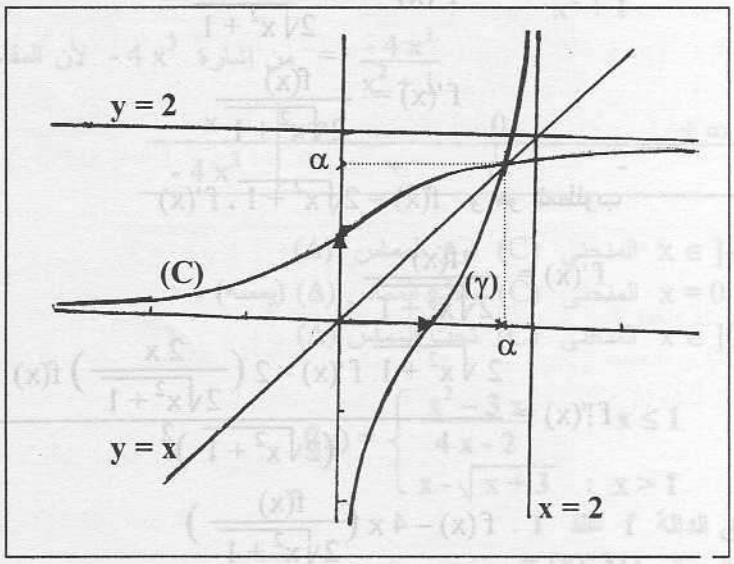
5 ــ لتكن $M(y ; x)$ تنتمي إلى (γ)

إذن $M'(x ; y)$ تنتمي إلى (C) لأن $y = f(x)$

نلاحظ أن النقطة M هي نظيرة النقطة M' بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

إذن : لإنشاء المجموعة (γ) يكفي إنشاء نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (لاحظ الشكل)

الإنشاء :



التمرين ــ 10

f دالة معرفة بـــ $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$

1 ــ عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2 ــ تحقق أن : $f(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1}$

3 ــ إستنتج أن : $4(x^2+1) f''(x) + 4x f'(x) - f(x) = 0$

الحـــل ــ 10

1 ــ

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \geq 0 \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ x + \sqrt{x^2+1} \geq 0 \ \ldots. (2) \end{cases}$$

المتراجحة (1) دائما محققة

المتراجحة (2) تكافئ $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ إذن : نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x > 0$

إذن : $-x < 0$ منه المتراجحة (2) دائما محققة لأن $\sqrt{x^2+1} > 0$

الحالة الثانية : $x \leq 0$

إذن : $-x \geq 0$ منه المتراجحة (2) تكافئ $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ حيث $-x \geq 0$

تكافئ $x^2+1 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$ و هذا محقق دائما

خلاصة : المتراجحتين (1) و (2) محققتين من أجل $x \in IR$

إذن : $D = IR$

2 ــ f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

أي :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

أي : $f(x) = 2\sqrt{x^2+1}\,.\,f'(x)$ و هو المطلوب

3 ــ حسب السؤال (2) لدينا :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

منه :

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}\ f'(x) - 2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) f(x)}{\left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

أي :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 4x\left(\frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{4(x^2+1)}$$

أي :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 4x\,f'(x)}{4(x^2+1)}$$

أي : $4(x^2+1)\,f''(x) = f(x) - 4x\,f'(x)$

أي : $4(x^2+1)\,f''(x) + 4x\,f'(x) - f(x) = 0$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 11

f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{3x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$ حيث α و β عددين حقيقيين .

نسمي (C) منحنى الدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ عين قيم α و β حتى يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 4x + 3$ مماسا لـــ (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
و ليكن (Δ) هذا المماس .
2 ــ أدرس الوضعية النسبية لـــ (C) و (Δ)

الحـل ــ 11

1 ــ معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = f'(0)x + f(0)$

بالمطابقة مع المعادلة $y = 4x + 3$ نحصل على :

$$\begin{cases} f'(0) = 4 \ldots\ldots (1) \\ f(0) = 3 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$f(0) = 3$ أي $\dfrac{3(0) + \alpha(0) + \beta}{0 + 1} = 3$ أي $\beta = 3$ منه $f(x) = \dfrac{3x^2 + \alpha x + 3}{x^2 + 1}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{(6x + \alpha)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + \alpha x + 3)}{(x^2 + 1)^2}$

منه : $f'(0) = \dfrac{(6(0) + \alpha)(0 + 1) - 0}{(0 + 1)^2} = \alpha$

إذن : $f'(0) = 4$ يكافئ $\alpha = 4$

خلاصة : $\alpha = 4$ و $\beta = 3$ إذن : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$

2 ــ الوضعية النسبية لـــ (C) و (Δ) :

$$f(x) - (4x + 3) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} - (4x + 3)$$

$$= \frac{3x^2 + 4x + 3 - 4x^3 - 4x - 3x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

$= \dfrac{-4x^3}{x^2 + 1}$ من إشارة $-4x^3$ لأن المقام موجب

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-4x^3$		$+$	0	$-$	

خلاصة : لما $x \in]-\infty ; 0[$ المنحنى (C) فوق المماس (Δ)
لما $x = 0$ المنحنى (C) يقطع المماس (Δ) (يمسه) .
لما $x \in]0 ; +\infty[$ المنحنى (C) تحت المماس (Δ)

لتمرين ــ 12

f دالة معرفة كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{4x - 2} & : x \leq 1 \\ x - \sqrt{x + 3} & : x > 1 \end{cases}$$

1 ــ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 1 .
2 ــ فسر هندسيا نتائج السؤال (1) .

الحـل ــ 12

من أجل $x \leq 1$ فإن $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{4x - 2}$

إذن : $f(1) = \dfrac{1 - 3}{4 - 2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

منه :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{x^2 - 3x}{4x - 2} - (-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 4x - 2}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^{<}} \frac{x^2 + x - 2}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^{<}} \frac{(x-1)(x+2)}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^{<}} \frac{x + 2}{4x - 2}$$

$$= \frac{1 + 2}{4 - 2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

من جهة أخرى :

$$\lim_{x \to 1^{>}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{>}} \frac{x - \sqrt{x+3} - (-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^{>}} \frac{x + 1 - \sqrt{x+3}}{x - 1} \times \frac{x + 1 + \sqrt{x+3}}{x + 1 + \sqrt{x+3}}$$

$$= \lim_{x \to 1^{>}} \frac{(x+1)^2 - (\sqrt{x+3})^2}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 1^{>}} \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 3}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 1^{>}} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 1^{>}} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 1^{>}} \frac{x + 2}{x + 1 + \sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{1 + 2}{1 + 1 + \sqrt{1+3}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

خلاصة : النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لا تقبل نهاية لما x يؤول إلى 1

إذن : الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 1 .

2 ــ التفسير الهندسي :

لدينا : $\lim_{x \to 1^{<}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$ إذن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يسار النقطة ذات الفاصلة 1 و معادلته $y = \frac{3}{2}(x - 1) + f(1)$ أي $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 1$

أي $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

و لدينا أيضا : $\lim_{x \to 1^{>}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{4}$ إذن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الفاصلة 1 و معادلته

$y = \frac{3}{4}(x - 1) + f(1)$ أي $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 1$

أي $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

التمرين ــ 13

f_m دالة عددية معرفة بـــ $f_m(x) = x + 1 + \frac{4}{(x+m)^2}$ حيث m وسيط حقيقي .

نسمي (C_m) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ لتكن Q نقطة من المستوي إحداثياها (1 ; 3) . ما هو عدد المنحنيات (C_m) التي تمر بالنقطة Q ؟.

يطلب تعيين قيم m الموافقة .

2 ــ أثبت أن مماس المنحنى (C_m) عند النقطة ذات الفاصلة (2 - m) موازي لحامل محور الفواصل .

3 ــ أكتب معادلات مماسات المنحنى (C_m) عند النقطة Q .

الحـــل ــ 13

أولا لنحدد مجموعة تعريف الدالة f_m كمايلي :

f_m معرفة من أجل $x + m \neq 0$ أي $x \neq -m$

منه : $D_{fm} =]-\infty ; -m[\cup]-m ; +\infty[$

1 ــ يكون المنحنى (C_m) يشمل النقطة Q(1 ; 3) إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} 1 \neq -m \\ 1 + 1 + \frac{4}{(1+m)^2} = 3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x \neq -m \\ f_m(1) = 3 \end{cases}$$

$$\text{أي} \quad \begin{cases} m \neq -1 \\ 2 + \frac{4}{(1+m)^2} = 3 \ldots\ldots (\alpha) \end{cases}$$

لنحل المعادلة (α) ذات المجهول m كمايلي :

$$(\alpha) \Leftrightarrow \frac{2(1+m)^2 + 4}{(1+m)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3(1+m)^2 = 2(1+m)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow (1+m)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m = 2 \\ \text{أو} \\ 1 + m = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \quad (\text{مقبول يختلف عن } -1) \\ \text{أو} \\ m = -3 \quad (\text{مقبول يختلف عن } -1) \end{cases}$$

نتيجة : يوجد منحنيين يشملان النقطة Q(1 ; 3) و هما C_1 و C_{-3} أي من أجل $m = 1$ و $m = -3$

2 ــ الدالة f_m ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f_m'(x) = 1 + \frac{-2 \times 4(x+m)}{(x+m)^4}$$

$$= 1 - \frac{8}{(x+m)^3}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{x+m}\right)^3$$

منه : $f_m'(2-m) = 1 - \left(\frac{2}{2-m+m}\right)^3 = 1 - (1)^3 = 0$

إذن : معامل توجيه مماس المنحنى (C_m) عند النقطة ذات الفاصلة (2 - m) معدوم أي هذا المماس يوازي حامل محور الفواصل و معادلته $y = f(2-m)$

3 ــ يوجد منحنيان فقط يشملان النقطة Q(1 ; 3) كمايلي :

المنحنى الأول : (C_1) إذن $m = 1$

منه $f_1'(x) = 1 - \left(\frac{2}{x+1}\right)^3$

أي : $f_1'(1) = 1 - \left(\frac{2}{2}\right)^3 = 0$

منه : معادلة المماس للمنحنى (C_1) عند النقطة Q هي : $y = 3$ لأن $f_1'(1) = 0$ و $f_1(1) = 3$

المنحنى الثاني : (C_{-3}) إذن $m = -3$

منه $f_{-3}'(x) = 1 - \left(\frac{2}{x-3}\right)^3$

أي : $f_{-3}'(1) = 1 - \left(\frac{2}{-2}\right)^3 = 1 + 1 = 2$

منه : معادلة المماس للمنحنى (C_{-3}) عند النقطة Q هي : $y = 2(x-1) + 3$

أي من الشكل $y = 2x + 1$

التمرين ــ 14

لتكن العلاقتين $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} \quad \ldots\ldots (1) \\ x > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

1 ــ عين قيم x حتى تكون العلاقتان (1) و (2) تعرفان دالة عددية f .

2 ــ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

3 ــ أثبت أن المنحنى (C) لممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 يطلب معادلته .

4 ــ أحسب الدالة المشتقة للدالة f .

5 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

6 ــ عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$

7 ــ أنشئ (C)

الحـل ــ 14

1 ــ تكون العلاقتان (1) و (2) تعرفان دالة إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x \in [-2\,;\,2] \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

أي : $x \in]0\,;\,2]$ و هو المطلوب .

2 ــ

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2+\sqrt{4}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{4}{x}$$

$$= +\infty$$

3 ــ الدالة f معرفة على يسار 2 و $f(2) = \frac{2+\sqrt{4-4}}{2} = 1$

منه :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} - 1}{x-2}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2+\sqrt{4-x^2}-x}{x} \times \frac{1}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{2-x}{x(x-2)} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{x} + \frac{\sqrt{2-x} \times \sqrt{2+x}}{-x(2-x)}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{x} - \frac{1}{x} \times \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{x}\left(1 + \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)$$

$$= -\infty$$

إذن : المنحنى (C) يقبل نصف مماس شاقولي على يسار النقطة ذات الفاصلة 2 و معادلته $x = 2$

4 ــ f قابلة للاشتقاق على $]2 ; 0[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x - (2+\sqrt{4-x^2})}{x^2}$$

$$= \frac{-\left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2 + \sqrt{4-x^2}\right)}{x^2}$$

إذن : من أجل كل x من $]2 ; 0[$ فإن $f'(x) < 0$ لأن $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2 + \sqrt{4-x^2} > 0$

5 ــ التغيرات :

إشارة $f'(x)$:

x	0		2
f'(x)	‖	-	

جدول التغيرات :

x	0		2
f'(x)	‖	-	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	1

6 ــ تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 + \sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		+	0	−	0	+	

إذن : على المجال $[2 ; 0[$ لدينا :

x	0		$\sqrt{2}$		2
x^2-2	‖	−	0	+	

نميز حالتين كمايلي :

الحالة (1) $0 < x < \sqrt{2}$ إذن : $x^2 - 2 < 0$

منه : المعادلة $x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$ لا تقبل حلول في R .

الحالة (2) $\sqrt{2} \le x \le 2$ إذن : $x^2 - 2 \ge 0$

منه : المعادلة $x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$ تكافئ $(x^2-2)^2 = 4 - x^2$

أي : $x^4 - 4x^2 + 4 = 4 - x^2$

أي : $x^4 - 3x^2 = 0$

أي : $x^2(x^2-3)=0$

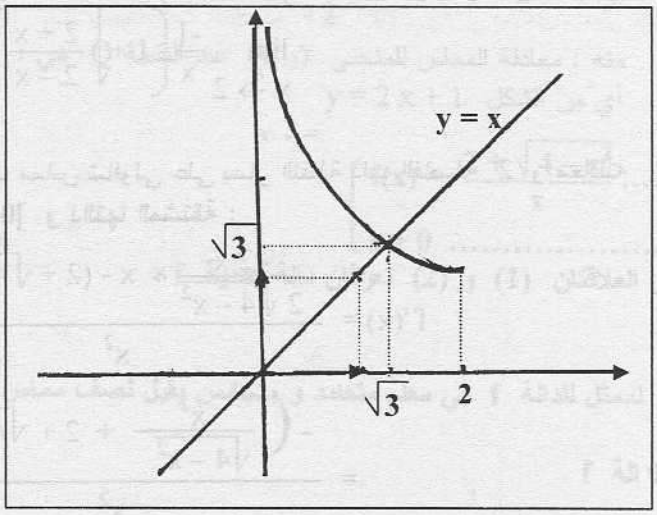
أي : $x=0$ أو $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

منه : المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $\sqrt{3}$ لأن الحلول الأخرى لا تنتمي إلى المجال $[\sqrt{2};2]$

خلاصة : المنحنى (C) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في نقطة وحيدة إحداثياها $(\sqrt{3};\sqrt{3})$.

تحقيق : $f(\sqrt{3})=\dfrac{2+\sqrt{4-3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

الإنشاء :



التمرين ــ 15

لتكن f دالة عددية معرفة بـــ $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^4}}{x}$

1 ــ عين D مجموعة تعريف الدالة f

2 ــ أحسب $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

3 ــ أثبت أن يوجد دالة عددية g مستمرة على المجال $[-1;1]$ حيث من أجل كل x من المجال $[-1;0[\cup]0;1]$ فإن $f(x)=g(x)$

4 ــ هل الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

5 ــ أرسم منحنى الدالة g على المجال $[-1;1]$

الحـــل ــ 15

1 ــ $x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^4\geq 0 \ \ldots\ldots (1) \\ x\neq 0 \end{cases}$

المتراجحة (1) تكافئ $(1+x^2)(1-x^2)\geq 0$

تكافئ $1-x^2\geq 0$ لأن $1+x^2>0$

تكافئ $-1\leq x\leq 1$

نتيجة : f معرفة على المجال $[-1;0[\cup]0;1]$ (لأن $x\neq 0$)

2 ــ

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-x^4}}{x}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{1-x^4}-x}{x}\times\frac{1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x-\sqrt{1-x^4}}{x(x-1)}\times\frac{1-x+\sqrt{1-x^4}}{1-x+\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - 2x + x^2 - 1 + x^4}{x(x-1)(1 - x + \sqrt{4 - x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x(x-1)(1 - x + \sqrt{1 - x^4})}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)(x^2 + x + 2)}{x(x-1)(1 - x + \sqrt{1 - x^4})}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x + 2}{1 - x + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{1 + 1 + 2}{y}$$

$$= +\infty$$

$x^4 + x^2 - 2x$	$x^2 - x$
$x^4 - x^3$	$x^2 + x + 2$
$x^3 + x^2 - 2x$	
$x^3 - x^2$	
$2x^2 - 2x$	
$2x^2 - 2x$	
0	

التفسير الهندسي : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس شاقولي على يسار النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ و معادلته $\begin{cases} x = 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

3 ــ لنحسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ كما يلي :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x} \times \frac{1 + \sqrt{1 - x^4}}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 + x^4}{x\left(1 + \sqrt{1 - x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x\left(1 + \sqrt{1 - x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \frac{0}{1 + \sqrt{1}}$$

$$= 0$$

إذن يمكن تعريف الدالة g كمايلي : $g(x) = \begin{cases} f(x) : x \in [-1 ; 0[\cup]0 ; 1] \\ 0 : x = 0 \end{cases}$

إذن : $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0) = 0$

منه : g مستمرة عند 0

إذن : g مستمرة على $[-1 ; 1]$ و من أجل كل x من $[-1 ; 0[\cup]0 ; 1]$

فإن $g(x) = f(x)$ إذن : g هي الدالة المطلوبة .

4 ــ قابلية اشتقاق الدالة g عند 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x^2} \times \frac{1 + \sqrt{1 - x^4}}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 + x^4}{x^2\left(1 + \sqrt{1 - x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= 0$$

إذن : الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق $g'(0) = 0$

5 ــ تغيرات الدالة g على المجال [- 1 ; 1]

g قابلة للاشتقاق على المجال]- 1 : 1[و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ f'(x) : x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[\end{cases}$$

لنحسب إذن : f'(x) كمايلي على المجال]- 1 ; 0[U]0 ; 1[

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{1 - x^4}} \times x - (1 - \sqrt{1 - x^4})}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{2x^4}{\sqrt{1 - x^4}} - 1 + \sqrt{1 - x^4}}{x^2}$$

$$= \frac{2x^4 - \sqrt{1 - x^4} + 1 - x^4}{x^2\sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \frac{x^4 + 1 - \sqrt{1 - x^4}}{x^2\sqrt{1 - x^4}}$$

إذن : إشارة f'(x) من إشارة $x^4 + 1 - \sqrt{1 - x^4}$ كمايلي :

$$x^4 + 1 - \sqrt{1 - x^4} \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 \geq \sqrt{1 - x^4}$$

مع $x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$ $\Leftrightarrow x^8 + 2x^4 + 1 \geq 1 - x^4$

$$\Leftrightarrow x^8 + 3x^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x^4 + 3) \geq 0$$

و هذا محقق دائما .

إذن : من أجل كل x من]- 1 ; 0[U]0 ; 1[فإن $f'(x) > 0$ أي $g'(x) > 0$

منه : جدول إشارة g'(x) :

x	-1		0		1
g'(x)	‖	+	0	+	

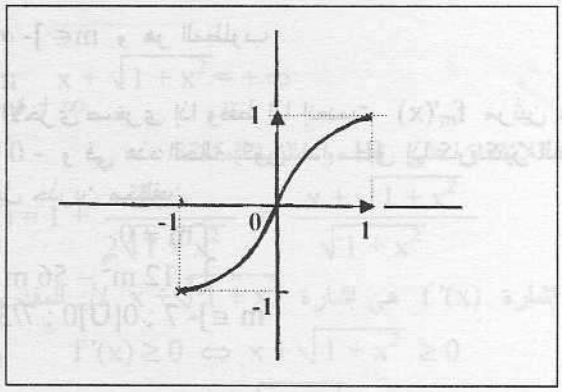
إذن : جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	-1		0		1
g'(x)	‖	+	0	+	
g(x)	-1	↗	0	↗	1

$$g(-1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 1}}{-1} = -1$$

$$g(1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 1}}{1} = 1$$

الإنشاء :



التمرين ــ 16

f_m دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـــ $f_m(x) = \dfrac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$ حيث m وسيط حقيقي غير معدوم

نسمي (C_m) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون الدالة f_m متزايدة على كل مجال جزئي من مجموعة تعريفها .

2 ــ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين محليتين أحدهما عظمى و الأخرى صغرى .

3 ــ أثبت أن كل المنحنيات (C_m) تمر من نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياها

4 ــ عين قيم m حتى يكون مماس المنحنى (C_m) عند النقطة A يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = \dfrac{-20}{9}x$

الحـــل ــ 16

1 ــ f_m دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها . و دالتها المشتقة :

$$f_m'(x) = \frac{(2x + m - 2)(x^2 - 2x - 3) - (2x - 2)(x^2 + (m-2)x - 10)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x + (m-2)x^2 - 2(m-2)x - 3(m-2) - [2x^3 + 2(m-2)x^2 - 20x - 2x^2 - 2(m-2)x + 20]}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{x^2(-4 + m - 2 - 2m + 4 + 2) + x(-6 - 2m + 4 + 20 + 2m - 4) - 3m + 6 - 20}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{-mx^2 + 14x - (3m + 14)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

إذن : إشارة $f_m'(x)$ هي إشارة $-mx^2 + 14x - (3m + 14)$ و هو كثير حدود للمتغير x

منه : تكون f_m متزايدة على كل مجال جزئي من مجموعة تعريفها إذا و فقط إذا

كان $\begin{cases} -m > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

لنحسب Δ :

$$\Delta = (14)^2 - 4(-m)(-3m - 14)$$
$$= 196 - 4(3m^2 + 14m)$$
$$= 196 - 12m^2 - 56m$$

لاحظ أن Δ هو كثير حدود للمتغير الحقيقي m إذن إشارته تتعلق بالعدد الحقيقي m كمايلي :

إشارة $196 - 56m - 12m^2$ هي إشارة $-3m^2 - 14m + 49$

$$\Delta = (14)^2 - 4(-3)(49)$$
$$= 196 + 588 = 784 = (28)^2$$

$$m_1 = \frac{14 - 28}{-6} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3}$$

$$m_2 = \frac{14 + 28}{-6} = \frac{42}{-6} = -7$$

منه جدول إشارة Δ كمايلي :

m	$-\infty$	-7		0		$7/3$	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$

.

خلاصة : يكون $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ إذا و فقط إذا كان $m \in]-\infty ; -7]$ و هو المطلوب

2 ــ يكون للدالة f قيمتين حديتين محليتين أحدهما عظمى و الأخرى صغرى إذا وفقط إذا إنعدمت $f_m'(x)$ مرتين على الأقل مغيرة إشارتها بالتناوب كمايلي $+ 0 - 0 +$ أو $- 0 + 0 -$ و في هذه الحالة يكون هذا محقق إذا كان كثير الحدود $-m x^2 + 14 x - (3 m + 14)$ للمتغير الحقيقي x يقبل جذرين مختلفين

أي $\begin{cases} -m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} m \neq 0 \\ -12 m^2 - 56 m + 196 > 0 \end{cases}$

و حسب السؤال (1) فإن $\Delta > 0$ إذا و فقط إذا كان $m \in]-7 ; 0[\cup]0 ; 7/3[$

منه : قيم m المطلوبة هي $m \in]-7 ; 0[\cup]0 ; 7/3[$

3 ــ لتكن $A(\alpha ; \beta)$ نقطة من المستوي .

تكون A مشتركة لكل المنحنيات (C_m) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي m فإن : $f_m(\alpha) = \beta$

$$\frac{\alpha^2 + (m-2)\alpha - 10}{\alpha^2 - 2\alpha - 3} = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 + (m-2)\alpha - 10 = \beta(\alpha^2 - 2\alpha - 3) \quad \text{و} \quad \alpha^2 - 2\alpha - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha m + \alpha^2 - 2\alpha - 10 - \beta(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0$$

إذن : يكون $f_m(\alpha) = \beta$ من أجل كل m من IR إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 10 - 3(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 0 \\ -10 + 3\beta = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 10/3 \end{cases}$$

نتيجة : النقطة A ذات الإحداثيات $(0 ; 10/3)$ تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m)

4 ــ يكون مماس المنحنى (C_{f_1}) عند النقطة A موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = \frac{-20}{9} x$

إذا وفقط إذا كان ميله يساوي $-20/9$ أي $f_m'(0) = -20/9$

إذن : $f_m'(0) = \frac{-20}{9} \Leftrightarrow \frac{-(3m+14)}{9} = \frac{-20}{9}$

$$\Leftrightarrow 3m + 14 = 20$$

$$\Leftrightarrow 3m = 6$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لـ m حتى يكون مماس المنحنى (C_m) عند A يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{-20}{9} x$ وهي $m = 2$

التمرين ــ 17

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ ثم أرسم منحناها (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

2 ــ أكتب العبارة $x - \sqrt{1 + x^2}$ بدلالة $f(x)$ ثم إستنتج عبارة الدالة g المعرفة على $]-\infty ; 0[$ و التي تحقق أن من أجل كل x من IR فإن $g \circ f(x) = x$

3 ــ أدرس تغيرات الدالة h المعرفة على IR^* بـ $h(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$

4 ــ تحقق أن إذا كانت $M(x ; y)$ نقطة من المنحنى الممثل للدالة h حيث $x > 0$ فإن النقطة $M'(y ; x)$ تنتمي إلى المنحنى (C) ثم إستنتج طريقة هندسية لإنشاء منحنى الدالة h على المجال $]0 ; +\infty[$

الحـل ــ 17

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{1 + x^2}) \times \frac{x - \sqrt{1 + x^2}}{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

$\lim_{x \to -\infty} x - \sqrt{1+x^2} = -\infty$ لأن $= 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{1+x^2} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x+\sqrt{1+x^2}$ لأن المقام موجب .

منه $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq -x$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x > 0$ إذن $-x < 0$

منه المتراجحة $\sqrt{1+x^2} > -x$ دائما محققة

أي : $f'(x) > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

الحالة الثانية : $x \leq 0$ إذن $-x \geq 0$

منه المتراجحة $\sqrt{1+x^2} \geq -x$ تكافئ $1+x^2 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$ و هذا دائما محقق

منه : $f'(x) > 0$ على المجال $]-\infty ; 0[$

خلاصة : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		↗	$+\infty$
	0		

لاحظ أن :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{1+x^2} - 2x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) \times \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

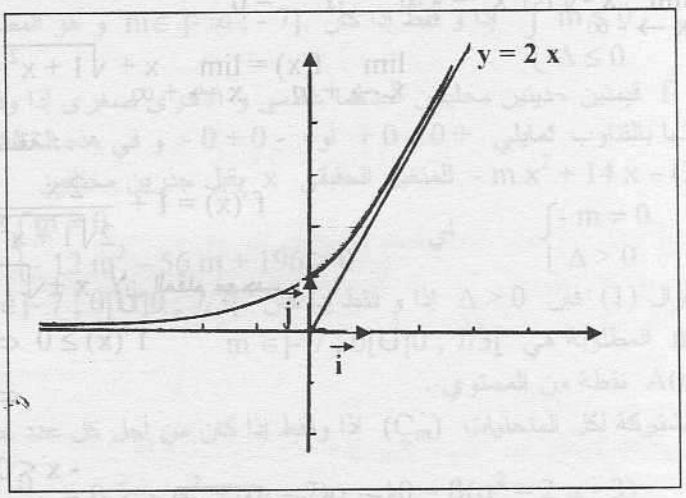
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

الإنشاء :



2 ــ لدينا من أجل كل x من IR : $(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2}) = -1$

أي : $x-\sqrt{1+x^2} = \frac{-1}{f(x)}$ و هي العلاقة (1)

من جهة أخرى لدينا من أجل كل x من IR : $(x+\sqrt{1+x^2})+(x-\sqrt{1+x^2}) = 2x$

أي : $f(x)+(x-\sqrt{1+x^2}) = 2x$

أي : $x-\sqrt{1+x^2} = 2x - f(x)$ و هي العلاقة (2)

لتكن g دالة معرفة على IR حيث $gof(x) = x$

نضع $f(x) = y$ إذن : $g(y) = x \Leftrightarrow gof(x) = x$ .....(3)

لدينا العلاقتين (1) و (2) كمايلي :

$$\begin{cases} x-\sqrt{1+x^2} = \frac{-1}{f(x)} \\ x-\sqrt{1+x^2} = 2x - f(x) \end{cases}$$ إذن : $\frac{-1}{f(x)} = 2x - f(x)$

منه : $-\frac{1}{y} = 2x - y$ لأن $y = f(x)$

أي : $y - \frac{1}{y} = 2x$

أي : $\frac{y^2-1}{y} = 2x$

أي : $x = \frac{y^2-1}{2y}$ (لأن $f(x) > 0$ أي $y > 0$)

منه العلاقة (3) تصبح : $gof(x) = x \Leftrightarrow g(y) = \frac{y^2-1}{2y}$

و بصفة خاصة : $g(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ مع $x > 0$ (لأن $y > 0$)

تحقيق : ليكن x عدد حقيقي

$$g(f(x)) = g(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$= \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2 - 1}{2(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 - 1}{2(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \frac{2x(x+\sqrt{1+x^2})}{2(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$g \circ f(x) = x$ إذن فعلا : $= x$

3 ــ تغيرات الدالة h : h معرفة على IR^*

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{2}(0 - \frac{1}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{2}(0 - \frac{1}{x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) = +\infty$$

الدالة h قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{x^2}\right]$$

إذن : من أجل كل x من IR^* : $h'(x) > 0$

منه جدول التغيرات كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	‖	+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4 ــ لتكن $M(x ; y)$ نقطة من منحنى الدالة h حيث $x > 0$

لدينا : $h(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) = y$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2x} = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy - 1 = 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x حيث $x > 0$

إذن نبحث عن حلولها كمايلي :

$\Delta = 4y^2 + 4 = 4(1 + y^2)$ إذن : المعادلة تقبل حلين كمايلي :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2y - 2\sqrt{1 + y^2}}{2} = y - \sqrt{1 + y^2} & \text{سالب إذن مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{2y + 2\sqrt{1 + y^2}}{2} = y + \sqrt{1 + y^2} & \text{موجب إذن مقبول} \end{cases}$$

نتيجة : المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا هو $x = y + \sqrt{1 + y^2}$

منه : إذا كانت النقطة $M(x ; y)$ تنتمي إلى منحنى الدالة h حيث $x > 0$

فإن $M'(y ; x)$ أي $M'(y ; y + \sqrt{1 + y^2})$ تنتمي إلى المنحنى (C) لأن : $y + \sqrt{1 + y^2} = f(y)$

منه منحنى الدالة h على المجال $]0 ; +\infty[$ هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المنصف الأول

التمرين ــ 18

f دالة عددية معرفة على IR بـ $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ احسب $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x]$ و $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x]$. فسر النتائج هندسيا

3 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

الحـــل ــ 18

1 ــ التغيرات : f معرفة على IR

لاحظ إشارة $4x^2 - 1$ كمايلي :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

منه

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2 - 1} & : x \in]-\infty ; -1/2] \cup [1/2 ; +\infty[\\ x + \sqrt{1 - 4x^2} & : x \in]-1/2 ; 1/2[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

لأن $\sqrt{x^2} = -x$ لما $x < 0$

$$= \lim_{x \to -\infty} x - x\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$= \lim_{x \to -\infty} x(1 - \sqrt{4})$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $IR - \{-1/2 ; 1/2\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2 - 1}} & : x \in]-\infty ; -1/2[\cup]1/2 ; +\infty[\\ 1 - \dfrac{8x}{2\sqrt{1 - 4x^2}} & : x \in]-1/2 ; 1/2[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} & : x \in]-\infty ; -1/2[\cup]1/2 ; +\infty[\\ 1 - \dfrac{4x}{\sqrt{1 - 4x^2}} & : x \in]-1/2 ; 1/2[\end{cases}$$

إشارة f'(x) :

أولا على المجال $]-\infty ; -1/2[\cup]1/2 ; +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]1/2 ; +\infty[$ أي $x \geq 0$ منه $-4x \leq 0$

أي المتراجحة $1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$ دائما محققة

أي : $f'(x) > 0$ لما $x \in]1/2 ; +\infty[$

الحالة الثانية : $x \in]-\infty ; -1/2[$ أي $x \leq 0$ منه $-4x \geq 0$

أي المتراجحة $1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$ تكافئ $1 \geq \frac{16x^2}{4x^2 - 1}$

تكافئ $4x^2 - 1 \geq 16x^2$

تكافئ $-12x^2 - 1 \geq 0$

تكافئ $-(12x^2 + 1) \geq 0$ و هذا مستحيل

منه : $f'(x) < 0$ لما $x \in]-\infty ; -1/2[$

خلاصة :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	

ثانيا : على المجال $]-1/2 ; 1/2[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]-1/2 ; 0]$ أي $x \leq 0$ منه $4x \leq 0$

إذن المتراجحة $1 > \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ دائما محققة

أي : $f'(x) > 0$

الحالة الثانية : $x \in]0 ; 1/2[$ أي $x > 0$ منه $4x > 0$

أي المتراجحة $1 \geq \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ تكافئ $1 \geq \frac{16x^2}{1-4x^2}$

تكافئ $1 - 4x^2 \geq 16x^2$

تكافئ $1 - 20x^2 \geq 0$

تكافئ $x \in [-\frac{1}{\sqrt{20}} ; \frac{1}{\sqrt{20}}]$

أي $x \in]0 ; \frac{1}{\sqrt{20}}]$ لأن في هذه الحالة $x \in]0 ; 1/2[$ فقط

خلاصة :

x	$-1/2$		$1/\sqrt{20}$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

نتيجة : إشارة المشتقة $f'(x)$ على IR كمايلي :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/\sqrt{20}$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/\sqrt{20}$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-1/2$	↗	$\sqrt{5}/2$	↘	$1/2$	↗	$+\infty$

$$f(-1/2) = -1/2 + \sqrt{0} = -1/2$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{20}}) = \frac{1}{\sqrt{20}} + \sqrt{1 - \frac{4}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{16}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2 ـ

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 1}) \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$= 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - 2x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - 1} - 2x) \times \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

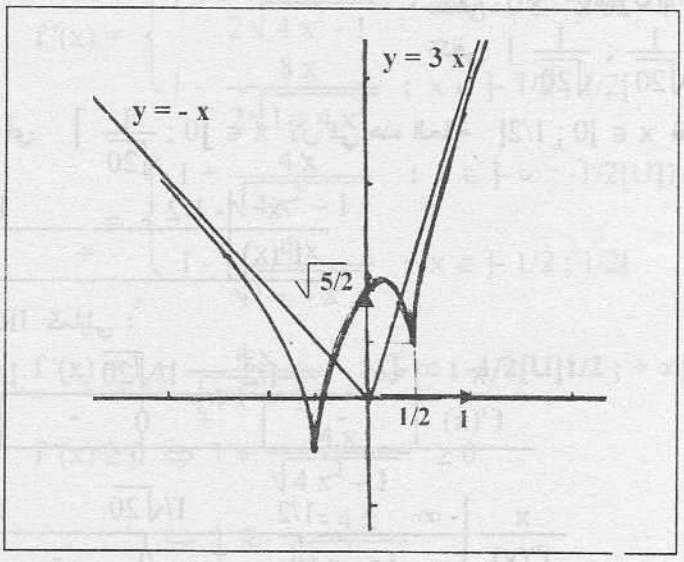
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$= 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 3x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

الإنشاء :



التمرين ــ 19

g دالة عددية معرفة على IR بـــ $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g .

2 ــ برهن أن من أجل كل α من المجال $]-1 ; 0[$ فإن المعادلة $g(x) = \alpha$ تقبل حلا وحيدا في IR .

لتكن f دالة معرفة على IR بـــ : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$

و ليكن (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f

4 ــ أثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

5 ــ أدرس الوضعية النسبية لـــ (d) و المنحنى (C)

6 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C) .

الحـل ـ 19

1 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad \text{لأن } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} - \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad \text{لأن } x < 0 \text{ إذن } |x| = -x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$= -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$= 0$$

g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

منه : $g'(x) > 0$ من أجل كل x من IR :

إذن : جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	-1	↗	0

2 ـ من جدول تغيرات الدالة g لدينا النتائج التالية :

g مستمرة على $]-\infty ; +\infty[$ و g تأخذ قيم في المجال $]-1 ; 0[$

g متزايدة تماما على $]-\infty ; +\infty[$

إذن : من أجل كل α من $]-1 ; 0[$ فإن المعادلة $g(x) = \alpha$ تقبل حلا وحيدا على IR

3 ـ تغيرات الدالة f :

f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+1} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ لأن $= 1$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= g(x)$$

و لكن حسب السؤال (1) فإن من أجل كل x من IR فإن $-1 < g(x) < 0$ أي $g(x) < 0$ منه $f'(x) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1

4 ــ

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} - (-x+1)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= 0$$

إذن : المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

5 ــ الوضعية النسبية لـــ (C) و (d) :

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

إذن : إشارة $f(x) - (-x+1)$ هي إشارة $x + \sqrt{x^2+1}$ كمايلي :

$$x + \sqrt{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \geq -x$$

الحالة (1) $x \geq 0$ أي $-x \leq 0$

منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ دائما محققة .

أي : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$

الحالة (2) $x < 0$ أي $-x > 0$

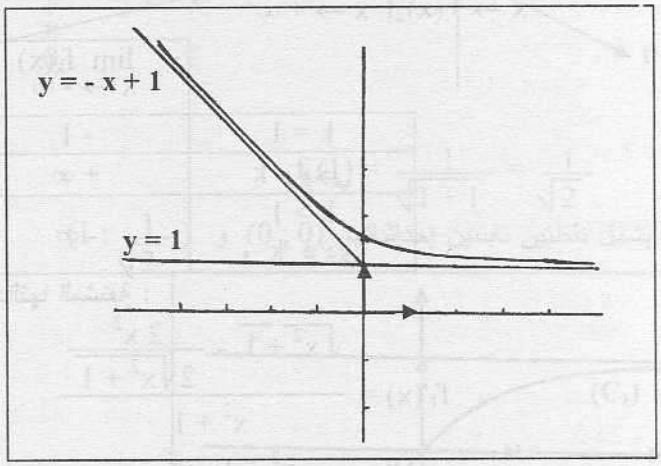
منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ تكافئ $x^2 + 1 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$

منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ دائما محققة .

خلاصة : من أجل كل x من IR فإن $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ أي المنحنى (C) دائما فوق المستقيم (d)

6 ــ الإنشاء :



$f(0) = 3/2$

التمرين ــ 20

f_k دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على IR بـ $f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي (C_k) المنحنى الممثل للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أدرس حسب قيم k $(k \geq 1)$ تغيرات الدالة f_k .

2 ــ أثبت أن كل المنحنيات (C_k) الممثلة للدالة f_k في مستوي منسوب إلى معلم تمر بنقطتين ثابتتين يطلب إحداثياتها من أجل $k > 1$

3 ــ أنشئ كل من (C_1) و (C_2) و (C_3)

الحـــل ــ 20

1 ــ تغيرات الدالة f_k :

f_k معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^k}{|x|\sqrt{1 + 1/x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^k}{-x}$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $|x| = -x$ في جوار $-\infty$

إذن نميز الحالات التالية :

أولا : $k = 1$ إذن $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x} = -1$

ثانيا : k زوجي إذن $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} -(x)^{k-1} = +\infty$ لأن $(k-1)$ فردي

ثالثا : k فردي إذن $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} -(x)^{k-1} = -\infty$ لأن $(k-1)$ زوجي $\Big\}$ $k > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{x\sqrt{1 + 1/x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{x}$$

إذن : نميز الحالات التالية :

أولا : $k = 1$ إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x/x = 1$

ثانيا : $k > 1$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x)^{k-1} = +\infty$

خلاصة :

	$\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)$
$k = 1$	-1	1
k زوجي	$+\infty$	$+\infty$
$k > 1$ و k فردي	$-\infty$	$+\infty$

f_k قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

أولا : $k = 1$

$$f_1'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

إذن : $f_1'(x) > 0$ من أجل كل x من IR .

منه جدول التغيرات من أجل $k = 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	
$f_1(x)$	-1	↗	1

ثانيا : $k > 1$

$$f_k'(x) = \frac{k x^{k-1}\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^{k+1}}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{k x^{k-1}(x^2+1) - x^{k+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{k x^{k+1} + k x^{k-1} - x^{k+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^{k-1}[(k-1)x^2 + k]}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

إذن : إشارة $f_k'(x)$ هي إشارة x^{k-1} لأن $\begin{cases} k > 1 \text{ من أجل } (k-1)x^2 + k > 0 \\ \text{و} \\ (x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 0 \end{cases}$

إذن : نميز حالتين كمايلي :

الحالة الأولى : k زوجي أي $(k-1)$ فردي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{k-1}		$-$	0	$+$	

الحالة الثانية : $\left.\begin{matrix} k \text{ فردي أي } (k-1) \text{ زوجي} \\ k > 1 \end{matrix}\right\}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{k-1}		+	0	+	

منه جدول التغيرات التالي :

k زوجي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		-	0	+	
$f_k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

k فردي $(k > 1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		+	0	+	
$f_k(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

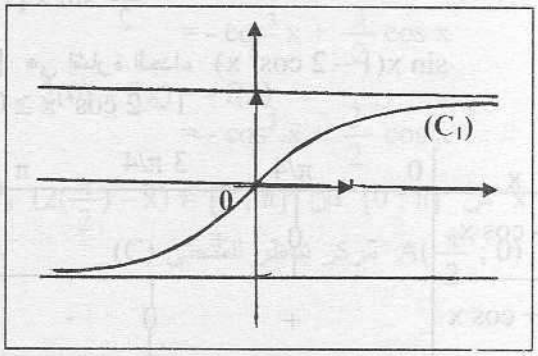
2 ــ ليكن $k > 1$

لدينا : $f_k(0) = 0$ و $f_k(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

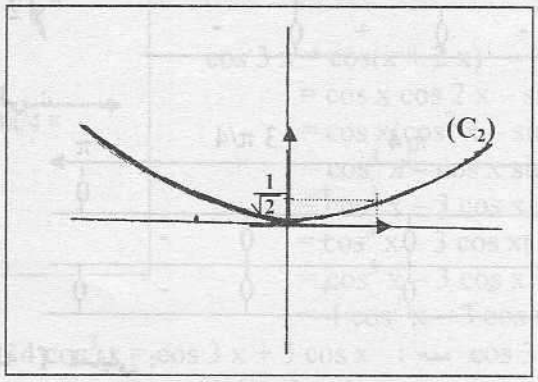
إذن : المنحنى (C_k) يشمل نقطتين ثابتتين إحداثياتها $(0\ ;\ 0)$ و $(1\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}})$

3 ــ الإنشاء :

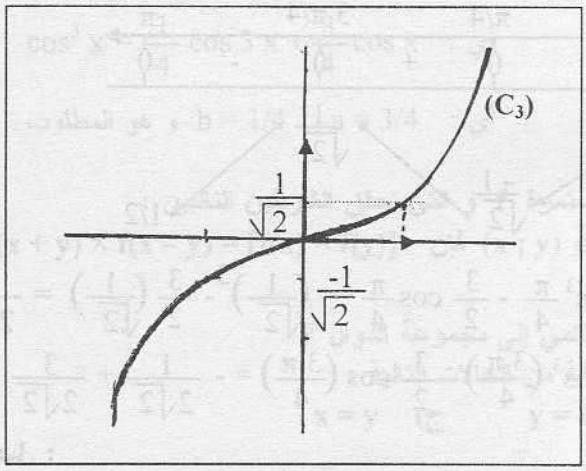
أولا : (C_1) :



ثانيا : (C_2) k زوجي



ثالثا : (C_3) k فردي :



التمرين ــ 21

f دالة معرفة على المجال $[0\ ;\ \pi]$ بـــ $f(x) = \cos^3 x - \frac{3}{2}\cos x$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0\ ;\ \pi]$

2 ــ عين نقطة تقاطع المنحنى (C) الممثل للدالة f مع حامل محور الفواصل في مستوي منسوب إلى معلم متعامد . و لتكن A هذه النقطة .

3 ــ أثبت أن A هي مركز تناظر للمنحنى (C)

4 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

5 ــ أكتب العبارة $\cos^3 x$ من الشكل $a \cos x + b \cos 3x$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

الحـــل ــ 21

1 ــ التغيرات : f معرفة على $[0 ; \pi]$

$$f(0) = \cos^3 0 - \frac{3}{2} \cos 0 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = \cos^3 \pi - \frac{3}{2} \cos \pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

f قابلة للاشتقاق على $[0 ; \pi]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -3 \sin x \cos^2 x + \frac{3}{2} \sin x$$

$$= \frac{3}{2} \sin x [1 - 2 \cos^2 x]$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على $[0 ; \pi]$ هي إشارة الجداء $\sin x(1 - 2 \cos^2 x)$

لدينا : $1 - 2 \cos^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2 \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 1/2 \geq \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\right) \geq 0$

x	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
$\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x$		-	0	+			
$\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x$		+			0	-	
الجداء		-	0	+	0	-	

منه جدول الإشارة التالي :

x	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
$\sin x$	0	+		+		+	0
$1 - 2\cos^2 x$		-	0	+	0	-	
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	$-1/2$	↘	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	$1/2$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3 \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^3 \left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} \cos \left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2 ــ التقاطع مع حامل محور الفواصل :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{3}{2} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos^2 x - \frac{3}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{أو} \\ \cos^2 x = \frac{3}{2} \quad \text{مستحيل} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{لأن} \quad 0 \le x \le \pi$$

نتيجة : المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A إحداثياتها $A(\pi/2 ; 0)$

3 ــ ليكن $0 \le x \le \pi$ إذن : $-\pi \le -x \le 0$

منه : $0 \le \pi - x \le \pi$

أي : $0 \le 2(\frac{\pi}{2}) - x \le \pi$

و لدينا : $f(\pi - x) = \cos^3(\pi - x) - \frac{3}{2}\cos(\pi - x)$

$$= (-\cos x)^3 - \frac{3}{2}(-\cos x)$$

$$= -\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos x$$

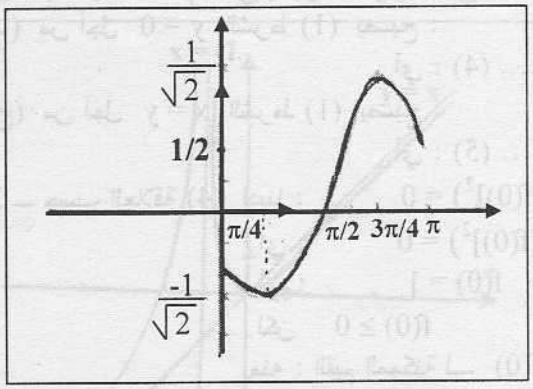
من جهة أخرى : $2(0) - f(x) = -f(x)$

$$= -\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos x$$

خلاصة : من أجل كل x من $[0 ; \pi]$ فإن $(2(\frac{\pi}{2}) - x) \in [0 ; \pi]$ و $f(2(\frac{\pi}{2}) - x) = 2(0) - f(x)$

إذن : النقطة $A(\frac{\pi}{2} ; 0)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

4 ــ الإنشاء :



5 ــ ليكن $x \in [0 ; \pi]$

$$\cos 3x = \cos(x + 2x)$$
$$= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$
$$= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x(2 \sin x \cos x)$$
$$= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x$$
$$= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$
$$= \cos^3 x - 3 \cos x(1 - \cos^2 x)$$
$$= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x$$
$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

نتيجة : $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ منه : $4 \cos^3 x = \cos 3x + 3 \cos x$

أي : $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

أي : $a = 3/4$ و $b = 1/4$ و هو المطلوب

التمرين ــ 22

لتكن F مجموعة الدوال العددية المستمرة f و التي تحقق الشرطين التاليين :

(1) من أجل كل $(x ; y) \in IR^2$ فإن $f(x + y) \times f(x - y) = [f(x) \times f(y)]^2$

(2) $f(0) \ge 0$

1 ــ تحقق أن الدالة $x \longmapsto 2^{-x^2}$ تنتمي إلى مجموعة الدوال F

2 ــ عبر عن الشرط (1) في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $x = 0$ ب) $y = 0$ ج) $x = y$

3 ــ إستنتج القيم الممكنة لـ $f(0)$

4 ــ أثبت أن $f(0) = 0$ إذا و فقط إذا كانت f هي الدالة $x \longmapsto 0$.

لنفرض أن يوجد عدد حقيقي غير معدوم a حيث $f(a) = 0$

نعرف المتتالية العددية $(u_n)_{n \in IN}$ بـ $u_n = \frac{a}{2^n}$

5 ــ أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة .

6 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $f(u_n) = 0$

7 ــ إستنتج أن $f(0) = 0$

الحـــل ــ 22

1 ــ نضع $f(x) = 2^{-x^2}$

لدينا $f(0) = 2^0 = 1$

إذن : $f(0) \geq 0$ منه الشرط (2) محقق .

و من أجل كل x من IR ، من أجل كل y من IR لدينا :

$$f(x+y) \times f(x-y) = 2^{-(x+y)^2} \times 2^{-(x-y)^2}$$
$$= 2^{-x^2 - 2xy - y^2} \times 2^{-x^2 + 2xy - y^2}$$
$$= 2^{-2x^2 - 2y^2}$$

$$[f(x) \times f(y)]^2 = [2^{-x^2} \times 2^{-y^2}]^2$$
$$= [2^{-x^2 - y^2}]^2$$
$$= 2^{-2x^2 - 2y^2}$$

نتيجة : $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$ أي الشرط (1) محقق .

خلاصة : f تحقق الشرطين (1) و (2) معا و f مستمرة على R إذن f تنتمي إلى مجموعة الدوال F .

2 ــ لدينا : $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$ من أجل كل $(x ; y) \in IR^2$

أ) من أجل $x = 0$ الشرط (1) يصبح : $f(y) \times f(-y) = [f(0) \times f(y)]^2$

أي : $f(y) \times f(-y) = [f(0)]^2 \times [f(y)]^2 \ldots\ldots (3)$

ب) من أجل $y = 0$ الشرط (1) يصبح : $f(x) \times f(x) = [f(0) \times f(x)]^2$

أي : $[f(x)]^2 = [f(0)]^2 \times [f(x)]^2 \ldots . (4)$

ج) من أجل $x = y$ الشرط (1) يصبح : $f(2x) \times f(0) = [f(x) \times f(x)]^2$

أي : $f(2x) \times f(0) = [f(x)]^4 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

3 ــ حسب العلاقة (4) لدينا : $[f(x)]^2(1 - [f(0)]^2) = 0$

أي : $(1 - [f(0)]^2) = 0$ أو $f(x) = 0$

أي : $f(0) = 1$ أو $f(0) = -1$ أو $[f(0) = 0$ و f معدومة أي $f(x) = 0]$

لكن $f(0) \geq 0$

منه : القيم الممكنة لـــ $f(0)$ هي 0 أو 1 .

4 ــ حسب العلاقة (4) يكون $f(0) = 0$ إذا و فقط إذا كان $[f(x)]^2 = 0$ من أجل كل $x \in IR$

أي $f(x) = 0$ من أجل كل $x \in IR$

منه : يكون $f(0) = 0$ إذا و فقط إذا كانت f هي الدالة $x \longmapsto 0$

5 ــ $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a}{2^n}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x}$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} 2^n = +\infty$

$$= 0$$

إذن : المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

6 ــ البرهان بالتراجع أن من أجل كل n من N : $f(u_n) = 0$: (في حالة f ليست الدالة $x \longmapsto 0$)

من أجل $n = 0$:

$$f(u_0) = f(\frac{a}{2^0}) = f(a) = 0$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن $f(u_n) = 0$ من أجل $n > 0$

هل $f(u_{n+1}) = 0$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $f(u_n) = 0$

أي $f(\frac{a}{2^n}) = 0$

أي $f(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}) = 0$

أي $f(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}) \times f(0) = 0 \times f(0)$

أي $\left[f(\frac{a}{2^{n+1}})\right]^4 = 0$ حسب العلاقة (5) من السؤال 2 (نضع $x = \frac{a}{2^{n+1}}$)

أي $f(\frac{a}{2^{n+1}}) = 0$

أي $f(u_{n+1}) = 0$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

في حالة f هي الدالة $x \longmapsto 0$ فإن $f(u_n) = 0$ محقق من أجل كل n من IN

نتيجة : من أجل كل $n \in IN$: $f(u_n) = 0$

7 ــ لدينا $f(u_n) = 0$ من أجل كل n من IN

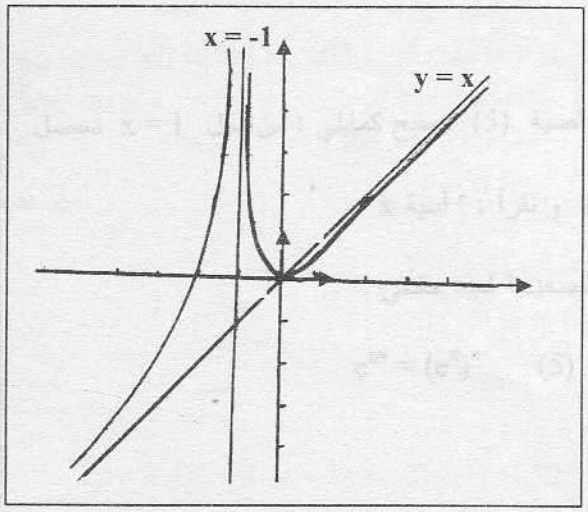
لكن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

إذن : $f[\lim\limits_{n \to +\infty} u_n] = 0$ لأن f مستمرة على IR

أي : $f(0) = 0$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 23

f دالة معرفة على $IR - \{-1\}$ بـــ $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .



g دالة معرفة على IR بـــ $g(x) = |x|$

من أجل كل x من IR نعرف الدالة ϕ كمايلي : $\phi(x) = fog(x)$

1 ــ برهن أن الدالة ϕ زوجية

2 ــ تحقق أن : من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$

فإن $\phi(x) = f(x)$

3 ــ إستنتج طريقة بسيطة لرسم منحنى الدالة ϕ على IR دون دراسة تغيرات الدالة ϕ . ثم أرسم المنحنى (γ) الممثل للدالة ϕ .

الحـــل ــ 23

1 ــ ليكن $x \in IR$ إذن : $fog(x) = f(g(x)) = f(|x|)$

منه : $\phi(x) = f(|x|)$

$= \frac{|x|^3 + 2|x|^2}{(|x|+1)^2}$

إذن : ϕ معرفة على IR

و لدينا : من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $\phi(-x) = \frac{|-x|^3 + 2|-x|^2}{(|-x|+1)^2}$

$= \frac{|x|^3 + 2|x|^2}{(|x|+1)^2}$

$= \phi(x)$

إذن : الدالة ϕ زوجية .

2 ــ ليكن $x \in [0 ; +\infty[$ إذن : $|x| = x$

منه : $\phi(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$

أي : $\phi(x) = f(x)$ و هو المطلوب

3 ــ ϕ دالة زوجية إذن يكفي رسم منحناها على المجال $]0 ; +\infty[$ ثم إستنتاج الجزء الأخر على المجال $]-\infty ; 0[$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

و لكن لما $x \in]0 ; +\infty[$ لدينا $\phi(x) = f(x)$ أي منحنى الدالة ϕ على المجال $]0 ; +\infty[$ ينطبق على جزء المنحنى (C) على المجال $]0 ; +\infty[$ إذن : نرسم هذا الجزء ثم نظيره بالنسبة إلى محور التراتيب كمايلي :